



**HAL**  
open science

## Instabilité secondaire sur un anneau de vorticité

Grégory Pinon, Ivan Delbende, Elie Rivoalen, Maurice Rossi

► **To cite this version:**

Grégory Pinon, Ivan Delbende, Elie Rivoalen, Maurice Rossi. Instabilité secondaire sur un anneau de vorticité. CFM 2007 - 18 me Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03361999

**HAL Id: hal-03361999**

**<https://hal.science/hal-03361999v1>**

Submitted on 1 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Instabilité secondaire sur un anneau de vorticité

Grégory Pinon<sup>1</sup>, Ivan Delbende<sup>2</sup>, Elie Rivoalen<sup>1</sup> & Maurice Rossi<sup>3</sup>

1 LMPG, Université du Havre, 25 rue P. Lebon, 76600 Le Havre  
 2 LIMSI-CNRS, Université Pierre et Marie Curie, B.P. 133 91403 ORSAY Cedex  
 3 CNRS-Université Pierre et Marie Curie, Institut Jean Le Rond D'Alembert,  
 4 Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05  
 gregory.pinon@univ-lehavre.fr

### Résumé :

*Nous caractérisons les instabilités qui apparaissent sur un anneau de vorticité à l'aide d'une méthode particulaire de type "vortex blob" dans laquelle un remaillage axi-symétrique évite l'apparition de modes parasites. On initialise l'anneau avec un profil Gaussien et on simule ensuite sur quelques temps de retournement de manière à atteindre un état quasi-stationnaire elliptique axi-symétrique. On superpose alors à cet état une perturbation correspondant au mode le plus instable. Nous déterminons le taux de croissance et la structure exacte de ce mode primaire. L'évolution ultérieure met en évidence une seconde phase que nous avons identifiée comme étant une instabilité secondaire. L  encore, nous déterminons le taux de croissance et la structure des modes.*

### Abstract :

*We characterize the instabilities arising on a vortex ring using a particle method known as "vortex blob" where an axisymmetric remeshing avoids any spurious modes. The ring is initialized with a Gaussian profile and the simulation is performed for several turnover time in order to reach a quasi-steady elliptic axisymmetric ring. A perturbation corresponding to the most unstable azimuthal wavenumber is then superimposed. The growth rate and structure of this primary instability mode is then determined. We have identified the following evolution as a secondary instability. Here again growth rate and structure have been investigated.*

### Mots-clefs :

**anneau de vorticité ; instabilité ; simulation particulaire**

### 1 La méthode numérique

Le code de simulation numérique utilisé pour ce travail est un code de suivi lagrangien de particules de type *vortex blob* (Leonard (1980)). Les particules considérées sont porteuses d'une information tourbillonnaire, leur position  $\mathbf{X}_i$  et leur intensité  $\Omega_i$  sont obtenues de la manière suivante :

$$\mathbf{X}_i = \frac{\int_{\mathcal{P}_i} \mathbf{x} dv}{\int_{\mathcal{P}_i} dv} \quad \text{et} \quad \Omega_i = \int_{\mathcal{P}_i} \omega dv. \quad (1)$$

Les équations de transport associées aux particules  $(\mathbf{X}_i, \Omega_i)$  sont :

$$\frac{d\mathbf{X}_i}{dt} = \mathbf{U}_i \quad \text{et} \quad \frac{d\Omega_i}{dt} = (\Omega_i \cdot \nabla) \mathbf{U}_i + \nu \Delta \Omega_i. \quad (2)$$

Nous prenons en compte la diffusion visqueuse par une méthode de type PSE (Particule Strength Exchange) qui s'inspire des travaux de Degond *et al.* (1989) et Choquin *et al.* (1989). Le schéma en temps est un Runge-Kutta d'ordre 2. La vitesse  $\mathbf{U}_i$  d'une particule est calculée suite à la

présence de l'ensemble des particules par la relation de type Biot et Savart :

$$\mathbf{U}_i = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N_\Omega} \mathbf{K}_\delta (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j) \wedge \boldsymbol{\Omega}_j \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_\delta (\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{(|\mathbf{x}|^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3)$$

où  $N_\Omega$  représente le nombre total de particules et  $\mathbf{K}_\delta$  le noyau de Green régularisé avec  $\delta$  le paramètre de régularisation de la simulation. Afin de réduire les temps de simulation, nous avons implémenté un algorithme de *Tree Code* d'après la méthode présentée par Lindsay *et al.* (2001). Et afin de garder une répartition spatiale homogène de particules, nous utilisons un remaillage global du champ de particules tous les 4 pas de temps dans cette étude. Pour ne pas favoriser une direction particulière dans l'écoulement lors de ce remaillage, nous l'effectuons sur une grille en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , centrée sur le centre de l'anneau, grâce à une formule d'interpolation d'ordre 6 d'après Beale (1986).

## 2 Étape initiale d'elliptisation des sections de l'anneau.

<i>Simulations</i>	$s/R$	$h/R$	$\delta/R$	$Re_\Gamma$	$T_{max}/T_0$	Mode $m$	$\epsilon/R$
INIT	0.2	0.02	0.03	40,000	60		
INIT Re4000	0.2	0.02	0.03	4,000	60		
INIT Re2000	0.2	0.02	0.03	2,000	60		
Cas Perturb	0.2	0.02	0.03	4,000	260	[9]	$5.10^{-4}$

TAB. 1 – Description des simulations :  $s/R$ ,  $h/R$  et  $\delta/R$  représentent respectivement la taille de coeur  $s$ , la discrétisation interparticulaire  $h$  et le paramètre de régularisation  $\delta$  adimensionné par le rayon  $R$  de l'anneau.  $T_{max}/T_0$  représente la durée totale de simulation. Pour le cas de l'anneau perturbé, on indique le mode qui a été perturbé ainsi que l'amplitude  $\epsilon/R$  adimensionnée de la perturbation d'après l'équation 5.

Différentes simulations ont été réalisées (Cf. tableau 1). L'initialisation de l'anneau est réalisée sur une section à l'aide d'un profil Gaussien, écrit dans un second repère en coordonnée polaire  $(\rho, \phi)$  centré au centre de la section en  $(0, R, 0)$  dans le repère cylindrique, tel que :

$$\omega_\theta (\rho, \phi, t = 0) = \frac{\Gamma}{\pi s_0^2} e^{-(\rho/s_0)^2} \quad \text{avec} \quad \rho^2 = z^2 + (r - R)^2, \quad (4)$$

où  $\Gamma$  représente la circulation totale de l'anneau,  $R$  le rayon et  $s_0$  la taille initiale du coeur. Afin d'assurer une vorticité nulle au centre de l'anneau, nous utilisons une methode déjà introduite dans les travaux de Shariff *et al.* (1994) : nous avons superposé un second profil Gaussien avec une vorticité négative centrée en  $(0, -R, 0)$ . Cette méthode s'est montr  e spécialement efficace notamment dans le cas d'anneaux *  pais*. Enfin, nous obtenons l'anneau entier en effectuant une rotation complète de cette section suivant l'angle  $\theta$  du repère cylindrique.

Durant la phase d'initialisation de l'anneau, on simule la dynamique à faible viscosité. Nous avons réalisé cette simulation dans la même optique que Shariff *et al.* (1994) afin d'obtenir un anneau *  quilibr  * assez rapidement grâce à l'utilisation d'une faible viscosité moléculaire mais sans avoir pour autant une augmentation trop importante de la taille du coeur  $s(t)$  suite à la diffusion visqueuse. Cet   tat d'équilibre conduit à une elliptisation de la section de l'anneau. Notons néanmoins que cette simulation, correspondant à un Reynolds  $Re_\Gamma = 40,000$  (Cf. tableau 1), n'est pas compl  tement résolue dans le sens de la DNS car la discrétisation, tant spatiale que temporelle n'est pas suffisante.

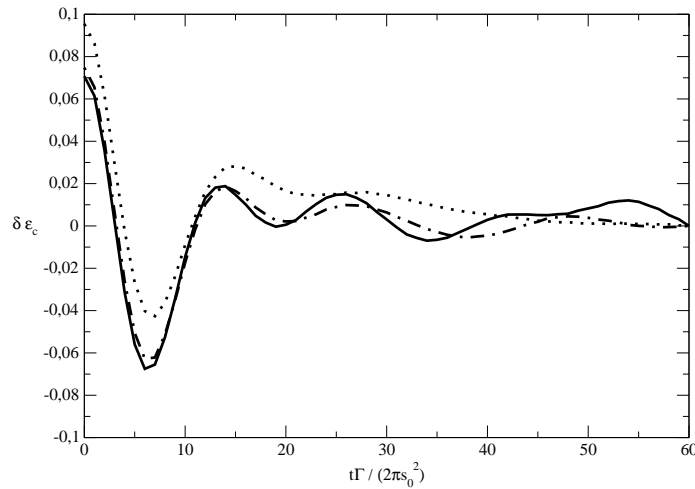


FIG. 1 – Evolution de l’excentricité locale autour de sa valeur moyenne  $\delta\epsilon_c$  durant la phase d’initialisation de la simulation de l’anneau (Cf. tableau 1). Trait plein :  $Re_\Gamma = 40,000$ , ligne et point :  $Re_\Gamma = 4,000$  et pointillé :  $Re_\Gamma = 2,000$ .

Comme pour les tourbillons 2D co-rotatifs (Cf. travaux de Le Dizès *et al.* (2002)), nous avons tracé la variation d’excentricité  $\delta\epsilon_c$  de l’anneau autour de sa valeur moyenne en fonction du temps et pour différents Reynolds, l’excentricité étant quant à elle  $\epsilon_c = \frac{(s_r - s_z)}{(s_r + s_z)}$ , où  $s_r^2 = \frac{1}{\Gamma} \int_{S_c} (R_c - r)^2 |\omega| ds$  et  $s_z^2 = \frac{1}{\Gamma} \int_{S_c} (Z_c - z)^2 |\omega| ds$ , avec  $S_c$  une section de l’anneau,  $R_c$  et  $Z_c$  la position du centre de la section dans le repère cylindrique.

La figure 1 présente les résultats obtenus pour 3 simulations du tableau 1. Nous obtenons une évolution très similaire à celle observée par Le Dizès *et al.* (2002) : une oscillation atténuée de type onde de Kelvin qui permet à la vorticité initiale de se redistribuer de manière à atteindre un état d’équilibre. Toutefois le signe de l’ellipticité est opposé : le cas d’un anneau 3D est en effet plus proche d’une paire de vortex contra-rotatifs 2D. On arrive à un état d’équilibre de la section de l’anneau au bout d’un temps de simulation correspondant approximativement à 30 ou 40 temps de retournement  $T_0 = \frac{2\pi s_0^2}{\Gamma}$ .

### 3 L’instabilité primaire

Après 40 temps de retournement  $T_0$ , un état elliptique relativement stable de la section de vorticité de l’anneau est obtenu. A ce moment précis, on perturbe l’anneau de manière à étudier la brisure d’axisymétrie. La perturbation est réalisée à la manière de Shariff *et al.* (1994). On modifie la position radiale des particules dans le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ , chaque particule passe de la position  $r_0$  avant perturbation à la position  $r_p(\theta)$  telle que :

$$r_p(\theta) = r_0 [1 + \epsilon g_m(\theta)]. \quad (5)$$

La fonction  $g_m(\theta)$  représente une fonction périodique en  $\theta$  imposant un mode azimutal  $m$  d’amplitude  $\epsilon$ . Ce mode azimutal  $m$ , est le mode le plus instable suivant les travaux de Widnall *et al.* (1974) i.e ;  $m = 9$ . La simulation est maintenant reprise pour un Reynolds  $Re_\Gamma = 4,000$  (Cf.

tableau 1).

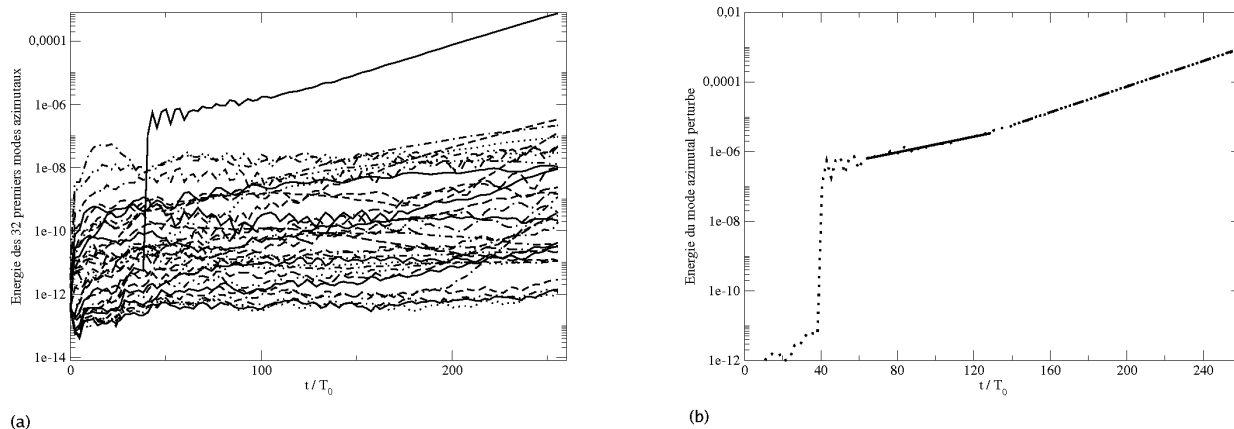


FIG. 2 – Gauche : énergie des 32 premiers modes azimutaux  $m$  en fonction du temps pour la simulation perturbée. Droite : énergie du mode azimutal  $m = 9$  perturbé. Ces énergies ont été obtenues à partir d’une transformée de Fourier.

La figure (2,a) présente l’évolution de l’énergie cinétique décomposée pour les 32 premiers modes azimutaux en fonction du temps pour la simulation perturbée. On observe très nettement le mode perturbé avec en permanence 2 décades environ entre celui-ci et les 31 autres modes. Suite à la perturbation, après une petite phase d’adaptation, on observe clairement la phase de croissance linéaire de ce mode comme le présente la régression réalisée en trait plein sur le graphe de la figure (2,b). Nous avons pu obtenir ainsi le taux de croissance  $\alpha \approx 0.206$  de ce mode que nous avons pu comparer avec la prédiction de Widnall *et al.* (1974) corrigée d’après la correction visqueuse de Saffman (1978) ; qui est ici de  $\alpha_{Saff} = 0.22$ . Ce taux croissance  $\alpha_{Saff}$  a été déterminé d’après la circulation de l’anneau ainsi que ses éléments géométriques, qui évoluent au cours du temps notamment suite à la diffusion visqueuse du cœur, d’où une possible source d’erreur. Néanmoins, le résultat obtenu correspond bien à la correction visqueuse de Saffman.

#### 4 Instabilité secondaire : Quelques éléments.

Si l’on observe la suite de l’évolution de l’énergie sur la figure (2,b), on observe une nette modification de la pente. Ceci implique que nous ne sommes plus dans la phase primaire de l’instabilité. En revanche, nous avons de nouveau une pente constante ce qui fait penser à une instabilité secondaire en train de se développer. Le nouveau taux de croissance  $\beta = 0.338$  est obtenu par régression. Cette nouvelle étape se caractérise également par la croissance d’autres modes azimutaux, dont la présence est toutefois encore inférieure au mode que nous avons perturbé (Cf. figure (2,a)). De manière similaire aux résultats expérimentaux de Dazin *et al.* (2006), nous observons durant cette seconde phase l’apparition de tourbillons alignés suivant l’axe ( $Oz$ ) de notre repère cylindrique et de vorticités opposées deux à deux comme le présentent les graphiques de la figure (3). Le premier instant observé ( $t/T_0 = 175$ ) correspond approximativement au début de cette seconde phase, où l’on observe déjà ces structures alignées selon ( $Oz$ ) mais de faible intensité ( $|\omega_z| = 1.0$ ). Le second instant,  $t/T_0 = 240$ , présente la fin de cette seconde phase avec de plus fortes structures axiales ( $|\omega_z| = 3.5$ ) et une structure azimutale

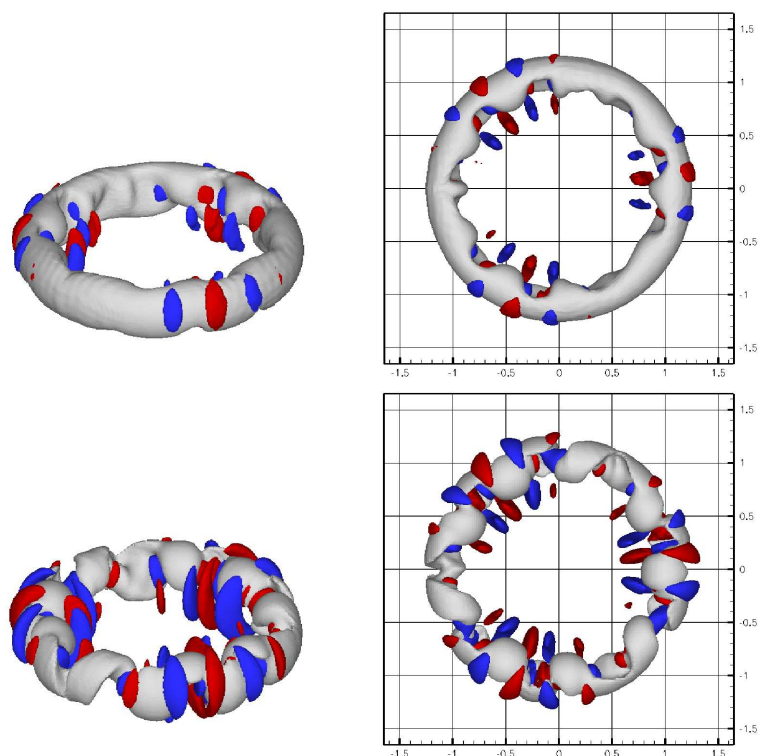


FIG. 3 – Développement d’une instabilité secondaire de l’anneau de vorticit e pour la simulation perturb ee (Cf. tableau 1). Les figures de gauche repr esentent des vues isométriques et celles de droite des vues de dessus. Partie sup erieure : En gris, iso-surface de vorticit e azimutale  $\omega_\theta = \sqrt{(Ens_\theta)} \approx 9.8$  à l’instant  $t/T_0 = 175$  et en rouge (resp. bleu), iso-surface de vorticit e axiale  $\omega_z = 1.0$  (resp.  $-1.0$ ). Partie inf erieure : En gris, iso-surface de vorticit e azimutale  $\omega_\theta = \sqrt{(Ens_\theta)} \approx 9.4$  à l’instant  $t/T_0 = 240$  et en rouge (resp. bleu), iso-surface de vorticit e axiale  $\omega_z = 3.5$  (resp.  $-3.5$ ). On d efinit de plus l’ensrophie selon la composante  $\theta$  comme  $Ens_\theta = \frac{1}{2} \iiint \omega_\theta^2 dv$ .

de l'anneau déjà très déformée.

## 5 Conclusions

Des simulations numériques ont été réalisées sur l'évolution spatio-temporelle d'un anneau tourbillonnaire perturbé en faisant varier le nombre de Reynolds et les caractéristiques du coeur de la section. Nous avons observé d'une part la présence récurrente d'un changement du taux de croissance dans l'énergie du mode perturbé (plusieurs simulations non présentées dans ce résumé étendu) et d'autre part la similitude des structures tourbillonnaires obtenues avec celles observées par Dazin *et al.* (2006). Ces structures sont attribuées au développement d'une l'instabilité secondaire. Des résultats complémentaires sont toutefois nécessaires pour encore affiner et conforter la détermination du taux de croissance de l'instabilité primaire, pour différentes géométries d'anneaux et pour différents Reynolds. Lorsque ce travail préliminaire sera réalisé nous pourrons étudier la formations et le développement des structures secondaires en fonction des paramètres de l'anneau.

## Références

- J.T. Beale 1986 A convergent 3-D vortex method with grid-free stretching *Math. Comput.* **46** 401-424
- J.P. Choquin and S. Huberson 1989 Particles simulation of viscous flow *Computers & Fluids* **17** 397-410
- A. Dazin, P. Dupont and M. Stanislas 2006 Experimental characterization of the instability of the vortex rings. Part II : Non-linear phase *Exp Fluids* **41** 401-413
- P. Degond and S. Mas-Gallic 1989 The weighted particle method for convection-diffusion equations *Math. Comput.* **53** 485-508
- S. Le Dizès and A. Verga 2002 Viscous interaction of two co-rotating vortices before merging *J. Fluid Mech.* **467** 389-410
- A. Leonard 1980 Vortex methods for flow simulations *J. Comput. Phys.* **37** 289-335
- K. Lindsay and R. Krasny 2001 A particle method and adaptive treecode for vortex sheet motion in three-dimensional flow *J. Comput. Phys.* **172** 879-907
- P. G. Saffman 1978 The number of waves on unstable vortex rings *J. Fluid Mech.* **84** 625-639
- K. Shariff, R. Verzicco and P. Orklandi 1994 A numerical study of the three-dimensional vortex ring instabilities : viscous correction and early nonlinear stage *J. Fluid Mech.* **279** 351-375
- S. E. Widnall, D.B. Bliss and C.-Y. Tsai 1974 The instability of short waves on a vortex ring *J. Fluid Mech.* **66** 35-45