



**HAL**  
open science

# Champs de pression approchés par défaut pour un écoulement permanent à surface libre dans un milieu poreux

Alain Corfdir

► **To cite this version:**

Alain Corfdir. Champs de pression approchés par défaut pour un écoulement permanent à surface libre dans un milieu poreux. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03361143

**HAL Id: hal-03361143**

**<https://hal.science/hal-03361143v1>**

Submitted on 1 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Champs de pression approchés par défaut pour un écoulement permanent à surface libre dans un milieu poreux

Alain Corfdir

Institut Navier, centre commun ENPC-LCPC  
CERMES

ENPC, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, 77455 Marne-la-Vallée, France  
corfdir@cermes.enpc.fr

### Résumé :

*Sous certaines hypothèses, on peut étudier la stabilité d'un milieu poreux soumis à un écoulement permanent à surface libre par la méthode cinématique du calcul à la rupture. Il faut alors disposer ou de la solution exacte de l'écoulement ou à défaut de solutions approchées par défaut du champ de pression. Nous rappelons la possibilité de vérifier qu'un champ de pression approché est bien partout inférieur à la solution exacte sans connaître cette solution exacte. Pour cela, nous supposons que ces solutions approchées satisfont des conditions aux limites ou une condition de champ relâchées par rapport à celles vérifiées par la solution exacte. Nous présentons des exemples de telles solutions et nous montrons la possibilité de combiner deux solutions.*

### Abstract :

*Assuming some hypotheses, one can study the stability of a porous medium subjected to a permanent drainage with free surface by the kinematic method of yield design. It is necessary then to have or the exact solution of the pressure field or at least some specific approximate solutions of the pressure field that bounds the exact solution by below. We remind the possibility of verifying that an approximate field of pressure is everywhere lower than the exact solution without knowing this exact solution. For it, we shall suppose that these approximate solutions satisfy conditions loosened with regard to those verified by the exact solution. We present examples of such solutions and we show how two solutions can be combined.*

### Mots-clefs :

**Milieu poreux, surface libre, analyse limite**

### 1 Introduction

La méthode cinématique du calcul à la rupture appliqué aux matériaux non poreux permet d'obtenir une condition nécessaire de stabilité sans faire d'hypothèses sur l'état de contrainte à l'intérieur du système (Salençon, 1983). Sous certaines hypothèses, ce résultat a été étendu aux matériaux poreux saturés : il est possible d'obtenir une condition cinématique sans faire d'hypothèses sur le champ de contraintes ni sur le champ de pression à l'intérieur du système (Corfdir, 2004). Dans le cas d'un écoulement à surface libre, on a proposé le recours à des champs de pression approchés permettant d'obtenir aussi une borne cinématique rigoureuse (Corfdir, 2006a,b). Nous allons rappeler brièvement cette dernière démarche puis donner de nouveaux exemples de construction de champ de pressions approchés.

## 2 Condition cinématique pour un milieu poreux avec un champ de pression approché

On considère le milieu poreux  $\Omega$  constitué d'un squelette solide et d'un espace poreux dont tout point est supposé ou vide ou saturé de liquide. Le système mécanique considéré comprend à la fois le squelette et l'éventuel fluide inclus dans l'espace poreux. Sous certaines hypothèses, on peut établir l'existence d'un tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  décrivant les efforts intérieurs (voir par exemple Dormieux et Bourgeois, 2004). Ce tenseur est le tenseur des contraintes totales et représente les efforts intérieurs sur les deux phases. On adopte la convention de la mécanique des milieux continus pour les champs de contraintes : les tractions sont comptées positivement. On se limite au cas où le critère de résistance peut être ramené à une condition portant uniquement sur les contraintes effectives.

On définit alors un domaine de résistance  $G'$  en contraintes effectives.

$$\underline{\underline{\sigma'}} = \underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{1}} \in G' \quad (1)$$

On fait l'hypothèse complémentaire suivante sur le domaine  $G'$  :

$$\underline{\underline{\sigma'}} \in G' \Rightarrow (\underline{\underline{\sigma'}} - \lambda\underline{\underline{1}}) \in G', \forall \lambda \geq 0 \quad (2)$$

Cette condition (2) est satisfaite pour les critères  $G'$  usuels isotropes comme les critères de Tresca, de Mises, de Coulomb, de Drucker-Prager. Elle joue un rôle central dans toute la suite.

On désigne par  $p'$  un champ de pression approché par défaut. On supposera que ce champ est partout positif ou nul et est continu. On pose donc :

$$p \geq p' \geq 0 \quad (3)$$

Il y a encore une difficulté : le poids volumique en un point varie selon qu'il y a ou non présence de fluide dans l'espace poreux en ce point. La puissance des forces extérieures va donc dépendre de la position de la surface libre (Fig. 1a). Il faut donc s'assurer que la puissance des forces extérieures calculées avec le champ de pression approché est inférieure à celle calculée avec le champ de pression réel.

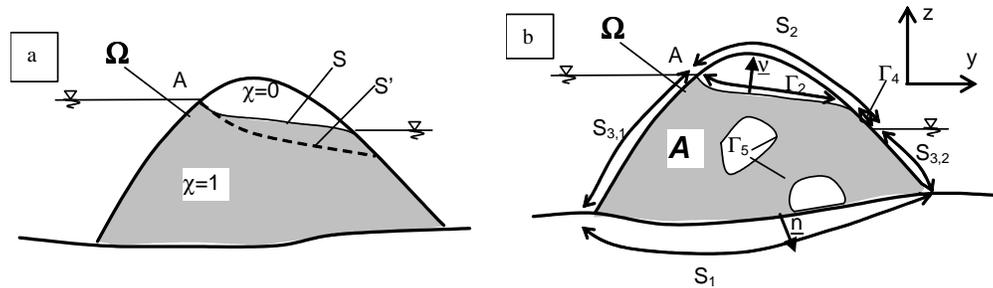


FIG. 1 – Ecoulement : (a) surface libre exacte et approché, (b) notations.

Une manière de résoudre cette difficulté est de se limiter à des champs cinématiques  $\hat{\underline{\underline{U}}}$  tels que la quantité  $\underline{\underline{e}}_z \cdot \hat{\underline{\underline{U}}}$  soit positive en tout point de la zone supposée sèche c'est-à-dire tel que  $\chi'=0$  ( $\chi'$  (respectivement  $\chi$ ) est la fonction caractéristique de l'ensemble des points de  $\Omega$  tels que  $p'>0$  (respectivement  $p>0$ ) voir Fig. 1a) :

$$\underline{\underline{e}}_z \cdot \hat{\underline{\underline{U}}} \geq 0 \text{ si } \chi' = 0 \quad (4)$$

Alors on peut montrer que la condition cinématique obtenue avec un champ de pression  $p'$  satisfaisant (2) et un champ de vitesse satisfaisant (4) est bien une condition nécessaire de stabilité pour le problème avec le champ de pression réel (inconnu)  $p$ .

### 3 Critères pour des champs de pressions approchés par défaut

Nous rappelons ici des résultats (Corffdir, 2006b) basés sur les travaux de Chipot (1984). On suppose que la perméabilité est homogène et isotrope, que l'écoulement est permanent et que les forces inertielles sont négligeables. Pour alléger les notations, on suppose dans cette partie 3 que l'on choisit les unités de telle sorte que le poids volumique du fluide  $\gamma_f$  et la perméabilité  $k$  (supposée homogène et isotrope) sont égaux à l'unité. Les champs approchés que nous allons considérer sont tels que  $p' \geq 0$  et que certaines des égalités vérifiées par la solution exacte  $p$  soient remplacées par des inégalités.

La frontière de  $\Omega$  est décomposée en trois parties :  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  (Fig. 1b). On peut envisager a priori l'apparition de surfaces libres intérieures  $\Gamma_5$ . La frontière de la zone saturée  $A$  (où  $p > 0$ ) est alors constituée de la partie de  $S_1$  où  $p > 0$ , de  $S_3$ , de la surface libre  $\Gamma_2$ , du bord mouillé  $\Gamma_4$  et éventuellement de  $\Gamma_5$ . On suppose que sur une verticale, on rencontre au plus un point de  $S_1$ . Le débit volumique sortant  $q_d$  est donné sur  $S_1$ , la pression  $p_d$  sur  $S_2 \cup S_3$ .

Les conditions sur les bords de  $\Omega$  et de  $A$  s'écrivent en fonction de  $p$  comme suit :

$$-\nabla(p+z).\underline{n} = q_d \text{ sur } S_1 \text{ si } p > 0 \quad (5)$$

$$p = 0, -\nabla(p+z).\underline{n} \geq 0 \text{ sur } \Gamma_4 \quad (6)$$

$$p = p_d \geq 0 \text{ sur } S_2 \cup S_3 \text{ avec } p_d = 0 \text{ sur } S_2 \quad (7)$$

$$p = 0, -\nabla(p+z).\underline{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \Gamma_5 \quad (8)$$

La loi de Darcy et la loi de conservation du fluide donnent :

$$\Delta p = 0 \text{ si } p > 0 ; p = 0 \text{ sinon} \quad (9)$$

On considère des solutions approchées  $p'$  vérifiant les conditions suivantes:

$$-\nabla(p'+z).\underline{n} = g \text{ sur } S_1 \text{ si } p' > 0 \text{ avec } g \geq q_d \quad (10)$$

$$p' = 0, -\nabla(p'+z).\underline{n} \geq 0 \text{ sur } \Gamma'_4 \quad (11)$$

$$p' = p'_d \text{ sur } S_2 \cup S_3 \text{ avec } p_d \geq p'_d \geq 0 \text{ et } p'_d = 0 \text{ sur } S_2 \quad (12)$$

$$p' = 0 \text{ sur } \Gamma'_2 \cup \Gamma'_5; -\nabla(p'+z).\underline{v} = 0 \text{ sur } \Gamma'_5; -\nabla(p'+z).\underline{v} = h \text{ sur } \Gamma'_2 \text{ avec } h \geq 0 \quad (13)$$

$$\Delta p' = f \text{ avec } f \geq 0 \text{ si } p' > 0; p' = 0 \text{ sinon} \quad (14)$$

Utilisant les méthodes de Chipot (1984), il est possible de montrer qu'une solution forte du système (10-14) est une solution d'un problème faible. Sous réserve de l'unicité de la solution de ce problème faible associé, on peut vérifier qu'une solution approchée vérifiant les conditions (10-14) est un minorant de la solution exacte.

## 4 Exemples de champ de pression approché

### 4.1 Barrage à parois verticales compris entre deux réservoirs

On considère un barrage vertical reposant sur un substratum horizontal imperméable (Fig. 2a). Le système poreux considéré est le rectangle de base  $L$ .

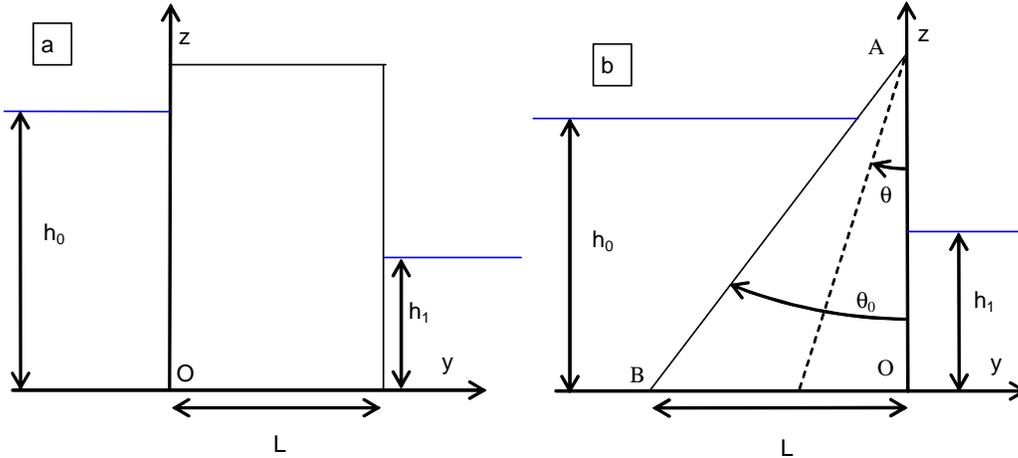


FIG. 2 – Recherche de champ de pression approché pour un barrage :  
(a) à parois verticales, (b) avec une paroi verticale et l'autre inclinée.

On propose d'utiliser la solution très simple suivante en notant  $\gamma_f$  le poids volumique du fluide :

$$p'(x,z) = \gamma_f \left( (h_0 - z) + \frac{y}{L} (h_1 - h_0) \right) \quad \text{si } z < h_0 - \frac{y}{L} (h_0 - h_1), \quad p'=0 \quad \text{sinon} \quad (15)$$

Ce champ  $p'$  satisfait en fait les conditions à la limite de la solution exacte sur le fond imperméable et sur les bords où la pression est imposée et strictement positive ; il satisfait aussi la condition sur le laplacien (9). Ce n'est que sur la surface libre que ce champ ne satisfait pas les conditions vérifiées par la solution exacte (8) mais seulement la condition relâchée (13).

### 4.2 Barrage avec une paroi amont inclinée et une paroi aval verticale

On considère un barrage entre deux parois, la paroi amont étant inclinée, la paroi aval étant verticale (Fig. 2b). Le substratum horizontal est toujours imperméable. On considère le champ de pression approché  $p'$  défini par :

$$p' = \gamma_f \left( (h_0 - h_1) \frac{\theta}{\theta_0} + (h_1 - z) \right) \quad \text{si } \left( (h_0 - h_1) \frac{\theta}{\theta_0} + (h_1 - z) \right) > 0, \quad p'=0 \quad \text{sinon} \quad (16)$$

La surface libre s'obtient en écrivant  $p'=0$ . On vérifie que le laplacien est nul, que les conditions aux limites hydrostatiques exactes (7) sont vérifiées sur les deux bords BA et OA. On vérifie également les conditions relâchées (10) sur le fond imperméable et (13) sur la surface libre.

### 4.3 Conditions de raccordement entre deux solutions et exemple

On peut envisager des solutions par zone (ou par « fragment » comme dans Harr, 1977) . Il faut pour cela que les différents types de solutions puissent se raccorder les uns aux autres. Pour cela, Harr se limite à des bords verticaux avec une pression variant linéairement sur ces bords.

Etudions les conditions à satisfaire pour notre besoin spécifique. On suppose que les deux solutions se raccordent le long d'une surface  $\Sigma$ . On suppose que les deux solutions de départ vérifient (10-14) avec une condition de pression imposée sur  $\Sigma$ . Alors la solution globale satisfait encore les conditions sur les bords (10-13). La condition (14) est encore vérifiée partout sauf peut-être sur  $\Sigma$ . On suppose que la solution approchée  $p'$  est continue à travers  $\Sigma$  mais que son gradient peut être discontinu. Alors la condition (14) prise au sens faible donne la condition (17) sur  $\Sigma$  :

$$[[\underline{\text{grad}}p']]\cdot\underline{n} \geq 0 \quad (17)$$

Le saut de  $\underline{\text{grad}}p'$  étant la valeur de  $\underline{\text{grad}}p'$  du côté 2 - la valeur du côté 1,  $\underline{n}$  étant la normale extérieure au côté 1.

On envisage maintenant (Fig. 3) le raccordement des deux solutions envisagées précédemment (en 4.1 et 4.2) respectivement pour les  $y < 0$  et les  $y > 0$ .

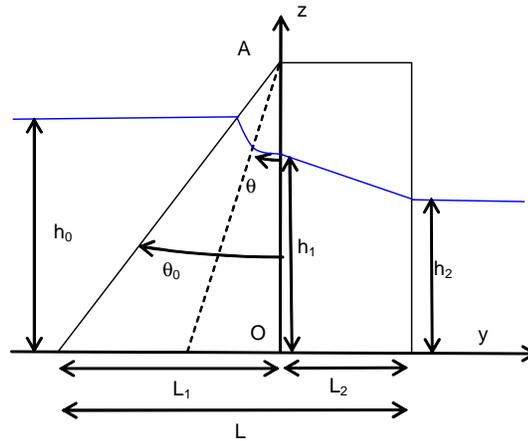


FIG. 3 – Raccordement de deux solutions.

Les données sont  $\gamma_f$  et les paramètres géométriques  $\theta_0$ ,  $L$ ,  $h_0$  et  $h_2$ . La longueur  $L_1$  et la hauteur  $h_1$  sont des paramètres à optimiser. Si on suppose ces deux paramètres supplémentaires fixés, on peut définir une solution approchée définie pour  $y$  compris entre  $-L_1$  et 0 par la solution définie par (16) et pour  $y$  compris entre 0 et  $L_2$  par (15). On peut noter immédiatement qu'il y a bien alors continuité du champ de pression approché le long de la ligne de raccord  $y=0$ . Le seul point qui reste à vérifier est la condition sur la discontinuité du gradient (17). On obtient :

$$\frac{h_2 - h_1}{L - L_1} - \frac{h_1 - h_0}{\theta_0 \left( \frac{L_1}{\tan \theta_0} - z \right)} \geq 0 \quad (18)$$

La condition est satisfaite pour  $0 \leq z < h_1$  si elle est satisfaite en  $z = h_1$ . La condition (18) devient :

$$\frac{h_2 - h_1}{L - L_1} - \frac{h_1 - h_0}{\theta_0 \left( \frac{L_1}{\tan \theta_0} - h_1 \right)} \geq 0 \quad (19)$$

Pour  $L_1$  donné, l'optimum (champ de pression le plus élevé) correspond au choix de la plus grande valeur de  $h_1(L_1)$  satisfaisant (19). Reste encore à choisir la valeur de  $L_1$ . Ceci peut être fait en maximisant la pente  $(h_1(L_1) - h_2)/(L - L_1)$ . Deux cas sont possibles selon qu'il existe ou non un maximum correspondant à  $L_1$  compris strictement entre  $h_0/\tan(\theta_0)$  et  $L$ . Dans le premier cas on retient la valeur de  $L_1$  correspondante ; dans le second cas, il faut prendre  $L_1$  égal à l'une de ses valeurs limites  $h_0/\tan(\theta_0)$  ou  $L$ .

## 5 Conclusions

L'approche cinématique pour un milieu poreux soumis à un écoulement à surface libre nécessite de disposer de la solution exacte de cet écoulement ou de solutions approchées par défaut. Nous avons rappelé comment caractériser de telles solutions puis présenté des exemples de solutions approchées pour un barrage à parois verticales et un barrage ayant une paroi amont inclinée et une paroi aval vertical. Il est possible de combiner de telles solutions et d'arriver ainsi à une optimisation d'un champ de pression défini par zones en respectant une condition de continuité de la pression et une inégalité sur le saut de la composante normale du gradient de pression. Cette démarche est susceptible d'être étendue au cas où la perméabilité est différente suivant les régions.

## Références

- Chipot, M. 1984 Variational Inequalities and Flow in Porous Media. Springer-Verlag, New York.
- Corfdir, A. 2004 Limit analysis for saturated porous media without fluid flow calculation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **28**, 543-561.
- Corfdir, A. 2006a Calcul à la rupture en présence d'un écoulement : formulation cinématique avec un champ de pression approché. *C. R. Mécanique* **334**, 176-182.
- Corfdir, A. 2006b Calcul à la rupture en présence d'un écoulement à surface libre : construction de champs de pression approchés. *C. R. Mécanique* **334**, 183-189.
- Dormieux, L & Bourgeois, E. 2002 Introduction à la micromécanique des milieux poreux. Presses de l'ENPC, Paris.
- Harr, M.E. 1977 Groundwater and seepage. Mc Graw-Hill Book Company, New-York.
- Salençon, J. 1983 Calcul à la rupture et analyse limite. Presses de l'ENPC, Paris.