



HAL
open science

Etudes semi-analytique et numérique de la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux en régime transitoire

Arnaud Mesgouez, Gaëlle Lefeuvre-Mesgouez, André Chambarel

► **To cite this version:**

Arnaud Mesgouez, Gaëlle Lefeuvre-Mesgouez, André Chambarel. Etudes semi-analytique et numérique de la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux en régime transitoire. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03361140

HAL Id: hal-03361140

<https://hal.science/hal-03361140>

Submitted on 1 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Etudes semi-analytique et numérique de la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux en régime transitoire

Arnaud Mesgouez, Gaëlle Lefeuvre-Mesgouez & André Chambarel

UMR Climat, Sol et Environnement
Université d'Avignon
33 rue Louis Pasteur, 84000 Avignon
arnaud.mesgouez@univ-avignon.fr

Résumé :

Les auteurs présentent des outils semi-analytique et numérique développés dans le cadre de l'étude de la propagation d'ondes mécaniques dans un milieu poreux en régimes transitoires. L'accent est plus particulièrement mis sur l'approche semi-analytique qui a pour objectif de servir par la suite de benchmark aux outils numériques. Cette approche fait appel à des transformées de Fourier multiples en espace et en temps des équations d'ondes issues du modèle de Biot après introduction de décompositions de Helmholtz. Un certain nombre de résultats est présenté.

Abstract :

This paper presents semi-analytical and numerical tools developed to study the mechanical wave propagation phenomenon in porous media for transient regimes. The semi-analytical approach is more specifically described: the purpose is to obtain benchmarks for the validation of numerical tools. Multiple Fourier transforms are used on space and time variables to solve the wave equations obtained from the Biot theory and Helmholtz decompositions. Some results are presented.

Mots-clefs :

Propagation d'ondes ; théorie de Biot ; régime transitoire

1 Introduction

L'UMR Climat Sol et Environnement de l'Université et de l'INRA d'Avignon s'intéresse à la caractérisation d'environnements poreux par des méthodes ondulatoires non destructives. Dans ce cadre, nous développons une double étude, semi-analytique et numérique, permettant de modéliser la propagation des ondes mécaniques dans un sol poroviscoélastique en régimes transitoires. Le milieu poreux est modélisé par un continuum biphasique à l'aide de la théorie complète de Biot, Biot (1956), Biot (1962) et Bourbié *et al.* (1987) par exemple. L'échelle spatiale d'étude est donc l'échelle macroscopique et les inconnues du problème sont les champs de déplacements solide et fluide en tout point d'un massif semi-infini.

L'étude semi-analytique est menée à l'aide de transformées de Fourier sur les variables spatiales et temporelle. Le retour dans le domaine spatio-temporel est ensuite effectué par un algorithme de transformée de Fourier rapide inverse et donne les champs des déplacements fluide et solide en fonction du temps en tout point du massif. L'objectif est ainsi d'obtenir un benchmark semi-analytique, pour des géométries simples, permettant de valider les résultats numériques obtenus par ailleurs.

L'étude numérique est abordée par éléments finis en espace et par différences finies en temps. Un code de calcul appelé FAFEMO programmé en C++ orienté objets a été développé à cet effet au sein du laboratoire. Il gère les problèmes d'espace mémoire et de temps de cal-

cul CPU de manière optimisée, grâce notamment à son organisation objets, à une technique matrix-free et à un système multigrid expert.

Dans cette communication, nous proposons une comparaison entre les deux approches précédentes, avec une présentation détaillée de l'approche semi-analytique et une présentation plus succincte de l'approche numérique.

2 Développements semi-analytique et numérique

2.1 Approche semi-analytique

L'approche semi-analytique est basée sur la théorie macroscopique complète de Biot, traditionnellement écrite à l'aide des déplacements des phases solide et fluide \vec{u} et \vec{U} . Cependant, pour des raisons de simplifications ultérieures, nous retenons ici la formulation en déplacement solide - déplacement relatif $\{\vec{u}, \vec{w} = \phi(\vec{U} - \vec{u})\}$. Le problème se résume alors sous la forme suivante :

- équations du mouvement :

$$\sigma_{ij,j} = [(1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f]\ddot{u}_i + \rho_f\ddot{w}_i \quad (1)$$

$$p_{,i} = -\frac{1}{K}\dot{w}_i - \rho_f\ddot{u}_i - \frac{a\rho_f}{\phi}\ddot{w}_i \quad (2)$$

- lois de comportement :

$$\sigma_{ij} = [\lambda_{0v} + M\beta^2]u_{k,k}\delta_{ij} + \mu_v(u_{i,j} + u_{j,i}) + \beta M w_{k,k}\delta_{ij} \quad (3)$$

$$p = -M\beta u_{k,k} - M w_{k,k} \quad (4)$$

avec σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes global, p la pression fluide. Le sol est caractérisé par les coefficients de Lamé λ_{0v} et μ_v du milieu viscoélastique drainé équivalent, par ρ_s et ρ_f (densités du grain solide et du fluide), ϕ (porosité), K (perméabilité hydraulique), a (tortuosité), M et β (coefficients de Biot). La modélisation prend donc en compte les trois couplages visqueux (par le biais de la perméabilité K), élastique (par le biais du coefficient de Biot β), et inertiel ou massique (par le biais de la tortuosité a). Ces paramètres ne dépendent pas de la fréquence pour les applications visées en sciences du sol.

En supposant que les paramètres du problème soient indépendants des variables d'espace sur le domaine étudié, en dérivant par rapport aux variables d'espace les lois de comportement (3) et (4) puis en injectant dans les équations du mouvement (1) et (2), il vient sous forme vectorielle :

$$\begin{cases} (\lambda_{0v} + \mu_v + M\beta^2)\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) + \mu_v\overrightarrow{\Delta}\vec{u} + M\beta\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{w}) = [(1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f]\ddot{\vec{u}} + \rho_f\ddot{\vec{w}} \\ M\beta\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) + M\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{w}) = \frac{1}{K}\dot{\vec{w}} + \rho_f\ddot{\vec{u}} + \frac{a\rho_f}{\phi}\ddot{\vec{w}} \end{cases}$$

Nous introduisons alors une décomposition de Helmholtz des déplacements solide et relatif. Cette méthode, utilisée entre autres par Degrande *et al.* (1998) ou Yang (2000), présente l'avantage de conduire à des matrices symétriques simples, ce qui justifie le choix initial de cette formulation. Ainsi, en notant φ et φ^r potentiels scalaires et $\vec{\psi}$ et $\vec{\psi}^r$ potentiels vectoriels,

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\psi} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi^r + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\psi}^r$$

Sous condition de jauges, il vient sous forme matricielle deux systèmes découplés relatifs respectivement aux ondes de compression $P1$ et $P2$, système en potentiels scalaires φ et φ^r (5), et à l'onde de cisaillement S , système vectoriel en potentiels vectoriels $\vec{\psi}$ et $\vec{\psi}^r$ (6) :

$$-[K_P] \begin{Bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\varphi^r \end{Bmatrix} + [M] \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi}^r \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi}^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$-[K_S] \begin{Bmatrix} \Delta\vec{\psi} \\ \Delta\vec{\psi}^r \end{Bmatrix} + [M] \begin{Bmatrix} \ddot{\vec{\psi}} \\ \ddot{\vec{\psi}}^r \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{\vec{\psi}} \\ \dot{\vec{\psi}}^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} [K_P] &= \begin{bmatrix} \lambda_{0v} + 2\mu_v + M\beta^2 & M\beta \\ M\beta & M \end{bmatrix} & [K_S] &= \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [M] &= \begin{bmatrix} (1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f & \rho_f \\ \rho_f & \frac{\rho_f}{\phi} \end{bmatrix} & [C] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Dans le cadre d'une approche tridimensionnelle, nous introduisons une transformée de Fourier sur les variables spatiales de surface (x et y) du massif semi-infini et sur la variable temporelle t définie par :

$$\bar{h}(\gamma, \zeta, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y, z, t) e^{-i(\gamma x + \zeta y + \omega t)} dx dy dt$$

Il découle alors de (5) et (6) les systèmes différentiels matriciels suivants relatifs respectivement aux ondes de compression et à l'onde de cisaillement :

$$\left(- \left(\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 - \zeta^2 \right) [K_P] - \omega^2 [M] + i\omega [C] \right) \begin{Bmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\varphi}^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\left(- \left(\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 - \zeta^2 \right) [K_S] - \omega^2 [M] + i\omega [C] \right) \begin{Bmatrix} \vec{\bar{\psi}} \\ \vec{\bar{\psi}}^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

L'intégration du système (8) donne une solution sous la forme d'ondes progressives et met en évidence les deux ondes de compression $P1$ et $P2$ existant dans un milieu poreux continu biphasique. Après calculs, les potentiels scalaires transformés valent :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\varphi}^r \end{Bmatrix} = \bar{\varphi}_1 e^{ik_{P1}z} \begin{Bmatrix} 1 \\ F_1(\gamma, \zeta, \omega) \end{Bmatrix} + \bar{\varphi}_2 e^{ik_{P2}z} \begin{Bmatrix} 1 \\ F_2(\gamma, \zeta, \omega) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Les fonctions k_{P1} et k_{P2} dépendent de ω , γ et ζ et sont relatives aux ondes $P1$ et $P2$. Elles sont calculées par le déterminant suivant :

$$|-(k_{Pj}^2 + \gamma^2 + \zeta^2)[K_P] + \omega^2[M] - i\omega[C]| = 0$$

De même, les fonctions $F_j(\gamma, \zeta, \omega)$ sont déterminées à partir de k_{Pj} , γ , ζ et ω .

L'intégration du système (9) donne une solution unique liée à l'onde de cisaillement S et dont les potentiels vectoriels transformés valent :

$$\begin{Bmatrix} \vec{\bar{\psi}} \\ \vec{\bar{\psi}}^r \end{Bmatrix} = \vec{\psi}_S e^{ik_{S}z} \begin{Bmatrix} 1 \\ G(\omega) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

k_S est donné par :

$$k_S^2 = -\gamma^2 - \zeta^2 + \frac{\omega^2}{\mu} ((1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f) + \rho_f G(\omega) \quad \text{avec} \quad G(\omega) = \frac{-\rho_f\omega^2\phi K}{a\rho_f\omega^2 K - i\omega\phi}$$

On obtient ainsi les déplacements solide et relatif, dans le domaine transformé, sous la forme synthétique suivante :

– pour le déplacement solide :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ \bar{u}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} i\gamma e^{ik_{P1}z} & i\gamma e^{ik_{P2}z} & e^{ik_S z} & 0 \\ i\zeta e^{ik_{P1}z} & i\zeta e^{ik_{P2}z} & 0 & e^{ik_S z} \\ ik_{P1}e^{ik_{P1}z} & ik_{P2}e^{ik_{P2}z} & -\frac{\gamma}{k_S}e^{ik_S z} & -\frac{\zeta}{k_S}e^{ik_S z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{Bmatrix} = [Q_u] \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

– pour le déplacement relatif :

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_x \\ \bar{w}_y \\ \bar{w}_z \end{Bmatrix} = [Q_u] \begin{bmatrix} F_1(\gamma, \zeta, \omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2(\gamma, \zeta, \omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Les conditions initiales et aux limites en contraintes sont alors introduites et sont exprimées dans le domaine transformé, ce qui permet de déterminer les inconnues $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, \bar{B} et \bar{C} des deux systèmes matriciels précédents après introduction des lois de comportement (3) et (4). Le retour dans le domaine spatio-temporel est alors effectué par un algorithme de transformée de Fourier rapide inverse. Nous obtenons ainsi les champs de déplacements solide et relatif (et donc fluide) en tout point du milieu poreux envisagé.

2.2 Approche numérique

Du point de vue numérique, un code de calcul appelé FAFEMO (pour Fast Adaptive Finite Element Modular Object) programmé en C++ orienté objets a été développé. La gestion numérique de la propagation des ondes mécaniques dans un sol poreux est abordée par éléments finis en espace et par différences finies en temps. La formulation éléments finis est écrite en déplacements solide et fluide. L'algorithme de type différences finies en temps correspond à la méthode des différences finies rétrogrades rendue semi-implicite afin de mieux gérer les problèmes d'instabilités purement numériques générées par le problème transitoire traité.

Le code FAFEMO est constitué de trois objets, chacun correspondant à une étape clef de la méthode des éléments finis et de sa résolution temporelle : l'ensemble constitue alors un solver. Quelques qualités du code doivent être soulignées :

- tout d'abord, il est compact : environ 1000 lignes C++ sans pré- ni post- traitements,
- il gère les problèmes d'espace mémoire et de temps de calcul CPU de manière optimisée : effectivement, i) une technique matrix-free est utilisée, ii) la méthode des différences finies rétrogrades modifiée, mise en œuvre afin d'assurer un bon contrôle des oscillations purement numériques, est efficace dans la résolution du système linéaire à chaque pas de temps, iii) et, un système multigrid expert optimise le nombre d'inconnues à chaque itération temporelle.
- son organisation orientée objets facilite la parallélisation partielle du code en vue de gérer des problèmes, par exemple en 3D, présentant un grand nombre de degrés de liberté. Notons que seule la partie la plus coûteuse du code est parallélisée à l'heure actuelle, à l'aide soit d'une décomposition de domaines soit d'une partition géométrique de grille.

Une présentation détaillée des travaux numériques, ainsi que des résultats obtenus, se trouvent dans Mesgouez *et al.* (2005) ou dans Mesgouez *et al.* (2006).

3 Résultats

Les résultats présentés ici concernent des massifs bidimensionnels présentant une excitation impulsionnelle de très courte durée centrée sur la surface du massif. La figure 1 présente la géométrie étudiée tronquée pour l'étude numérique à une distance finie avec des conditions de type Dirichlet. Les caractéristiques adimensionnelles du massif sont les suivantes : $\lambda_{0v} = 0.556$ et $\mu_v = 0.833$; $M = 0.5267$; $\beta = 0.72$; $\rho_s = 1$; $\rho_f = 0.3846$; $K = 0.65$; $\phi = 0.4$; $a = 1.2$; $\eta = 0.01$. Les caractéristiques mécaniques du milieu ainsi que les résultats obtenus sont adimensionnés.

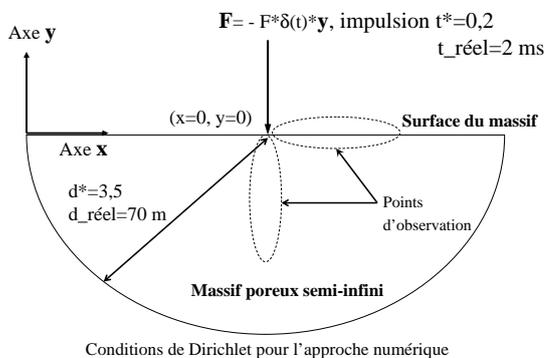


FIG. 1 – Géométrie 2D étudiée.

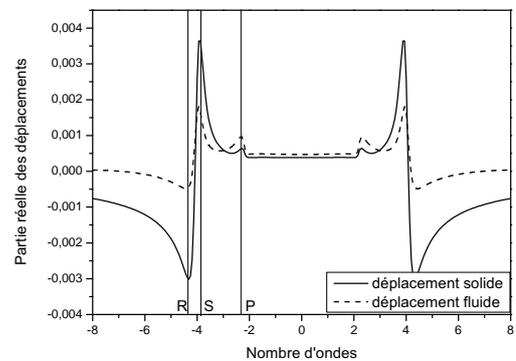


FIG. 2 – Partie réelle des déplacements verticaux solide et fluide dans le domaine transformé pour $\omega = 4$.

La figure 2 présente les résultats obtenus dans le domaine transformé (en fréquence et nombre d'ondes) en surface du massif pour une valeur donnée de pulsation ω . Les déplacements transformés présentent une série de maxima pour les nombres d'ondes relatifs aux ondes R , S et P_1 : les résultats dans le domaine transformé permettent ainsi de découpler l'influence de chaque onde. En surface du massif, on souligne l'importance de l'onde de Rayleigh. Ce type d'analyse, davantage adaptée à l'étude des régimes harmoniques, permet également de déterminer les vitesses des différentes ondes ainsi que d'étudier les phénomènes de dispersion et d'atténuation associés.

La figure 3 présente les résultats obtenus après transformée de Fourier inverse en fonction de la variable d'espace x et du temps t pour des points situés à une profondeur de $y = -1$. En profondeur, l'onde de Rayleigh présente une contribution moindre et ce sont les ondes volumiques P et S qui deviennent prépondérantes. On note ainsi l'arrivée des ondes volumiques sur deux droites de pentes respectives égales aux vitesses de ces ondes P_1 et S . Par ailleurs, la figure 4 présente la comparaison des résultats semi-analytique et numérique obtenus en un point en profondeur juste sous la charge ($y = -1$, $x = 0$). On notera la bonne concordance des résultats. Les écarts observés sont dus aux paramètres de la transformée de Fourier (fréquence de coupure et nombre de points maximal).

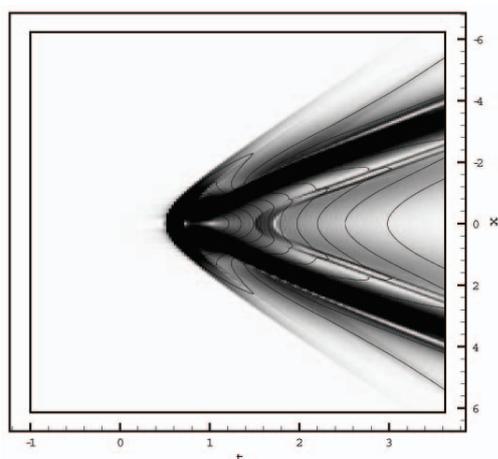


FIG. 3 – Isodéplacements fluides verticaux en fonction du temps et de la variable spatiale pour $y = -1$.

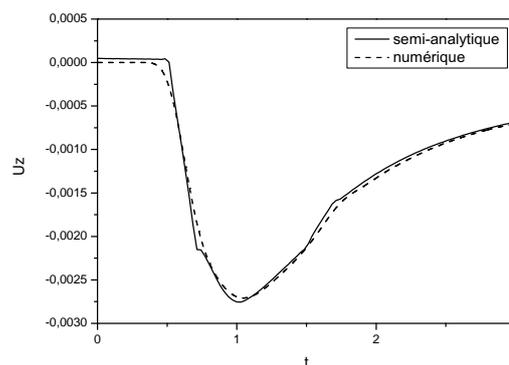


FIG. 4 – Comparaison des résultats semi-analytique et numérique, pour le déplacement vertical fluide d'un point en profondeur à $x = 0$, $y = -1$.

4 Conclusions

Dans cette communication, les auteurs ont présenté des outils semi-analytique et numérique développés à l'UMR Climat Sol et Environnement de l'Université d'Avignon et de l'INRA d'Avignon pour l'étude de la propagation d'ondes mécaniques en milieu poreux. Une comparaison des résultats obtenus a été présentée. Pour la suite, les auteurs souhaitent optimiser et rendre encore plus efficace l'outil numérique FAFEMO, notamment par le développement de versions parallélisées. De plus, un couplage du milieu poreux avec un environnement extérieur (structure, environnement acoustique) est également en cours d'étude. Enfin, notons qu'une version du code FAFEMO existe par ailleurs pour l'étude des ondes électromagnétiques en milieu poreux.

Références

- Biot, M.A. 1956 Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I- Low-frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.* **28(2)** 168-178
- Biot, M.A. 1962 Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *J. Acoust. Soc. Am.* **34(9)** 1254-1264
- Bourbié, T., Coussy, O., Zinszner, R. 1987 Acoustique des milieux poreux. Paris : Editions Technip
- Degrande, G., De Roeck, G., Van Den Broeck, P., Smeulders, D. 1998 Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media. *Int. J. Solids Struct.* **35** 4753-4778
- Mesgouez, A., Lefeuvre-Mesgouez, G., Chambarel, A. 2005 Transient mechanical wave propagation in semi-infinite porous media using a finite element approach. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* **25** 421-430
- Mesgouez, A., Lefeuvre-Mesgouez, G., Chambarel, A., Fougère, D. 2006 Numerical modelling of poroviscoelastic grounds in the time domain using a parallel approach. *Lect. Notes Comput. Sc.* **3514** 647-654
- Yang, J. 2000 Influence of water saturation on horizontal and vertical motion at a porous soil interface induced by incident P wave. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* **19** 575-581