



HAL
open science

Désordre du front d'une fissure semi-infinie d'interface

Nadjime Pindra, V. Lazarus, Jean-Baptiste Leblond

► **To cite this version:**

Nadjime Pindra, V. Lazarus, Jean-Baptiste Leblond. Désordre du front d'une fissure semi-infinie d'interface. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03362090

HAL Id: hal-03362090

<https://hal.science/hal-03362090>

Submitted on 1 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Désordre du front d'une fissure semi-infinie d'interface

N.Pindra, V.Lazarus & J.B. Leblond

Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, UMR 7190 (Institut Jean Le Rond d'Alembert), Boite courrier 162, 4
Place Jussieu, Paris, F-75005 France

pindra@lmm.jussieu.fr, vlazarus@ccr.jussieu, leblond@lmm.jussieu.fr

Résumé :

L'objectif de l'article est l'étude statistique, dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile, de la déformation coplanaire du front d'une fissure plane semi-infinie se propageant entre deux matériaux élastiques isotropes de propriétés de rupture aléatoire. Différents types de chargements cycliques sont envisagés. Les calculs sont basés sur les travaux de Lazarus et Leblond (1998) qui ont étendu la théorie tridimensionnelle des fonctions de poids de Bueckner (1987) et Rice (1985) au cas d'une fissure d'interface et donné, au premier ordre, la variation du taux de restitution d'énergie résultant d'une petite perturbation du front. Cela permet de quantifier l'évolution du désordre en calculant différentes grandeurs mathématiques liées à la fonction d'autocorrélation de la déviation du front par rapport à un front droit de référence. Les résultats sont comparés au cas d'une fissure dans un milieu homogène et la dépendance par rapport au type de chargement est soulignée.

Abstract :

The aim of this paper is to study, within the framework of brittle fracture mechanics, the coplanar deformation of a semi-infinite plane crack, lying between two different isotropic elastic media, supposing random interface rupture properties. Various types of cyclic loadings are considered. Calculations are based on the paper of Lazarus and Leblond (1998) which extended the three-dimensional weight functions theory of Bueckner (1987) and Rice (1985) to the case of an interface crack and gave, to the first order, the variation of the energy restitution rate due to a small inplane disturbance of the front. It allows to quantify the evolution of the disorder of the initial straight crack front by calculating various mathematical quantities related to the function of autocorrelation of the perturbation. The results are compared with the case of a crack in an homogeneous medium and the dependance toward the type of loading is emphasized.

Mots-clefs :

rupture fragile ; déformation du front d'une fissure d'interface ; milieu désordonné

1 Introduction

Considérons une fissure d'interface plane semi-infinie à front droit située entre deux matériaux élastique isotropes (cf. fig. 1). Les deux matériaux, de coefficient d'élasticité ν_1, μ_1 et ν_2, μ_2 , occupent respectivement les demi-plans $y > 0$ et $y < 0$ et sont soudés le long du demi-plan $y = 0, x > 0$. La fissure est située dans le demi-plan $y = 0, x < 0$. Le chargement est supposé invariant par translation le long de z et tel que les facteurs d'intensité de contraintes sont de la forme :

$$\begin{aligned} K(a) &= a^{-i\epsilon + \alpha} K^o \\ K_{III}(a) &= a^\alpha K_{III}^o \end{aligned} \quad (1)$$

avec $K(a) = K_I(a) + iK_{II}(a)$, $\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_1 + (3-4\nu_1)\mu_2}{\mu_2 + (3-4\nu_2)\mu_1}$ une constante reliée à la différence de nature entre les deux matériaux, a la distance du front à une ligne fixée, K^o, K_{III}^o indépendant de a .

Le coefficient α caractérise la stabilité ou l'instabilité de la propagation du front sous chargement monotone :

- Si $\alpha < 0$; elle est stable. C'est le cas par exemple d'un chargement linéique sur les lèvres de la fissure (fig. 1(a)) pour lequel $\alpha = -\frac{1}{2}$.
- Si $\alpha > 0$; elle est instable. C'est le cas par exemple de contraintes uniformes sur les lèvres de la fissure (fig. 1(b)) pour lesquelles $\alpha = \frac{1}{2}$.

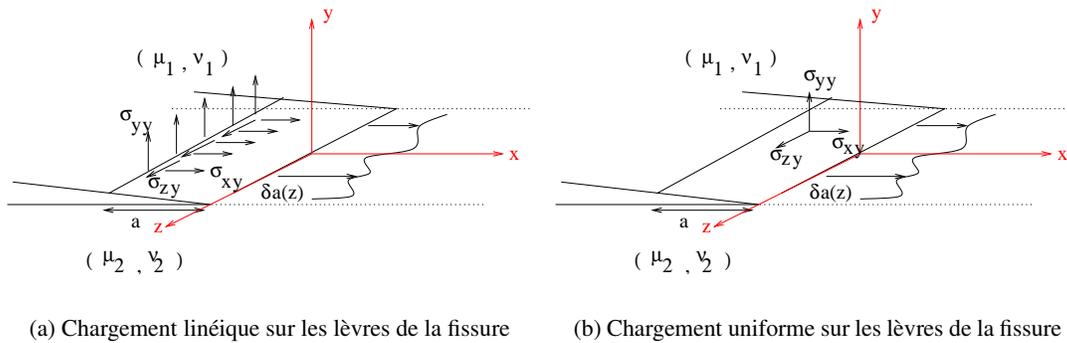


FIG. 1 – Fissure d'interface semi-infinie entre deux matériaux élastiques isotropes

Perturbons légèrement le front de la fissure, à l'intérieur du plan de fissure par la quantité δa qui représente la distance entre le front de référence et sa nouvelle position (fig. 1). Lazarus and Leblond (1998a) ont donné les variations de ces facteurs d'intensité de contrainte au premier ordre :

$$\begin{aligned} \delta K(z, t) = & \frac{dK}{da} \delta a(z, t) + \frac{1 + 2i\epsilon}{8 \cosh(\pi\epsilon)} \left\{ \gamma_+ VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{|z' - z|^{2+2i\epsilon}} dz' \right. \\ & + \gamma_- VP \int_{-\infty}^{+\infty} K \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{(z' - z)^2} dz' \\ & \left. + \frac{2}{1 - \nu} \gamma_{III} PF \int_{-\infty}^{+\infty} K_{III} \operatorname{sgn}(z' - z) \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{|z' - z|^{3+i\epsilon}} dz' \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta K_{III}(z, t) = & \frac{dK_{III}}{da} \delta a(z, t) + \frac{\gamma}{4} VP \int_{-\infty}^{+\infty} K_{III} \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{(z' - z)^2} dz' \\ & + \frac{(1 - \nu)}{4} \operatorname{Re} \left[\gamma_z PF \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{|z' - z|^{3+i\epsilon}} dz' \right] \quad (3) \end{aligned}$$

Les constantes γ ; γ_+ ; γ_- ; γ_{III} ; γ_z sont données numériquement dans Lazarus and Leblond (1998b) et analytiquement dans Bercial-Velez et al. (2005) ou Piccolroaz et al. (2007) et dépendent uniquement des caractéristiques élastiques des matériaux.

2 Evolution temporelle des composantes de Fourier de la perturbation

Notons $G(z, t)$ le taux de restitution d'énergie au point z à l'instant t , on a :

$$G(z, t) = \Lambda |K(z, t)|^2 + \Lambda' K_{III}^2(z, t) \quad (4)$$

où $\Lambda \equiv \frac{(1-\mu_1)/\mu_1 + (1-\nu_2)/\mu_2}{4 \cosh^2(\pi\epsilon)}$ et $\Lambda' \equiv \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)$

La loi de propagation du front utilisée est celle de Paris :

$$\frac{\partial a(z, t)}{\partial t} = c(1 + \delta c(z, x)) [G(z, t)]^{\frac{N}{2}} \quad |\delta c| \ll 1 \quad (5)$$

La petite fluctuation δc le long de l'interface entraîne une fluctuation δa de l'avancée du front qui peut donc être décomposée en :

$$a(z, t) = a(t) + \delta a(z, t), \quad |\delta a(z, t)| \ll a(t) \quad (6)$$

où $a(t)$ est la valeur moyenne de la position du front.

Introduisons les transformées de Fourier des fluctuations de la constante de Paris et de la perturbation :

$$\widehat{\delta c}(k, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta c(z, x) e^{ikz} dz, \quad \widehat{\delta a}(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta a(z, t) e^{-ikz} dk \quad (7)$$

En insérant l'eqn (7)₂ dans les eqns (2) et (3); en décomposant $G(z, t) = G(a) + \delta G(z, t)$ et en reprenant sa transformée de Fourier $\widehat{\delta G}(k, a)$, on obtient :

$$\frac{\widehat{\delta G}(k, a)}{G(a)} = \frac{N}{a} [\alpha - f(ka)] \widehat{\delta a}(k, a) \quad (8)$$

avec

$$f(ka) = A + \text{Re}(B|ka|^{2i\epsilon})$$

où

$$A = \frac{\gamma \Lambda'}{4G_o(a)} K_{III}^{o^2} + \frac{(1 + 2i\epsilon)}{8G_o(a) \cosh(\pi\epsilon)} \gamma_{-\Lambda} |ka| \pi |K^o|^2$$

et

$$B = \frac{\Lambda \tanh(\pi\epsilon)}{8G_o(a)\epsilon} \left[\gamma_+ \overline{K}^{o^2} \Gamma(1 - 2i\epsilon) \right] \quad G_o(a) = a^{-2\alpha} G(a)$$

En introduisant ensuite l'eqn (8) dans la transformée de Fourier de l'eqn (5), en utilisant l'eqn 7, en identifiant les différents termes liés à $a(t)$ et $\widehat{\delta a}(k, t)$ et en éliminant t dans ces équations, $\widehat{\delta a}$ est alors considéré comme une fonction de a au lieu de t , on aboutit à une équation différentielle sur $\widehat{\delta a}$:

$$\frac{\partial \widehat{\delta a}(z, t)}{\partial a} = \frac{N}{a} [\alpha - f(ka)] \widehat{\delta a}(k, a) + \widehat{\delta c}(k, a) \quad (9)$$

Après résolution de l'eqn (9), nous obtenons :

$$\widehat{\delta a}(k, a) = \int_{a_o}^a \left[\frac{\Psi(ka)}{\Psi(ka')} \right]^N \left(\frac{a}{a'} \right)^{\alpha N} \widehat{\delta c}(k, a') da' \quad (10)$$

avec

$$\Psi(p) = \exp \left\{ \int_0^p \frac{F(p')}{p'} dp' \right\} = \exp \left[-A|p| - \text{Re} \left(\frac{B|p|^{1+2i\epsilon}}{1 + 2i\epsilon} \right) \right] \quad (11)$$

3 Etude du désordre du front de fissure

L'étude statistique proposée est analogue à celle utilisée par Favier *et al.* (2006) pour étudier l'évolution du désordre du front d'une fissure en forme de fente infinie dans un milieu élastique isotrope homogène. Nous considérons un grand nombre de réalisation possible de l'hétérogénéité δc de la constante de Paris et de la géométrie δa du front de fissure. Nous supposons également que la fonction $\delta c(z, x)$ est statistiquement invariante dans les directions z et x ainsi que la fonction $\delta a(z, t)$ dans la direction z . Ainsi les fonctions d'autocorrélations dépendent seulement de la position relative des points considérés :

$$\begin{aligned} E[\delta c(z_1, x_1)\delta c(z_2, x_2)] &= C(z_2 - z_1, x_2 - x_1) \\ E[\delta a(z_1, t)\delta a(z_2, t)] &= A(z_2 - z_1, t) \end{aligned} \quad (12)$$

où $E(X)$ désigne l'espérance mathématique. À partir de la formule (10) donnant $\widehat{\delta a}$ en fonction de a , on peut facilement obtenir l'expression suivante de la transformée de Fourier \widehat{A} de la fonction d'autocorrélation A :

$$\widehat{A}(k, t) = \int_{a_0}^a \int_{a_0}^a \frac{[\Psi(ka)]^{2N}}{[\Psi(ka_1)\Psi(ka_2)]^N} \frac{a^N}{(a_1 a_2)^{\frac{N}{2}}} \widehat{C}(k, a_2 - a_1) da_1 da_2 \quad (13)$$

où \widehat{C} indique la transformée de Fourier selon z de la fonction C .

À partir de cette expression, le comportement asymptotique de différentes quantités statistiques peut être déterminé : le problème se réduit à l'étude non triviale de certaines intégrales. Dans la suite, nous étudierons deux grandeurs significatives pour l'étude du désordre : la variance σ de la fluctuation et sa distance de corrélation L .

3.1 Etude du comportement de la variance de la fluctuation

La quantité considérée ici est :

$$E[(\delta a(z_1, a) - \delta a(z_2, a))^2] \equiv \sigma$$

qui caractérise la déviation du front de la fissure par rapport à un front droit. Le comportement asymptotique de σ pour des grandes valeurs de a dépend de la valeur de α :

– si $\alpha > \frac{3}{2N}$:

$$\sigma = \frac{\widetilde{C}(0, 0)}{2\pi(2N\alpha - 1)} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{2N\alpha - 3} \left(\frac{z_2 - z_1}{a_0}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [\Psi(p)]^{2N} p^2 dp$$

dans ce cas σ diverge pour $a \rightarrow +\infty$, d'autant plus que α est grand

– si $\alpha < \frac{3}{2N}$:

$$\sigma = \frac{\widetilde{C}(0, 0)}{2\pi N} \left(\frac{z_2 - z_1}{b}\right)^2 F_1[(a/b)^{2i\epsilon}]$$

où b est la distance de corrélation de la constante de Paris connectée au comportement asymptotique de $\widehat{c}(k, 0)$ pour $k \rightarrow +\infty$ et F_1 une fonction dépendante de a et b , entièrement déterminée par Ψ .

Donc, dans le cas d'un matériau élastique homogène ($\epsilon = 0$), σ tend vers une constante, et oscille indéfiniment entre deux valeurs positives pour une fissure d'interface ($\epsilon \neq 0$).

Dans tous les cas, la déviation du front de la fissure par rapport à un front droit c'est à dire le désordre, est d'autant plus grande que α est grand, c'est à dire que le chargement est instable. De plus l'influence de l'hétérogénéité ne change pas le comportement global de σ , mais lui rajoute un caractère oscillant.

3.2 Etude du comportement de la distance de corrélation

Par définition cette distance est donnée par :

$$L \equiv \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{A}(k, a) dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{A}(k, a) k^2 dk} \right)^{1/2}$$

Le comportement asymptotique de L pour des grandes valeurs de a dépend aussi de α :

– si $\alpha > \frac{3}{2N}$:

$$L = a \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [\Psi(p)]^{2N} dp}{\int_{-\infty}^{+\infty} [\Psi(p)]^{2N} p^2 dp}}$$

– si $\frac{1}{2N} < \alpha < \frac{3}{2N}$:

$$L = b \left(\frac{a}{a_0} \right)^{N\alpha-1/2} \sqrt{\frac{N}{2N\alpha-1} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [\Psi(p)]^{2N} dp}{F_1[(a/b)^{2i\epsilon}]}}$$

– si $\alpha < \frac{1}{2N}$:

$$L = Cst. * b \sqrt{\frac{\ln a}{F_1[(a/b)^{2i\epsilon}]}}$$

On constate que L diverge quel que soit α , d'autant plus rapidement que α est grand, et que là encore le paramètre ϵ ne change pas le caractère divergent mais introduit uniquement des oscillations supplémentaires dans certains cas.

3.3 Explications qualitatives de ces observations

Une étude approfondie du terme $[\alpha - f(ka)]$ apparaissant dans l'équation différentielle (9) permet de constater qu'il décroît quant k augmente c'est à dire la longueur d'onde diminue, ceci explique que les composantes de Fourier $\delta\widehat{a}(k, a)$ augmente d'autant plus vite que la longueur d'onde est grande (k petit). Le système a donc tendance à sélectionner les composantes de Fourier de grande longueur d'onde, ce qui explique l'accroissement de L , c'est à dire l'étalement de la perturbation avec a . Par ailleurs, cet effet est d'autant plus grand que α est grand, ce qui explique d'une part la croissance infinie de la variance σ pour α grand, et sa croissance finie pour α petit.

4 Conclusion

Premièrement nous avons mis en évidence, que même si l'hétérogénéité de l'interface introduit souvent des oscillations, elle n'influence pas le comportement général du désordre du front par rapport au cas homogène. Deuxièmement, il y a un effet de sélection des composantes de Fourier de grandes longueur d'onde, pour toutes les valeurs de α , caractérisant la stabilité (α petit) ou l'instabilité (α grand) de propagation de la fissure sous chargement monotone. Cet effet d'autant plus important que α est grand, permet de comprendre la croissance infinie de la variance, donc de la déviation du front par rapport à sa position droite pour α grand, et l'augmentation plus limitée pour α petit. Il permet aussi de comprendre l'étalement progressif du front prédit par la croissance de la distance de corrélation L .

Références

- Bercial-Velez, J., Antipov, Y., Movchan, A., May 2005. High-order asymptotics and perturbation problems for 3d interfacial cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 53 (5), 1128–1162.
- Bueckner, H. F., 1987. Weight functions and fundamental fields for the penny-shaped and the half-plane crack in three-space. *International Journal of Solids and Structures* 23 (1), 57–93.
- Favier, E. and Lazarus, V. and Leblond, J.-B. 2006. Statistics of the deformation of the front of a tunnel-crack propagating in some inhomogeneous medium. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 54 (7), 1449-1478
- Lazarus, V., Leblond, J.-B., 1998a. Three-dimensional crack-face weight functions for the semi-infinite interface crack. I. Variation of the stress intensity factors due to some small perturbation of the crack front. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46 (3), 489–511.
- Lazarus, V., Leblond, J.-B., 1998b. Three-dimensional crack-face weight functions for the semi-infinite interface crack. II. Integrodifferential equations on the weight functions and resolution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46 (3), 513–536.
- Piccolroaz, A., Mishuris, G., Movchan, A. B., 2007. Evaluation of the Lazarus-Leblond constants in the asymptotic model of the interfacial wavy crack. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* submitted to.
- Rice, J. R., 1985. First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front. *ASME Journal of Applied Mechanics* 52 (3), 571–579.