



**HAL**  
open science

## Conception robuste de systèmes dynamiques frottants

Sébastien Berger, Pascal Ragot, Evelyne Aubry, Jean-Jacques Sinou

► **To cite this version:**

Sébastien Berger, Pascal Ragot, Evelyne Aubry, Jean-Jacques Sinou. Conception robuste de systèmes dynamiques frottants. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03360177

**HAL Id: hal-03360177**

**<https://hal.science/hal-03360177v1>**

Submitted on 30 Sep 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Conception robuste de systèmes dynamiques frottants

Pascal Ragot, Sébastien Berger, Evelyne Aubry & Jean-jacques Sinou

*ENSISA - Ecole centrale de Lyon  
MIPS - LTDS  
12 rue des frères Lumière 68093 Mulhouse Cedex -  
36 avenue Guy de Collongue 69134 Ecully  
Sebastien.berger@uha.fr*

### Résumé :

Le niveau des cycles limites obtenus dans les zones d'instabilité des systèmes frottants dépend fortement de la valeur du coefficient de frottement qui admet des dispersions importantes. Ainsi, l'objectif des travaux est d'étudier le comportement dynamique d'un système frottant afin de pouvoir déterminer la dispersion de l'amplitude des cycles limites lors des instabilités de type sprag-slip en prenant en compte les incertitudes du coefficient de frottement avec une approche par intervalles.

### Abstract :

The level of the limit cycles obtained in the zones of instability of dry friction systems strongly depends on the value of the friction coefficient which admits important dispersions. Thus, the objective of work is to study the dynamic behavior of a dry friction system in order to be able to determine the dispersion of the amplitude of the limit cycles at the time of sprag-slip instabilities by taking of account uncertainties of the friction coefficient with an approach by intervals.

### Mots-clefs :

**théorie des intervalles ; robustesse ; système frottant**

### 1 Introduction

De nombreux travaux de recherche se sont intéressés à l'étude du comportement dynamique de systèmes frottants tels que des systèmes de freinage, des essuie-glaces. Ces études ont montré que de tels systèmes peuvent être soumis à des instabilités de type sprag-Slip, et ainsi avoir leurs performances dégradées. Ces travaux ont fait ressortir une grande sensibilité du niveau des cycles limites aux paramètres de conception et aux paramètres physiques associés à la loi de frottement. Compte tenu des dispersions importantes observées sur les lois de frottement il s'avère donc nécessaire de prendre en compte ces incertitudes dès l'étape de conception. La valeur du coefficient de frottement n'est pas connue et ne peut être que bornée. Dans ce contexte, l'objectif de nos travaux est d'étudier le comportement dynamique d'un système frottant afin de pouvoir déterminer la dispersion de l'amplitude des cycles limites lors des instabilités de type sprag-slip en prenant en compte les incertitudes du coefficient de frottement avec une approche par intervalles.

### 2 Système étudié

Le modèle permettant d'étudier des instabilités de type sprag-slip a été défini à partir de travaux (Grenouillat 2002) sur des lames de balai d'essuie-glace. Le système se compose d'une masse ponctuelle  $m$  et deux tiges indéformables  $T_1$  et  $T_2$  (figure 1). Ces trois solides sont reliés les uns aux autres par des liaisons pivots parfaites, associées à une raideur angulaire  $k_1$  entre la masse  $m$  et la première tige  $T_1$ , et une raideur angulaire  $k_2$  entre les tiges  $T_1$  et  $T_2$ . La masse  $m$  est liée au bâti par un ressort de rappel  $K_1$ . Une force d'appui  $F_0$  est appliquée sur la masse  $m$ .

La tige  $T_2$  est en permanence en contact ponctuel glissant sur une surface en mouvement ( $\pi$ ). Le frottement est modélisé par la loi de frottement de Coulomb  $T = \mu N$ , avec  $T$  la composante tangentielle et  $N$  la composante normale de la force de frottement.

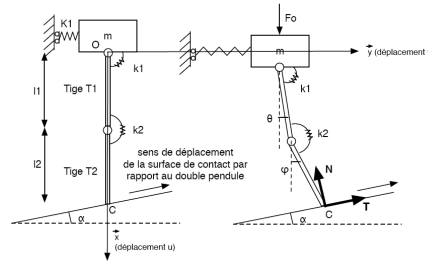


FIG. 1 – système frottant

Les équations du mouvement du système non linéaire peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{FNL}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

avec  $\mathbf{X} = [v \ \theta \ \phi]^T$ .  $\ddot{\mathbf{X}}$ ,  $\dot{\mathbf{X}}$  et  $\mathbf{X}$  sont respectivement les vecteurs accélération, vitesse et déplacement à 3 dimensions associés aux degrés de liberté du système.  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{FNL}(\mathbf{X})$  respectivement la matrice masse, la matrice raideur et les expressions non linéaires du système.

### 3 Amplitude des cycles limites basés sur une analyse par intervalles

Lors d'instabilité avec flottement, le système oscille autour de sa position d'équilibre avec des amplitudes qui dépendent de la valeur des paramètres et en particulier de celle du coefficient de frottement. Ce sont des oscillations auto-entretenues qui diminuent les performances du système et peuvent le dégrader par fatigue. Aussi, les équations dynamiques non linéaires peuvent être intégrées numériquement pour obtenir une réponse temporelle et ainsi les cycles limites. Il est alors possible de quantifier l'amplitude de ces cycles limites pour chaque jeu de paramètres et plus particulièrement pour chaque valeur du coefficient de frottement. Ainsi pour déterminer la dispersion des amplitudes des cycles limites il faut effectuer des études paramétriques. Cependant, ces études peuvent s'avérer fastidieuses et prohibitives en temps de calcul sans avoir la certitude d'obtenir la totalité de la dispersion des amplitudes. Il est donc nécessaire d'utiliser une approche non déterministe

Une approche classique pour simuler le comportement de systèmes non linéaires avec des paramètres incertains est l'application de méthodes de Monte Carlo. Cependant, ces méthodes ne peuvent pas fournir des limites garanties sur les variables d'états et demandent des temps de calculs prohibitifs. A l'inverse, les méthodes par intervalles appliquées à la simulation de systèmes dynamiques temporels avec paramètres incertains conduisent à des estimations conservatrices des limites hautes et basses de toutes les variables d'état (Moore R. 1979, Nedialkov 1999, Jaulin 2001).

#### 3.1 Arithmétique des intervalles: définition et limitations

Un intervalle est un sous ensemble du corps des réels  $\mathbb{R}$ . Il est défini par  $[x] = \{t/x^- \leq t \leq x^+, x^- \text{ et } x^+ \in \mathbb{R}\}$ . Un intervalle est noté entre crochet avec ses deux bornes extrêmes  $[x] = [x^-, x^+]$ . Avant d'appliquer l'analyse par intervalle sur la détermination des amplitudes des cycles limites, les limitations de la méthode des intervalles sont données.

La simple application de l'arithmétique des intervalles qui consiste à remplacer toutes les opérations arithmétiques et les fonctions par leurs équivalents en intervalles peut conduire à des surestimations significatives. Ces surestimations peuvent être dues à plusieurs phénomènes.

Premièrement, Le calcul par intervalle considère que chaque occurrence dans une équation ou dans un système d'équations d'un paramètre modélisé par un intervalle est indépendante. En effet, par exemple pour une soustraction  $[a]-[b]$ , l'algèbre des intervalles donne comme résultat

l'intervalle [c] que parcourt n'importe quel élément de [a] moins n'importe quel élément de [b]. Cette indépendance des occurrences appelée phénomène de pessimisme ne correspond pas à la réalité physique du système.

Deuxièmement, en utilisant des boîtes intervalles dont les côtés sont parallèles aux axes, l'arithmétique des intervalles ne peut pas représenter correctement des domaines complexes des variables d'état dans l'espace d'état. Par exemple, l'algorithme du calcul par intervalle considère que l'image d'un intervalle est un intervalle unique, ce qui n'est pas toujours le cas. Il est possible que l'image soit composée de différentes zones distinctes, alors que la solution trouvée sera un intervalle unique englobant toutes ces différentes zones. Dans ce cas, le "wrapping effect" donne un intervalle qui surestime de façon excessive l'image exacte.

Et troisièmement, selon la forme sous lesquelles les équations d'état sont écrites, les intervalles représentant les variables d'état peuvent être différents. Les amplitudes des intervalles peuvent varier de façon significative. Ainsi, la forme sous laquelle les équations d'état sont écrites est primordiale.

Afin de limiter le phénomène de pessimisme les différentes occurrences du paramètre incertain et des variables d'état sont factorisées dans les équations le plus souvent possible. Lorsqu'il n'est pas possible de factoriser le paramètre incertain dans certaines composantes des équations, des études de fonctions sont effectuées.

L'une des solutions pour limiter le « wrapping effect » est le sous-pavage. Il consiste à subdiviser l'ensemble de départ en différentes zones, et d'étudier le comportement du système dans chacune de ces zones. En découpant le domaine de départ de façon assez fine, il est possible de diminuer significativement la surestimation et ainsi d'obtenir des intervalles plus étroits (Jaulin 2001, Rauh 2004, Kletting 2005). Cependant dans notre cas d'étude la méthode de sous-pavage est difficile à mettre en place de façon efficace. Pour le faire, il faudrait connaître au préalable l'allure de la réponse et ensuite ajuster le découpage. Le système étant très non linéaire il est impossible d'estimer l'allure sans faire une étude complète.

Finalement pour limiter la surestimation des amplitudes des intervalles, l'idée est de rajouter des équations supplémentaires à celles du modèle (Jaulin 2001). Ces équations supplémentaires, appelées contracteurs, sont des relations mathématiques toujours vérifiées, comme par exemple l'équation  $\cos^2\theta + \sin^2\phi = 1$ . Dans le cadre du système étudié, l'équation supplémentaire choisie pour l'angle  $\theta$  est  $\theta = \arccos(\sqrt{1 - \sin^2\theta})$ . Les équations du modèle donnent un intervalle pour l'angle  $\theta$ , qui est introduit dans l'équation contracteur pour obtenir un nouvel intervalle pour  $\theta$ . L'intersection entre ces deux intervalles permet de définir un intervalle pour  $\theta$  plus étroit. Ce processus peut être répété de façon itérative jusqu'à convergence vers un intervalle. De la même façon le contracteur  $\phi = \arccos(\sqrt{1 - \sin^2\phi})$  est mis en place pour l'angle  $\phi$ .

### 3.2 Determination of the double pendulum's dynamic behaviour

Pour déterminer la dispersion des amplitudes des cycles limites le comportement dynamique du système doit être simulé en tenant compte de l'incertitude du coefficient de frottement  $\mu$  représenté par un intervalle  $[\mu^-, \mu^+]$ . Pour cela le système d'équations d'état

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{Fz} \text{ avec } \mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{M}_{CL}(\mathbf{z})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{M}_{CL}(\mathbf{z})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{z}) \mathbf{F}_0 + \mathbf{M}_{CL}(\mathbf{z})^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{z}) \text{ et } \mathbf{z}(t) = [\mathbf{X} \quad \dot{\mathbf{X}}]^T \quad (2)$$

est résolu avec l'arithmétique des intervalles. La résolution temporelle peut être effectuée à partir d'une discrétisation des équations avec des formules de type Euler ou de Runge-Kutta. Elle consiste à déterminer  $\mathbf{z}(t)$  à partir d'un état initial sur un intervalle de temps donné  $[t_0, t_f]$ . Les variables d'états  $v(t)$ ,  $\dot{v}(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$  et le coefficient de frottement sont définis par des intervalles, les autres paramètres étant des réels.

Les résultats de plusieurs simulations du comportement dynamique du double pendule autour d'une de ses positions d'équilibre sont présentés. Le coefficient de frottement est défini par l'intervalle  $[0.11, 0.13]$ , les autres paramètres étant des réels donnés.

Selon les études, la résolution du système d'équations (2) a été effectuée avec la méthode d'Euler ou avec la méthode de Runge-Kutta sur un temps de 4s ou 12s.

Les résultats de quatre études sont présentés :

Etude 1 : Etude de référence directement effectuée à partir du système d'équations (6) avec la formule d'Euler et optimisation de la mise en forme des équations

Etude 2 : Etude 1 avec études de fonctions sur les coefficients

Etude 3 : Etude 2 avec études de fonctions sur les variables d'état

Etude 4 : Etude 3 avec méthode de Runge-Kutta

A travers ces quatre études est montrée l'influence des différentes méthodes cherchant à diminuer la surestimation des résultats.

Le tableau 1 montre l'amplitude des intervalles pour les variables d'état  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\phi$ ,  $\dot{\phi}$  en 8 instants t. Les résultats des différentes études sont comparés, l'amplitude des intervalles pour l'étude 1 étant supposée la référence 100. Ces résultats montrent que les méthodes mises en place pour réduire le phénomène de surestimation diminuent effectivement les amplitudes. Ces diminutions peuvent atteindre près de 30% pour l'angle  $\theta$ , 36% pour l'angle  $\phi$  et respectivement 30% et 37% pour les vitesses angulaires  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\phi}$ . Par exemple à l'instant t=4s, l'amplitude de l'intervalle de l'angle  $\theta$  pour l'étude 4 est égale à 71.54 % de l'amplitude de l'intervalle l'étude 1 ce qui correspond à une diminution de près de 28,46%.

Les figures 3 et 4 montrent les évolutions des variables d'état  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\phi$ ,  $\dot{\phi}$  en fonction du temps sur 4s pour l'étude dont la surestimation est la plus faible (étude 4). Ainsi, les amplitudes des intervalles augmentent de façon monotone en fonction du temps.

Lorsque la simulation est effectuée sur un temps plus long, par exemple 12s les amplitudes des intervalles divergent très rapidement. Les graphes correspondant à ces études ne sont pas présentés car la divergence des amplitudes des intervalles conduit à une échelle qui rend illisibles les courbes. Ce phénomène de divergence est dû à l'accumulation des surestimations effectuées sur les différentes variables d'état à chaque instant t.

Pour contrer ce phénomène de divergence les contracteurs définis précédemment sont mis en place. Les figures 5 et 6 présentent l'évolution des variables d'état obtenus avec des contracteurs en fonction du temps jusqu'à l'instant t=12s. A partir de l'instant t=4s l'augmentation des amplitudes des intervalles des angles  $\theta$  et  $\phi$  s'accélère rapidement jusqu'à atteindre la valeur  $\pi$  et s'y stabiliser. Ainsi la mise en place des contracteurs sur les angles permet de borner les valeurs des angles entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$  et ainsi de saturer les amplitudes des intervalles des angles à la valeur  $\pi$ .

Les méthodes de réduction des amplitudes permettent de diminuer le phénomène de surestimation mais n'empêchent pas les amplitudes des intervalles de croître rapidement vers la valeur limite  $\pi$  imposée par les contracteurs à partir d'un certain temps. Les méthodes ne font que retarder le phénomène de divergence.

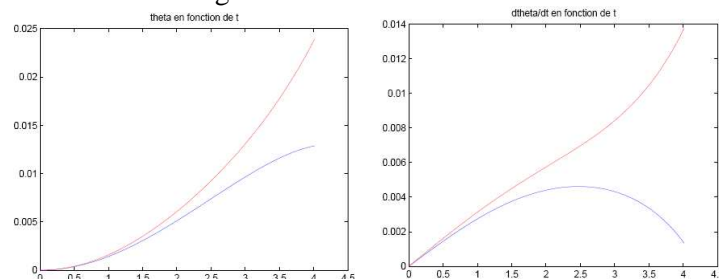
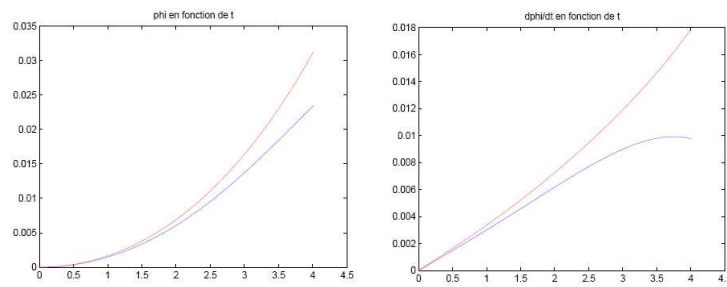
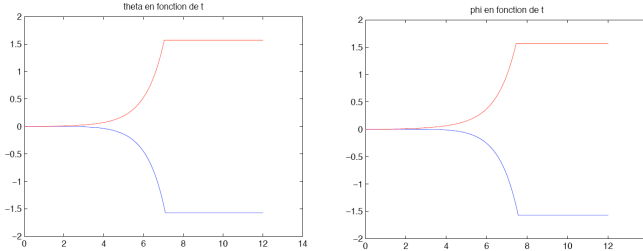
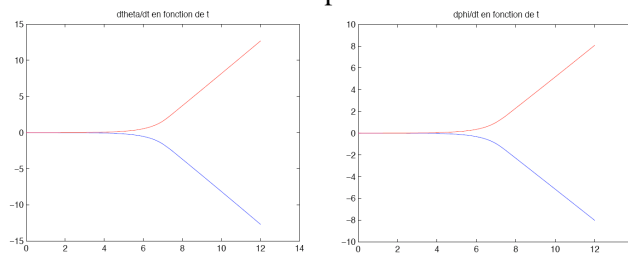


FIG. 3 – Etude 4 sur 4s sans contracteurs - Angle  $\theta$  et vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  en fonction du temps

FIG. 4 – Etude 4 sur 4s sans contracteurs - Angle  $\theta$  et vitesse angulaire  $\dot{\phi}$  en fonction du tempsFIG. 5 – Etude 4 sur 12s avec contracteurs - Angle  $\theta$  et vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  en fonction du tempsFIG. 6 – Etude 4 sur 12s avec contracteurs - Angle  $\phi$  et vitesse angulaire  $\dot{\phi}$  en fonction du temps

#### 4 Conclusions

Les résultats de plusieurs simulations du comportement dynamique du double pendule autour d'une de ses positions d'équilibre avec prise en compte de l'incertitude du coefficient de frottement avec des intervalles ont été présentés. La résolution du système d'équations d'états a été effectuée avec les formules d'Euler et de Runge-kutta en utilisant l'arithmétique des intervalles. Les résultats obtenus avec différentes méthodes cherchant à diminuer la surestimation des résultats ont été comparés. Ces méthodes permettent de diminuer le phénomène de surestimation mais n'empêchent pas les amplitudes des intervalles de croître vers une valeur limite imposée par les contracteurs à partir d'un certain temps.

#### Références

- Chambrette P., Jézéquel L., 1992 Stability of a beam rubbed against a rotating disc. *European Journal of Mechanics, A/Solids* 11 107-138.
- Codfert V., 1997, Modélisation globale d'un système d'essuyage, Thèse, Université de Lille.
- Grenouillat R., Leblanc C., 2002, Simulation of chatter vibrations for wiper systems, *Society of Automotive Engineer*
- Ibrahim R., 1994, "Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos. Part 2 : Dynamics and modeling". *ASME Design Engineering Technical Conferences*, 7, pp. 209–2269.
- Jaulin L., Kieffer M., Didrit O. and Walter E., 2001, *Applied interval Analysis*, London: Springer.

- Kletting M., Rauh A., Aschemann H., Hofer E. P., 2005, Consistency Techniques for simulation of WasterWater Treatment Processes with Uncertainties, in DVD Proc. of IFAC World Congress 2005, Prague, Czech Republic,
- Moore R., 1979, Methods and Applications of Interval Analysis, Philadelphia: SIAM
- Nediakov N. S., 1999, Computing Rigorous Bounds on the Solution of an Initial Value Problem for an Ordinary Differential Equation, Ph. D dissertation, Graduate Department of Computer Science, University of Toronto,
- Oden J.T., Martins J.A.C, 1985, Models and computational methods for dynamic friction phenomena. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 52 527-634
- Ouyang H., Mottershead J.E., Cartmell M.P., Friswell M.I., 1998 Friction-induced parametric resonances in discs: effect of a negative friction velocity relationship, Journal of Sound and Vibration 209 251-264.
- Rauh, A. Kletting M., Aschemann H., Hofer E. P., 2004, Application of Interval Arithmetic Simulation Techniques to Wasterwater Treatment Processes, in Proc. Of MIC 2004, Grindelwald, Switzerland, , pp. 287-293.
- Sinou J.-J., Dereure O., Mazet G.-B., Thouverez F., and Jezequel L., 2006, "Friction induced vibration for and aircraft brake system. part i : experimental approach and stability analysis". International Journal of Mechanical Sciences, 48 , pp. 536-554.
- Sinou J.-J., Thouverez F. and Jezequel L., 2004, "Methods to reduce non-linear mechanical systems for instability computation". Archives of Computational Methods in Engineering: State of the Art Reviews, 11(3), pp. 257-344,

		0.5 s	1 s	1.5 s	2 s	2.5 s	3 s	3.5 s	4 s
Etude 1	$\theta$	0.000040692	0.00018059	0.0004786	0.0010581	0.0021544	0.0042051	0.0080178	0.015078
	$d\theta/dt$	0.00016899	0.00041001	0.00082252	0.0015725	0.002956	0.0055117	0.010226	0.018909
	$\phi$	0.000040323	0.00017384	0.00044118	0.00092601	0.0017852	0.0033056	0.0060095	0.010847
	$d\phi/dt$	0.000016583	0.00038177	0.00071519	0.0012758	0.0022552	0.0039981	0.0071293	0.012788
Etude 2	$\theta$	0.000040534	0.00017988	0.00047674	0.001054	0.002146	0.0041887	0.0079866	0.015019
	$\square$	99.61%	99.61%	99.61%	99.61%	99.61%	99.61%	99.61%	99.61%
	$d\theta/dt$	0.00016833	0.00040841	0.00081931	0.0015664	0.0029445	0.0054902	0.010186	0.018835
	$\square$	99.61%	99.61%	99.61%	99.61%	99.61%	99.61%	99.61%	99.61%
Etude 3	$\theta$	0.00004023	0.00017512	0.00045005	0.00095544	0.0018534	0.0034254	0.0061552	0.010871
	$\square$	98.86%	96.97%	94.03%	90.29%	86.02%	81.45%	76.76%	72.09%
	$d\theta/dt$	0.00016601	0.00038872	0.00074101	0.0013343	0.0023508	0.0040975	0.0070961	0.012236
	$\square$	98.23%	94.80%	90.09%	84.84%	79.52%	74.34%	69.39%	64.71%
Etude 4	$\theta$	0.00003884	0.00017191	0.00044406	0.00094494	0.0018354	0.0033951	0.0061044	0.010786
	$\square$	95.44%	95.19%	92.78%	89.30%	85.19%	80.73%	76.13%	71.53%
	$d\theta/dt$	0.00016275	0.00038406	0.00073361	0.0013221	0.0023305	0.0040639	0.0070403	0.012144
	$\square$	96.3%	93.67%	89.19%	84.07%	78.84%	73.73%	68.84%	64.22%
Etude 3	$\phi$	0.000039865	0.00016855	0.00041448	0.00083422	0.0015289	0.0026739	0.004570	0.0077314
	$\square$	98.86%	96.95%	93.94%	90.08%	85.64%	80.89%	76.04%	71.27%
	$d\phi/dt$	0.00016289	0.00036145	0.00064117	0.0010714	0.0017656	0.0029142	0.0048406	0.0080963
	$\square$	98.22%	94.67%	89.64%	83.98%	78.28%	72.89%	67.89%	63.31%
Etude 4	$\phi$	0.000038499	0.00016554	0.00040923	0.00082565	0.0015152	0.002652	0.0045349	0.0076748
	$\square$	95.47%	95.22%	92.75%	89.16%	84.87%	80.22%	75.46%	70.75%
	$d\phi/dt$	0.00015978	0.00035747	0.00063547	0.0010628	0.0017519	0.0028922	0.0048048	0.0080378
	$\square$	96.35%	93.63%	88.85%	83.30%	77.68%	72.33%	67.39%	62.85%

Tableau 1: Variables d'états en 8 instants différents pour 4 simulations