



**HAL**  
open science

# Démarche expérimentale, théorique et numérique dans le cadre de travaux pratiques en élasticité linéaire : exemple du disque en compression

Jérôme Chambert, Nouira Hichem, Jacques Duffaud

## ► To cite this version:

Jérôme Chambert, Nouira Hichem, Jacques Duffaud. Démarche expérimentale, théorique et numérique dans le cadre de travaux pratiques en élasticité linéaire : exemple du disque en compression. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03361675

**HAL Id: hal-03361675**

**<https://hal.science/hal-03361675v1>**

Submitted on 1 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Démarche expérimentale, théorique et numérique dans le cadre de travaux pratiques en élasticité linéaire : exemple du disque en compression

Jérôme Chambert, Hichem Noura & Jacques Duffaud

Université de Franche-Comté  
Institut FEMTO-ST – UMR 6174  
Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaléat  
24 rue de l'Épitaphe, 25000 Besançon  
jerome.chambert@univ-fcomte.fr

### Résumé :

*Dans le cadre d'une formation en mécanique, les travaux pratiques de mécanique des milieux déformables sont nécessaires aux étudiants afin qu'ils puissent mettre en pratique des notions abstraites tels que les tenseurs des contraintes et des déformations. Afin de mieux adapter ces séances de travaux pratiques aux attentes des étudiants actuels, nous avons choisi de décomposer ces séances en parties expérimentale et numérique. L'objectif de cet article est de présenter un exemple de travaux pratiques (compression d'un disque le long d'un diamètre) et de montrer les apports pédagogiques de la démarche adoptée pour l'étudiant.*

### Abstract :

*In mechanical engineering background, the lab works of continuum mechanics are necessary for the students to put abstract knowledge such as stress and strain tensors into practice. In order to adapt these lab works to the demands of students, we have chosen to decompose these lab works into experimental and numerical parts. The main purpose of this paper is to present an example of lab works (compression of a disk along a diameter) and to show the educational benefits of the chosen approach for student.*

### Mots-clefs :

**élasticité linéaire ; extensométrie par jauge ; méthode des éléments finis**

### 1 Introduction

La formation en mécanique au sein de l'université de Franche-Comté à Besançon est dispensée aux étudiants de diverses filières : IUT GMP, IUP GMP, licence et master de Mécanique et Ingénieries, Institut Supérieur d'Ingénieurs de Franche-Comté (ISIFC, école d'ingénieurs spécialisée en instrumentation et techniques biomédicales). La mécanique des milieux déformables est souvent considérée par les étudiants comme une matière théorique et difficile. Afin de s'approprier les notions abstraites de contrainte et de déformation, il est nécessaire que l'étudiant effectue des séances de travaux pratiques. Cependant, faisant suite à un certain désintérêt des étudiants pour les travaux pratiques essentiellement expérimentaux d'élasticité linéaire, l'équipe enseignante a entrepris depuis 2003 une refonte de ces enseignements fondée sur une démarche alliant les aspects expérimentaux, théoriques et numériques.

Le but de ce papier est de présenter un exemple de travaux pratiques (TP) d'élasticité linéaire d'une durée de quatre heures ayant fait l'objet d'une réactualisation : un disque en alliage d'aluminium est soumis à un effort de compression appliqué par deux poinçons diamétralement opposés. Ce papier s'articule autour d'une méthodologie similaire à celle

proposée par Chevalier et Raka (2004) en mettant l'accent sur les apports pédagogiques pour l'étudiant. Le début du TP consiste à la mise en œuvre expérimentale par jauges de déformations. Puis, nous présentons la solution théorique du disque en compression diamétrale, qui est un problème classique d'élasticité linéaire en état de contraintes planes (Timoshenko et Goodier, 1961). Après avoir modélisé le disque, nous effectuons ensuite des simulations par éléments finis en utilisant le logiciel RDM-Le-Mans (RDM6) développé par Debard (2001). Puis, une analyse comparative entre les résultats théoriques (élasticité linéaire) et numériques (RDM6) est effectuée en termes de cartes iso-contraintes et de courbes d'évolution des contraintes. Enfin, les résultats théoriques et numériques sont comparés aux résultats expérimentaux.

## 2 Présentation du dispositif expérimental

Les figures 1 et 2 présentent le dispositif expérimental constitué :

- d'un disque en alliage d'aluminium AU4G de rayon  $R = 150$  mm, d'épaisseur  $e = 20$  mm, de module d'Young  $E = 74\,000$  MPa, de coefficient de Poisson  $\nu = 0,33$  et de limite d'élasticité en traction  $\sigma_e = 240$  MPa. Le disque possède deux encoches diamétralement opposées de rayon  $a = 5$  mm ;
- d'un système de mise en charge composé d'un bâti et d'un vérin hydraulique actionnable manuellement pour l'application du chargement de compression diamétrale par l'intermédiaire de deux poinçons demi-cylindriques (un mobile et un fixe) ;
- d'un pont de jauges permettant de mesurer les déformations au niveau d'une jauge simple collée au centre du disque suivant la direction verticale (jauge  $Y_C$ ) ; et d'une rosette à  $120^\circ$ , composée de trois jauges ( $f, g, h$ ), collée au point de coordonnées ( $x_1 = 60$  mm,  $x_2 = 60$  mm) avec la jauge  $g$  dirigée suivant la direction verticale.

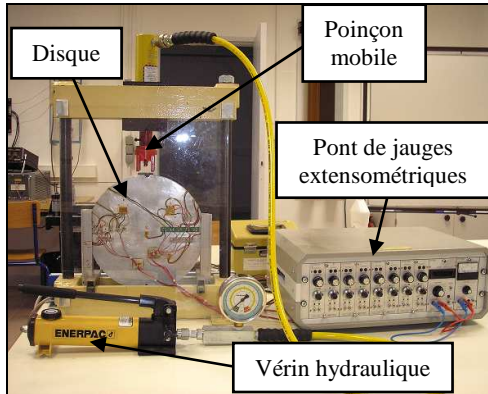


FIG. 1 – Dispositif expérimental.

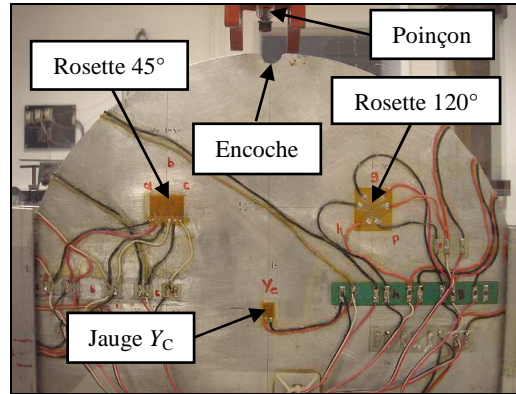


FIG. 2 – Disque en compression.

## 3 Étude analytique

Sur la figure 3, considérons un disque de rayon  $R$  soumis à deux forces  $-p\bar{x}_2$  et  $p\bar{x}_2$  agissant respectivement en deux points  $A$  et  $B$  diamétralement opposés. Sachant que le module  $p$  désigne une force par unité d'épaisseur, l'effort global de compression appliqué sur le disque est égal à  $F = p \cdot e$ . On suppose que le disque est en état de contraintes planes. Le champ de contraintes solution de ce problème d'élasticité plane est obtenu en superposant les trois états de contraintes suivants :

- une distribution radiale simple produite par la force  $-p\bar{x}_2$  appliquée au point  $A$  ;
- une distribution radiale simple produite par la force  $p\bar{x}_2$  appliquée au point  $B$  ;

- une traction radiale uniforme  $p / (\pi R)$  sur la frontière du disque.

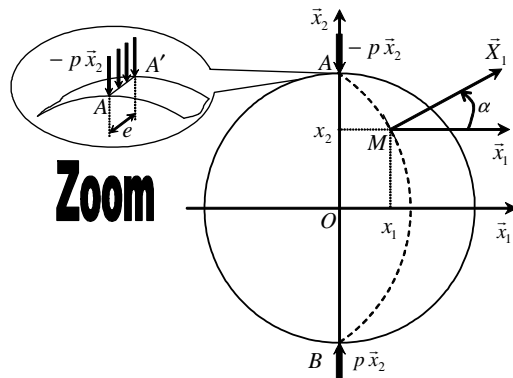


FIG. 3 – Géométrie.

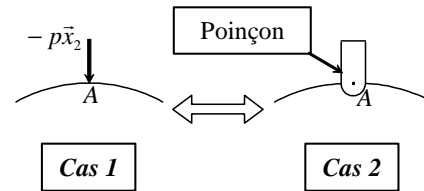


FIG. 4 – Application du chargement.

Dans la base orthonormée directe  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ , les composantes non nulles du tenseur des contraintes s'écrivent finalement, en tout point  $M(x_1, x_2)$  du disque, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{p}{\pi R} - \frac{2p}{\pi} \frac{(R-x_2)x_1^2}{[x_1^2 + (R-x_2)^2]^2} - \frac{2p}{\pi} \frac{(R+x_2)x_1^2}{[x_1^2 + (R+x_2)^2]^2}; \\ \sigma_{22} &= \frac{p}{\pi R} - \frac{2p}{\pi} \frac{(R-x_2)^3}{[x_1^2 + (R-x_2)^2]^2} - \frac{2p}{\pi} \frac{(R+x_2)^3}{[x_1^2 + (R+x_2)^2]^2}; \quad \tan \alpha = \frac{2x_1x_2}{x_1^2 - x_2^2 + R^2}; \\ \sigma_{12} &= \frac{2p}{\pi} \frac{(R-x_2)^2 x_1}{[x_1^2 + (R-x_2)^2]^2} - \frac{2p}{\pi} \frac{(R+x_2)^2 x_1}{[x_1^2 + (R+x_2)^2]^2};\end{aligned}\quad (1)$$

où  $\alpha = (\bar{x}_1, \bar{X}_1)$  est l'angle entre la direction  $\bar{x}_1$  et la direction principale  $\bar{X}_1$  (voir figure 3). Il est important de remarquer que le modèle proposé avec deux forces concentrées  $\pm p \bar{x}_2$  (cas 1 sur la figure 4) est une idéalisation de la réalité. Sur le montage expérimental, le disque est soumis à des forces réparties appliquées par les poinçons (cas 2 sur la figure 4) qui se logent dans des encoches de forme complémentaire usinées dans le disque (voir figure 2). Par la suite, nous montrerons que ces deux chargements (cas 1 et 2) sont équivalents.

Afin de préparer cette séance de travaux pratiques sur la compression d'un disque le long d'un diamètre, la résolution de ce problème d'élasticité plane peut être préalablement proposée aux étudiants en travaux dirigés.

#### 4 Démarche expérimentale

Dans un premier temps, les étudiants doivent régler manuellement le pont de jauges extensométriques. Puis, ils doivent appliquer une pression de 300 bars, qui est mesurée par un manomètre. Les valeurs expérimentales des déformations données par les jauges  $Y_C, f, g$  et  $h$  sont listées dans le tableau 1.

$\varepsilon_{Y_C}(0,0)$	$\varepsilon_f(60,60)$	$\varepsilon_g(60,60)$	$\varepsilon_h(60,60)$	$\varepsilon_{11}(60,60)$	$\varepsilon_{22}(60,60)$	$\varepsilon_{33}(60,60)$	$\varepsilon_{12}(60,60)$
-229,82	-46,79	-142,94	64,56	59,49	-142,94	41,1	64,29

TAB. 1 – Valeurs expérimentales des déformations (exprimées en  $10^{-6}$ )

En utilisant le logiciel RDM6 – Dépouillement des rosettes (Debard, 2001) avec les mesures expérimentales  $\varepsilon_f$ ,  $\varepsilon_g$ , et  $\varepsilon_h$ , on obtient les composantes expérimentales, au point (60, 60), du tenseur des déformations dont les valeurs sont listées dans le tableau 1. Le dispositif expérimental n'est pas équipé de capteur de force pour mesurer l'effort appliqué sur le disque. Afin de déterminer cet effort, il est proposé aux étudiants de comparer les valeurs expérimentale et analytique de la déformation  $\varepsilon_{22}$  au centre du disque. La valeur expérimentale correspond à la déformation  $\varepsilon_{Yc}$  donnée par la jauge  $Y_C$ . L'expression analytique  $\varepsilon_{22}(0, 0)$  est obtenue en utilisant la loi de Hooke généralisée et l'équation (1). Finalement, on obtient :

$$p = -\frac{\pi R E \varepsilon_{Yc}}{3 + \nu} = 2\,406,67 \text{ N/mm} ; \quad F = p \cdot e = 48\,133 \text{ N} \quad (2)$$

Ces résultats seront utilisés pour les calculs analytiques (théorie) et numériques (RDM6).

## 5 Modélisation numérique

Du fait des symétries de géométrie et de chargement, le système étudié est modélisé par un quart de disque (voir figure 5). La modélisation des conditions aux limites, schématisées sur la figure 5, constitue une des principales difficultés rencontrées par les étudiants. Le maillage du quart de disque, effectué par une triangulation de Delaunay, est composé de 6 578 éléments triangulaires (à 6 nœuds) et de 13 405 nœuds (voir figure 6). Le maillage est raffiné au niveau de l'encoche. L'hypothèse des contraintes planes est adoptée. On considère deux types de chargement de même torseur d'effort résultant : cas 1 (effort concentré) et cas 2 (effort réparti le long de l'encoche), qui sont représentés sur la figure 6. Quel que soit le point  $M (r = a, \theta)$  appartenant à la surface de l'encoche  $S_{en}$ , le cas 2 est modélisé par une distribution radiale simple dont le vecteur contrainte est défini, dans la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{x}_3)$ , par :

$$\vec{T}(M \in S_{en}, -\vec{e}_r) = \overline{\overline{\sigma}} \cdot (-\vec{e}_r) = -\sigma_{rr} \vec{e}_r = -\frac{2F}{\pi a e} \cos \theta \vec{e}_r \quad (3)$$

où  $\sigma_{rr}$  est la contrainte normale en  $M$  sur la facette de normale  $\vec{e}_r = \overline{AM} / a$  et  $\theta = (-\vec{x}_2, \vec{e}_r)$ .

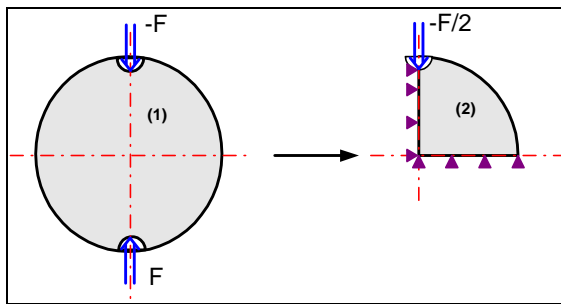


FIG. 5 – Modélisation.

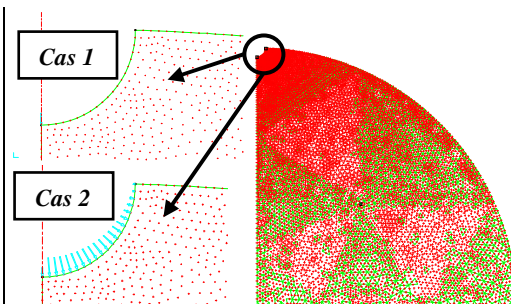


FIG. 6 – Chargement et maillage.

## 6 Résultats et discussion

### 6.1 Vérification du principe de Saint-Venant

Le principe de Saint-Venant est très utile car il permet d'obtenir la solution de manière analytique ou numérique à de nombreux problèmes d'élasticité relativement complexes. L'énoncé de ce principe est le suivant :

*Si une distribution de forces extérieures agissant sur une partie  $S_{SV}$  de la frontière d'un solide élastique est remplacée par une autre distribution statiquement équivalente (c'est-à-dire*

ayant le même torseur résultant), alors les champs de contraintes et de déplacements restent pratiquement identiques dans les zones du solide suffisamment éloignées de  $S_{SV}$ .

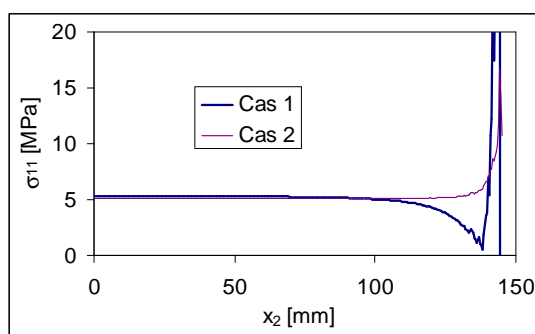


FIG. 7 – Évolution de  $\sigma_{11}$  selon l'axe  $x_1 = 0$ .

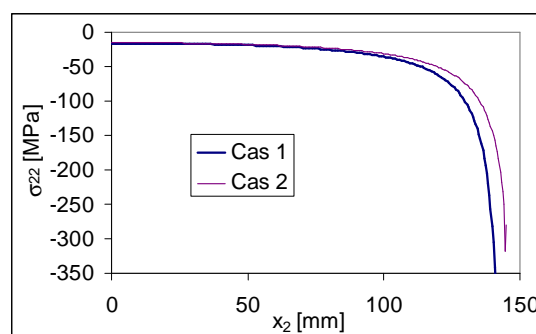


FIG. 8 – Évolution de  $\sigma_{22}$  selon l'axe  $x_1 = 0$ .

Les figures respectives 7 et 8 représentent les évolutions respectives des composantes des contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  en fonction de l'ordonnée  $x_2$  obtenues par le logiciel RDM6 pour des chargements équivalents appliqués sous une forme concentrée (cas 1) et répartie (cas 2). On remarque que les valeurs de  $\sigma_{11}$  (respectivement  $\sigma_{22}$ ) sont presque identiques pour une valeur de  $x_2$  comprise dans l'intervalle  $[0 ; 105]$  (respectivement  $[0 ; 80]$ ). Puis, pour des valeurs proches de la zone d'application du chargement ( $x_2 = 145$  mm), on observe que les valeurs des contraintes obtenues par les deux types de chargement diffèrent de manière significative. Grâce à cette vérification numérique du principe de Saint-Venant, les étudiants comprennent l'intérêt d'une modélisation simplifiée qui consiste à remplacer des conditions aux limites en effort complexes par un torseur d'action équivalent. Par la suite, nous ne considérerons que le cas de charge 2 (effort réparti) pour les simulations numériques effectuées par RDM6.

## 6.2 Confrontation entre les études analytique et numérique

Sur la figure 9, la distribution de la composante de cisaillement  $\sigma_{12}$  du tenseur des contraintes obtenue à partir de l'équation (1) correspondant à la solution analytique est visualisée à l'aide du logiciel MATLAB®. La figure 10 représente la distribution de la contrainte  $\sigma_{12}$  déterminée par RDM6. Nous constatons un bon accord entre les résultats analytiques (théorie de l'élasticité linéaire) et numériques (méthode des éléments finis RDM6).

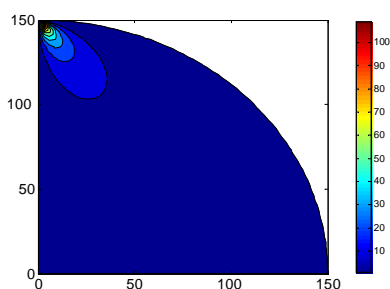


FIG. 9 – Iso-contrainte  $\sigma_{12}$  analytique.

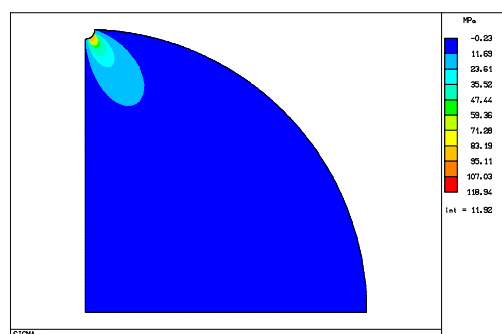


FIG. 10 – Iso-contrainte  $\sigma_{12}$  numérique.

Les figures 11 et 12 montrent respectivement les courbes d'évolution des contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  en fonction de l'abscisse  $x_1$  obtenues par la théorie de l'élasticité et par la méthode des éléments finis (RDM6). Quelle que soit la composante des contraintes, on remarque une très bonne concordance entre les courbes.

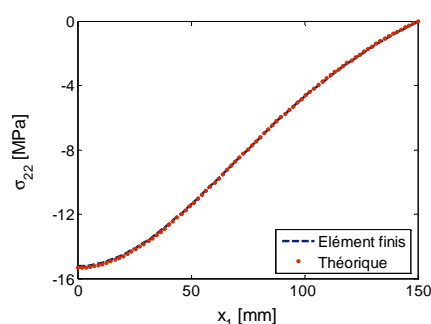
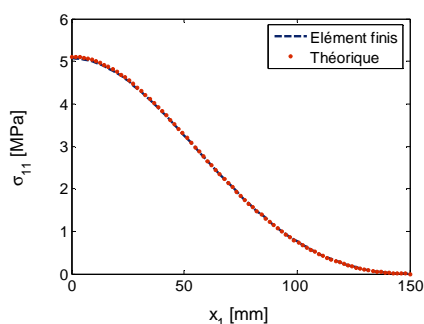


FIG. 11 – Évolution de  $\sigma_{11}$  selon l'axe  $x_2 = 0$ . FIG. 12 – Évolution de  $\sigma_{22}$  selon l'axe  $x_2 = 0$ .

### 6.3 Comparaison au point (60,60)

Les étudiants doivent effectuer une analyse comparative entre les résultats expérimentaux, analytiques (théorie de l'élasticité) et numériques (RDM6) au point de coordonnées (60, 60). Les résultats obtenus sont listés dans le tableau 2. Les valeurs expérimentales des contraintes sont déduites des valeurs expérimentales des déformations (voir tableau 1) en utilisant la loi de Hooke généralisée. L'angle  $\alpha$  expérimental est obtenu grâce au logiciel RDM6-Rosettes. Les valeurs analytiques sont calculées à l'aide de l'équation (1). Les valeurs numériques sont déterminées grâce au logiciel RDM6. L'écart relatif est calculé par rapport à la valeur expérimentale. On constate que les résultats analytiques et numériques au point (60, 60) sont en bon accord avec les résultats expérimentaux avec des écarts relatifs toujours inférieurs à 10 %. En outre, on remarque que les valeurs analytiques et numériques sont quasiment identiques.

	Valeur expérimentale	Valeur analytique		Valeur numérique	
	$M(60, 60)$	$M(60, 60)$	Écart relatif	$M(60, 60)$	Écart relatif
$\sigma_{11}$	1,023 MPa	0,97 MPa	5,18 %	0,99 MPa	3,23 %
$\sigma_{22}$	-10,24 MPa	-9,29 MPa	9,28 %	-9,28 MPa	9,38 %
$\sigma_{12}$	3,58 MPa	3,66 MPa	2,23 %	3,63 MPa	1,4 %
$\alpha$	16,21°	17,74°	9,44 %	17,76°	9,56 %

TAB. 2 – Récapitulatif des résultats au point (60, 60)

## 7 Conclusion

Au cours de la séance de TP relative à un disque en compression diamétrale, les étudiants travaillent en binôme et doivent mettre en œuvre des démarches expérimentale par jauges de déformations, analytique par la théorie de l'élasticité linéaire et numérique par la méthode des éléments finis. A l'issue de la séance, les étudiants sont amenés à faire la synthèse des résultats obtenus dans un compte rendu. Cette séance doit permettre aux étudiants de comprendre, d'une part que l'approche expérimentale reste essentielle en mécanique, et d'autre part que toute simulation numérique dépend du degré de complexité de la modélisation utilisée.

## Références

- Chevalier, L. & Raka, B. 2004 Confrontation RdM-MMC : une démarche expérimentale de validation. *Technologie* **129**, 33-41
- Debard, Y. 2001 Guide d'utilisation de RDM6 – Éléments finis, Version 6.13.
- Timoshenko, S. & Goodier, J.N. 1961 Théorie de l'élasticité, Librairie Polytechnique, Ch. Béranger, Paris.