



**HAL**  
open science

## **Analyse limite : approche décomposition et méthode cinématique par les contraintes**

Joseph Pastor, Etienne Loute

### ► **To cite this version:**

Joseph Pastor, Etienne Loute. Analyse limite : approche décomposition et méthode cinématique par les contraintes. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. <hal-03361684>

**HAL Id: hal-03361684**

**<https://hal.science/hal-03361684v1>**

Submitted on 1 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

## Analyse limite : approche décomposition et méthode cinématique par les contraintes

**Franck Pastor, Etienne Loute**

*Facultés Universitaires St Louis  
43 Bd du Jardin Botanique, 1000 Bruxelles*

**Joseph Pastor, Philippe Thoré**

*POLYTECH'Savoie  
Laboratoire LOCIE  
73376 Le Bourget du Lac  
joseph.pastor@univ-savoie.fr*

### Résumé :

*Partant de travaux récents en matière d'optimisation non linéaire et de méthode cinématique par les contraintes, nous proposons ici une approche originale par décomposition qui ne relève pas pour autant de la décomposition de domaines. Elle s'appuie sur une partition adéquate du maillage MEF du problème en sous-problèmes de tailles équivalentes, et permet d'obtenir rapidement une solution très proche de celle que l'on obtiendrait avec le problème non décomposé. Chaque itération se compose d'une première phase où l'on résoud indépendamment les sous-problèmes en partant d'une solution précédente pour leurs interfaces, et d'une seconde phase où l'on résoud autant de problèmes auxiliaires que d'interfaces, toujours indépendamment. En fait on s'aperçoit qu'une itération, voire deux suffisent pour obtenir quasiment la solution cible.*

### Abstract :

*Starting from recent works on non-linear optimization and stress-based, upper-bound methods of limit analysis, we propose here an original decomposition approach, which is not a domain decomposition one. It uses a relevant partition of the finite element mesh to define several similar-sized subproblems, and allows to quickly obtain a solution very close to the solution of the target problem. Each iteration consists in two phases. During the first phase, all subproblems are independently solved, using a previous solution for their interfaces, and in the second phase are solved as many auxiliary problems as interfaces, also independently. Indeed, we notice that only one or two iterations are needed to almost obtain the target solution.*

### Mots-clefs :

**Approche décomposition, optimisation convexe, analyse limite**

## 1 Introduction

Les méthodes numériques issues de la théorie de l'Analyse Limite ou du Calcul à la Rupture conduisent à des problèmes d'optimisation non linéaires de taille de plus en plus grande. Par suite, décomposer le problème pour le rendre parallélisable est une solution, laquelle nécessite un outil d'optimisation efficace. La méthode d'optimisation convexe proposée en Pastor et Loute (2005) a justement montré une excellente robustesse dans la résolution du problème statique pour les matériaux homogènes obéissant aux critères de plasticité de von Mises et de Gurson. Partant du travail pionnier de Anderheggen et Knopfel (1972), une formulation a été proposée en Pastor *et al.* (2006) qui permet d'obtenir des bornes cinématiques rigoureuses en n'utilisant que le critère de plasticité du matériau. C'est sur ces deux travaux qu'est fondée la méthode de décomposition proposée ici.

## 2 Résumé de la méthode d'optimisation convexe

Les problèmes d'optimisation que nous devons résoudre sont du type suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s. c. q.} \quad & Ax = b, \\ & g(x) + s = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

où  $c, x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est la matrice (plein rang-ligne pour des raisons mécaniques) des contraintes linéaires,  $g = (g_1, \dots, g_p)$  est le vecteur des  $p$  fonctions numériques convexes  $g_i$ , et  $s \in \mathbb{R}_+^p$  est le vecteur des  $p$  variables d'écart associées à ces contraintes.

La méthode primale-duale de points intérieurs consiste à remplacer le problème précédent par le suivant, en introduisant le paramètre  $\mu > 0$ , dit *paramètre barrière* :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x - \mu \sum_{i=1}^p \ln(s_i) \\ \text{s. c. q.} \quad & Ax = b, \\ & g(x) + s = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

On prouve que (2) admet une solution ssi les *conditions KKT* sont satisfaites :

$$\begin{aligned} c + A^T w + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^T y &= 0, \\ Ax - b &= 0, \\ g(x) + s &= 0, \\ YSe &= \mu e, \end{aligned} \quad (3)$$

où  $w \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $e = [1 \dots 1]^T \in \mathbb{R}^p$  et  $Y, S$  sont les matrices diagonales associées à  $y$  et  $s$  respectivement.  $\mu > 0$  and  $s > 0$  entraînent que  $y > 0$ .

Par la suite, nous résolvons une suite finie de ces problèmes, avec  $\mu$  tendant vers 0 d'une façon bien définie, permettant ainsi d'approcher la solution du problème (1) avec une approximation aussi bonne que souhaitée. En effet, lorsque  $\mu$  tend vers 0, les équations (3) tendent vers les conditions KKT du problème original. Dans ce but on introduit la fonction  $F$  suivante :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{+*}^p \times \mathbb{R}_{+*}^p &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, \\ \begin{bmatrix} x \\ w \\ y \\ s \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} c + A^T w + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^T y \\ Ax - b \\ g(x) + s \\ YSe - \mu e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_d(x, w, y, s) \\ F_{p1}(x, w, y, s) \\ F_{p2}(x, w, y, s) \\ F_c(x, w, y, s) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

qui permet aux équations (3) d'être écrites sous la forme condensée  $F(x, w, y, s) = 0$ .

Pour démarrer l'algorithme, on part d'un point initial  $z = (x, w, y, s)$  intérieur à l'octant positif des variables  $y$  et  $s$  contraintes en signe, c.-à-d. vérifiant  $y$  et  $s > 0$ , à partir duquel on calcule une valeur de départ pour  $\mu$ . On calcule alors une *direction de recherche*  $dz = (dx, dw, dy, ds)$  pointant vers la solution du problème (3), via la méthode de Newton, en résolvant en  $dz$  le système linéaire suivant :

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z) dz = -F(z). \quad (5)$$

Lorsque  $dz$  est finalement obtenue,  $z$  est mise à jour en suivant la direction de  $dz$ , ce qui permet à  $\mu$  de décroître, et l'algorithme itère jusqu'à ce que  $x$  atteigne la précision souhaitée.

Parmi les différentes méthodes utilisées pour faire décroître efficacement  $\mu$  en résolvant (5) et en calculant la direction de recherche  $dz$ , une des plus utilisées est l'algorithme de Merothra, que nous utilisons dans notre programme. Pour rester concis, nous ne la détaillons pas ici. Cet algorithme est couplé avec l'utilisation d'une factorisation LU du système (5) qui, lorsqu'il est de taille moyenne, s'avère efficace et robuste. Au delà, la méthode Cholesky-AMD s'avère incontournable. Pour plus de détails, confer Pastor et Loute (2005).

### 3 Résumé de la méthode cinématique par les contraintes

Supposons (Salençon (1974)) que la puissance virtuelle des charges extérieures  $P_{\text{ext}}$  s'écrive sous la forme d'un produit scalaire d'un vecteur chargement  $Q$  et d'un vecteur vitesse généralisée  $q = q(u)$ . Soit un champ de vitesses virtuelles  $u$  cinématiquement admissible (CA) (continu ici pour simplifier) et l'égalité suivante, inspirée du principe des puissances virtuelles (PPV) :

$$P_{\text{ext}} = Q \cdot q = \int_V \sigma : v dV \quad \forall u \text{ CA.} \quad (6)$$

Le vecteur chargement  $Q$  résultant aura une signification cinématique si, aux points appropriés de  $V$ , les variables du problème vérifient les relations suivantes, où  $q^d$  est la valeur donnée du vecteur  $q$  :

$$v = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad f(\sigma) = 0, \quad \lambda \geq 0. \quad (7)$$

Notons que  $\sigma : v$  devient alors la puissance dissipée unitaire *convexe*  $\pi_{\text{vol}}(v)$ . Passons à la notation numérique plus pratique ici. Le champ de vitesses virtuelles  $\{u\}$  est linéaire dans l'élément triangulaire de surface  $S_{it}$  et la vitesse de déformation  $y$  est constante. Considérons un champ de contrainte  $\{\sigma\}$  constant dans l'élément. La puissance des efforts extérieurs devient  $P_{\text{ext}} = Q \cdot q^d = \{u\}^T \{\beta\} Q$ ; en utilisant la relation MEF classique  $\{v\} = [B]\{u\}$ , la relation (6) devient, après assemblage des éléments :

$$q(u) \cdot Q = \{u\}^T \{\beta\} Q = \int_V v : \sigma dV = \{u\}^T [\alpha] \{\sigma\} \quad \forall \{u\} \text{ CA.} \quad (8)$$

où la matrice  $[\alpha]$  résulte de l'assemblage des  $[B]^T S_{it}$  de chaque triangle  $it$  du maillage. Par comparaison avec le problème d'optimisation de la section 2, nous allons voir que résoudre le problème (9) ci-après donnera un chargement  $Q$  à valeur cinématique du fait des conditions KKT à vérifier à l'optimum.

$$\text{Max } \{q^d\}^T \{Q\} \quad (9.i)$$

$$[A]\{x\} = [\alpha]\{\sigma\} - \{\beta\}Q = 0, \quad (9.ii)$$

$$f(\sigma) \leq 0. \quad (9.iii)$$

Le problème (9) prend en compte les conditions aux limites sur les  $u$  virtuels soit par addition de variables supplémentaires spécifiques, soit par condensation de lignes. Considérons la solution du problème (1), avec  $A = [[\alpha], -\{\beta\}]$ ,  $b = 0$ ,  $x^T = \{\{\sigma\}^T, Q\}$ , le signe de la fonctionnelle  $c$  étant changé du fait de la présente maximisation. La solution optimale  $(\{w\}, \{y\}, \{\sigma\}, Q)$  de ce problème vérifie (3) avec  $\mu_e = 0$ , i.e.,  $y_{it} \geq 0$  si  $f(\sigma_{it}) = 0$ , et  $y_{it} = 0$  sinon. Après avoir transposé la première équation de (3) et en posant  $\{u\}^T = -\{w\}^T$ , on montre (cf Pastor *et al.*

(2006)) que le champ de vitesses optimal est CA et associé au champ de contraintes optimal, avec  $q(u) = q^d$  : le chargement obtenu a donc bien valeur cinématique.

Rappelons qu'une solution de l'analyse limite se compose d'un champ de contraintes et d'un champ de vitesses admissibles et associés par la loi de normalité. D'après le principe des puissances virtuelles le champ de contraintes MEF optimal (qui est PA et associé à un champ de vitesses admissible) sera d'autant plus près d'être statiquement admissible que la classe des champs de vitesses virtuelles sera grande (donc le maillage plus raffiné) et par suite la solution plus proche de la charge limite cherchée.

#### 4 Approche décomposition

La méthode suivante est basée sur la division du maillage en éléments finis sans qu'elle ne relève pour autant des techniques dites de « décomposition de domaines ». Toujours faute de place nous présentons ici son principe pour des champs de vitesses continus variant linéairement dans chaque triangle. Considérons donc le problème du barreau comprimé entre plaques rugueuses dont seul le quart supérieur gauche est maillé compte tenu des symétries.

La figure de gauche ci-dessous est le problème cible, que l'on divise en un sous-problème  $II_g$  et un  $II_d$ . Le problème de départ, pris ici quatre fois plus petit, sert à donner une suite de valeurs de départ à l'interface entre sous-problèmes pour l'algorithme de décomposition. La plaque indéformable est animée d'une vitesse verticale uniforme  $U_0$ , le paramètre de chargement associé (l'intégrale des contraintes normales sous la plaque) étant nommé  $F$ .

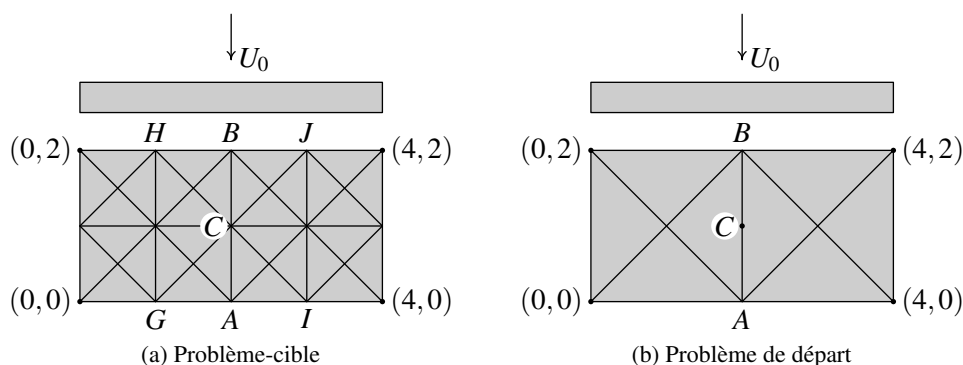


FIG. 1: Les maillages

La résolution du problème de départ (ici,  $2 \times 1$ ) donne les vitesses en  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , respectivement  $u^A$ ,  $u^B$  et  $u^C$ , qui serviront de conditions aux limites des problèmes  $II_g$  et  $II_d$ . Les conditions aux limites non nulles sont vérifiées à l'optimum par égalisation aux coefficients  $q_i^d$  de la fonctionnelle en (9) ; il suffit donc de définir la puissance des efforts extérieurs  $P_{ext}$  comme suit, dans le cas de la figure 2 :

$$P_{ext} = FU_0 + Q_1 u_x^A + Q_2 u_y^A + Q_3 u_x^C + Q_4 u_y^C + Q_5 u_x^B + Q_6 u_y^B = FU_0 + Q_i q_i \quad (10)$$

Les paramètres  $Q_i$  sont donc en fait de simples intermédiaires de calcul dont le rôle est d'assurer l'égalité de (10) à la puissance dissipée calculée via (8).

## 5 Les problèmes II

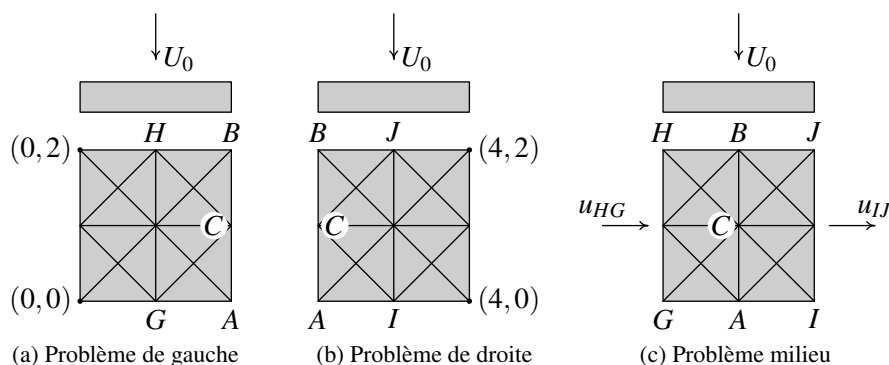


FIG. 2: Les problèmes II et le problème III.

La fonctionnelle des deux problèmes s'écrit ici :  $QU_0 + Q_i q_i^d$  (somme sur  $i$ ). A l'optimum, pour chacun des deux problèmes, la valeur de la fonctionnelle donne la puissance dissipée. L'ensemble des deux champs solution est admissible pour le problème cible, les deux champs se raccordant exactement par construction. A ce stade (fin itération 1) la puissance dissipée du problème cible est égale à la somme des puissances  $II_g$  et  $II_d$ . Elle est inférieure (au plus égale) à la puissance dissipée de départ du fait du nombre de degrés de liberté en vitesses nettement supérieur, le champ de départ étant d'ailleurs inclus ici dans ceux du problème raccordé. Pour une itération du processus II il faut « débloquer » les vitesses à l'interface  $II_g - II_d$ . C'est le rôle de la phase III ci-après.

## 6 Le problème III

Il est de même nature que les précédents, les vitesses aux bords latéraux étant respectivement les valeurs optimales aux points nodaux de  $GH$  obtenues en  $II_g$ , et en  $IJ$  venant de  $II_d$ . La solution optimale de ce problème III, avec les paramètres de chargement  $F$  et ceux qui correspondent aux vitesses nodales en  $GH$  et  $IJ$ , modifie les vitesses à l'interface  $ACB$  en diminuant la puissance dissipée dans  $HJIG$ . On a ainsi relaxé la dite interface, et pour l'itération suivante ce problème III joue le rôle du problème de départ, à ceci près qu'il n'y a pas d'interpolation à faire. L'itération courante consiste donc en la résolution de III puis  $II_g$  et  $II_d$ .

*Note 1.* Dans le cas présent le paramètre cinématique « plaque » est le même pour tous les problèmes. Dans d'autres cas (chargement en contrainte uniforme, talus..) il faut prendre soin de partager les paramètres cinématiques « réels » entre les différents problèmes, par post-analyse des champs solutions.

*Note 2.* La présente méthode cinématique entraîne que seule change la fonctionnelle d'une itération à l'autre ; par suite les itérations suivant la première sont très peu coûteuses en temps de résolution du fait de l'injection de la solution précédente comme solution de départ, le maillage lui-même étant inchangé.

## 7 Expérimentation

La méthode est testée ici pour un problème cible de  $64 \times 32$  carrés réguliers de 4 triangles, avec problème de départ à  $32 \times 16$ . La figure 3 donne l'évolution du ratio  $F/c$  depuis la valeur de départ (159,01) en fonction du nombre d'itérations. Chacun des trois sous-problèmes est

un  $64 \times 16$ . La résolution directe du problème cible donne la valeur asymptotique (157,33), la solution exacte (155,37) étant due à J. Salençon. Un deuxième niveau de décomposition donne des valeurs légèrement moins bonnes, d'autant moins évidemment que le problème de départ est davantage raffiné.

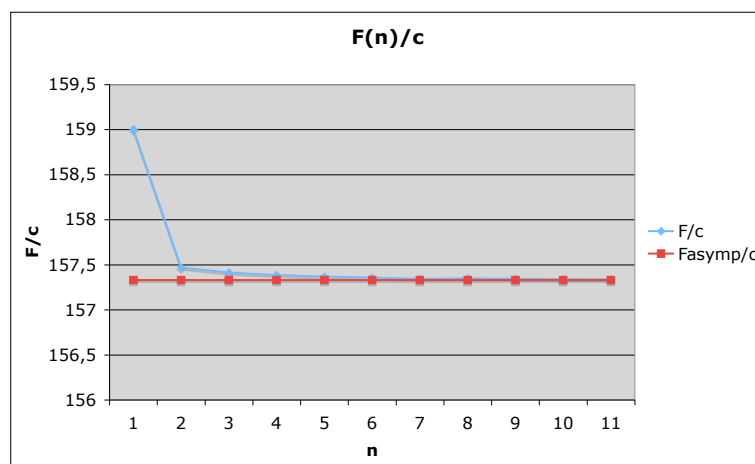


FIG. 3: Variation de  $F/c$  en fonction du nombre d'itérations.

## 8 Conclusion

La méthode de décomposition proposée utilise à plein les particularités de la méthode cinématique utilisée, entre autres le fait que la matrice des conditions ne varie pas d'une itération à l'autre. Il s'avère que dès la première itération on obtient une bonne précision de la solution, laquelle s'améliore ensuite légèrement au fil des itérations. Par suite, si la solution de départ correspond à un maillage raisonnable, on peut non seulement gagner du temps mais aller largement au-delà des limites en maillage direct, par décomposition récursive par exemple. C'est ainsi que par double décomposition nous avons pu diminuer la borne cinématique concernant le problème du talus vertical à  $\gamma H/c = 3,7786$  pour un maillage cible de 83 944 triangles *quadratiques discontinus en vitesses*, la meilleure valeur statique connue étant de 3,772.

## Références

- Anderheggen E. and Knopfel H. 1972 Finite element limit analysis using linear programming. *Int. J. Solids Structures*. **8** 1413-1431.
- Pastor F., Loute E. 2005 Solving Limit Analysis problems : an Interior-Point method. *Commun. Numer. Meth. Engng.* **21** 631-642.
- Pastor F., Trillat M., Pastor J., Loute E. 2006 Stress-based upper-bound method and convex optimization : case of the Gurson material. *C. R. Mécanique, Acad. Sc. Paris*. **334** 213-219.
- Salençon J. 1974 Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols Eyrolles, Paris.