



**HAL**  
open science

# Prédiction numérique d'écoulements viscoélastiques autour d'un cylindre

Hassan Naji, Gilmar Mompean, L. Thais, H. Kamal

► **To cite this version:**

Hassan Naji, Gilmar Mompean, L. Thais, H. Kamal. Prédiction numérique d'écoulements viscoélastiques autour d'un cylindre. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03361791

**HAL Id: hal-03361791**

**<https://hal.science/hal-03361791>**

Submitted on 1 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Prédiction numérique d'écoulements viscoélastiques autour d'un cylindre

H. KAMAL, G. MOMPEAN, H. NAJI et L. THAIS

Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR-CNRS 8107  
Université des Sciences et Technologies de Lille, Polytech'Lille,  
Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France  
Hassan.Naji@polytech-lille.fr

### Résumé

Ce travail porte sur la simulation numérique de l'écoulement bi-dimensionnel d'un fluide viscoélastique autour d'un cylindre en milieu non confiné. La méthode des volumes finis en coordonnées orthogonales généralisées est ici adoptée pour résoudre les équations de conservation. Le modèle constitutif pour le fluide est de type Phan-Tien Tanner (PTT). Afin de stabiliser l'algorithme de résolution, le schéma dit "Elastic Viscous Split Stresses" (EVSS) est utilisé.

Dans le cas newtonien, nous retrouvons le résultat bien connu sous le nom d'allée de von Karman pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 47. Pour les fluides viscoélastiques, on trouve que l'augmentation de nombre de Deborah augmente la fréquence de l'allée. On constate aussi que la traînée diminue très vite jusqu'à l'apparition de l'allée pour ensuite remonter jusqu'à une valeur qui reste inférieure à celle obtenue en newtonien.

### Abstract

The purpose of this work is to simulate the two-dimensional viscoelastic fluid flow past a non-confined cylinder. Using the finite volume method, the generalized orthogonal coordinates are applied to solve the conservation governing equations. The constitutive equation describing the viscoelastic behaviour is the Phan-Tien Tanner model (PTT). For the sake of computation stability, the Elastic Viscous Split Stresses scheme (EVSS) is employed to decompose the stress tensor.

For the Newtonian case, the well known phenomenon of von Karman street appears at a Reynolds number of order 47. For the viscoelastic flow, it is found that the increase of Deborah number increases the von Karman street's frequency. Also, the drag decreases rapidly and re-increases with the onset of von Karman street but still less than the Newtonian drag.

### Mots clés:

**cylindre non-confiné, modèle PTT, coordonnées orthogonales généralisées  
Non-confined cylinder, PTT model, Generalized orthogonal coordinates**

### 1 Introduction

L'écoulement d'un fluide viscoélastique autour d'un cylindre a fait l'objet de nombreux travaux à la fois expérimentaux et numériques et ce en vertu de son importance scientifique et industrielle. Généralement, la plupart de ces travaux concernent le cylindre confiné.

En raison de sa simplicité et de son efficacité, le modèle différentiel de Phan-Tien Tanner (PPT), ou sa version simplifiée (S-PTT) ou modifiée (M-PTT), est très répandu pour simuler les écoulements de fluides viscoélastiques. Dou & Phan-Thien (1998) et Phan-Thien & Dou (1999) ont traité le cas du cylindre confiné à l'aide d'un tel modèle. La principale contribution de ce travail est la prédiction de l'écoulement autour d'un cylindre non-confiné en utilisant le modèle PTT.

Les coordonnées orthogonales généralisées sont efficaces dans le cas de géométries complexes. Pope 1978 a proposé une procédure de différences finies en utilisant les coordonnées orthogonales généralisées afin de simuler l'écoulement turbulent dans un diffuseur. Thais *et al.* 2002 ont adapté cette méthode pour prédire l'écoulement newtonien autour d'un cylindre à l'aide de la méthode des volumes finis.

Le but principal de ce travail est la simulation d'un écoulement viscoélastique autour d'un cylindre non-confiné en utilisant le modèle viscoélastique PPT en coordonnées orthogonales généralisées.

## 2 Équations de conservation

Les équations cartésiennes qui décrivent l'écoulement bidimensionnel d'un fluide non-newtonien incompressible sont l'équation de conservation de masse et de quantité de mouvement; Celles-ci peuvent s'écrire:

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = \nabla (-p \mathbf{I} + 2\eta_N D + \tau) \quad (2)$$

où  $u$  est la vitesse du fluide,  $\rho$  est sa densité,  $p$  est la pression,  $\mathbf{I}$  est le tenseur unitaire,  $\eta_N$  est la viscosité du fluide,  $D = (\nabla u + \nabla u^T)/2$  est le tenseur du taux de déformation et  $\tau$  est le tenseur des contraintes non-newtoniennes. Pour un fluide viscoélastique,  $\tau$  est défini à l'aide du modèle PTT selon la relation:

$$G \tau + \lambda \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + u \cdot \nabla \tau - (L - \xi D) \cdot \tau - \tau \cdot (L - \xi D)^T \right) = 2\eta_m D \quad (3)$$

où  $\lambda$  est le temps de relaxation,  $\eta_m$  est la viscosité non-newtonienne et  $G = \exp[(\lambda \varepsilon / \eta_{m0}) \text{Tr}(D)]$  est une fonction qui limite la croissance de la viscosité élongationnelle. Les variables  $\xi$  et  $\varepsilon$  sont des paramètres qui caractérisent le comportement élastique des matériaux et  $\eta_{m0}$  est la viscosité moléculaire en l'absence du taux de cisaillement.

Les équations précédentes étant formulées dans le cas cartésien, il importe de les écrire sous la forme généralisée. Pour cela, on utilise la méthode de Pope (1978). Dans cette dernière, on suppose l'existence de coordonnées orthogonales généralisées  $(\psi_1, \psi_2)$  définies par  $\psi_1 = \psi_1(x_1, x_2)$  et  $\psi_2 = \psi_2(x_1, x_2)$ . Les vecteurs de base du nouveau système sont  $\bar{g}_i = \partial \bar{x} / \partial \psi_i$ , ( $i=1,2$ ) et selon la définition d'orthogonalité, le tenseur métrique  $g_{ij} = \bar{g}_i \circ \bar{g}_j$  est diagonal et les facteurs d'échelle sont  $h_i = \sqrt{g_{ii}}$ .

Le champs de vitesses physiques  $V_i$  est utilisé ici pour réécrire les équations de conservation au moyen des dérivées spatiales physiques  $d\zeta = h_i d\psi_i$ , ( $i=1,2$ ). Ainsi, les composantes cartésiennes de la vitesse  $u_i$  s'écrivent:

$$u_i = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial x_i}{\partial \psi_j} \frac{V_j}{h_j}, \quad (i=1,2) \quad (4)$$

où  $\partial x_i / \partial \psi_j$  est le Jacobien de la transformation.

L'opérateur généralisé de divergence s'écrit

$$\nabla_{(j)} \left( \frac{\partial (\quad)}{\partial \xi_i} + \sum_{k \neq i} H_i^k (\quad) \right), \quad (i=1,2) \quad (5)$$

où les facteurs  $H_i^j$  d'étirement sont définis par:

$$H_i^j = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial \xi_i} = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial \psi_i}, \quad (i, j=1,2) \quad (6)$$

En adoptant cette procédure, les équations de conservations (1) et (2) en coordonnées généralisées peuvent donc s'écrire:

$$\sum_{j=1}^2 \nabla_{\cdot(j)} V_j = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho V)_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^2 \nabla_{\cdot(i)} (V_i V_j - \mu D_{ij}) = -\frac{\partial p}{\partial \xi_j} - \sum_{i=1}^2 H_j^i (V_i V_j - \mu D_{ij}) + \sum_{i=1}^2 H_i^j (V_i V_i - \mu D_{ii}) \quad (8)$$

A ces équations, on adjoint la loi de comportement suivante:

$$\lambda \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \left( \frac{\partial}{\partial \xi_j} (u_i \tau_{ij}) - (u_i \tau_{ij}) H_j^i + (u_i \tau_{ij}) H_i^k \delta_{ij} \right) \right) = 2\mu\beta\eta_0 D_{ij} + \lambda (\mathcal{L}_{ij} \tau_{ij} + \tau_{ij} \mathcal{L}_{ji}) - \mathcal{G} \tau_{ij} \quad (9)$$

où  $\beta = \eta_{m0}/(\eta_N + \eta_{m0})$  est le rapport de retard et  $\mathcal{L}_{ij} = \partial u_j / \partial x_i - \zeta D_{ij}$ .

### 3 Méthode Numérique

La méthode classique des volumes finis est utilisée pour obtenir la forme discrétisée des équation (7), (8) et (9).

Le schéma quadratique "QUICK" est employé pour calculer les termes de convection. Les termes d'accélération et le gradient de pression sont évalués au centre du volume de contrôle des vitesses. Le schéma explicite décentré d'Euler est adopté pour l'intégration temporelle auquel on adjoint la procédure de découplage dite "Mark and Cell". A chaque nouveau pas de temps, une équation discrétisée de Poisson pour la pression est résolue afin de vérifier la contrainte d'incompressibilité. La matrice de l'équation de Poisson est symétrique et définie positive; le système linéaire obtenu est résolu à l'aide de la factorisation directe de Cholesky. Dans cette procédure, les termes de diffusion, d'advection et d'accélération sont traités explicitement. Afin d'améliorer la stabilité de la méthode, le schéma Elastic Viscous Split Stresses (EVSS) est appliqué en vue de décomposer le tenseur des contraintes non-newtoniennes (pour plus des informations, voir Rajagopalan *et al.* (1990)).

Dans le cas présent, le maillage en coordonnées généralisées est obtenu à partir de la fonction de courant ( $\psi$ ) et de la fonction potentiel des vitesses ( $\varphi$ ). Celles-ci sont définis comme suit:

$$\psi = U_o \sin\theta \cdot \left( r - \frac{A^2}{r} \right), \quad \varphi = U_o \cos\theta \cdot \left( r + \frac{A^2}{r} \right) \quad (10)$$

où  $A$  est le rayon du cylindre,  $U_o$  est la vitesse loin en amont,  $r$  est le rayon polaire et  $\theta$  est l'angle. Notons que le centre du cylindre est confondu avec l'origine du repère. La figure 1(a) et (b) présente le maillage curviligne avec 160×80 cellules.

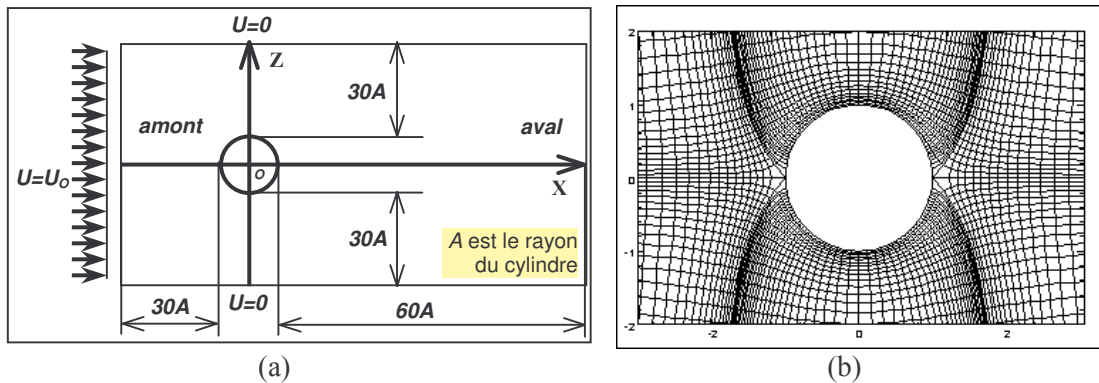


FIG. 1 (a) Domaine de résolution, (b) maillage curviligne avec 160×80 cellules.

Pour le cas viscoélastique, les constantes du modèle PTT sont  $\beta = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.39$  et  $\xi = 0.0$ .

#### 4 Résultats et interprétation

Dans ce travail, on se propose de présenter nos résultats à l'aide de quatre nombres adimensionnels qui sont le nombre de Strouhal  $Str = 2Af/U_0$  où  $f$  est la fréquence de fluctuation, le coefficient de traînée moyenné  $\overline{C}_d$ , le coefficient de portance moyenné  $\overline{C}_l$  et le coefficient de pression de base moyenné  $\overline{C}_{bp}$ .

La table 1 donne les valeurs de ces grandeurs obtenues à l'aide de quatre maillages différents et ce pour  $Re = 100$  et  $De = 0.0$ .

TAB. 1 Valeurs de  $Str$ ,  $\overline{C}_d$ ,  $\overline{C}_l$  et  $\overline{C}_{bp}$  pour différents maillage,  $Re=100$ ,  $De=0$ .

	50×30	80×40	100×50	160×80	Persillon et Braza 1998	Thais <i>et al.</i> 2002
Str	0.081	0.159	0.171	0.171	0.165	0.171
$\overline{C}_d$	1.127	1.325	1.347	1.371	1.253	1.348
$\overline{C}_l$	0.000	0.244	0.254	0.266	0.270	0.261
$\overline{C}_{bp}$	-0.493	-0.729	-0.770	-0.801	-0.848	-0.808

On constate que c'est le maillage le plus raffiné (160×80) qui permet de corroborer les résultats de la littérature (cf. Persillon et Braza (1998) et Thais *et al.* (2002)).

Lorsque l'écoulement est newtonien, on trouve une zone d'instabilité en aval du cylindre qui contient deux tourbillons symétriques stationnaires (cf. figure 2(a)). La figure 2(b) montre que cette symétrie est perdue et que l'écoulement devient instationnaire annonçant la naissance de l'allée de von Karman dès  $Re_{cr} = 47$ . Ce résultat est en bon accord avec celui de Coutanceau & Defaye (1991). Il faut aussi noter que Williamson 1996 a trouvé le même résultat pour  $Re_{cr} = 49$ .

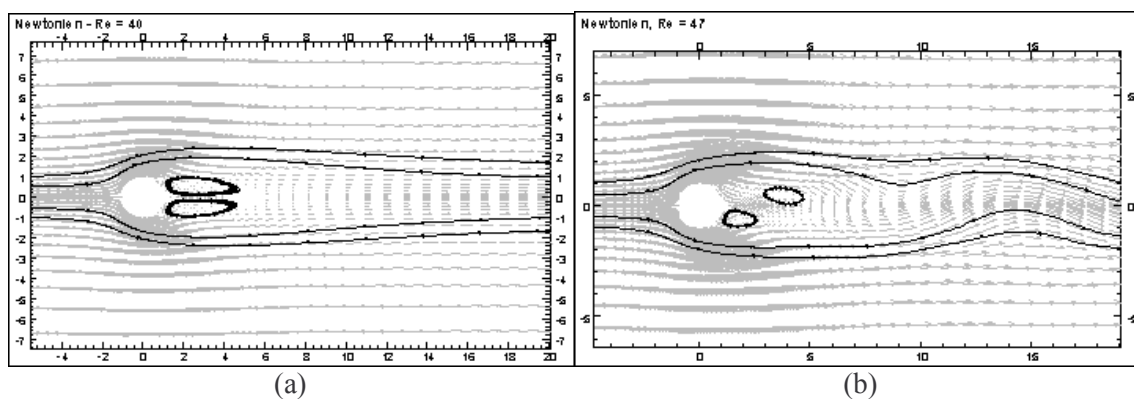


FIG. 2 Zone d'instabilité en aval du cylindre: (a)  $Re=40$ , (b)  $Re=47$ .

Dans le cas viscoélastique, la table 2 résume les valeurs des paramètres adimensionnels  $Str$ ,  $\overline{C}_d$ ,  $\overline{C}_l$  et  $\overline{C}_{bp}$  pour  $Re = 100$  à différentes valeurs du nombre de Deborah.

TAB. 2 Valeurs de  $Str$ ,  $\bar{C}_d$ ,  $\bar{C}_l$  et  $\bar{C}_{bp}$  pour  $Re = 100$  à différents  $De$ .

$De$	$Str$	$\bar{C}_d$	$\bar{C}_l$	$\bar{C}_{bp}$
0.1	0.176	1.358	0.271	-0.809
0.3	0.187	1.306	0.321	-0.861
0.5	0.195	1.303	0.368	-0.926
0.7	0.200	1.317	0.400	-0.980
1.0	0.206	1.338	0.430	-1.039
1.5	0.211	1.364	0.460	-1.099

Oliveira (2001) a traité le même problème avec le modèle FENE-CR et a obtenu des résultats très proches de nos résultats. Aussi, dans le cas d'un cylindre confiné, Dou & Phan-Thien (1998) ont adopté le même modèle PTT et ont montré que ces paramètres se comportent de la même façon.

Un examen du tableau 2 permet d'affirmer que la fréquence d'allée de von Karman augmente comme le nombre de Deborah.

Sur la figure 2, nous présentons l'évolution temporelle du coefficient de traînée dans les cas newtonien ( $De = 0$ ) et non-newtonien ( $De \neq 0$ ) où  $Re = 40$  et  $100$  respectivement.

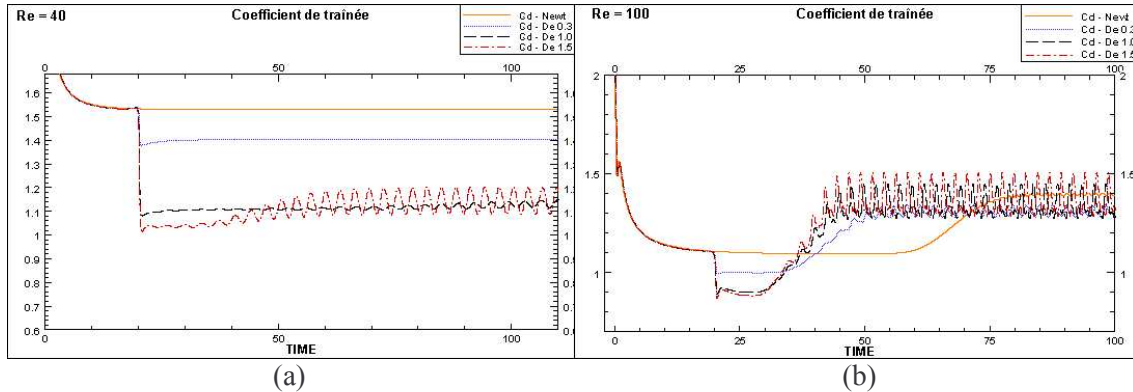


FIG. 2 Evolution temporelle de la traînée: (a)  $Re = 40$ , (b)  $Re = 100$ ;  
 $De = 0, 0.3, 1.0$  et  $1.5$ .

La traînée est la somme de trois contributions: la première est due à la différence de pression entre l'amont et l'aval du cylindre, la seconde est la traînée dite de frottement et la troisième est induite par les contraintes de cisaillement et normale. On constate que les trois contributions diminuent en sens inverse du nombre de Deborah et ce jusqu'à l'apparition de l'allée de von Karman. A ce stade, la troisième amorce son augmentation. En analysant la figure 2, on peut dire que la traînée totale diminue jusqu'à la naissance de l'allée de von Karman pour remonter ensuite tout en restant en dessous de sa valeur obtenue dans le cas newtonien.

## 5 Conclusions

L'écoulement bi-dimensionnel d'un fluide non-newtonien viscoélastique autour d'un cylindre dans un milieu non confiné est simulé numériquement. La loi de comportement est celle de Phan-Thien Tanner (PTT). Le système des coordonnées généralisées orthogonales et la méthode des volumes finis sont ici utilisés afin d'obtenir la forme discrétisée des équations de conservation.

Pour l'écoulement newtonien, l'allée de von Karman prend naissance dès  $Re_{cr} = 47$ . Pour le cas viscoélastique, on trouve que la fréquence d'allée de von Karman augmente comme le

nombre de Deborah. Aussi, la traînée totale diminue jusqu'à la naissance de l'allée de von Karman pour ensuite remonter sans dépasser la valeur obtenue en newtonien.

### Références

- Coutanceau, M. & Defaye, J. R. 1991 Circular cylinder wake configurations: A flow visualization survey. *Appl. Mech.* **6**, 255-305
- Dou, H. & Phan-Thien, N. 1998 Parallelisation of an unstructured finite volume code with PVM: viscoelastic flow around a cylinder. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **77**, 21–51
- Oliveira P. 2001 Method for time-dependent simulations of viscoelastic flows: vortex shedding behind cylinder. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **101**, 113–137
- Persillon, H & Braza, M. 1998 Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylindre by three-dimensional Navier-Stokes simulation. *J. Fluid Mech.* **365**, 23-88
- Phan-Thien, N. & Dou, H.-S. 1999 Viscoelastic flow past a cylinder: drag coefficient. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **180**, 243-266
- Pope, S. B 1978 The calculation of turbulent recirculating flows in general orthogonal coordinates. *J. Comp. Phys.* **2**, 197-217
- Rajagopalan, D., Amstrong, R. C., & Brown, R. A. 1990 Finite element methods for calculation of steady, viscoelastic flow using constitutive equations with a Newtonian viscosity. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **36**, 159–192
- Thais L., Mompean G. & Naji H. 2002 Computation of flow past a circular cylinder using general orthogonal coordinates. *5th World Congress on Computational Mechanics WCCM V, July 7-12, 2002 Vienna, Austria*
- Williamson, C. H. K. 1996 Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **28**, 477-539