



HAL
open science

Amélioration du calcul de la courbure des éléments finis coques SFE

Sylvain Couëdo, Laëtitia Duigou, Gérard Rio

► **To cite this version:**

Sylvain Couëdo, Laëtitia Duigou, Gérard Rio. Amélioration du calcul de la courbure des éléments finis coques SFE. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03361676

HAL Id: hal-03361676

<https://hal.science/hal-03361676v1>

Submitted on 1 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Amélioration du calcul de la courbure des éléments finis coques SFE

Sylvain COUËDO, Laëtitia DUGOU, Gérard RIO

Laboratoire Génie Mécanique et Matériaux, LG2M, Université de Bretagne-Sud
Rue de Saint Maudé, BP 92116, 56321 Lorient Cedex, France
couedo@univ-ubs.fr

Résumé :

Cet article traite de l'amélioration du calcul de la courbure des éléments SFE. Ce sont des éléments finis coques à trois degrés de liberté par noeud, qui se révèlent intéressants pour des problèmes en transformation finie, et ayant un temps de calcul réduit par rapport aux éléments coques classiques. Une limitation de ces éléments est la sensibilité à la distorsion du maillage. En effet pour des maillages d'éléments de taille irrégulière, le calcul de la courbure se dégrade fortement. Afin de pallier à ce problème, trois nouvelles formulations de la courbure ont été élaborées : une interpolation linéaire de la normale, une interpolation polynômiale et une interpolation de Sibson. Elles ont été comparées à la formulation actuelle sur deux maillages de courbure connue. Ceci a montré que l'interpolation polynômiale peut être une solution pour améliorer la précision du calcul de la courbure.

Abstract :

This article deals with the improvement of curvature calculation of the SFE thin shell finite elements. This element has only three degrees of freedom in translation per node. In order to calculate the curvature, translations at nodes of adjacent elements are needed. So, this element is called "Semi-Finite Element". The efficiency of computation depends on the accuracy of curvature calculation. Three new curvature formulations are studied : normal linear interpolation, polynomial interpolation and Sibson interpolants. Then they are compared with the current formulation on two meshes that curvature is known. The results show a quite good accuracy of the formulation based on polynomial interpolation.

Mots-clefs :

Élément fini coque sans degré de rotation ; Interpolation des voisins naturels ; Courbure

1 Introduction

Cet article présente le calcul de la courbure d'un élément coque SFE et différentes tentatives pour améliorer cette interpolation.

Les éléments SFE sont une famille d'éléments coques minces triangulaires à trois degrés de liberté en translation par noeud, formulés en coordonnées matérielles entraînées. Plusieurs éléments coques sans degré de liberté en rotation ont été développés par Brunet *et al.* (2006) et Oñate *et al.* (2005). Nous considérerons ici l'élément SFE développé par Laurent *et al.* (2001). Ces éléments se révèlent intéressants pour des problèmes en transformation finie, avec un temps de calcul réduit par rapport aux éléments coques classiques. Une limitation de ces éléments est la sensibilité à la distorsion du maillage. En effet, lorsque la taille des éléments est très irrégulière, le calcul de la courbure se dégrade fortement. Afin de palier à ce problème, plusieurs possibilités pour améliorer le calcul de la courbure ont été étudiées. Dans un premier temps, la formulation de l'élément coque est détaillée. Les coordonnées matérielles entraînées sont présentées, ainsi que quelques notions mathématiques concernant les tenseurs. Ensuite, la cinématique de coque utilisée est décrite. Puis, le calcul de la courbure de l'élément SFE est présenté en détails, ainsi que les différentes interpolations envisagées. Enfin, les résultats des différentes interpolations sont comparés sur deux maillages de courbure connue.

2 Théorie de coque non-linéaire

Les éléments coques SFE sont basés sur la théorie des coques minces et formulés en coordonnées matérielles entraînées. Nous rappelons quelques bases sur ces formulations, pour une présentation détaillée se référer à Laurent *et al.* (2001).

2.1 Coordonnées matérielles entraînées, préliminaires mathématiques

Les coordonnées matérielles sont une application du paramétrage curviligne. Ce paragraphe présente brièvement quelques notions de géométrie différentielle. Un solide continu tel qu'une de ces dimensions géométriques est beaucoup plus petite que les deux autres est appelé *coque* et est caractérisé par sa surface moyenne et son épaisseur (la plus petite de ces dimensions).

Introduisons un système de coordonnées curvilignes θ^i ($i = 1, 2, 3$), tel que $\theta^3 = 0$ définisse la surface moyenne. Le repérage d'un point matériel M de la coque est donné par son vecteur position : $OM(t) = X^a(\theta^i)I_a$. Celui-ci permet de définir les vecteurs g_i de la base naturelle (ou covariante), les vecteurs g^i de la base duale (ou contravariante) et les composantes g_{ij} , g^{ij}

du tenseur métrique : $g_i = \frac{\partial OM}{\partial \theta^i} = \frac{\partial X^a(\theta^i)}{\partial \theta^i} I_a = X^a_{,i} I_a$

et $G = g_{ij} g^i \otimes g^j = g^{ij} g_i \otimes g_j = \delta_j^i g_i \otimes g^j$.

Un point quelconque M de la coque est tel qu'il existe un point P de la surface moyenne et une épaisseur h permettant son repérage dans l'espace :

$$OM = OP + \theta^3 h a_3 \quad (1)$$

En tout point P de la surface moyenne, la base naturelle est constituée des vecteurs $a_\alpha = \frac{\partial P}{\partial \theta^\alpha} = \frac{\partial X^a}{\partial \theta^\alpha} I_a$ ($\alpha = 1, 2$). Le repérage d'un point dans l'épaisseur h est faite par la coordonnée θ^3 , suivant le vecteur a_3 (avec $\frac{-1}{2} \leq \theta^3 \leq \frac{1}{2}$). Le tenseur métrique A de la surface moyenne, également appelé première forme fondamentale de la surface, est alors défini par :

$$A = a_{\alpha\beta} a^\alpha \otimes a^\beta$$

Ses composantes sont le produit scalaire entre les vecteurs des bases naturelle et duale $a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta$ et $a^{\alpha\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$.

Le tenseur de courbure de la surface, également appelé seconde forme fondamentale de la surface, a pour expression :

$$B = b_{\alpha\beta} a^\alpha \otimes a^\beta$$

Les composantes du tenseur de courbure B sont $b_{\alpha\beta} = -a_\alpha \cdot a_{3,\beta}$. Les valeurs propres du tenseur de courbure sont les courbures principales de la surface moyenne, et sont notées ρ_1 et ρ_2 (ce sont les inverses des rayons de courbure, $\rho_i = \frac{1}{r_i}$). Les deux invariants communément retenus pour le tenseur de courbure sont : $\text{trace}(B) = \rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, appelée courbure moyenne et $\det(B) = \rho_1 \rho_2 = \frac{1}{R_1 R_2}$, appelé courbure totale.

2.2 Cinématique de coque mince

Le modèle de coque est fondé sur les hypothèses de Kirchhoff-Love, une définition de la déformation d'Almansi est présentée. Le repérage est donné par l'équation 1, les composantes du tenseur des déformations d'Almansi en grandes déformations sont :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta} + \theta^3 K_{\alpha\beta}^{(1)} + (\theta^3)^2 K_{\alpha\beta}^{(2)} \quad (2)$$

Le terme $\chi_{\alpha\beta}$ est le tenseur de déformations de la surface moyenne et représente l'effet de membrane. Les termes $K_{\alpha\beta}^{(1)}$ et $K_{\alpha\beta}^{(2)}$ sont liés au changement de courbure de la surface moyenne et représentent la déformation due à la courbure. Les termes du tenseur de courbure interviennent dans le calcul du tenseur de déformations. La précision du calcul de la courbure intervient donc directement dans le calcul des déformations d'où l'intérêt de l'étude présentée.

3 Élément fini coque SFE sans degré de liberté en rotation, courbure et fonction d'interpolation

Les éléments SFE sont une famille d'éléments coques minces à trois degrés de liberté en translation par noeud, qui s'appuie sur une technique de type différence finie (*Semi-Finite Element*) avec les éléments adjacents à l'élément considéré pour approcher la courbure.

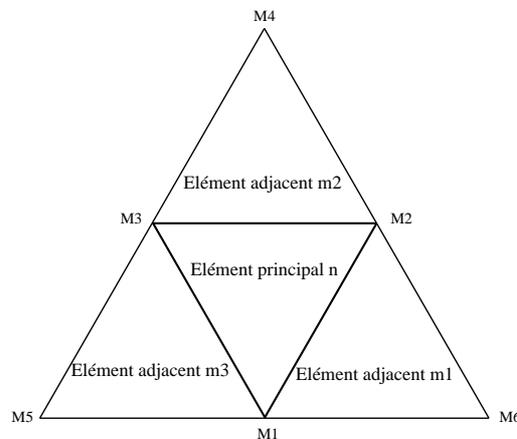


FIG. 1 – élément SFE triangulaire entouré de ses 3 voisins

Dans notre étude, nous considérons l'élément SFE triangulaire (cf figure 1) qui est défini par les 3 noeuds 1, 2 et 3, mais aussi par les noeuds 4, 5 et 6 qui interviennent dans la formulation de la courbure. Afin d'améliorer leur précision du calcul de la courbure sur un maillage distordu, nous présentons différentes méthodes d'interpolation après avoir introduit la prise en compte des conditions aux limites.

3.1 Conditions aux limites

Une attention particulière est portée sur les éléments à la frontière du domaine. En effet, ces éléments n'ont pas d'éléments adjacents. Pour calculer la courbure sur des frontières libres ou fixes, un élément virtuel adjacent est considéré, ce qui permet d'introduire des conditions aux limites. C'est un point important à prendre en compte dans la formulation de la déformation de l'élément fini coque SFE (équ. 2).

3.2 Calcul de la courbure d'un élément SFE

La méthode SFE3 est issue des travaux de G. RIO et H. LAURENT (Laurent *et al.* (2001)) et s'appuie sur les normales adjacentes, une interpolation linéaire, l'introduction de points H_i sur les arêtes du triangle et sur la définition de nouveaux vecteurs tangents. En effet, une normale est calculée en chaque point H_i sur les arêtes du triangle principal. Ensuite les vecteurs \mathbf{a}_α sont calculés en utilisant les fonctions d'interpolation φ_i aux points H_i (avec $\varphi_i(H_j) = \delta_{ij}$).

3.3 Interpolation Linéaire de la Normale (ILN)

Cette méthode est basée sur l'interpolation linéaire de la normale (ILN) aux centres de gravité des éléments adjacents m_i . L'élément SFE est projeté dans le plan de l'élément principal n en conservant les longueurs des arêtes des triangles adjacents, ceci afin de réaliser le calcul des fonctions d'interpolation des centres de gravité. Ensuite la normale \mathbf{a}_3 est calculée à partir de l'interpolation des normales des éléments m_i :

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{g}_3^{(m_i)} \varphi_i$$

3.4 Interpolation polynômiale

Le principe de cette méthode est de calculer la courbure à l'aide d'une fonction polynômiale. En se plaçant dans le plan de l'élément principal, une surface est construite par une fonction d'interpolation $z = f(x, y)$ aux 6 points de l'élément SFE. Un polynôme de degré 2 en x et en y a été choisi comme fonction d'interpolation : $f(x, y) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_6$.

Un point M est repéré par ses coordonnées $(x, y, z = f(x, y))$. Les vecteurs de la base naturelle ont donc pour expression : $\mathbf{a}_1 = (1, 0, \partial_x f(x, y))$ et $\mathbf{a}_2 = (0, 1, \partial_y f(x, y))$ et la normale est obtenue avec la formule : $\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|}$.

3.5 Interpolation de Sibson

Les fonctions d'interpolation de Sibson sont des fonctions d'interpolation dont le nombre de points varie en fonction de la géométrie. Ces fonctions sont notamment utilisées pour interpoler un grand nombre de données géophysiques espacées irrégulièrement, comme la température (Braun *et al.* (1995)). Certaines méthodes meshless, comme la *Natural Element Method* utilisent ces fonctions comme fonctions d'interpolation (Alfaro *et al.* (2006)). Une description détaillée est réalisée par Sukumar *et al.* (1998). Les fonctions d'interpolation de Sibson font parties de la famille de fonctions d'interpolation des voisins naturels.

3.5.1 Présentation

Ces fonctions sont fondées sur le diagramme de Voronoï, qui est une décomposition particulière d'un espace métrique déterminée par les distances à un ensemble discret de noeuds, et sur la triangulation de Delaunay. Les cellules de Voronoï ont pour définition :

$$T_I = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, x_I) < d(x, x_J), \forall J \neq I\}$$

Deux noeuds sont voisins naturels si leurs cellules de Voronoï ont une arête en commun. La triangulation de Delaunay est obtenue en connectant les noeuds ayant une arête commune de leurs cellules de Voronoï. Par extension, des cellules de Voronoï d'ordre 2 sont définies, ce sont les régions de l'espace où chaque point a comme plus proche voisin le noeud n_I et comme plus proche second voisin le noeud n_J :

$$T_{IJ} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, x_I) < d(x, x_J) < d(x, x_K), \forall K \neq I, J\}$$

Pour calculer les fonctions de Sibson, un point \mathbf{X} est introduit et une nouvelle triangulation est réalisée avec ce nouvel ensemble de noeuds, différente de l'ancienne seulement au niveau des voisins naturels du point \mathbf{X} . Les coordonnées des voisins naturels sont le rapport entre l'intersection de leurs cellules de Voronoï avec la surface de la cellule de Voronoï de \mathbf{X} :

$$\phi_i(\mathbf{X}) = \frac{S_i(\mathbf{X})}{S(\mathbf{X})}$$

où $S_i(\mathbf{X})$ est la surface de la cellule du second ordre de Voronoï de \mathbf{X} et du noeud n_i , $S(\mathbf{X})$ est la surface de la cellule du premier ordre de Voronoï de \mathbf{X}

3.5.2 Calcul de la courbure avec les fonctions de Sibson

Dans un premier temps, les triangles adjacents sont projetés dans le plan de l'élément principal en conservant les longueurs des arêtes des triangles adjacents. Ensuite les fonctions de Sibson sont calculées avec les nouvelles coordonnées des noeuds au milieu de chaque arête. On en déduit des vecteurs de la base naturelle à chaque arête. Enfin on réalise une interpolation de ces vecteurs au centre de gravité du triangle principal.

4 Comparaison des différents modèles d'interpolation de la courbure

Les différentes manières de calculer la courbure sont comparées sur deux maillages, dont la courbure est connue.

Le premier maillage est sphérique. Les noeuds d'un élément SFE sont placés sur 1/8ème de sphère de rayon R (figure 2). La position des points M_4 et M_5 peut varier grâce au paramètre a , longueur des côtés M_2M_4 et M_1M_5 . Ceci permet de faire varier la distorsion de l'élément. Un deuxième maillage est un cylindre de rayon R . On considère les noeuds d'un élément SFE placés sur 1/8ème de cylindre de rayon R à l'aide du même paramètre a de distorsion. La position des points M_4 et M_5 peut encore varier.

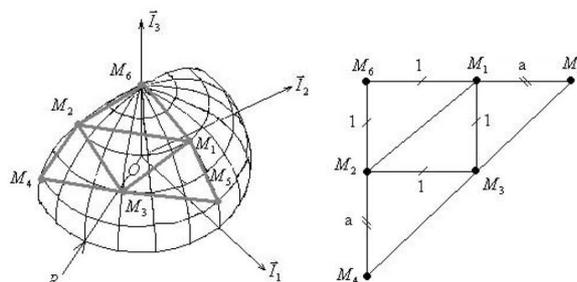


FIG. 2 – Géométrie du maillage pour la sphère

Les tenseurs de courbure de chaque modèle ont été évalués en un point particulier : le centre de gravité de l'élément central n . L'erreur commise sur la courbure est évaluée en comparant la trace des tenseurs de courbure. La trace est calculée à partir de la formule :

$$trace(B) = b_\alpha^\alpha = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta}$$

Les figures 3 et 4 représentent l'erreur commise sur la trace pour les différents modèles. Le modèle utilisant la fonction polynômiale donne les meilleurs résultats : l'erreur sur la trace est très proche de 0 quand le rayon augmente et est peu sensible à la distorsion.

5 Conclusions

Les éléments SFE sont des éléments finis coques sensibles à la distorsion. Différents modèles d'interpolation de la courbure ont été comparés sur deux géométries particulières de cour-

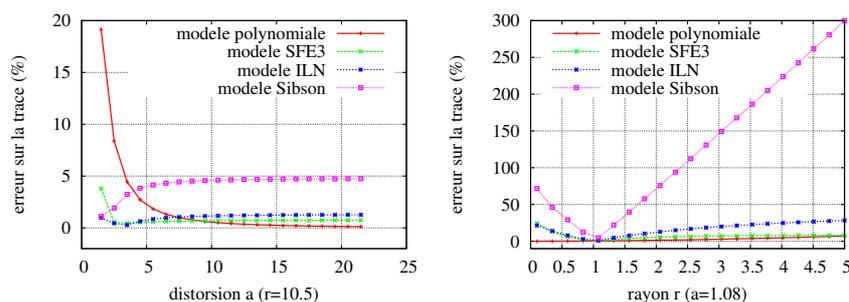


FIG. 3 – Erreur sur la trace en fonction du rayon et du paramètre de distorsion pour la sphère (en %)

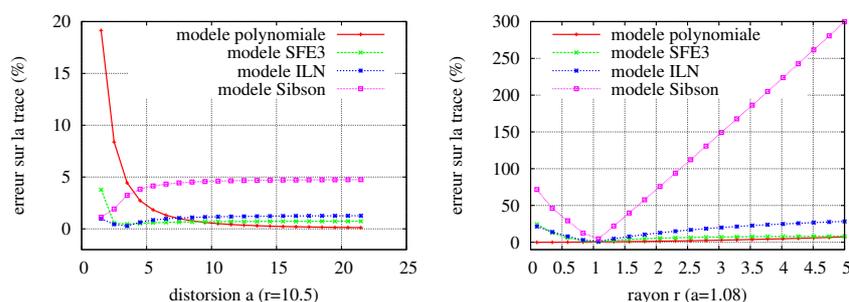


FIG. 4 – Erreur sur la trace en fonction du rayon et du paramètre de distorsion pour le cylindre (en %)

bures connues. L'étude du calcul de la courbure montre que l'interpolation polynômiale peut être une solution pour améliorer la précision de la courbure. Les résultats obtenus avec les fonctions de Sibson, fonctions d'interpolation pour des points espacés irrégulièrement n'ont pas été à la hauteur des attentes, dû au nombre trop faible de points pris en compte (4 en général) contrairement à leur utilisation classique dans le cadre des méthodes meshless où leurs utilisations s'avèrent performantes. Il restera à confirmer ces premiers résultats sur des calculs classiques en éléments finis.

Références

- I. Alfaro And J. Yvonnet And E. Cueto And F. Chinesta And M. Doblare 2006 Meshless method with application to metal forming *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **195** 66671-6675
- J. Braun And M. Sambridge 1995 A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids *Nature* **376** 665-660
- M. Brunet And F. Sabourin 2006 Analysis of a rotation-free 4-node shell element *Int. J. Num. Meth. Engrg.* **66** 1483-1510
- H. Laurent AND G. Rio 2001 Formulation of a thin shell finite element with C^0 and convected material frame notion *Computational Mechanics* **27** 218-232
- E. Oñate And F.G. Flores 2005 Advances in the formulation of the rotation-free basic shell triangle *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **194** 2406-2443
- N. Sukumar And B. Moran And T. Belytschko 1998 The natural element method in solid mechanics *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **43** 839-887