



Stabilité linéaire de l'écoulement dans un canal courbe aux parois compliant

Anaïs Ghaus, Alessandro Bottaro, Christophe Airiau

► To cite this version:

Anaïs Ghaus, Alessandro Bottaro, Christophe Airiau. Stabilité linéaire de l'écoulement dans un canal courbe aux parois compliant. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. <hal-03362077>

HAL Id: hal-03362077

<https://hal.science/hal-03362077v1>

Submitted on 1 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette entre deux cylindres aux parois compliantes

Anaïs Guaus*, Alessandro Bottaro[†] & Christophe Airiau*

* IMFT, Allée du Pr C. Soula, 31400 Toulouse, France
guaus@imft.fr

[†] DICAT, Université de Gênes, 1 via Montallegro, 16145 Gênes, Italie

Résumé :

La stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor-Couette entre deux cylindres aux parois compliantes (déformables) est considérée. Les parois sont modélisées comme des coques minces élastiques supportées par un ensemble de ressorts au-dessus d'une base rigide. Sous l'action de la compliance des parois, les tourbillons de Taylor sont déstabilisés et de nouvelles formes d'instabilités dues à la flexibilité des parois apparaissent et précèdent l'apparition de l'instabilité centrifuge.

Abstract :

The linear stability of the Taylor-Couette flow between compliant cylindrical walls is examined. The walls are modelled as thin elastic shells supported by rigid frames through arrays of springs. When the walls are compliant, Taylor vortices are destabilised and new instabilities due to the wall flexibility appear and precede the onset of the centrifugal instability.

Mots-clefs :

Parois compliantes ; ondes de paroi ; tourbillons de Taylor.

1 Introduction

Les parois compliantes sont des parois suffisamment flexibles pour se déformer sous l'action des efforts exercés par un écoulement. L'utilisation de parois compliantes peut s'avérer un moyen simple de contrôler passivement l'écoulement près de parois et notamment de retarder la transition vers la turbulence. Les nombreuses études réalisées depuis les travaux pionniers de Kramer (1957), en particulier celles de Carpenter et Garrad (1985, 1986), ont montré que les ondes de Tollmien-Schlichting (TS), responsables dans un écoulement parallèle faiblement perturbé de la transition vers la turbulence, peuvent être stabilisées et même éliminées en présence de parois compliantes. Mais de nouvelles formes d'instabilité, induites par la flexibilité de la paroi, peuvent perturber l'écoulement et provoquer à leur tour la transition.

Deux formes d'instabilités de paroi sont généralement répertoriées (Davies et Carpenter, 1997; Gad-el-Hak, 2000) : les ondes de paroi (en anglais *Travelling Wave Flutter* (TWF)) et l'instabilité de divergence. Les ondes de paroi deviennent instables en dessous d'un certain seuil de flexibilité. L'instabilité de divergence est une instabilité absolue dont l'apparition modifie profondément le scénario de transition. Enfin, notons que les ondes TS et les modes de paroi peuvent coalescer pour former une nouvelle forme d'instabilité absolue. Ces différentes instabilités sont affectées de manière différente par la présence d'amortissement dans la paroi : les ondes TS et l'instabilité de divergence sont stabilisées alors que les ondes de paroi sont déstabilisées. L'amortissement n'a pas d'influence sur le mode de coalescence. La nature et

les caractéristiques des instabilités apparaissant dans une couche limite ou un canal plan sont discutées en détail dans les articles de Carpenter et Garrad (1985) et Davies et Carpenter (1997).

Nous étudions ici la stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor-Couette. L'intérêt est notamment de considérer l'influence de la compliance sur les tourbillons de Taylor. Notons qu'il n'y a pas d'études en littérature qui traitent de l'influence de parois compliantes sur des écoulements soumis à une déstabilisation centrifuge.

2 Modélisation du problème fluide-structure

On considère l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible, de viscosité ν , dans l'espace entre deux cylindres coaxiaux aux parois compliantes. Le cylindre extérieur est immobile et le cylindre intérieur, de rayon R_1 , tourne à une vitesse angulaire Ω . En l'absence de déformation, la distance entre les deux cylindres est $2h$. Le paramètre de courbure γ est défini par $\gamma = 2h/R$ où $R = R_1 + h$. γ est choisi suffisamment petit ($\gamma \ll 1$) pour justifier l'analyse de stabilité linéaire et, au premier ordre en γ , l'écoulement de base, adimensionné par ΩR , s'écrit (y est défini plus bas) :

$$U(y) = \frac{1-y}{2} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} - \frac{3}{4} \right). \quad (1)$$

2.1 Equations de stabilité linéaire

Comme $\gamma \ll 1$, plutôt que de travailler avec les coordonnées cylindriques (r, θ, ξ) , on définit un système de coordonnées "pseudo-cartésien" adimensionné (x, y, z) qui représente respectivement les directions azimutale, radiale et axiale : $x = 2\theta/\gamma$, $y = 2(r - R)/(\gamma R)$, $z = 2\xi/(\gamma R)$. Les nouvelles variables (u, v, w, p) et le temps t sont adimensionnés en utilisant ΩR , h et ρ la masse volumique du fluide comme grandeurs de référence.

On cherche les solutions sous forme de modes normaux :

$(u, v, w, p) = (\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y), \hat{p}(y))e^{i\alpha x + i\beta z + \sigma t}$ où $\alpha = n\gamma/2$ (n entier) et β sont les nombres d'onde spatiaux (réels) dans les directions azimutale et axiale et σ le taux d'amplification (*a priori* complexe).

Après simplification, les équations du mouvement linéarisées au premier ordre en γ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\alpha\hat{u} + D\hat{v} + i\beta\hat{w} + \frac{\gamma}{2}\hat{v} - i\alpha\frac{\gamma}{2}y\hat{u} = 0, \\ \sigma\hat{u} + i\alpha\left(1 - \frac{\gamma y}{2}\right)U\hat{u} + U'\hat{v} + \frac{\gamma}{2}U\hat{v} = -i\alpha\left(1 - \frac{\gamma y}{2}\right)\hat{p} + \frac{1}{Re}(D^2 - k^2)\hat{u} \\ \quad + \frac{\gamma}{Re}\left[\left(\frac{1}{2}D + y\alpha^2\right)\hat{u} + i\alpha\hat{v}\right], \\ \sigma\hat{v} + i\alpha\left(1 - \frac{\gamma y}{2}\right)U\hat{v} - \gamma U\hat{u} = -D\hat{p} + \frac{1}{Re}(D^2 - k^2)\hat{v} + \frac{\gamma}{Re}\left[\left(\frac{1}{2}D + y\alpha^2\right)\hat{v} - i\alpha\hat{u}\right], \\ \sigma\hat{w} + i\alpha\left(1 - \frac{\gamma y}{2}\right)U\hat{w} = -i\beta\hat{p} + \frac{1}{Re}(D^2 - k^2)\hat{w} + \frac{\gamma}{Re}\left(\frac{1}{2}D\hat{w} + y\alpha^2\right)\hat{w}, \end{array} \right. \quad (2)$$

où $Re = \Omega R h / \nu$ est le nombre de Reynolds, $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ et $D = d/dy$.

2.2 Modèle de paroi compliant via la théorie des coques minces

Les parois sont modélisées en adaptant le modèle "sur ressorts" proposé par Carpenter et Garrad (1985) pour une plaque plane compliant : un ensemble de ressorts supporte une plaque mince élastique au-dessus d'une base rigide. Dans ce modèle les parois ne bougent que suivant

y. L'équation du déplacement vertical η^* de la paroi s'obtient à partir de la théorie de Love sur les coques minces cylindriques (Timoshenko, 1959), l'astérisque dénotant par la suite une grandeur dimensionnée :

$$\left[\left(m^* \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} + d^* \frac{\partial}{\partial t^*} + B^* \Delta_h^2 - T^* \Delta_h + K^* \right) \Delta_h + \frac{E^* H}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial z^{*4}} \right] \eta^* = \begin{cases} \Delta_h p^*(h) \\ -\Delta_h p^*(-h) \end{cases} \quad (3)$$

avec $\Delta_h = \partial^{*2}/\partial x^{*2} + \partial^{*2}/\partial z^{*2}$. Dans cette équation, m^* est la masse surfacique de la coque, d^* le coefficient d'amortissement, $B^* = E^* H^3/(12(1 - \nu^{*2}))$ la rigidité flexurale, avec E^* le module de Young, H l'épaisseur de la coque et ν^* le coefficient de Poisson, K^* la raideur des ressorts et T^* la tension longitudinale par unité de longueur. Le terme du membre de droite représente l'effort normal exercé par le fluide sur la paroi.

On choisit d'adimensionner les propriétés des parois en utilisant h , ρ et ν et de faire varier le nombre de Reynolds uniquement en fonction de la vitesse angulaire Ω . Ainsi, les propriétés adimensionnées de la paroi sont indépendantes des variations du nombre de Reynolds :

$$m = \frac{m^*}{\rho h}, \quad d = \frac{d^* h}{\rho \nu}, \quad B = \frac{B^*}{\rho \nu^2 h}, \quad E = \frac{E^* h^2}{\rho \nu^2}, \quad K = \frac{K^* h^3}{\rho \nu^2}, \quad T = \frac{T^* h}{\rho \nu^2}.$$

Si l'on écrit η sous forme de mode normal, l'équation du mouvement de la coque devient :

$$\left[m \sigma^2 + \frac{d}{Re} \sigma + \frac{1}{Re^2} \left(B k^4 + T k^2 + K + \frac{H}{h} \frac{\gamma^2}{2} E \frac{\beta^2}{k^2} \right) \right] \hat{\eta} = \begin{cases} \hat{p}(1) \\ -\hat{p}(-1) \end{cases} \quad (4)$$

Cette équation diffère de l'équation pour la plaque mince (Davies et Carpenter, 1997) par le terme en γ^2 , terme négligé par la suite, les termes en γ^2 étant négligés dans l'équation (2).

2.3 Conditions limites

Après linéarisation autour de $y = 1$, la condition de non-glissement pour la paroi supérieure s'écrit :

$$\hat{u} + \hat{\eta} U' = 0, \quad \hat{v} - \sigma \hat{\eta} = 0, \quad \hat{w} = 0. \quad (5)$$

La combinaison de (4) et des deux premières équations de (5) permet d'éliminer $\hat{\eta}$:

$$\sigma \hat{u} + U' \hat{v} = 0, \quad m \sigma \hat{v} + \frac{1}{Re} d \hat{v} - \frac{1}{U' Re^2} (B k^4 + K + T k^2) \hat{u} = \hat{p}. \quad (6)$$

On obtient donc en $y = 1$ trois conditions limites, (dernière équation de (5) et (6)), qui font uniquement intervenir les paramètres de l'écoulement. En $y = -1$, les équations sont identiques à l'exception du signe moins devant le terme de pression de la deuxième équation de (6).

3 Résultats

Les solutions du problème aux valeurs propres (2) avec ses conditions aux limites sont calculées sous Matlab après discrétisation du système par une méthode de collocation de Chebyshev. Le code est validé en vérifiant les résultats obtenus pour l'écoulement de Taylor-Couette classique, c'est-à-dire en prenant la limite $E^* \rightarrow \infty$.

Pour des parois rigides, le seuil de l'instabilité correspond à un nombre de Taylor $Ta_{crit} = 3390.3$ (soit dans notre cas, à un nombre de Reynolds $Re_{crit} = 111$), seuil pour lequel apparaît un empilement de tourbillons toroïdaux avec une périodicité axiale de $2\pi h/\beta_{crit}$ où $\beta_{crit} =$

1.56 (Chandrasekhar, 1981). Nous choisissons ici $\gamma = 0.0174$ comme dans les expériences de Prigent et Dauchot (2000).

Dans toute l'étude, les deux parois ont les mêmes propriétés physiques et mécaniques. Nous nous concentrerons sur l'influence de deux paramètres : la rigidité flexurale (B) et l'amortissement de la paroi (d). Comme dans Davies et Carpenter (1997), les autres paramètres seront : $K = B/4$, $m = 2$ et $T = 0$.

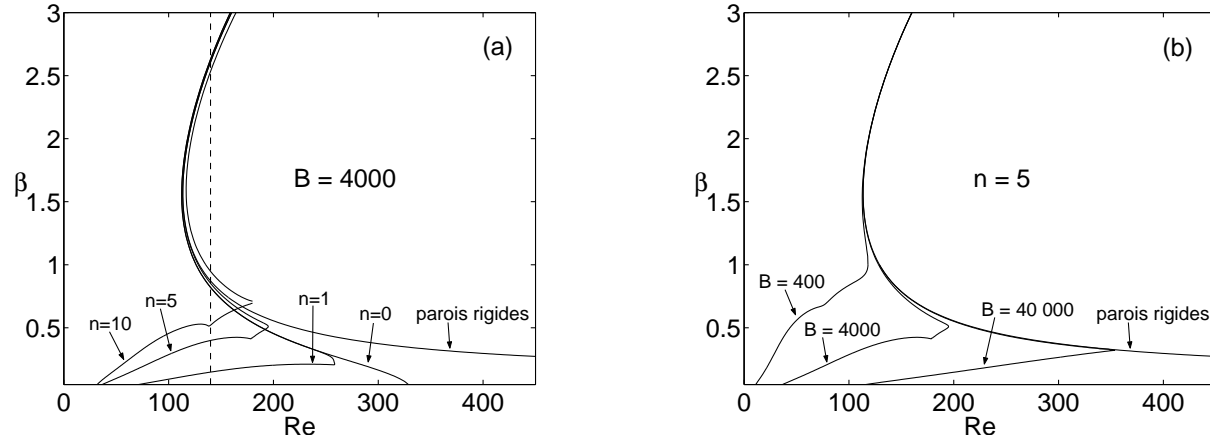


FIG. 1 – (a) Courbes neutres pour différents nombres d'onde azimutaux $\alpha = n\gamma/2$ pour des parois compliantes de paramètres $B = 4000$, $d = 0$. En pointillé : $Re = 140$. (b) Courbes neutres montrant l'influence de la flexibilité des parois pour $n = 5$ avec $d = 0$.

La figure 1(a) présente les courbes neutres ($\sigma_r = 0$) pour différents nombres d'ondes azimutaux $\alpha = n\gamma/2$ et pour des parois compliantes de paramètres $B = 4000$ et $d = 0$. Lorsque les parois sont rigides, c'est l'instabilité des modes $n = 0$ qui prédomine et correspond à l'apparition de tourbillons de Taylor instables. L'effet de la compliabilité des parois est limité aux faibles valeurs du nombre d'onde axial : pour $\beta > 0.7$, les courbes neutres se confondent avec celles obtenues pour des parois rigides (seule la courbe neutre $n = 0$ est tracée dans le cas rigide). Pour $\beta < 0.7$, deux phénomènes apparaissent. D'une part, les tourbillons de Taylor sont déstabilisés. Ce phénomène n'est cependant visible que sur la courbe neutre $n = 0$. Pour $n > 0$, cette déstabilisation est masquée par l'apparition d'ondes de paroi plus instables, ce qui se traduit par une rupture de la pente des courbes neutres. Le nombre de Reynolds critique d'apparition des ondes de paroi instables diminue lorsque n augmente. Les comportements vis-à-vis du nombre d'onde azimutal sont donc opposés pour des parois rigides ou compliantes.

On retrouve l'influence respective des différentes instabilités en suivant l'évolution du spectre des valeurs propres pour les modes $n = 10$ en fonction du nombre d'onde axial β (figure 2(a)). Le nombre de Reynolds est fixé à $Re = 140$ et les paramètres de la paroi sont $B = 4000$ et $d = 0$. Cinq modes sont identifiés : un tourbillon de Taylor et quatre ondes de paroi notées TWF sur la figure. Les modes TWF3 et TWF4 sont toujours amortis. Pour $\beta < 0.35$, c'est le mode TWF1 instable qui prédomine, mode stabilisé pour $\beta > 0.5$. Le mode TWF2 est instable pour $0.32 < \beta < 0.52$. Le taux d'amplification du tourbillon de Taylor augmente avec β et le tourbillon devient instable pour $\beta > 0.94$. On retrouve sur la courbe neutre pour $n = 10$ de la figure 1(a) trois zones correspondant aux trois modes potentiellement instables : le mode TWF1 est le plus instable pour $\beta < 0.5$, le mode TWF2 pour $0.5 < \beta < 0.7$ et le tourbillon de Taylor pour $\beta > 0.7$.

Les fonctions propres des trois modes potentiellement instables sont tracées figure 3 pour $\beta = 1$ et pour les mêmes paramètres que sur la figure 2(a). Les vitesses azimutale \hat{u} et radiale \hat{v}

pour le tourbillon de Taylor (instable) ont la même forme que lorsque les parois sont rigides sauf dans la zone proche parois où les vitesses ne s'annulent pas. Comme on pouvait s'y attendre, les modes TWF1 et TWF2 (stables) présentent des pics de vitesse près des parois.

La figure 1(b) montre l'influence de la flexibilité des parois sur la courbe neutre pour les modes $n = 5$. La flexibilité des parois a peu d'influence sur la zone $\beta > 1$, c'est-à-dire la zone où les tourbillons de Taylor prédominent. En revanche, l'apparition des ondes de paroi dépend fortement de la flexibilité des parois et plus les parois sont flexibles (plus le coefficient de rigidité B est petit), plus la transition apparaît pour de faibles nombres de Reynolds.

L'influence de l'amortissement de la paroi sur le spectre des valeurs propres est présentée figure 2(b) pour un coefficient d'amortissement $d = 100$ et pour les mêmes paramètres que pour le spectre de la figure 2(a). Comme prévu, tous les modes TWFs sont stabilisés par rapport au cas $d = 0$. Le taux d'amplification du tourbillon de Taylor augmente légèrement sous l'influence de la dissipation et le tourbillon devient instable pour $\beta = 0.91$ au lieu de $\beta = 0.95$ lorsque $d = 0$.

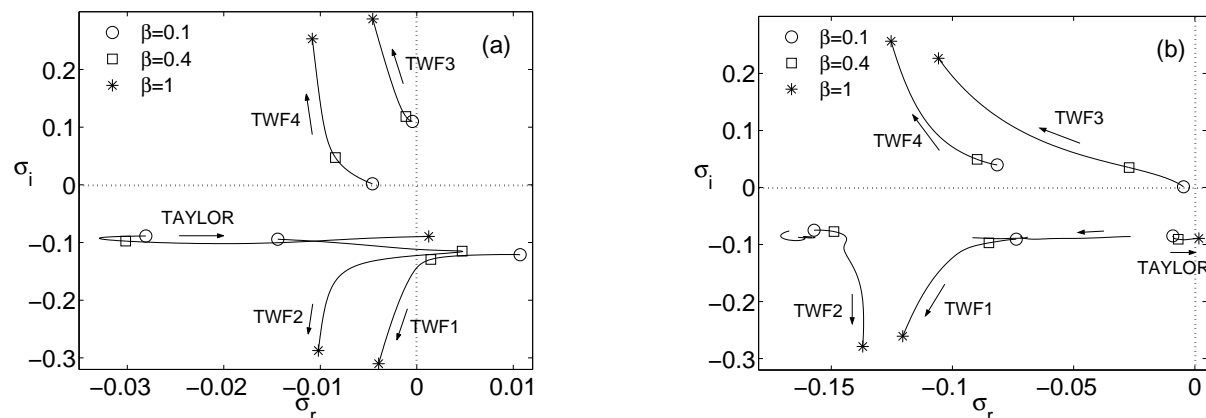


FIG. 2 – Spectre des valeurs propres montrant l'évolution des principaux modes pour $n = 10$ en fonction du nombre d'onde axial ($0.1 < \beta < 1$). Les paramètres sont $Re = 140$, $B = 4000$ et (a) $d = 0$ ou (b) $d = 100$.

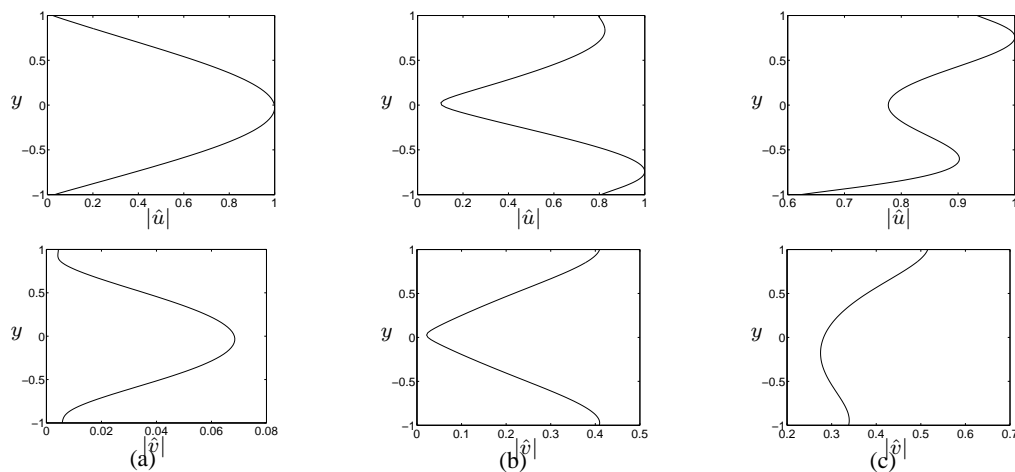


FIG. 3 – Vitesses azimutale \hat{u} et radiale \hat{v} (valeurs absolues normalisées par \hat{u} maximum) pour le cas présenté figure 2(a) avec $\beta = 1$. (a) tourbillon de Taylor instable, (b) TWF1 stable, (c) TWF2 stable.

4 Conclusions

Une étude de la stabilité linéaire des différents modes apparaissant dans l'écoulement de Taylor-Couette entre deux cylindres aux parois compliantes a été menée. L'objectif était notamment de s'intéresser à l'interaction entre les tourbillons de Taylor et les parois déformables. Chaque paroi a été modélisée comme une coque mince élastique supportée au-dessus d'une base rigide par un ensemble de ressorts, adaptant ainsi aux parois courbes un modèle classiquement utilisé pour les parois planes. L'influence de la compliance des parois a été considérée à travers deux paramètres : la rigidité flexurale et l'amortissement viscoélastique.

La flexibilité des parois a relativement peu d'influence sur les tourbillons de Taylor. Le nombre de Reynolds critique d'apparition de l'instabilité centrifuge n'est pas modifié par rapport au cas où les parois sont rigides même si des tourbillons sont déstabilisés pour de faibles valeurs du nombre d'onde axial β . En présence d'amortissement dans la paroi, les tourbillons sont légèrement déstabilisés. L'utilisation de parois compliantes fait également apparaître de nouvelles formes d'instabilité dues à la flexibilité des parois. Parmi ces instabilités, seules les ondes de paroi ont été observées, les modes de divergence et de coalescence ne sont pas apparus pour les paramètres considérés. Ces ondes de paroi sont fortement déstabilisées pour les faibles valeurs de β et deviennent le mécanisme responsable de la transition. L'amortissement a toutefois un effet stabilisant sur ces modes. Contrairement à ce qui a pu être observé en couche limite ou canal plan, pour la gamme de paramètres considérés, l'utilisation de parois compliantes ne constitue pas un moyen de retarder la transition vers la turbulence pour l'écoulement de Taylor-Couette.

Remerciements

AG remercie le soutien reçu par la CE, par l'intermédiaire d'une bourse Marie Curie EST "Flu-bio" à l'Université de Gênes.

Références

- Carpenter, P.W. et Garrad, A.D. 1985 The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 1. Tollmien-Schlichting instabilities. *J. Fluid Mech.* **155** 465-510
- Carpenter, P.W. et Garrad, A.D. 1986 The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 2. Flow-induced surface instabilities. *J. Fluid Mech.* **170** 199-232
- Chandrasekhar, S. 1981 Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Dover, New York.
- Davies C. et Carpenter, P.W. 1997 Instabilities in a plane channel flow between compliant walls. *J. Fluid Mech.* **352** 205-243
- Gad-el-Hak, M. 1997 Flow control. Passive, Active, and Reactive Flow Management. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- Kramer, M.O. 1957 Boundary-layer stabilization by distributed damping. *J. Aero. Sci.* **24** 459-460
- Prigent A., Dauchot, O. 2000 "Barber pole turbulence" in large aspect ratio Taylor-Couette flow. *arXiv :cond-mat/0009241 v1 15 Sept. 2000*
- Timoshenko, S. 1959 Theory of Plates and Shells. MacGraw-Hill, New York