



HAL
open science

Dispersion en milieu poreux heterogène: loi de Fick généralisée

Marie-Christine Néel, Joelson Maminirina

► **To cite this version:**

Marie-Christine Néel, Joelson Maminirina. Dispersion en milieu poreux heterogène: loi de Fick généralisée. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03361116

HAL Id: hal-03361116

<https://hal.science/hal-03361116>

Submitted on 1 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dispersion en milieu poreux hétérogène : loi de Fick généralisée

Marie-Christine Néel & Maminirina Joelson

Université d'Avignon
UMRA 1114 Climat Sol Environnement
Faculté des Sciences, 33 rue Pasteur 84000 Avignon
mcneel@avignon.inra.fr

Résumé :

Les vols de Lévy représentent à petite échelle la dispersion dans des milieux où la matière peut être emportée très loin, beaucoup plus vite que d'après les paramètres de transport moyens. Or c'est le cas dans de nombreux milieux poreux naturels. Dans ces conditions, le flux de matière est une combinaison linéaire de dérivées fractionnaires locales et non locales, qui donne la loi de Fick dans le cas particulier du Mouvement Brownien.

Abstract :

Lévy flights are small-scale models for mass spreading in media where dissolved matter can travel very far, much more rapidly than according to averaged transport coefficients, as was observed in many natural porous media. For such random walks, the flux of matter combines local and non-local fractional derivatives, in a manner which yields classical Fick's law in the particular case of Brownian motion.

Mots-clefs :

milieux poreux hétérogènes, écarts à la loi de Fick, modèle fractionnaire

1 Introduction

De nombreuses données montrent que la loi de Fick ne décrit pas toujours bien la dispersion de matière dissoute en milieux poreux hétérogènes. Laissant de côté les effets de mémoire, nous focalisons notre attention sur des milieux dans lesquels on observe des profils de concentration caractérisés par des “ailes épaisses”, incompatibles avec la notion de second moment (Benson *et al.* (2001)). Les modèles fondés sur le Mouvement Brownien, auxquels on pense naturellement pour représenter la dispersion à petite échelle, sont alors inopérants. Des marches au hasard plus générales, les vols de Lévy, sont capables de tenir compte de la possibilité pour la matière dissoute, d'être emportée très vite très loin, et de conduire à des profils de concentration sans second moment. L'équivalent macroscopique est une généralisation fractionnaire de la loi de Fourier pour l'évolution de la concentration (Scalas *et al.* (2004)).

Cette équivalence est bien établie en milieu infini, mais des conditions aux limites peuvent obliger à modifier ces équations. Pour des vols de Lévy symétriques, ce point a été déduit par Krepysheva *et al.* (2006) de ce qui se passe en milieu infini. Y compris dans le cas non symétrique, nous montrons que pour un nuage de particules effectuant des vols de Lévy, une dérivée fractionnaire de la concentration représente le flux, au niveau macroscopique.

2 Le flux de particules effectuant des vols de Lévy

Des particules effectuant des vols de Lévy suivent des trajectoires faites d'accumulations de sauts indépendants, de longueur aléatoire distribuée selon la densité $\varphi_l(x) = \frac{1}{l} L_\alpha^\theta(\frac{x}{l})$, où L_α^θ

représente une loi de Lévy normalisée d'exposant de stabilité α (entre 0 et 2) et de paramètre de dissymétrie θ Feller (1970). La densité $\psi_\tau(t) = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$ distribue les temps d'attente entre sauts successifs : τ est le temps d'attente moyen, l est une longueur représentative des sauts. Tous deux sont petits devant les échelles (macroscopiques) auxquelles on peut effectuer des mesures.

La densité L_α^θ a pour transformée de Fourier $e^{-|k|^\alpha e^{i \text{sign}(k)\pi\theta/2}}$, avec θ dans $[\alpha - 2, 2 - \alpha]$. On a donc $L_\alpha^\theta(-x) = L_\alpha^{-\theta}(x)$ pour tout θ , mais L_α^θ est paire pour $\theta = 0$ seulement. Pour α entre 1 et 2 l'exposant α donne le comportement asymptotique $L_\alpha^\theta(x) \approx C_\alpha^\theta x^{-\alpha-1} = \frac{-1}{\pi}\Gamma(1 + \alpha) \sin \frac{\pi}{2}(\theta - \alpha)x^{-\alpha-1}$ au voisinage de $+\infty$, prenant ainsi en compte des sauts de grande amplitude beaucoup moins rares que pour $\alpha = 2$, qui correspond à la loi normale.

Dans une solution diluée, la concentration $P(x, t)$ représente la densité de probabilité de trouver un marcheur dans $[x, x + dx]$ à l'instant t . Le flux à travers x s'obtient en comptant positivement (ou négativement) les particules traversant x vers la droite (ou vers la gauche), pendant $[t, t + dt[$. La probabilité de sauter pendant $[t, t + dt[$ est $\frac{dt}{\tau}$, donc en milieu infini, le flux est

$$\tau^{-1} \left[\int_0^\infty P(x-y, t) F_{\alpha, \theta}^+ \left(\frac{y}{l} \right) dy - \int_0^\infty P(x+y, t) F_{\alpha, \theta}^- \left(\frac{-y}{l} \right) dy \right], \quad (1)$$

où $F_{\alpha, \theta}^+(y/l)$ représente la probabilité $\int_{y/l}^{+\infty} L_{\alpha, \theta}(z) dz$ pour un saut d'être dirigé vers la droite avec une amplitude supérieure à y . De même, $F_{\alpha, \theta}^-(-y/l)$ est la probabilité $\int_{-\infty}^{-y/l} \frac{1}{l} L_{\alpha, \theta}(z/l) dz$ pour un saut d'avoir un module supérieur à y , mais vers la gauche. Pour alléger, nous supprimons le t dans $P(\cdot, t)$ sauf dans les résultats terminaux du paragraphe 5.

L'expression (1) est plus ou moins modifiée par des conditions aux limites, ici en $x = 0$. Avec un mur absorbant, les particules atteignant le mur sont exclues de la marche au hasard : il suffit de mettre HP à la place de P au second membre de (1), H représentant la fonction d'Heaviside. Avec un mur élastique, au contraire, chaque particule atteignant le bord rebondit et parcourt la distance prévue par le tirage au sort, en restant simplement du même côté ($x > 0$) (Krepysheva *et al.* (2006)). Ainsi, les particules effectuant un saut vers la gauche à partir de $x + y$ ($y > 0$) arrivent à droite de x si l'amplitude est supérieure à $2x + y$: elles ne comptent pas dans le bilan. Les sauts dirigés vers la gauche, partant de $x - y$ ($0 < y < x$), traversent x si leur amplitude est supérieure à $2x - y$. On en déduit qu'à l'échelle des particules, le flux est

$$\int_0^\infty \frac{P^*(x-y)}{\tau} F_{\alpha, \theta}^+ \left(\frac{y}{l} \right) dy - \int_0^\infty \frac{P(x+y)}{\tau} F_{\alpha, \theta}^- \left(\frac{-y}{l} \right) dy - \int_x^\infty \frac{P^*(x-y)}{\tau} (F_{\alpha, \theta}^+ \left(\frac{y}{l} \right) - F_{\alpha, \theta}^- \left(\frac{-y}{l} \right)) dy, \quad (2)$$

en posant $P^*(x) = P(x)$ pour $x > 0$ et $P^*(x) = P(-x)$ pour $x < 0$. Lorsque l'échelle à laquelle on effectue les mesures est très grande devant l et τ , on doit considérer la limite diffusive où l et τ tendent vers zéro en vérifiant $l^\alpha/\tau = K$ suivant Scalas *et al.* (2004). Etudions cette limite pour (1) et (2).

3 Outils de calcul fractionnaire

Les outils mathématiques adaptés pour cela sont des dérivées fractionnaires, qui combinent des dérivations usuelles et des convolutions par des puissances.

3.1 Nouvelle interprétation de la dérivée de Riemann-Liouville

Nous utilisons des intégrales de Riemann-Liouville $I_\pm^{\alpha'}$ d'ordre α' d'après Samko *et al.* (1993), associées ici à des intervalles semi-infinis selon

$$I_+^{\alpha'} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha')} \int_{-\infty}^x (x-y)^{\alpha'-1} \varphi(y) dy, \quad I_-^{\alpha'} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha')} \int_x^{+\infty} (y-x)^{\alpha'-1} \varphi(y) dy. \quad (3)$$

Il leur correspond les dérivées de Riemann-Liouville (à gauche et à droite) de même ordre $D_{\pm}^{\alpha'} \varphi(x) = (\frac{d}{dx})^{[\alpha'] + 1} I_{\pm}^{1 - \{\alpha'\}}$, où $[\cdot]$ est la partie entière, alors que $\{\cdot\}$ vérifie $\alpha' = [\alpha'] + \{\alpha'\}$.

Pour une vaste classe de fonctions, la limite quand l tend vers zéro, de $l^{-\alpha} \int_0^{\infty} f(x \pm y) F(\frac{\pm y}{l}) dy$ est proportionnelle à $(D_{\pm}^{\alpha-1} f)(x)$ pour α entre 1 et 2, d'après Néel *et al.* (2007), à condition que F soit intégrable dans $[0, +\infty[$, vérifie $\int_0^{\infty} F(y) dy = 0$ (hypothèse H_1) et soit de la forme $F_1(y) + Cy^{-\alpha}$, avec F_1 et $F_1(y)y^{\alpha-1}$ intégrables au voisinage de l'infini (hypothèse $H_2(\alpha)$).

Des expressions comme $l^{-\alpha} \int_0^{\infty} f(x \pm y) F_{\alpha, \theta}^{\mp}(\frac{\pm y}{l}) dy$ figurent aux seconds membres de (1) et (2). Cependant, les probabilités cumulées $F_{\alpha, \theta}^{-}(-\cdot)$ et $F_{\alpha, \theta}^{+}$ vérifient $H_2(\alpha)$, mais pas l'hypothèse H_1 . Pour nous y ramener, retranchons une fonction $f_{\alpha, \theta}$, nulle hors de $[0, 1]$ et vérifiant $\int_0^{+\infty} f_{\alpha, \theta}(y) dy = \mathcal{I}_{\alpha, \theta} = \int_0^{+\infty} F_{\alpha, \theta}^{-}(-y) dy$. Comme l'annexe A montre qu'on a $\mathcal{I}_{\alpha, \theta} = \int_0^{+\infty} F_{\alpha, \theta}^{+}(y) dy$, en posant $\tilde{F}_{\alpha, \theta}^{\pm}(y) = F_{\alpha, \theta}^{\pm}(y) - f_{\alpha, \theta}(y)$ on obtient deux fonctions $\tilde{F}_{\alpha, \theta}^{\pm}$ vérifiant H_1 et $H_2(\alpha)$.

En tenant compte de $\tau^{-1} = Kl^{-\alpha}$, l'expression $K \int_0^{\infty} \frac{P(x \pm y)}{l^{\alpha}} F_{\alpha, \theta}^{\mp}(\frac{\pm y}{l}) dy$ s'écrit

$$K \left[\frac{P(x)}{l^{\alpha}} \mathcal{I}_{\alpha, \theta} + \int_0^{\infty} \frac{P(x \pm y)}{l^{\alpha}} \tilde{F}_{\alpha, \theta}^{\mp}(\frac{\pm y}{l}) dy + \int_0^{\infty} \frac{P(x \pm y) - P(x)}{l^{\alpha}} f_{\alpha, \theta}(\frac{y}{l}) dy \right]. \quad (4)$$

Les $\frac{P(x, t)}{l^{\alpha}} \mathcal{I}_{\alpha, \theta}$ s'équilibrent dans la différence entre les deux versions de (4) avec $+$ ou $-$, et nous venons de voir que quand l tend vers zéro, le second terme de (4) tend vers une dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha - 1$. Le troisième tend vers une dérivée fractionnaire "locale".

3.2 Dérivées fractionnaires locales de Kolwankar *et al.* (1996)

Les dérivées fractionnaires locales ont été introduites par Kolwankar *et al.* (1996) pour étudier les fonctions partout continues mais nulle part différentiables, rencontrées dans des problèmes concrets (données de terrain, économie). Elles s'annulent quand on les applique à des fonctions dérivables.

Pour q entre 0 et 1, notons $D_{\pm}^{KG, q} f(x)$ les dérivées locales d'ordre q de Kolwankar *et al.* (1996) de la fonction f , à droite et à gauche, calculées x . Elles s'obtiennent à partir de celles de Riemann-Liouville en faisant tendre le domaine d'intégration vers zéro : on prend la limite de $\frac{d}{dh} \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_x^{x+h} (1-t)^{-q} \frac{f(y)-f(x)}{(x+h-y)^{1-q}} dt$ quand h tend vers zéro. Quand celle-ci existe, elle égale celle de $\frac{h^{-q}}{\Gamma(1-q)} \int_0^1 (1-t)^{-q} (f(x+th) - f(x)) dt$, en vertu de la règle de L'Hôpital.

En posant $f_{\alpha, \theta}(t) = \mathcal{I}_{\alpha, \theta} (2-\alpha)(1-t)^{1-\alpha} \chi_{[0,1]}$ pour $1 < \alpha < 2$, on voit que, quand P a une dérivée locale d'ordre $\alpha - 1$ au point $x+$, l'expression $l^{-\alpha} \int_0^{+\infty} f_{\alpha, \theta}(y/l) (P(x+y) - P(x, t)) dy$ a aussi une limite quand l tend vers zéro, qui est égale à $\mathcal{I}_{\alpha, \theta} \Gamma(3-\alpha) D_{+}^{KG, \alpha-1} P(x)$. A gauche, $l^{-\alpha} \int_0^{+\infty} f_{\alpha, \theta}(y/l) (P(x-y) - P(x)) dy$ tend vers $-\mathcal{I}_{\alpha, \theta} \Gamma(3-\alpha) D_{-}^{KG, \alpha-1} P(x)$. Quand P est dérivable en x , $D_{\pm}^{KG, \alpha-1} P(x)$ s'annule. Ceci permet d'interpréter la limite quand l tend vers zéro, du troisième terme de (4), pour en déduire l'expression du flux au niveau macroscopique.

4 Loi de Fick fractionnaire

Pour α dans $]1, 2[$, quand P a des dérivées de Riemann-Liouville et de Kolwankar *et al.* (1996) d'ordre $\alpha - 1$, intégrables bornées et continues, les seconds membres de (1) et (2) ont des limites quand l tend vers zéro. En effet, celle de $l^{-\alpha} \int_0^{\infty} P(x \pm y) \tilde{F}_{\alpha, \theta}^{\mp}(\frac{\pm y}{l}) dy$ est $\lambda_{\mp} D_{\mp}^{\alpha-1} P(x)$ avec

$$\lambda_{+} = \int_0^{+\infty} I_{+}^{\alpha-1} H \tilde{F}_{\alpha, \theta}^{+}(y) dy, \lambda_{-} = \int_0^{+\infty} I_{+}^{\alpha-1} H \tilde{F}_{\alpha, \theta}^{-}(-y) dy. \quad (5)$$

Pour $Kl^{-\alpha} \int_0^{+\infty} f_{\alpha,\theta}(y/l)(P(x \pm y) - f(x))dy$, la limite est $\mp K\mathcal{I}_{\alpha,\theta}D_{\pm}^{KG,\alpha-1}P(x)$, nulle sur les intervalles où P est dérivable.

Le paramètre $\mathcal{I}_{\alpha,\theta}$ est calculé en annexe. Pour évaluer λ_{\pm} , on compare $D_{\pm}^{\alpha-1}f$ avec la limite de $l^{-\alpha} \int_0^{\infty} (f(x \mp y) - f(x))\tilde{F}_{\alpha,\theta}^{\pm}(\frac{\pm y}{l})dy$ pour une fonction f particulière, par exemple $f = \chi_{[1,2]}$. On obtient $\lambda_{\pm} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}(\alpha \mp \theta)}{\sin \pi \alpha}$. Donc la limite de (1), c'est à dire le flux $Q(x)P$ à travers x (en milieu infini) à l'échelle macroscopique, est $Q(x)P =$

$$K(\lambda_+ D_+^{\alpha-1}P(x) - \lambda_- D_-^{\alpha-1}P(x)) - K\mathcal{I}_{\alpha,\theta}\Gamma(3-\alpha)[D_+^{KG,\alpha-1}P(x) + D_-^{KG,\alpha-1}P(x)], \quad (6)$$

qui est une variante fractionnaire de la loi de Fick, obtenue par Paradisi *et al.* (2001) pour des fonctions dérivables, et donc vérifiant $D_{\pm}^{KG,\alpha-1}P \equiv 0$.

Dans un domaine semi-infini limité par un mur réfléchissant, le flux est donné par (2), qui est l'analogue de (1) avec P^* à la place de P mais $-Kl^{-\alpha} \int_0^{+\infty} ((1-H)P^*)(x-y)(F_{\alpha,\theta}^-(-y/l) - F_{\alpha,\theta}^+(y/l))dy$ en plus, dont la limite est $(\lambda_- - \lambda_+)D_+^{\alpha-1}((1-H)P^*)(x)$. Donc, pour $x > 0$ le flux à l'échelle macroscopique est $Q(x)P = -K\mathcal{I}_{\alpha,\theta}\Gamma(3-\alpha)[D_+^{KG,\alpha-1}P(x,t) + D_-^{KG,\alpha-1}P^*(x)]$

$$+K[\lambda_+ D_+^{\alpha-1}P(x) - \lambda_- D_-^{\alpha-1}P^*(x)] + K(\lambda_- - \lambda_+)(D_+^{\alpha-1}((1-H)P^*)(x)). \quad (7)$$

Pour $\alpha = 2$, laissé de côté au paragraphe 3.2, posons $A(l) = l^{-1/2}$. On a $\theta = 0$, donc (2) est exactement de la forme de (1) avec P^* au lieu de P . On a $\int_0^{+\infty} F_{2,0}^{\mp}(\frac{y}{l})\frac{P(x \pm y) - P(x)}{l^2}dy = \int_0^{A(l)} F_{2,0}^{\mp}(y)\frac{P(x \pm ly) - P(x)}{ly}dy + \int_{A(l)}^{+\infty} F_{2,0}^{\mp}(y)\frac{P(x \pm ly) - P(x)}{l}dy$. Quand P est dérivable en x , le premier terme de cette expression tend vers $\mp \frac{1}{2}\partial_x P$, en vertu de $F_{2,0}^{\pm}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-y^2/4}dy$, alors que le second est majoré par $l^{-2}F_{2,0}^{\mp}(A(l)) \int_{lA(l)}^{+\infty} |P(x \pm y) - P(x)|dy$, qui tend vers 0 si P est intégrable et fixé. On retrouve ainsi la loi de Fick classique, que le milieu soit infini ou non.

Pour tout α entre 1 et 2, ceci implique une équation fractionnaire pour la dispersion.

5 Equation de diffusion fractionnaire

Quand la densité de particules et le flux macroscopique sont dérivables, la conservation de la masse en l'absence de sources implique $\partial_t P = -\partial_x Q$. D'autre part, on a $\partial_x D_{\pm}^{\alpha-1} = \pm D_{\pm}^{\alpha}$, et les dérivées locales de Kolwankar *et al.* (1996) d'ordre inférieur à 1 sont identiquement nulles. Donc, dans un milieu infini, (6) implique que P évolue selon l'équation

$$\partial_t P(x,t) = -K\left[\frac{\sin \frac{\pi}{2}(\alpha - \theta)}{\sin \pi \alpha} D_+^{\alpha}P(x,t) + \frac{\sin \frac{\pi}{2}(\alpha + \theta)}{\sin \pi \alpha} D_-^{\alpha}P(x,t)\right], \quad (8)$$

déduite de l'équation maîtresse généralisée par Scalas *et al.* (2004).

Dans un milieu limité par un mur réfléchissant, (7) implique l'équation

$$\partial_t P(x,t) = -K[\lambda_+ D_+^{\alpha}P^*(x,t) + \lambda_- D_-^{\alpha}P(x,t) + (\lambda_+ - \lambda_-)D_+^{\alpha}((1-H)P^*)(x,t)], \quad (9)$$

obtenue par Krepysheva *et al.* (2006) pour $\theta = 0$. Une illustration de (8) ou (9) s'obtient en vérifiant l'accord entre ses solutions et les histogrammes des simulations directes des vols de Lévy. On compare avec des histogrammes obtenus pour de petites valeurs de τ et l vérifiant $\tau = l^{\alpha}$, les particules étant issues de $x = 5$ à $t = 0$. Pour résoudre numériquement (8) ou (9), les dérivées d'ordre α sont discrétisées selon un schéma fondé sur des différences finies fractionnaires, (voir Krepysheva *et al.* (2006)), et on part de l'histogramme en $t = 1$. Déjà à cet instant, le maximum de la concentration a quitté l'abscisse de l'impulsion initiale $x = 5$, et s'est déplacé vers la gauche pour $\theta > 0$, vers la droite pour $\theta < 0$. La tendance se confirme ensuite, comme l'indique la figure, qui concerne un milieu semi-infini limité par un mur réfléchissant, les résultats en domaine infini sont analogues.

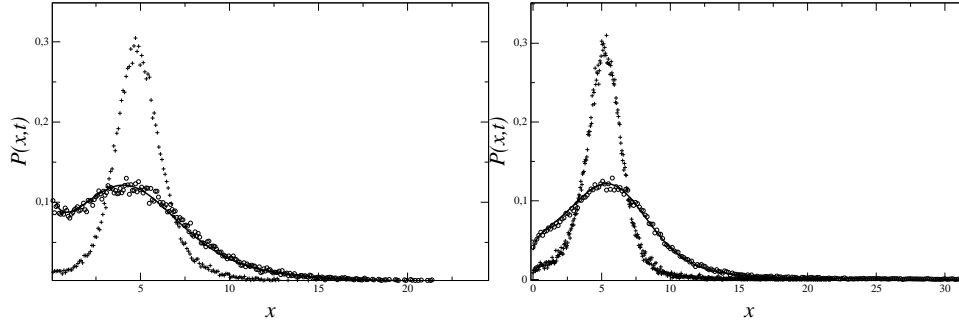


FIG. 1 – Solution numérique de (9), comparée avec des simulations de Monte Carlo de vols de Lévy non symétriques dans le cas d’un mur élastique, pour $\alpha = 1.5$, avec $\theta = 0.2$ à gauche et $\theta = -0.2$ à droite. Les traits pleins représentent la simulation numérique de (9) pour $K = 1$ à l’instant $t = 4$, les cercles symbolisent les histogrammes correspondants, les “plus” indiquent celui de $t = 1$.

6 Conclusions

Pour un nuage de particules effectuant des vols de Lévy uni-dimensionnels, avec des échelles de temps τ et de longueur l vérifiant $\tau = Kl^\alpha$, le flux de masse est une différence entre des convolutions faisant intervenir la concentration, dans un milieu infini. Quand l tend vers zéro, ces convolutions tendent vers des combinaisons linéaires de dérivées fractionnaires locales on non d’ordre $\alpha - 1$. Le fait que les probabilités cumulées à droite et à gauche d’une loi stable de Lévy non symétrique aient la même intégrale sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$, a joué un rôle essentiel. On en a déduit une généralisation fractionnaire de la loi de Fick, sans passer par l’équation régissant l’évolution de la concentration. Pour cette raison, le résultat s’adapte à des domaines semi-infinis ou bornés. On en déduit une équation de dispersion fractionnaire.

Annexe : Intégrale de la probabilité cumulée d’une loi alpha stable de Lévy

Au paragraphe 3.1, nous utilisons $\int_0^{+\infty} F_{\alpha,\theta}^+(y)dy = \int_0^{+\infty} F_{\alpha,\theta}^-(-y)dy$. Ce résultat s’obtient en remarquant que $F_{\alpha,\theta}^-(-x) = F_{\alpha,-\theta}^+(x)$, et en utilisant la transformée de Mellin, définie par $\mathcal{M}\omega(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\omega(t)dt$, qui permet d’écrire $\int_0^{+\infty} F_{\alpha,\theta}^+(y)dy = (\mathcal{M}I_-^1 L_\alpha^{-\theta})(1)$.

Pour $Re(z) > 0$ et pour des fonctions suffisamment décroissantes au voisinage de ∞ , comme L_α^θ , on a $(\mathcal{M}I_-^1 \omega)(z) = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+1)}(\mathcal{M}\omega)(z+1)$ (voir Rubin (1996)). En remarquant $F_{\alpha,\theta}^+(x) = \int_x^{+\infty} L_\alpha^\theta(y)dy = I_-^1 L_\alpha^\theta(x)$, on en déduit $(\mathcal{M}F_{\alpha,\theta}^d)(z) = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+1)}(\mathcal{M}L_\alpha^\theta)(z+1)$. Pour $0 < Re(z) < 1$, la transformée de Mellin de L_α^θ (voir Schneider (1986)) est égale à

$$(\mathcal{M}L_\alpha^\theta)(z) = \frac{1}{\pi\alpha}\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1-z}{\alpha}\right)\sin\left((1-z)\pi\frac{\alpha-\theta}{2\alpha}\right). \quad (10)$$

Or $\mathcal{M}L_\alpha^\theta(z)$ est une fonction de z holomorphe pour $0 < Re(z) < \alpha + 1$, à cause du comportement de $L_\alpha^\theta(x)$ quand x est réel et grand, et le second membre de (10) est aussi holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} / 0 < Re(z) < \alpha + 1\} - \{1\}$, où (10) est donc valable par prolongement analytique. On en déduit que $\mathcal{I}_{\alpha,\theta} = \int_0^{+\infty} F_{\alpha,\theta}^+(y)dy = (\mathcal{M}F_{\alpha,\theta}^+)(2)$ est une fonction paire de θ , car on a

$$\int_0^{+\infty} F_{\alpha,\theta}^+(y)dy = \frac{\Gamma(2)\Gamma(-1/\alpha)}{\alpha\pi}\sin\pi\frac{\theta-\alpha}{2\alpha} = -\frac{\Gamma(-1/\alpha)}{\alpha\pi}\cos\pi\frac{\theta}{2\alpha}. \quad (11)$$

Références

- Benson, D.A., Schumer, R., Meerschaert, M.M., Wheatcraft, S.W 2001 Fractional dispersion, Lévy motion, and the MADE tracer tests. *Transp. Por. Med.* **42** 211-240
- Feller, W 1970 An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. II. *Wiley series in probability and mathematical statistics, J. Wiley and sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto*
- Krepysheva, N., Di Pietro, L., Néel M.C 2006 Fractional advection-diffusion and reflective boundary condition. *Phys. Rev. E* **73** 021104
- Kolwankar, K.M., Gangal, A.D 1996 Fractional differentiation of nowhere differentiable functions and dimension. *Chaos* **6** 505-513
- Néel, M.C., Abdennadher, A 2007 Fractional flux and non-normal diffusion. à paraître dans *Electron. J. Diff. Equ.*
- Paradisi, P., Cesari, R., Mainardi, F., Tampieri, F 2001 The fractional Fick's law for non-local transport processes . *Physica A* **293**(1-2) 130
- Rubin, B 1996 Fractional integrals and potentials. *Harlow : Longman*
- Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I 1993 Fractional integrals and derivatives : theory and applications. *Gordon and Breach, New York*
- Scalas, E., Gorenflo, R., Mainardi, F 2004 Uncoupled continuous-time random walks : solutions and limiting behaviour of the master equation. *Phys. Rev E* **692** 011107
- Schneider, W.R 1986 Stable distributions : Fox function representation and generalization. dans *Stochastic process in classical and quantum systems, Ed. S. Albeveiro, G. Casatti, D. Merlini, Springer, Berlin*