



## **Parcimonie dans les problèmes d'observation**

Nicolas Vanspranghe

### **► To cite this version:**

| Nicolas Vanspranghe. Parcimonie dans les problèmes d'observation. 2021. <hal-03350395>

**HAL Id: hal-03350395**

**<https://hal.science/hal-03350395v1>**

Preprint submitted on 21 Sep 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



Travail de Fin d'Etudes

Parcimonie dans les problèmes d'observation (SpaReInObs)

Rapport final

Nicolas Vanspranghe

*Tuteurs :*

Laurent Bako

Eric Blanco

Julien Huillery

*Superviseur TFE :*

Laurent Seppecher

17 septembre 2019

## Résumé

Nous étudions l'acquisition compressée de classes de signaux engendrés par un système dynamique linéaire donné. La théorie de l'acquisition compressée étudie les conditions sous lesquelles une donnée peut être reconstruite à partir un nombre limité de mesures, et comment ces mesures doivent être choisies. Le contexte général est l'étude de l'apport de la parcimonie dans les problèmes d'estimation de trajectoires en théorie des systèmes. Nous examinons l'action du système dynamique linéaire sur certaines classes de signaux d'entrée et nous démontrons que, même en dimension infinie, les éléments de certaines classes de trajectoires peuvent être reconstruits à partir d'un nombre fini de mesures, en exhibant un choix d'opérateur de mesure ne dépendant que du système.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation de l'acquisition compressée</b>	<b>4</b>
1.1	Résolution d'un problème sous-déterminé . . . . .	4
1.2	Parcimonie et principe d'acquisition . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Éléments sur les systèmes dynamiques linéaires</b>	<b>9</b>
2.1	Systèmes dynamiques et représentation d'état . . . . .	9
2.1.1	Une définition générale . . . . .	9
2.1.2	Le problème d'observation . . . . .	11
2.2	Cadre hilbertien pour les systèmes dynamiques linéaires . . . . .	12
2.2.1	Définition et bien-posé du problème . . . . .	12
2.2.2	Propriété de Hilbert-Schmidt pour l'opérateur dynamique . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Un cadre généralisé pour l'acquisition compressée</b>	<b>20</b>
3.1	Vers l'acquisition compressée de signaux en dimension infinie . . . . .	20
3.1.1	Un exemple préliminaire issu de l'échantillonnage . . . . .	20
3.1.2	D'autres pistes de généralisation . . . . .	21
3.2	Un formalisme général pour les problèmes d'acquisition compressée . . . . .	23
3.2.1	Définition des espaces de signaux et de mesure . . . . .	23
3.2.2	Cahier des charges pour un décodeur . . . . .	23
3.3	Des mesures de compressibilité . . . . .	27
3.3.1	La dimension upper box-counting . . . . .	27
3.3.2	Synthèse des différents critères . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Compressibilité des trajectoires d'un système dynamique linéaire</b>	<b>31</b>
4.1	Action du système sur un modèle de signaux de dimension infinie . . . . .	31
4.1.1	Des difficultés liées à la dimension infinie . . . . .	31
4.1.2	Action du système sur le modèle parcimonieux . . . . .	32
4.2	Construction d'un opérateur de mesure . . . . .	34
4.2.1	Préliminaires et théorème d'injection . . . . .	34
4.2.2	Existence d'un décodeur idéal vérifiant l'IOP . . . . .	40

# Introduction

L'acquisition compressée est un paradigme scientifique reposant sur le postulat que de nombreuses données admettent des représentations parcimonieuses, c'est-à-dire des représentations dans lesquelles seuls quelques-uns des coefficients sont non-nuls. Cette hypothèse de parcimonie rend possible la reconstruction de la donnée à partir de quelques mesures linéaires, pour peu que le procédé de mesure vérifie certaines bonnes propriétés. On parle d'acquisition compressée car dans ce paradigme, l'acquisition et la compression deviennent une seule et même étape. En contrepartie, le problème de reconstruction de la donnée est *a priori* complexe. Sous certaines hypothèses, il se reformule en réalité en terme de problème d'optimisation et admet de nombreux développements algorithmiques.

**Acquisition et bande-passante** Parmi les enjeux sous-jacents à l'acquisition compressée figure la question du nombre minimal de mesures permettant de reconstruire une donnée. Jusqu'à récemment, l'approche fréquentielle était omniprésente : un signal à bande de fréquence limitée doit être échantillonné à une fréquence deux fois supérieure à sa fréquence maximale. En faisant une hypothèse de structure sur la donnée, à savoir la parcimonie, un procédé d'acquisition compressé permet de reconstruire un signal temporel avec une fréquence d'échantillonnage inférieure à la fréquence de Shannon.

**Acquisition compressée et parcimonie** L'hypothèse de parcimonie pour une donnée signifie qu'il existe une représentation dans laquelle l'essentiel de l'information est porté par seulement quelques coefficients scalaires. La compression des photographies est un premier exemple d'utilisation de la parcimonie. L'utilisation de bases d'ondelettes ou d'autres dictionnaires de représentation similaires permettent de supprimer beaucoup de coefficients sans changement majeur sur l'image finale, puisque l'essentiel de l'information est concentré sur quelques fonctions de base. De nombreuses données naturelles admettent de telles représentations, et les applications sont riches.

**Applications aux systèmes dynamiques** On s'intéresse aux apports possibles de l'acquisition compressée en théorie des systèmes. Les concepts portés par l'acquisition compressée s'intègrent harmonieusement à de nombreuses problématiques issues des sciences de l'ingénieur. L'approche système est pertinente pour des problématiques de contrôle et d'estimation d'état, mais aussi pour l'acquisition de signaux analogiques. En particulier, de la même façon que les systèmes physiques ont une bande-passante limitée et filtrent une partie de l'information en entrée, le système opère une réduction de degrés de liberté sur l'ensemble d'entrées, et nous nous intéressons aux conditions sous lesquelles une classe de trajectoires peut être reconstruite à partir d'un *petit* nombre de mesures.

**Contributions** En s'appuyant sur un formalisme permettant de traiter une large classe de systèmes dynamiques linéaires en dimension finie, nous proposons plusieurs résultats concernant l'acquisition compressée de signaux issus de tels systèmes. Le Chapitre 1 constitue une présentation du formalisme classique de l'acquisition compressée. Au Chapitre 2, nous examinons le bien-fondé d'un formalisme hilbertien pour les systèmes dynamiques linéaires, et nous généralisons une propriété classique d'analyse fonctionnelle au cas vectoriel. Au Chapitre 3, nous présentons un cadre généralisé déjà existant pour les problèmes d'acquisition compressée et nous démontrons un résultat technique utile pour certaines classes de signaux. Au Chapitre 4, nous étudions l'action du système dynamique sur une généralisation en dimension infinie de signaux parcimonieux, et nous montrons que le système rend *compressible* cette classe d'entrées. En démontrant une variante d'un résultat topologique général, nous construisons une classe d'opérateurs de mesure adaptée au système dynamique, et nous examinons la possibilité de reconstruction de signaux appartenant à certaines classes de trajectoires.

**Contexte** Le présent document a été rédigé dans le cadre d'un stage de fin d'études réalisé au sein de l'équipe Méthodes pour l'Ingénierie des Systèmes (MIS) du Laboratoire Ampère, à l'Ecole Centrale de Lyon, et constitue le rapport final présenté en vue de l'obtention à la fois du diplôme d'Ingénieur centralien et du Master Recherche en Mathématiques appliquées et Statistiques « Maths en Action » à l'Université Claude Bernard de Lyon.

**Notations et conventions** Les grandeurs vectorielles et matrices seront notées en gras.  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels, et  $\mathbb{R}^+$  est l'ensemble des réels positifs ou nuls. On notera  $\mathbb{R}^{m \times n}$  l'espace vectoriel des matrices de taille  $m \times n$ , muni du produit scalaire  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \triangleq \text{Tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B})$  où  $\text{Tr}$  désigne la trace d'une matrice et  $\mathbf{A}^\top$  est la matrice transposée de  $\mathbf{A}$ . Dans le cas où  $n = 1$ , cette définition coïncide avec  $\mathbb{R}^m$  muni de son produit scalaire canonique. Pour un espace de Hilbert, on notera  $\langle f, g \rangle$  le produit scalaire entre deux éléments  $f$  et  $g$ . On utilisera cette notion pour différents espaces, sans précision supplémentaire, sauf s'il y a ambiguïté. Les espaces de (classes de) fonctions de  $X$  à valeurs vectorielles de carré sommable seront notés  $L^2(X, \mathbb{R}^{m \times n})$  et munis du produit scalaire  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \triangleq \int_X \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x) dx$ . La norme associée est notée  $\|\mathbf{f}\| \triangleq \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle^{1/2}$ . Si  $X$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , on notera  $\mathcal{C}^k(X, \mathbb{R}^{m \times n})$  l'espace des fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}^{m \times n}$  dont toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur à  $k$  sont continues. Les notations  $\ker$  et  $\text{vect}$  désignent respectivement le noyau d'une application linéaire, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel des éléments envoyés sur 0, et l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. Si  $I$  est un intervalle ouvert, alors  $\mathcal{C}_c^\infty(I, \mathbb{R}^n)$  désigne l'ensemble des fonctions infiniment dérivables de  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  dont le support est inclus dans un intervalle fermé de  $I$ . Enfin, si  $A$  est un ensemble, alors  $\mathbb{1}_A$  désigne la fonction indicatrice de  $A$ , définie par  $\mathbb{1}(x) = 1$  si  $x \in A$  et  $\mathbb{1}_A(x) = 0$  sinon.

# Chapitre 1

## Présentation de l'acquisition compressée

### 1.1 Résolution d'un problème sous-déterminé

L'enjeu de l'acquisition compressée est de pouvoir reconstituer une donnée  $\mathbf{x}$  de taille  $N$  à partir de seulement  $m$  mesures linéaires *bien choisies*, avec  $m$  petit devant  $N$ , en supposant que  $\mathbf{x}$  admette une représentation parcimonieuse, c'est-à-dire dans laquelle seul un petit nombre de coefficients sont non-nuls. On cherche ainsi à résoudre un système linéaire sous-déterminé

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  et  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times N}$ , en supposant que  $\mathbf{x}$  admette au plus  $p$  coefficients non-nuls, avec  $p$  petit devant  $N$ . La théorie classique de l'acquisition compressée fournit les hypothèses sous lesquelles la reconstitution – exacte ou approchée – de la donnée  $\mathbf{x}$  est possible. Dans cette section, nous présentons les idées essentielles de l'acquisition compressée ainsi que quelques résultats.

La résolution du système sous-déterminé sous hypothèse de parcimonie se ramène dans un premier temps à un problème combinatoire de minimisation du cardinal du support. Si  $\mathbf{x}$  est solution de  $p$ -parcimonieuse (1.1), on va chercher à reconstruire  $\mathbf{x}$  en cherchant une solution  $\hat{\mathbf{x}}$  au problème d'optimisation

$$\hat{\mathbf{x}} \in \arg \min \{ \|\mathbf{z}\|_0 : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{M}\mathbf{z} = \mathbf{y} \}; \quad (1.2)$$

où  $\|\mathbf{z}\|_0$  désigne le nombre de coefficients non-nuls de  $\mathbf{z}$  (ce n'est pas une norme). Mais ce dernier problème est un problème combinatoire NP-difficile, si bien qu'il n'existe pas de moyen efficace de mettre en œuvre la reconstruction de cette manière. En revanche, on montre que sous certaines hypothèses [1, 2], le problème peut se ramener au problème d'optimisation convexe suivant :

$$\hat{\mathbf{x}} \in \arg \min \{ \|\mathbf{z}\|_1 : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{M}\mathbf{z} = \mathbf{y} \}, \quad (1.3)$$

où  $\|\mathbf{z}\|_1$  désigne la norme  $\ell^1$  de  $\mathbf{z}$ , c'est-à-dire  $\|\mathbf{z}\|_1 \triangleq \sum_{i=1}^N |z_i|$ . En dehors de la parcimonie de  $\mathbf{x}$ , c'est sur la matrice  $\mathbf{M}$  que portent les hypothèses garantissant la solvabilité du problème. Il faut d'une part que la solution  $p$ -parcimonieuse à (1.1) soit unique, et d'autre part, que les problèmes (1.2) et (1.3) soient équivalents. Les conditions que nous exhiberons par la suite garantissent ces deux points. A ce stade, pour synthétiser :

- Sous certaines conditions, une donnée  $\mathbf{x}$  de taille  $N$  parcimonieuse peut être restituée à partir de quelques  $m$  mesures linéaires, en cherchant le vecteur de plus petit support vérifiant les mesures ;
- On peut remplacer le problème combinatoire par un problème d'optimisation convexe de minimisation  $\ell^1$ .

Nous nous intéressons ici uniquement à la minimisation  $\ell^1$ , mais il faut noter que ce n'est pas la seule stratégie possible.

On cherche à exhiber des conditions sur la matrice  $\mathbf{M}$  garantissant que l'on puisse reconstituer la donnée  $\mathbf{x}$ . Présentons d'abord les constantes d'isométrie  $\delta_p$  qui permettront de formuler la *Restricted Isometry Property* (RIP), omniprésente dans la théorie de l'acquisition compressée.

**Définition 1.** *Pour une matrice  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times N}$  donnée, pour chaque entier  $p \leq N$ , la constante d'isométrie  $\delta_p$  est donnée par :*

$$\delta_p = \inf \{ \delta \geq 0 : (1 - \delta) \|\mathbf{z}\|_2 \leq \|\mathbf{M}\mathbf{z}\|_2 \leq (1 + \delta) \|\mathbf{z}\|_2 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N, \|\mathbf{z}\|_0 \leq p \}.$$

Ces constantes sont difficiles à estimer, mais elles interviennent dans de nombreux résultats d'acquisition compressée. Plus  $\delta_p$  est petit, plus  $\mathbf{M}$  agit « comme » une isométrie pour les vecteurs  $p$ -parcimonieux. De manière informelle, on dira que  $\mathbf{M}$  obéit à la propriété d'isométrie restreinte d'ordre  $p$  si  $\delta_p$  est relativement petit devant 1. On trouve dans la littérature de nombreux résultats avec des conditions plus ou moins fortes sur les  $\delta_p$ . Un exemple de résultat est le théorème suivant, démontré dans [1].

**Théorème 1** (Condition suffisante sur les constantes d'isométrie). *Si  $\mathbf{M}$  est telle que  $\delta_{2p} < \sqrt{2} - 1$ , alors tous les vecteurs  $p$ -parcimonieux peuvent être reconstitués via (1.3) ; autrement dit, chaque  $\mathbf{x}$   $p$ -parcimonieux vérifie*

$$\mathbf{x} = \arg \min \{ \|\mathbf{z}\|_1 : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{M}\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{x} \}.$$

Remarquons que si  $\delta_{2p} < \sqrt{2} - 1$ , alors en particulier, le noyau de  $\mathbf{M}$  ne contient aucun vecteur  $2p$ -parcimonieux à part 0 ; ce qui signifie qu'une solution  $p$ -parcimonieuse de (1.1) est bien unique. Il faut en effet voir que la différence entre deux vecteurs  $p$ -parcimonieux est au plus  $2p$ -parcimonieuse, ce qui permet de conclure.

Construire de manière déterministe des matrices avec un contrôle sur les  $\delta_p$  est difficile. Mais certaines matrices aléatoires se révèlent particulièrement utiles en acquisition compressée, et vérifient avec une forte probabilité des conditions de type RIP. Avant de détailler ce point, évoquons le résultat suivant, étroitement lié aux propriétés d'isométrie restreinte.

**Lemme 1** (Johnson-Lindenstrauss). *Soit  $\epsilon \in [0, 1]$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que, quel que soit  $N$ , pour chaque ensemble fini  $Q$  de  $q$  points de  $\mathbb{R}^N$ , si  $m$  est un entier tel que*

$$m > C \cdot \ln \left( \frac{q}{\epsilon^2} \right)$$

*alors il existe une application  $f$  (lipschitzienne) de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^m$  vérifiant pour tous  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Q$  :*

$$(1 - \epsilon) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2^2 \leq \|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})\|_2^2 \leq (1 + \epsilon) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2^2.$$

Ce lemme classique, présenté initialement dans [3], énonce que l'on peut projeter un nuage de points d'un espace de dimension élevée  $N$  dans un espace de dimension bien plus petite  $m$  en conservant approximativement les distances entre les points. Son intérêt pratique est qu'en guise de fonction  $f$ , certaines matrices rectangulaires aléatoires conviennent avec une forte probabilité



– c’est d’ailleurs l’idée de la démonstration d’origine. On voit alors l’importance des projections aléatoires dans la réduction de dimensionnalité. Plus précisément, on construit une matrice  $\mathbf{M}$  telle que les  $m_{i,j}$  soient  $m \times N$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant une loi  $\mathcal{L}$ . La condition essentielle sur la loi  $\mathcal{L}$  est qu’elle vérifie une certaine inégalité de concentration : pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$ , pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\mathbb{P} \left( \left| \|\mathbf{M}\mathbf{u}\|_2^2 - \|\mathbf{u}\|_2^2 \right| \geq \epsilon \|\mathbf{u}\|_2^2 \right) \leq 2 \exp(-C_\epsilon m) \quad (1.4)$$

où  $C_\epsilon$  est une constante strictement positive. On peut désormais présenter le résultat suivant, démontré dans [4].

**Théorème 2** (RIP pour les matrices aléatoires). *Soit  $\delta \in ]0, 1[$  donné. Soit  $\mathbf{M}$  une matrice aléatoire dont les coordonnées sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi  $\mathcal{L}$ . Si (1.4) est vérifiée, alors il existe des constantes  $C_{\delta,1}$  et  $C_{\delta,2}$  strictement positives telles que l’on ait pour tout  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$   $p$ -parcimonieux,  $p \leq N$ ,*

$$(1 - \delta) \|\mathbf{z}\|_2^2 \leq \|\mathbf{M}\mathbf{z}\|_2^2 \leq (1 + \delta) \|\mathbf{z}\|_2^2$$

et ce, avec une probabilité supérieure ou égale à  $1 - 2 \exp(-C_{\delta,2}m)$ , pourvu que

$$p \leq \frac{C_{\delta,1}m}{\log\left(\frac{N}{p}\right)}.$$

Parmi les lois de probabilité couramment utilisées dans la construction de telles matrices aléatoires – et vérifiant donc (1.4) –, on peut évoquer :

- la loi normale  $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{m}\right)$  ;
- une loi de Bernouilli prenant les valeurs  $\pm \frac{1}{\sqrt{m}}$ .

Si le degré de parcimonie  $p$  est fixé, le Théorème 2 fournit une estimation du nombre  $m$  de mesures nécessaires à la reconstruction de n’importe quelle donnée  $\mathbf{x}$   $p$ -parcimonieuse. En effet, quitte à bien choisir  $\delta$ , on peut obtenir une matrice aléatoire  $\mathbf{M}$  vérifiant la condition du Théorème 1 avec une forte probabilité, pour peu que son nombre de lignes  $m$  vérifie

$$m \geq K \cdot p \cdot \log\left(\frac{N}{p}\right) \quad (1.5)$$

où  $K$  est une certaine constante. A quelques raffinements près, c’est le meilleur ordre de grandeur dont on dispose. Pour finir, notons que par souci de clarté, nous avons uniquement exposé le cas où la donnée est exactement parcimonieuse et les mesures sont exactes. Dans le cas général :

- on peut remplacer  $\mathbf{x}$  supposé parcimonieux par la *meilleure approximation*  $p$ -parcimonieuse de  $\mathbf{x}$  quelconque ;
- sous certaines hypothèses, la reconstruction est *robuste*, c’est-à-dire que l’on peut contrôler l’erreur de reconstruction par l’erreur de mesure.

A titre d’illustration, présentons donc un résultat plus général. Supposons que  $\mathbf{x}$  ne soit pas tout à fait parcimonieux, et que les mesures soient bruitées ; écrivons alors

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{n} \\ \mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (1.6)$$

avec  $\mathbf{x}_p$  le vecteur composé des  $p$  plus grandes composantes (en amplitude) de  $\mathbf{x}$ , le reste étant mis à zéro, et  $\boldsymbol{\omega}$  un bruit de mesure vérifiant  $\|\boldsymbol{\omega}\|_2 \leq \epsilon$ . Dans ce cas, on résout le problème d’optimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{x}} \in \arg \min \left\{ \|\mathbf{z}\|_1 \text{ pour } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } \|\mathbf{M}\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon \right\}. \quad (1.7)$$

**Théorème 3** (Reconstruction robuste). *Si  $\mathbf{M}$  est telle que  $\delta_{2p} < \sqrt{2} - 1$ , alors il existe  $C_1$  et  $C_2$  des constantes strictement positives telles que la solution  $\hat{\mathbf{x}}$  de (1.7) vérifie*

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 \leq \frac{C_1}{\sqrt{p}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p\|_1 + C_2 \cdot \epsilon.$$

## 1.2 Parcimonie et principe d'acquisition

En pratique, la base de représentation dans laquelle la donnée  $\mathbf{x}$  à laquelle on s'intéresse est parcimonieuse n'est pas immédiatement accessible. Par exemple, les images usuelles sont très loin d'être parcimonieuses dans la base canonique des pixels, mais elles le deviennent lorsqu'elles sont exprimées dans des bases d'ondelettes. Ainsi, si  $\Phi$  est la matrice de la base de représentation dans laquelle la donnée est parcimonieuse, on a simplement

$$\mathbf{x} = \Phi \alpha \quad (1.8)$$

où  $\alpha$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^N$   $p$ -parcimonieux. On écrit chaque mesure comme la projection de  $\mathbf{x}$  sur un vecteur  $\psi_i$  d'une autre base orthonormée  $\Psi$  de  $\mathbb{R}^N$ . Dans le cas sous-déterminé, les mesures  $\langle \psi_i, \mathbf{x} \rangle$  sont connues uniquement pour  $m$  indices formant un sous-ensemble  $M$  de  $\{1, \dots, N\}$ . Le système s'écrit alors

$$\mathbf{y} = \Psi_M^\top \Phi \alpha \quad (1.9)$$

où  $\Psi_M$  désigne la sous-matrice constituée des colonnes  $\psi_i$  pour  $i \in M$ , et  ${}^t\Psi_M \Phi$  est alors une matrice de taille  $m \times N$ . On est en fait ramené au problème précédent, avec

$$\mathbf{M} = \Psi_M^\top \Phi. \quad (1.10)$$

En reformulant ainsi, on voit apparaître la notion de *cohérence*, qui est essentielle dans le paradigme de l'acquisition compressée.

**Définition 2.** *La cohérence mutuelle d'une paire de bases orthonormées  $(\Psi, \Phi)$  de  $\mathbb{R}^N$  est donnée par :*

$$\mu(\Psi, \Phi) = \sqrt{N} \max \{ |\langle \psi_i, \phi_j \rangle| \text{ pour } i, j = 1, \dots, N \}.$$

Remarquons que les valeurs de cohérence sont comprises entre 1 et  $\sqrt{N}$ . En acquisition compressée, on cherche des paires de bases de cohérence minimale, autrement dit, des paires telle que chaque vecteur d'une base ne puisse pas admettre une représentation parcimonieuse sur l'autre. Cette notion étend en un sens la dualité classique temps-fréquence, dans laquelle il est connu qu'un signal compact en fréquence aura une représentation étendue en temps, et vice-versa. Utiliser une base de mesure fortement incohérente avec la base de représentation va permettre une reconstruction à partir d'un minimum de mesures. A titre d'exemple, présentons un résultat illustrant l'importance de cette notion.

**Théorème 4.** *On se donne  $\mathbf{x} = \Phi \alpha$  fixé, avec  $\alpha$   $p$ -parcimonieux. On choisit un sous-ensemble  $M$  de  $\{1, \dots, N\}$  de cardinal  $m$  selon une loi uniforme, ce qui définit la matrice de mesure  $\Psi_M$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que si*

$$m \geq C \cdot p \cdot \mu(\Psi, \Phi)^2 \log \left( \frac{N}{\delta} \right)$$

*alors on peut reconstituer  $\mathbf{x}$  via (1.3) avec une probabilité supérieure ou égale à  $1 - \delta$ .*

Il est important de remarquer que dans cette formulation, nous « fixons » la donnée, puis effectuons un tirage aléatoire afin d'obtenir une matrice de mesure ; dans le Théorème 2 en revanche, nous disons que très probablement, le choix de matrice aléatoire en question convient pour reconstituer *n'importe quelle* donnée  $p$ -parcimonieuse. On comprend alors que les estimations du nombre de mesures nécessaires sont différentes.

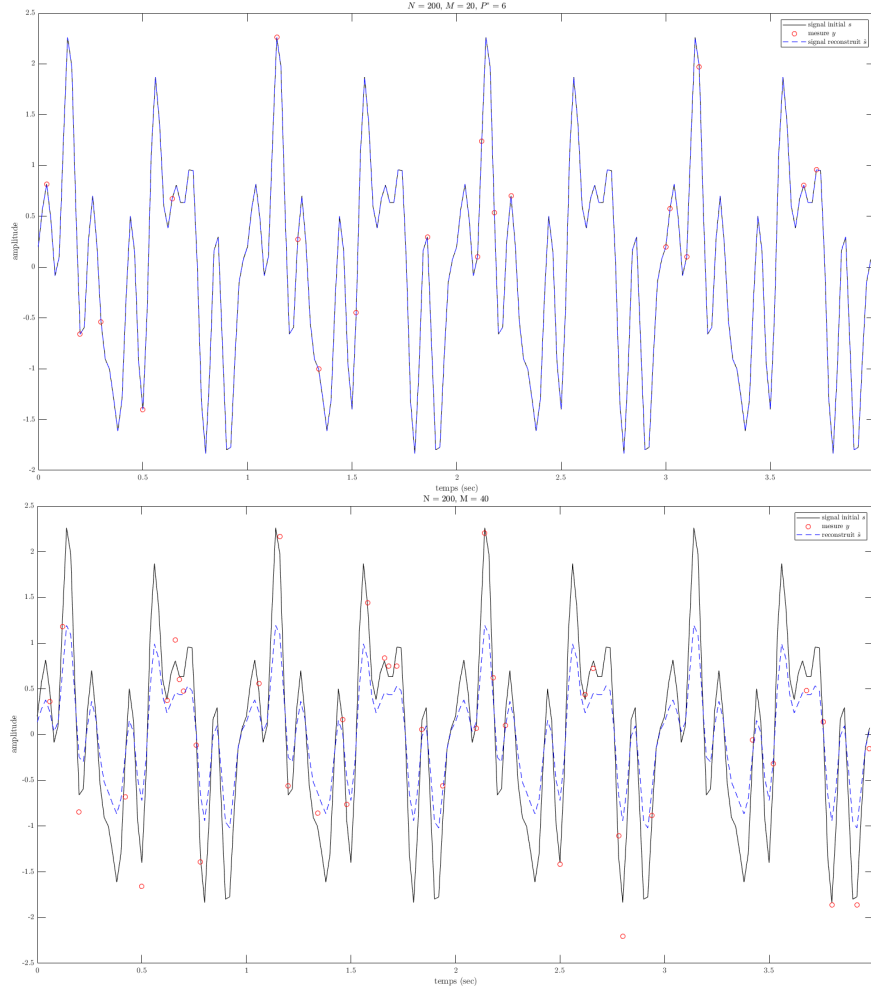


FIGURE 1.1 – Application numérique. Nous étudions un signal composé de trois composantes sinusoïdales, ce qui correspond à six coefficients sur la base des exponentielles complexes utilisée pour la reconstruction. Le procédé de mesure est un sous-échantillonnage aléatoire. Dans le cas sans bruit, la reconstruction est exacte avec 20 mesures pour 200 échantillons. Compte-tenu de la fréquence maximale, un échantillonnage régulier à la fréquence de Shannon représenterait 80 échantillons mesurés. Dans le cas bruité, avec 40 mesures, la reconstruction reste correcte.

## Chapitre 2

# Eléments sur les systèmes dynamiques linéaires

### 2.1 Systèmes dynamiques et représentation d'état

De manière informelle, dans le cadre de la théorie du contrôle et de l'automatique, on peut considérer qu'un système est un processus associant à un signal d'entrée, c'est-à-dire une fonction du temps à valeurs dans un certain espace, un signal de sortie. Un système est supposé *causal*, en ce que la valeur du signal de sortie à un instant donné ne dépend que des valeurs du signal d'entrée aux instants antérieurs et présent. A chaque instant, le système admet un état, qui n'est pas nécessairement la valeur du signal de sortie, mais plutôt la valeur d'une grandeur définie comme la quantité minimale d'information nécessaire pour prédire les états futurs à partir de la donnée d'une entrée.

#### 2.1.1 Une définition générale

De nombreuses définitions d'un système dynamique, plus ou moins générales et différant selon les disciplines, existent dans la littérature. Nous présentons la définition donnée historiquement par Kalman dans [5].

**Définition 3.** *Un système dynamique est un triplet  $(\mathcal{X}, \Theta, \Omega)$ , où*

- $\mathcal{X}$  est l'espace des états ;
- $\Theta \subset \mathbb{R}$  est l'ensemble des instants ;
- $\Omega$  est l'espace des entrées, qui sont des fonctions de  $\Theta$  ;

où  $\mathcal{X}$ ,  $\Theta$ ,  $\Omega$  sont munis de topologies. Les propositions suivantes doivent être vérifiées :

1. *Il existe une fonction de transition  $S : \Omega \times \Theta \times \Theta \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  telle que pour tout instant initial  $t_0 \in \Theta$ , tout état initial  $x_0 \in \mathcal{X}$ , et toute entrée  $u \in \Omega$  définie pour  $t \geq t_0$ , l'état du système à tout instant  $t \geq t_0$  soit donné par  $S(u, t, t_0, x_0)$ , la fonction  $(t, t_0) \mapsto S(u, t, t_0, x_0)$  étant définie uniquement pour  $t \geq t_0$  ;*
2. *(Loi de transition.) Si  $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \in \Theta$ ,  $x_0 \in \mathcal{X}$  et  $u \in \Omega$ ,  $u$  étant définie sur  $[t_0, t_1] \cap \Theta$ , alors  $S(u, t_0, t_0, x_0) = x_0$  et  $S(u, t_2, t_0, x_0) = S(u, t_2, t_1, S(u, t_1, t_0, x_0))$  ;*
3. *(Causalité.) Si  $u, v \in \Omega$  avec  $u(t) = v(t)$  pour  $t \in [t_0, t_1] \cap \Theta$ , alors  $S(u, t, t_0, x_0) = S(v, t, t_0, x_0)$ .*

La sortie du système est une fonction  $T : \Theta \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{d_s}$ . Les fonctions  $S$  et  $T$  sont continues pour les topologies produits associées.

Nous donnons cette définition à titre informatif, mais dans la suite, nous nous intéresserons uniquement à une certaine classe de systèmes dynamiques, à savoir les systèmes dynamiques *linéaires et de dimension finie*.

- Le caractère linéaire signifie pour tout  $t, t_0 \in \Theta$ , la fonction  $(u, x_0) \in \Omega \times \mathcal{X} \mapsto S(u, t, t_0, x_0)$  est linéaire – ce qui sous-entend que  $\mathcal{X}$  et  $\Omega$  sont munis d’une structure d’espace vectoriel. On supposera aussi que la sortie est une fonction linéaire de l’état.
- Par dimension finie, on entend que l’espace d’état  $\mathcal{X}$  est un espace vectoriel de dimension finie, typiquement un certain  $\mathbb{R}^d$ .

Dans le cas où la variable temporelle est continue i.e.  $\Theta$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on peut montrer que si les fonctions  $S$  et  $T$  sont suffisamment régulières, alors il existe des matrices  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$  et  $\mathbf{C}(t)$  continues par rapport au temps telles que l’état  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^d$  du système soit gouverné par les *équations dynamiques* suivantes – on parle aussi de *représentation d’état* :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Il est aussi fréquent de considérer des systèmes discrets, où la variable temporelle appartient par exemple à  $\mathbb{N}$ . On peut encore exprimer la dynamique du système en représentation d’état, en remplaçant l’équation différentielle par une équation de récurrence :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}(n)\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{y}(n) = \mathbf{C}(n)\mathbf{x}(n). \end{cases} \quad (2.2)$$

Ces deux modèles, dont on observera l’analogie, seront traités simultanément dans la section 2.2.

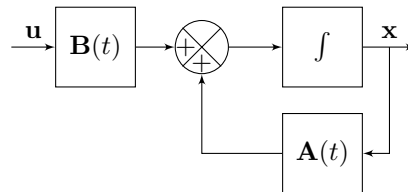


FIGURE 2.1 – Représentation en schéma-bloc d’un système dynamique linéaire en temps continu. Nous voyons l’équation différentielle comme modélisant un processus associant à une entrée  $\mathbf{u}(t)$  une trajectoire  $\mathbf{x}(t)$ .

**Exemple 1** (Filtrage passe-bas). *L’équation différentielle d’un filtre passe-bas du premier ordre est*

$$\frac{dx}{dt} + \omega_c x(t) = u(t)$$

où  $\omega_c$  est la pulsation de coupure du filtre. L’équation différentielle étant linéaire, et l’état étant un scalaire  $x(t)$ , le filtre constitue bien un système dynamique linéaire de dimension finie. Il s’agit d’un système temps invariant, puisque les coefficients de l’équation différentielle sont des constantes. Un tel système peut modéliser, par exemple, un circuit RC série.

## 2.1.2 Le problème d'observation

L'estimation de l'état d'un système dynamique est une problématique fondamentale. Nous présentons le problème d'observation tel qu'il est énoncé classiquement en automatique linéaire ainsi que la notion d'observateur d'état, avant de préciser le problème auquel nous nous intéressons.

**Les observateurs d'état dans le cas linéaire temps invariant** Un observateur d'état est un système *virtuel* permettant d'obtenir à chaque instant une estimation  $\hat{\mathbf{x}}$  de  $\mathbf{x}$  à partir de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{y}$ . Un exemple classique d'observateur est celui de Luenberger [6], qui peut s'écrire en représentation d'état :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

$\mathbf{L}$  est une matrice à déterminer. On voit que cet observateur applique la dynamique du système à l'estimée tout en intégrant un terme de correction dépendant de l'écart entre la mesure et la projection  $\hat{\mathbf{y}}$  de l'estimée. On peut aussi écrire

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t). \end{cases} \quad (2.4)$$

Si le couple  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  vérifie la condition d'*observabilité* de Kalman, c'est-à-dire si le rang de la matrice concaténée de taille  $d_s d \times d$

$$\mathcal{O} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{d-1} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

est égal à  $d$ , alors on peut déterminer  $\mathbf{L}$  de sorte à ce que les valeurs propres de la matrice

$$\mathbf{A} - \mathbf{LC} \quad (2.6)$$

garantissent que  $\|\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\|$  converge vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$  ; autrement dit, dans ce cas, l'erreur d'estimation tend vers 0.

**Estimation de trajectoire** On souhaiterait appliquer une stratégie d'acquisition compressée afin d'estimer  $\mathbf{x}$  à partir d'une quantité minimale d'informations issues de  $\mathbf{y}$ . Comme évoqué précédemment, les différences essentielles par rapport au cas d'une donnée discrète et finie sont les suivantes :

- Chaque trajectoire est une fonction de la variable continue, et l'ensemble des trajectoires est *a priori* un espace de dimension infinie ;
- En vue d'une application *système*, on cherche à formuler des hypothèses non pas sur une trajectoire en particulier, mais plutôt sur la dynamique du système – et donc les matrices définies dans la représentation d'état ;

d'où la nécessité d'étendre le cadre habituel de l'acquisition compressée. En fait, nous nous intéressons à l'estimation d'une classe de signaux dont la particularité est d'avoir été engendrés par un système dynamique donné. Ainsi, nous supposons que l'état du système est accessible directement, autrement dit,  $\mathbf{C}$  est la matrice identité, et nous considérons que l'entrée  $\mathbf{u}$  n'est pas connue, ce en quoi nous nous écartons du problème d'observation classique. Le critère d'observabilité concernant (2.5) est en effet une condition algébrique sous laquelle il est possible d'estimer

à un instant donné l'état  $\mathbf{x}$  à partir d'une projection  $\mathbf{y}$  et de la commande  $\mathbf{u}$  par le biais d'un certain bouclage. Dans le cadre de l'acquisition compressée, les enjeux sont les suivants :

1. Formuler une hypothèse de « parcimonie » sur le système ou les entrées, ce qui revient à établir une information *a priori* sur la donnée à acquérir ;
2. Construire un opérateur linéaire et continu de mesure à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , ce qui revient à choisir  $m$  mesures linéaires.

Ces deux aspects seront examinés dans la suite du travail.

## 2.2 Cadre hilbertien pour les systèmes dynamiques linéaires

Dans cette section, nous présentons le cadre et le formalisme sur lesquels nous nous appuyerons pour établir des résultats relatifs à l'acquisition compressée des trajectoires d'un système dynamique linéaire. Nous allons voir notamment que nous pouvons utiliser les mêmes outils pour traiter à la fois les systèmes en temps continu et les systèmes en temps discret. Nous souhaitons que les espaces d'entrée et de trajectoires soient des espaces de Hilbert de type espaces de fonctions de carré intégrable – ou espaces  $L^2$  – pour deux raisons principales.

- En sciences de l'ingénieur, traitement du signal et théorie du contrôle, on s'intéressera souvent à des entrées non-continues, ce qui correspond à un second membre non-continu dans l'équation différentielle linéaire.
- Le cadre des espaces de Hilbert fournit un certain nombre d'outils mathématiques très commodes. D'autre part, des méthodes et résultats récents en acquisition compressée s'expriment justement dans des espaces de Hilbert.

### 2.2.1 Définition et bien-posé du problème

Si nous élargissons la classe d'entrées admissibles, il faudra s'assurer que le problème demeure bien posé. Nous traitons d'abord le cas continu, puis le cas discret.

**Modèle en temps continu** Considérons le modèle de système dynamique linéaire en dimension finie, d'ordre  $d$  suivant, exprimé en représentation d'état

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.7)$$

où l'état  $\mathbf{x}$  est une fonction du temps à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , la sortie  $\mathbf{y}$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d_S}$ , avec  $d_S \leq d$ , l'entrée  $\mathbf{u}$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d_e}$ , avec  $d_e \leq d$ . A chaque instant, les matrices  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$  et  $\mathbf{C}(t)$  sont donc respectivement de taille  $d \times d$ ,  $d \times d_e$  et  $d_S \times d$ . Supposons de plus que les fonctions de la variable temporelle  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont continues à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $\mathbb{R}^{d \times d_e}$  et  $\mathbb{R}^{d_S \times d}$ . Nous pouvons dans un premier temps considérer que nous disposons *a priori* de toute l'information sur l'état du système, ce qui revient à prendre  $\mathbf{C} = \mathbf{I}_d$ . Le système se résume alors à

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \right. . \quad (2.8)$$

Pour toute fonction  $\mathbf{u}$  continue à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d_e}$ , d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

admet une unique solution  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ . Cette dernière peut s'écrire avec par la formule de Duhamel :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t, 0)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{R}(t, s)\mathbf{B}(s)\mathbf{u}(s) \, ds \quad (2.10)$$

où pour tout  $s \geq 0$ ,  $\mathbf{R}(\cdot, s)$  est l'unique solution appartenant à  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d \times d})$  du problème différentiel linéaire homogène

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) \\ \mathbf{X}(s) = \mathbf{I}_d. \end{cases} \quad (2.11)$$

Le terme en  $\mathbf{R}(t, 0)$  constitue le régime libre du système, et le terme intégral constitue le régime forcé. On voit que le régime libre est entièrement déterminé par la donnée de la condition initiale  $\mathbf{x}_0$ , qui est choisie dans un espace de dimension finie. En revanche, le régime forcé a potentiellement une infinité de degré de liberté, du fait que les commandes évoluent dans des espaces de dimension infinie. On montre que  $(t, s) \mapsto \mathbf{R}(t, s)$  appartient en fait à  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d \times d})$ .  $\mathbf{R}$  est appelée résultante, « solution operator » ou encore matrice de transition. On a donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}(t, s) = \mathbf{A}(t)\mathbf{R}(t, s) \\ \mathbf{R}(t, t) = \mathbf{I}_d. \end{cases} \quad (2.12)$$

**Exemple 2.** Dans le cas temps invariant, la matrice de transition est donnée par

$$\mathbf{R}(t, s) = \exp((t - s)\mathbf{A}).$$

Fixons  $T$  un temps maximal. Alors  $\mathbf{R}$  appartient à  $L^2((0, T)^2, \mathbb{R}^{d \times d})$ , où  $\mathbb{R}^{d \times d}$  est muni – par exemple – de la norme d'opérateur. Définissons alors l'opérateur  $\mathcal{H}$  de  $L^2(0, T)^{d_e}$  dans  $L^2(0, T)^d$  tel que

$$\mathcal{H}\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{R}(t, s)\mathbf{B}(s)\mathbf{u}(s) \, ds. \quad (2.13)$$

$\mathcal{H}$  est linéaire, et continu du fait que la fonction  $(t, s) \mapsto \|\mathbf{R}(t, s)\mathbf{B}(s)\|$  soit de carré intégrable sur  $[0, T]^2$ . En considérant un second membre  $\mathbf{u}$  « seulement » de carré intégrable, on doit considérer des solutions faibles, c'est-à-dire vérifiant

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.14)$$

seulement au sens des distributions de  $(0, T)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , autrement dit, vérifiant

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T], \mathbb{R}^d), \quad \langle \mathbf{x}, \varphi' \rangle = -\langle \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \varphi \rangle. \quad (2.15)$$

On a le résultat suivant, garantissant que fixer une condition initiale a un sens, vrai parce que le domaine est de dimension 1.

**Proposition 1.** Si  $\mathbf{x}$  appartient à  $L^2(0, T)^d$  et admet une dérivée faible  $\mathbf{x}'$  appartenant à  $L^2(0, T)^d$ , alors  $\mathbf{x}$  s'identifie à une fonction continue de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^d$ . On a de plus, presque partout :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{x}'(s) \, ds.$$

Grâce à ce résultat, on peut vérifier que  $\mathcal{H}\mathbf{u}$  est bel et bien l'unique régime forcé possible pour une entrée  $\mathbf{u}$  de carré intégrable.



**Proposition 2.** Soit  $\mathbf{u} \in L^2(0, T)^{d_e}$ . Alors  $\mathcal{H}\mathbf{u}$  est l'unique fonction de  $L^2(0, T)^d$  vérifiant

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

au sens des distributions de  $]0, T[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , et vérifiant la condition initiale  $\mathbf{x}(0) = 0$ .

*Démonstration.* D'après la Proposition 1,  $\mathcal{H}\mathbf{u}$  est une fonction continue et la condition initiale est immédiatement vérifiée. Soit donc  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)$  une fonction-test. En utilisant le théorème de Fubini pour permuter deux intégrales, sachant que la fonction  $(t, s) \mapsto \|\mathbf{R}(t, s)\|$  est de carré intégrable, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}\mathbf{u}, \varphi' \rangle &= \int_0^T \varphi'(t) \cdot \left[ \int_0^t \mathbf{R}(t, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{u}(s) ds \right] dt \\ &= \iint_{(0, T)^2} \varphi'(t) \cdot [\mathbf{1}_{[0, t]}(s) \mathbf{R}(t, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{u}(s)] ds dt \\ &= \int_0^T \left[ \int_s^T [\varphi'(t)]^\top \mathbf{R}(t, s) dt \right] \mathbf{B}(s) \mathbf{u}(s) ds. \end{aligned}$$

En remarquant que l'intégrande de l'intégrale entre crochets est composé de fonctions régulières, on peut effectuer une intégration par parties classique, afin d'avoir

$$\begin{aligned} \int_s^T [\varphi'(t)]^\top \mathbf{R}(t, s) dt &= \left[ [\varphi(t)]^\top \mathbf{R}(t, s) \right]_s^T - \int_s^T [\varphi(t)]^\top \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}(t, s) dt \\ &= -[\varphi(s)]^\top - \int_s^T [\varphi(t)]^\top \mathbf{A}(t) \mathbf{R}(t, s) dt. \end{aligned}$$

On peut désormais injecter ces deux termes dans le produit scalaire, avant d'effectuer une seconde permutation d'intégrales :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}\mathbf{u}, \varphi' \rangle &= - \int_0^T \varphi(s) \cdot [\mathbf{B}(s) \mathbf{u}(s)] ds - \int_0^T \left[ \int_s^T [\varphi(t)]^\top \mathbf{A}(t) \mathbf{R}(t, s) dt \right] \mathbf{B}(s) \mathbf{u}(s) ds \\ &= -\langle \mathbf{B}\mathbf{u}, \varphi \rangle - \int_0^T \varphi(t) \cdot \left[ \int_0^t \mathbf{1}_{[s, T]}(t) \mathbf{R}(t, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{u}(s) ds \right] dt \\ &= -\langle \mathbf{A} [\mathcal{H}\mathbf{u}] + \mathbf{B}\mathbf{u}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Le calcul étant valable pour n'importe quelle fonction-test  $\varphi$ , nous avons montré que  $\mathcal{H}\mathbf{u}$  vérifiait (2.14) au sens des distributions. En ce qui concerne l'unicité, considérons  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  deux solutions. Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on a  $\mathbf{x}_i(t) = \int_0^t \mathbf{A}(s) \mathbf{x}_i(s) + \mathbf{B}(s) \mathbf{u}(s) ds$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| &= \left\| \int_0^t \mathbf{A}(s) (\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_2(s)) ds \right\| \\ &\leq \max_{s \in [0, T]} \|\mathbf{A}(s)\| \cdot \int_0^t \|\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_2(s)\| ds, \end{aligned}$$

et ce, pour tout  $t \in [0, T]$ . Comme la fonction  $\|\mathbf{x}_1(\cdot) - \mathbf{x}_2(\cdot)\|$  est continue, l'application du lemme de Grönwall donne

$$\forall t \in [0, T], \quad \|\mathbf{x}^{(1)}(t) - \mathbf{x}^{(2)}(t)\| = 0,$$

ce qui conclut la démonstration. □

**Remarque 1.** La dérivée faible généralise la dérivée usuelle, et si les fonctions sont régulières, alors les deux dérivées coïncident. Par exemple, si l'entrée est continue par morceaux, alors la trajectoire sera  $C^1$  par morceaux.

**Remarque 2.** Si la fonction  $(t, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mapsto \|\mathbf{R}(t, s)\mathbf{B}(s)\|$  est de carré intégrable, on peut remplacer  $T$  par  $+\infty$ .

**Modèle en temps discret** L'approche choisie pour les équations différentielles linéaires s'applique aisément aux suites avec équation de récurrence linéaire, ce qui permet de considérer des systèmes dynamiques discrets. Considérons donc le système discret défini par

$$(\mathcal{S}) : \mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}(n)\mathbf{u}(n). \quad (2.16)$$

De manière analogue au cas continu, on peut définir une résultante discrète  $\mathbf{R}$  par

$$\forall p, q \geq 0, \quad \begin{cases} \mathbf{R}(p+1, q) = \mathbf{A}(p)\mathbf{R}(p, q) \\ \mathbf{R}(p+1, p) = \mathbf{I}_d, \end{cases} \quad (2.17)$$

et  $\mathbf{R}(0, -1) = \mathbf{I}_d$ , disons. On peut alors définir un opérateur dynamique discret  $\mathcal{H}$  par

$$\forall \mathbf{u} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^{d_e}), \quad \mathcal{H}\mathbf{u}(p) \triangleq \sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{R}(p, q)\mathbf{B}(q)\mathbf{u}(q). \quad (2.18)$$

Nous supposons que la fonction  $(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mapsto \|\mathbf{R}(p, q)\mathbf{B}(q)\|$  est de carré sommable, donc  $\mathcal{H}$  est un opérateur bien défini et continu de  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^{d_e})$  vers  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^d)$ . On a immédiatement  $[\mathcal{H}\mathbf{u}](0) = 0$ . Il suffit désormais de montrer que  $\mathcal{H}\mathbf{u}$  vérifie l'équation de récurrence (2.16), l'unicité étant assurée.

**Proposition 3.** Soit  $\mathbf{u} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^{d_e})$ . Alors  $\mathcal{H}\mathbf{u} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^d)$  est l'unique suite vérifiant (2.16) avec condition initiale nulle.

*Démonstration.* Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\mathbf{u}(p+1) &= \sum_{q=0}^p \mathbf{R}(p+1, q)\mathbf{B}(q)\mathbf{u}(q) \\ &= \mathbf{R}(p+1, p)\mathbf{B}(p)\mathbf{u}(p) + \sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{A}(p)\mathbf{R}(p, q)\mathbf{B}(q)\mathbf{u}(q) \\ &= \mathbf{B}(p)\mathbf{u}(p) + \mathbf{A}(p)\mathcal{H}\mathbf{u}(p). \end{aligned}$$

□

**Remarque 3.** Si l'hypothèse de sommabilité n'est pas vérifiée, on peut tout à fait considérer un instant maximal  $N$  ; cependant, on est alors dans un cas où la dimension est finie.

**Cadre unifié pour les cas continu et discret** Nous allons vérifier que l'opérateur  $\mathcal{H}$  vérifie certaines propriétés communes dans le cas continu et le cas discret. Ce sont ces propriétés qui nous permettront d'obtenir les résultats ultérieurs. Pour cette raison, nous noterons indifféremment

- $U$  l'espace des entrées, soit  $L^2(0, T; \mathbb{R}^{d_e})$  soit  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^{d_e})$  ;
- $E$  l'espace des trajectoires, soit  $L^2(0, T; \mathbb{R}^d)$  soit  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^d)$ .

Dans les deux cas,  $E$  et  $U$  sont des espaces de Hilbert. A ce titre, nous allons pouvoir employer des résultats issus de la théorie des opérateurs d'espaces de Hilbert, et bénéficier des outils liés au produit scalaire.

### 2.2.2 Propriété de Hilbert-Schmidt pour l'opérateur dynamique

Notre approche repose sur les propriétés de l'opérateur associant à chaque entrée la trajectoire d'état du système. Dans cette sous-section, nous démontrons d'abord un résultat général concernant une certaine classe d'opérateurs « intégraux », avant d'appliquer ce résultat à notre opérateur  $\mathcal{H}$ , en observant que les conditions d'application sont vérifiées à la fois en temps continu et en temps discret.

**Un résultat préliminaire** Nous allons voir que les opérateurs qui nous intéressent bénéficient de propriétés d'opérateurs intégraux. Cependant, quelques précautions sont à prendre dans la mesure où les fonctions de l'espace d'entrée sont à valeurs vectorielles.

**Théorème 5.** *Soit  $\mu$  une mesure  $\sigma$ -finie sur un espace mesurable  $(X, \mathcal{F})$ . Munissons l'espace  $X \times X$  de la mesure produit  $\mu \times \mu$ . Alors, si  $\mathbf{K} \in L^2(X \times X, \mathbb{R}^{n \times n})$ , l'opérateur  $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}$  de  $L^2(X, \mathbb{R}^n)$  défini par*

$$\forall \mathbf{u} \in L^2(X, \mathbb{R}^n), \forall x \in X, \quad [\mathcal{T}_{\mathbf{K}} \mathbf{u}](x) \triangleq \int_X \mathbf{K}(x, y) \mathbf{u}(y) dy$$

*vérifie la propriété de Hilbert-Schmidt i.e. pour toute famille orthonormée  $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de  $L^2(X, \mathbb{R}^n)$ ,*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|\mathcal{T}_{\mathbf{K}} \mathbf{e}_i\|^2 \leq \|\mathbf{K}\|^2 < +\infty.$$

Ce résultat est classique dans le cas  $n = 1$ . Nous allons reprendre l'argument donnée dans [7] en observant qu'il se généralise au cas vectoriel, pour peu que l'on remplace le produit de deux fonctions réelles par un certain produit tensoriel.

*Démonstration.* Si  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  sont deux éléments de  $L^2(X, \mathbb{R}^n)$ , on peut définir la (classe de) fonction(s)  $\mathbf{f} \otimes \mathbf{g} \in L^2(X \times X, \mathbb{R}^{n \times n})$  par

$$\mathbf{f} \otimes \mathbf{g} : (x, y) \in X \times X \mapsto [\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}](x, y) \triangleq \mathbf{f}(x)[\mathbf{g}(y)]^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Soit  $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  une famille orthonormée de  $L^2(X, \mathbb{R}^n)$ . Nous allons d'abord montrer que la famille des  $\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q$  pour  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  constitue une famille orthonormée de  $L^2(X \times X, \mathbb{R}^{n \times n})$ . Soient  $(p, q), (p', q') \in \mathbb{N}^2$ . Alors

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q, \mathbf{e}_{p'} \otimes \mathbf{e}_{q'} \rangle &= \iint_{X \times X} \text{Tr}(\mathbf{e}_q(y)[\mathbf{e}_p(x)]^\top \mathbf{e}_{p'}(x)[\mathbf{e}_{q'}(y)]^\top) dx dy \\ &= \int_X [\mathbf{e}_p(x)]^\top \mathbf{e}_{p'}(x) dx \cdot \int_X \mathbf{e}_q(y)[\mathbf{e}_{q'}(y)]^\top dy \\ &= \langle \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p'} \rangle \langle \mathbf{e}_q, \mathbf{e}_{q'} \rangle = \delta_{p,p'} \delta_{q,q'} = \delta_{(p,q), (p',q')}. \end{aligned}$$

On peut donc appliquer l'inégalité de Bessel dans  $L^2(X \times X, \mathbb{R}^{n \times n})$  pour obtenir

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \langle \mathbf{K}, \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q \rangle^2 \leq \|\mathbf{K}\|^2 < +\infty.$$

Il faut alors remarquer que pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\langle \mathbf{K}, \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q \rangle = \langle \mathbf{e}_p, \mathcal{T}_{\mathbf{K}} \mathbf{e}_q \rangle$ . En effet,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K}, \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q \rangle &= \iint_{X \times X} \text{Tr}([\mathbf{K}(x, y)]^\top \mathbf{e}_p(x) [\mathbf{e}_q(y)]^\top) dx dy \\ &= \iint_{X \times X} \text{Tr}([\mathbf{K}(x, y) \mathbf{e}_q(y)]^\top \mathbf{e}_p(x)) dx dy \\ &= \int_X \left[ \int_X \mathbf{K}(x, y) \mathbf{e}_q(y) dy \right]^\top \mathbf{e}_p(x) dx, \end{aligned}$$

où l'on a interverti les intégrales en utilisant le théorème de Fubini. Enfin, on a

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \langle \mathbf{e}_p, \mathcal{T}_{\mathbf{K}} \mathbf{e}_q \rangle^2 = \sum_{q=0}^{+\infty} \|\mathcal{T}_{\mathbf{K}} \mathbf{e}_q\|^2,$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Remarque 4.** Si  $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est une base hilbertienne, la quantité  $\sum_{i=0}^{+\infty} \|\mathcal{T}_{\mathbf{K}} \mathbf{e}_i\|^2$  ne dépend pas du choix de la base.

Rappelons la définition d'un opérateur compact dans les espaces de Hilbert. Une interprétation de cette propriété est donnée Figure 2.2.

**Définition 4.** Si  $U$  et  $V$  sont deux espaces de Hilbert et  $\mathcal{T}$  est une application linéaire et continue de  $X$  dans  $Y$ , alors on dira que  $\mathcal{T}$  est un opérateur compact si l'image par  $\mathcal{T}$  de toute partie bornée de  $U$  est incluse dans une partie compacte de  $V$ .

**Corollaire 1.** Sous les hypothèses du Théorème 5, si  $\mathbf{K} \in L^2(X \times X, \mathbb{R}^{n \times n})$  alors  $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}$  est un opérateur compact de  $L^2(X, \mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* Parce que  $\mu$  est une mesure  $\sigma$ -finie sur  $(X, \mathcal{F})$ , l'espace  $L^2(X, \mathbb{R}^n)$  est séparable et admet donc une base hilbertienne  $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Pour tout  $\mathbf{u} \in L^2(X, \mathbb{R}^n)$ , on peut écrire  $\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$ . On en déduit la décomposition suivante :

$$\mathcal{T}_{\mathbf{K}} \mathbf{u} = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle \mathcal{T}_{\mathbf{K}} \mathbf{e}_i,$$

la série convergeant normalement puisque

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|\langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle \mathcal{T}_{\mathbf{K}} \mathbf{e}_i\| = \sum_{i=0}^{+\infty} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle| \|\mathcal{T}_{\mathbf{K}} \mathbf{e}_i\| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} \|\mathcal{T}_{\mathbf{K}} \mathbf{e}_i\|^2} < +\infty.$$

Si l'on définit une famille d'opérateurs  $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}^{(N)}$  par

$$\forall \mathbf{u} \in L^2(X, \mathbb{R}^n), \quad \mathcal{T}_{\mathbf{K}}^{(N)} \mathbf{u} \triangleq \sum_{i=0}^N \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle \mathcal{T}_{\mathbf{K}} \mathbf{e}_i,$$

le même calcul permet de démontrer que  $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}$  est limite en norme d'opérateur de la suite  $(\mathcal{T}_{\mathbf{K}}^{(N)})$ ; en effet, on obtient

$$\forall \mathbf{u} \in L^2(X, \mathbb{R}^d), \quad \left\| \left[ \mathcal{T}_{\mathbf{K}} - \mathcal{T}_{\mathbf{K}}^{(N)} \right] \mathbf{u} \right\| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \sqrt{\sum_{i=N+1}^{+\infty} \|\mathcal{T}_{\mathbf{K}} \mathbf{e}_i\|^2}.$$

Puisque les  $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}^{(N)}$  sont de rangs finis, on en déduit que  $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}$  est un opérateur compact.  $\square$

**Application à l'opérateur dynamique et réduction via la SVD** Nous allons pouvoir appliquer ces résultats à l'opérateur  $\mathcal{H}$  afin d'en déduire des propriétés intéressantes relatives à la réduction de dimension et à l'approximation de l'ensemble image. Nous démontrons la compacité et la « propriété de Hilbert-Schmidt » pour l'opérateur  $\mathcal{H}$ .

1. La compacité de l'opérateur nous permettra d'obtenir une *décomposition en valeurs singulières* (SVD), qui est l'analogue en dimension infinie de la SVD pour des matrices. De même que la SVD pour une matrice permet d'identifier les contributions principales à l'image de ladite matrice, la SVD de l'opérateur nous permettra de bénéficier d'approximations de rangs finis à partir d'une famille orthonormée de fonctions singulières.
2. La propriété de Hilbert-Schmidt nous renseignera sur la décroissance des valeurs singulières. En particulier, elle nous permet de déduire que l'approximation par les troncatures de l'opérateur est ici uniforme.

**Proposition 4.**  $\mathcal{H}$  est un opérateur compact de  $U$  dans  $E$ .

*Démonstration.* Rappelons que  $U$  est un espace de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d_e}$  et  $E$  un espace de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d_e \leq d$ . Afin de pouvoir appliquer le Théorème 5, nous allons observer qu'on peut supposer  $d_e = d$  en complétant la matrice  $\mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^{d \times d_e}$  avec des zéros. On notera donc

$$\tilde{\mathbf{B}}(t) \triangleq \left[ \begin{array}{c|ccc} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{B}(t) & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

De la même façon, si  $\mathbf{u}$  est une fonction du temps à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d_e}$ , on définit

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) \triangleq [u_1(t), \dots, u_{d_e}(t), 0, \dots, 0]^\top \in \mathbb{R}^d.$$

Ramenons-nous aux hypothèses du Théorème 5 :

- Dans le cas continu, on considère  $[0, T] \subset \mathbb{R}$  muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue ;
- Dans le cas discret, on considère  $\mathbb{N}$  muni de la tribu de toutes ses parties et de la mesure de comptage.

Dans les deux cas, la mesure choisie est  $\sigma$ -finie, et si l'on prend  $\mathbf{K}(x, y) \triangleq \mathbf{1}(x, y)\mathbf{R}(x, y)\tilde{\mathbf{B}}(y)$ , où  $\mathbf{1}(t, s) \triangleq \mathbf{1}_{[0, t]}(s)$  dans le cas continu et  $\mathbf{1}(p, q) \triangleq \mathbf{1}_{\{0, \dots, p\}}(q)$  dans le cas discret, alors  $\mathbf{K} \in L^2(X \times X, \mathbb{R}^{d \times d})$ , et on peut remarquer que

$$\forall \mathbf{u} \in U, \quad \mathcal{H}\mathbf{u} = \mathcal{T}_{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{u}}.$$

On peut désormais démontrer la compacité de l'opérateur  $\mathcal{H}$ . Soit  $(\mathbf{u}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $U$ . Alors la suite des  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  est une suite bornée de  $L^2(X, \mathbb{R}^d)$ , et par compacité de l'opérateur  $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}$ , la suite des  $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{u}}_i$ , et donc des  $\mathcal{H}\mathbf{u}_i$ , admet une sous-suite convergente.  $\square$

La théorie spectrale des opérateurs compacts – voir par exemple [7] – fournit une décomposition en valeurs singulières : il existe une suite  $(\sigma_i)_{i \geq 1}$  positive et décroissante de valeurs singulières, deux familles  $\{\mathbf{f}_i\}_{i \geq 1}$  et  $\{\mathbf{g}_i\}_{i \geq 1}$ , formant respectivement une base hilbertienne de l'orthogonal du noyau de  $\mathcal{H}$  et de l'adhérence de l'image de  $\mathcal{H}$ , telles que

$$\mathcal{H}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{u} \rangle \mathbf{g}_i \tag{2.19}$$

pour peu que cette série converge, ce qui est en fait toujours vérifié dans notre cas, d'après la proposition suivante.

**Proposition 5.** Si  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est une famille orthonormée de  $U$ , alors  $\sum_{i=0}^{+\infty} \|\mathcal{H}\phi_i\|^2 < +\infty$ . En particulier,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^2 < +\infty.$$

*Démonstration.* On reprend les notations de la démonstration de la Proposition 4. Si  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est une famille orthonormée de  $U$ , alors  $\{\tilde{\phi}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est une famille orthonormée de  $L^2(X, \mathbb{R}^d)$ . De là, puisque  $\sum_{i=0}^{+\infty} \|\mathcal{H}\phi_i\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \|\mathcal{T}_K \tilde{\phi}_i\|^2$ , le Théorème 5 donne le résultat voulu. La sommabilité de la série des  $\sigma_i^2$  est obtenue en prenant  $\{\phi_i\} = \{\mathbf{f}_i\}$ .  $\square$

Nos résultats relatifs à l'acquisition compressée de trajectoires d'un système dynamique linéaire seront donnés au Chapitre 4, et s'appuieront uniquement sur l'existence de la SVD pour l'opérateur compact  $\mathcal{H}$  et sur la Proposition 5. En fait, ces résultats peuvent donc s'étendre à tout système dont les sorties admettent une représentation intégrale en fonction de l'entrée, vérifiant les hypothèses du Théorème 5.

**Remarque 5.** Par commodité, et aussi parce que nous nous intéressons surtout à l'action du système sur des ensembles d'entrées, nous avons considéré uniquement une condition nulle. Cependant il est facile de prendre en compte une condition initiale quelconque, en notant que chaque trajectoire s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t, 0)\mathbf{x}_0 + [\mathcal{H}\mathbf{u}](t) & \text{dans le cas continu,} \\ \mathbf{x}(n) = \mathbf{R}(n, -1)\mathbf{x}_0 + [\mathcal{H}\mathbf{u}](n) & \text{dans le cas discret.} \end{cases}$$

On peut alors considérer un opérateur linéaire de  $\mathbf{R}^d \times U$  dans  $E$  qui jouit des mêmes propriétés que  $\mathcal{H}$ , en considérant la contribution de la condition initiale, qui correspond à un opérateur de rang fini.

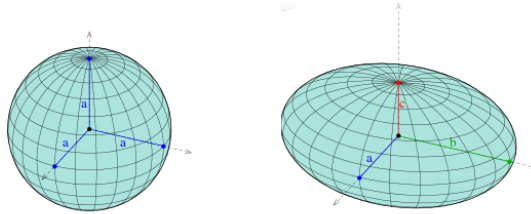


FIGURE 2.2 – Interprétation géométrique de la compacité de l'opérateur et de l'existence d'une décomposition en valeurs singulières : l'image par  $\mathcal{H}$  de la boule unité  $\mathcal{B}$  de  $E$  – non-compacte – est un ellipsoïde dont les axes sont les  $\sigma_i \mathbf{g}_i$ . Même si l'ensemble image est *a priori* de dimension infinie, la décroissance des  $\sigma_i$  implique que les contributions « des grandes dimensions » sont de plus en plus petites. Ce point sera essentiel lorsque nous étudierons des propriétés d'approximation et de réduction de dimension.

**Exemple 3** (Fonctions propres associées au filtre passe-bas). L'opérateur  $\mathcal{H}$  associé à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} + \omega_c x(t) = u(t)$$

admet comme vecteurs singuliers des fonctions de la forme  $g_i(t) = A_i \sin(\sigma_i \omega_c t)$ .

## Chapitre 3

# Un cadre généralisé pour l'acquisition compressée

### 3.1 Vers l'acquisition compressée de signaux en dimension infinie

Nous avons orienté l'étude vers l'acquisition compressée de signaux qui sont les trajectoires d'un système dynamique. A ce titre, ces signaux appartiennent à des espaces vectoriels de fonctions de dimension infinie. En cela, on sort du cadre classique de l'acquisition compressée où les données d'intérêt sont des vecteurs appartenant à un certain  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ . Dans cette section, nous présentons, à titre informatif, plusieurs pistes de généralisation et d'application de l'acquisition compressée.

#### 3.1.1 Un exemple préliminaire issu de l'échantillonnage

Dans [8] est présenté un dispositif permettant d'estimer le spectrogramme supposé *parcimonieux* de certains signaux analogiques. Le système effectue successivement une multiplication du signal d'entrée par un signal de démodulation  $p_c$ , puis un filtrage passe-bas – soit une convolution avec une certaine fonction  $h$  – et enfin, un échantillonnage régulier. Le signal  $p_c$  est une succession d'échelons de longueurs aléatoires, valant 1 ou  $-1$ .

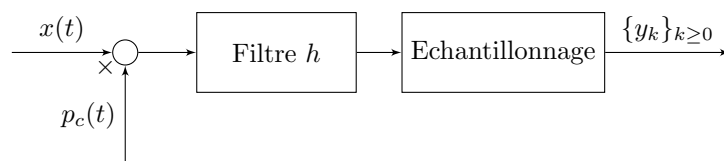


FIGURE 3.1 – Schéma de principe du procédé d'acquisition analogique. Le dispositif permet d'introduire de l'aléatoire dans la mesure tout en conservant un échantillonnage régulier.

Physiquement, la démodulation pseudo-aléatoire permet « d'éclater » le spectre du signal d'entrée afin que les composantes à haute fréquence aient une contribution sur les basses fréquences du spectre de sortie. Ainsi, de l'information sur l'ensemble des fréquences du signal d'entrée est conservée après filtrage passe-bas du signal de sortie, après quoi le signal peut être échantillonné

à une fréquence inférieure à ce que l'on ferait habituellement d'après le critère de Shannon. La reconstruction se fait *a posteriori* en résolvant un problème de minimisation  $\ell^1$ . Cette méthode est intéressante en ce qu'elle permet d'introduire de l'aléatoire dans l'acquisition tout en conservant un échantillonnage régulier, plus facile à mettre en œuvre.

Dans les travaux cherchant à appliquer une stratégie d'acquisition compressée à la conversion analogique-numérique, l'hypothèse de parcimonie est formulée de la manière suivante : il existe un dictionnaire de représentation  $\Phi$  dans lequel le signal  $x$  s'exprime comme la combinaison linéaire d'un *petit* nombre de fonctions de base  $\phi_i$ . Ainsi, on écrira par exemple

$$x(t) = \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i \phi_i(t) \quad (3.1)$$

où  $\Lambda$  est un ensemble d'indices de cardinal disons  $r$ . Les fonctions  $\phi_i$  n'ont pas à avoir des propriétés de parcimonie particulières, c'est la représentation de  $x$  dans le dictionnaire  $\Phi$  qui est parcimonieuse. Quant aux mesures, on les écrit comme des produits scalaires avec les éléments  $\psi_k$  d'une autre famille  $\Psi$  :

$$y_k = \langle x, \psi_k \rangle. \quad (3.2)$$

Tâchons d'exprimer la mesure réalisée par le dispositif de l'exemple comme un produit scalaire avec une certaine fonction. Comme un échantillonnage aux instants  $t_k$  est réalisé, munissons-nous d'approximations de carré intégrable  $\hat{\delta}_{t_k}$  des distributions de Dirac  $\delta_{t_k}$ . Chaque mesure s'écrit

$$y_k = \int_{\mathbb{R}} y(t) \hat{\delta}_{t_k}(t) dt \quad (3.3)$$

où l'on définit  $y = (x \times p_c) * h$ . On a ainsi

$$y_k = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} x(s) p_c(s) h(t-s) ds \right] \hat{\delta}_{t_k}(t) dt. \quad (3.4)$$

L'intégrabilité étant assurée, on peut appliquer le théorème de Fubini pour enfin écrire

$$y_k = \int_{\mathbb{R}} x(s) \underbrace{\left[ p_c(s) \int_{\mathbb{R}} h(t-s) \hat{\delta}_{t_k}(t) dt \right]}_{\triangleq \psi_k(s)} ds = \langle x, \psi_k \rangle. \quad (3.5)$$

Il faut que le signal de démodulation change de valeurs à une fréquence plus grande que la fréquence « maximale » du signal d'entrée. On choisit enfin un filtre passe-bas de telle façon que le sous-échantillonnage désiré vérifie le critère de Shannon par rapport au signal filtré.

### 3.1.2 D'autres pistes de généralisation

Evoquons encore d'autres applications de l'acquisition compressée dans le cas de signaux de dimension infinie. La première étude définit une mesure de parcimonie temporelle pour des commandes intégrables, tandis que la seconde explore la notion de parcimonie sur une base hilbertienne.

**Commande temporelle parcimonieuse** Dans [9], le problème suivant est étudié : concevoir une commande  $u \in L^1(0, T)$  pour un système dynamique non-linéaire minimisant un *taux de parcimonie* défini par

$$R_T(u) = \frac{1}{T} |\text{supp}(u)| \quad (3.6)$$



où  $|\cdot|$  désigne la mesure de Lebesgue d'une partie de  $[0, T]$  et  $\text{supp}(u)$  est le support de  $u$ . La notation de « norme zéro » est encore cohérente dans ce cas, car le théorème de convergence dominée permet de montrer que pour tout  $u \in L^1(0, T)$ ,

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|u\|_{L^p(0, T)}^p = |\text{supp}(u)|. \quad (3.7)$$

On peut donc noter de façon analogue au cas classique :

$$R_T(u) = \frac{1}{T} \|u\|_0. \quad (3.8)$$

Cette approche est tout à fait pertinente dans le cadre d'une commande temporelle, où l'on chercherait par exemple, à solliciter des actionneurs le moins longtemps possible. Toutefois, il est plus difficile d'exprimer une parcimonie dans une *représentation* différente.

**Parcimonie dans les espaces de Hilbert séparables** Dans [10] est présenté un exposé complet sur une généralisation des résultats classiques d'acquisition compressée aux espaces de Hilbert séparables. Soit donc  $E$  un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne  $\Phi = \{\phi_i\}_{i \geq 0}$ . On rappelle qu'une base hilbertienne est une famille dénombrable et orthonormée d'éléments de  $E$  telle chaque  $x \in E$  est limite d'une suite constituée de combinaisons linéaires finies d'éléments de la base. On a en fait pour chaque  $x \in E$  :

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle x, \phi_i \rangle \phi_i. \quad (3.9)$$

Dans ce cadre, l'hypothèse de parcimonie naturelle est de supposer que seuls *quelques* coefficients  $\langle x, \phi_i \rangle$  sont non-nuls. Ainsi, il s'agit ici de dire qu'un signal  $x \in E$  est  $(r, N)$ -parcimonieux dans la base  $\Phi$  s'il existe un sous-ensemble  $\Lambda$  de cardinal  $r$  inclus dans  $\{0, \dots, N\}$  tel que

$$x = \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i \phi_i. \quad (3.10)$$

On considère que les mesures possibles forment une famille de formes linéaires continues sur  $E$ , ou de manière équivalente dans le cadre hilbertien, une famille  $\Psi$  d'éléments  $\psi_k$  de  $E$ . On dispose ainsi d'une collection dénombrable  $\{y_k\}_{k \geq 0}$  de mesures définie ici encore par  $\forall k \geq 0, y_k = \langle x, \psi_k \rangle$ . L'article énonce différents résultats précisant dans quelle mesure on peut retrouver les coefficients  $\alpha_i$  via le problème suivant : si  $\kappa$  est un sous-ensemble de cardinal  $m$  de  $\mathbb{N}$ , trouver  $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots) \in \ell^1(\mathbb{N})$  tel que

$$\hat{\alpha} \in \arg \min \left\{ \|\eta\|_{\ell^1(\mathbb{N})}, \eta \in \ell^1(\mathbb{N}) : \sum_{i \geq 0} \eta_i \langle \phi_i, \psi_k \rangle = y_k, \forall k \in \kappa \right\} \quad (3.11)$$

où l'on dispose de  $m$  mesures *bien choisies*  $y_k = \langle x, \psi_k \rangle$  indexées par  $\kappa$ . Ce problème d'optimisation est naturellement de dimension infinie, mais les auteurs fournissent des résultats garantissant que les solutions de problèmes approchés en dimension finie convergent vers une solution de (3.11). Des résultats de robustesse sont également démontrés, dans le cas où le signal n'est pas parcimonieux mais *compressible*, c'est-à-dire bien approché par un signal parcimonieux. Enfin, la nécessité de définir un indice maximal  $N$  provient d'une limitation fondamentale en dimension infinie : quel que soit l'algorithme, on ne peut pas espérer récupérer de façon *stable* un nombre fini de coefficients répartis arbitrairement dans  $\mathbb{N}$  – nous reviendrons sur ce point dans la section 4.1. Ainsi, les estimations d'erreur font intervenir l'entier  $N$ , qui correspond à une bande-passante maximale.

## 3.2 Un formalisme général pour les problèmes d’acquisition compressée

Dans la suite de ce travail, nous nous appuyerons sur le cadre d’étude introduit dans [11]. Ce dernier est à la fois très général et intuitif, et nous permettra de préciser ce que nous entendons par *compressibilité*. Nous présentons d’abord le formalisme associé, puis les résultats génériques démontrés par les auteurs. Ces résultats incluent des espaces de signaux de dimension infinie. C’est dans ce cadre que nous présenterons nos résultats concernant les systèmes dynamiques.

### 3.2.1 Définition des espaces de signaux et de mesure

On cherche à appliquer une stratégie d’acquisition compressée à des signaux  $x$  appartenant à un espace vectoriel  $E$ , l’espace des signaux. La mesure est une application linéaire  $M$  de  $E$  dans  $F$ , l’espace des mesures. Une illustration est donnée Figure 3.2. On suppose par ailleurs que  $M$  est surjective. On cherche à reconstruire  $Ax \in G$ , où  $A$  est une application linéaire de  $E$  vers  $G$ , l’espace de reconstruction ou « feature space ». L’opération de reconstruction est représentée par un décodeur  $\Delta$ , fonction de  $F$  dans  $G$ , souvent non-linéaire. Dans le cadre de l’acquisition compressée, on dispose d’un modèle de signaux  $\Sigma$ , sous-ensemble de  $E$ , et on cherche à tirer profit de la structure de  $\Sigma$  afin de reconstituer une donnée  $x$  supposée proche de  $\Sigma$  avec un minimum de mesures. On munit  $E$  et  $F$  de pseudo-normes  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$ , qui sont des applications de  $E$  et  $F$  dans  $\mathbb{R}^+$

- symétriques,
- vérifiant l’inégalité triangulaire,
- vérifiant  $\|0\| = 0$ .

On n’exige pas de ces pseudo-normes qu’elles soient définies ou homogènes. On munit également  $G$  d’une pseudo-norme aux hypothèses moins contraignantes encore : il suffit que  $\|\cdot\|_G$  soit symétrique et vérifie l’inégalité triangulaire. La pseudo-norme  $\|\cdot\|_G$  peut représenter une fonction de coût. L’application  $A$  représente la partie d’intérêt du signal, comme par exemple sa projection sur un certain sous-espace. Remarquons qu’on peut considérer que  $\mathbf{A}$  est l’identité quitte à changer  $\|\cdot\|_G$ . On comprend que dans ce cadre, formuler une hypothèse *a priori* sur la donnée que l’on cherche à acquérir – comme une hypothèse de parcimonie dans notre cas – revient au choix d’une classe de signaux  $\Sigma$ .

### 3.2.2 Cahier des charges pour un décodeur

On attend d’un *bon* décodeur qu’il vérifie la propriété suivante, appelée *Instance Optimality Property* (IOP).

$$\forall x \in E, \forall e \in F, \quad \|Ax - \Delta(Mx + e)\|_G \leq C_1 d_E(x, \Sigma) + C_2 \|e\|_F \quad (3.12)$$

où  $d_E(x, \Sigma)$  est la distance entre  $x$  et l’ensemble  $\Sigma$ , définie par

$$d_E(x, \Sigma) \triangleq \inf_{u \in \Sigma} \|x - u\|_E. \quad (3.13)$$

Cette propriété signifie que l’on peut contrôler l’erreur de reconstruction par l’écart à la structure *a priori* de la donnée, et par l’amplitude du bruit de mesure. En particulier, avec un décodeur vérifiant l’IOP, si la donnée appartient effectivement au modèle  $\Sigma$ , et en l’absence de bruit, la reconstruction est exacte – au sens de la pseudo-norme  $\|\cdot\|_G$ .

Dans le cadre parcimonieux classique, la solvabilité du problème, pourtant présenté comme un système linéaire sous-déterminé, est garantie par le fait qu’il y ait « peu » de solutions à la

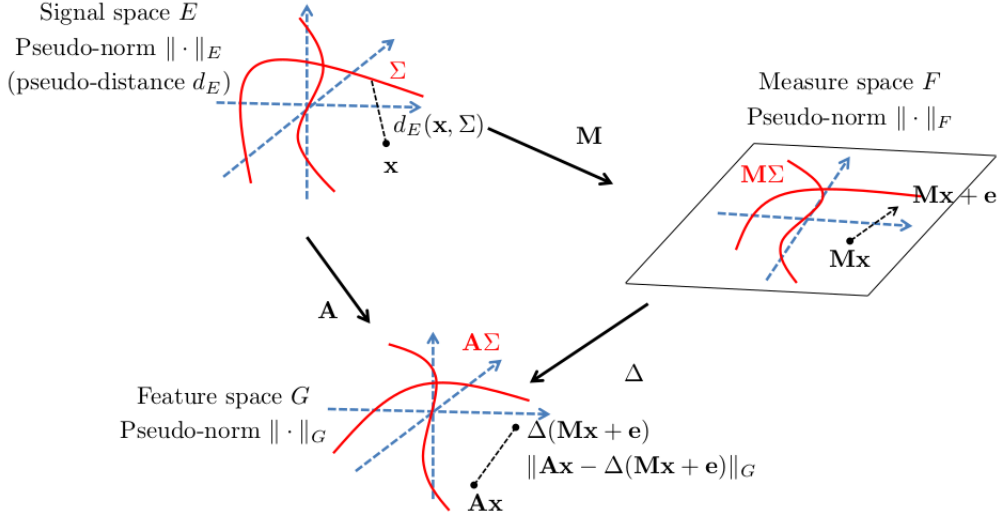


FIGURE 3.2 – Représentation schématique du cadre d'étude. Ce formalisme est utile pour une grande variété de problèmes d'estimation, d'acquisition compressée et de problèmes inverses. Figure issue de [11].

fois parcimonieuses et vérifiant les mesures. La propriété générale correspondant à ce constat est la suivante : la *Robust Null Space Property* (NSP robuste) est vérifiée si

$$\forall h \in E, \quad \|Ah\|_G \leq D_1 d_E(h, \Sigma - \Sigma) + D_2 \|Mh\|_F \quad (3.14)$$

où  $\Sigma - \Sigma$  est l'ensemble sécant, défini par  $\Sigma - \Sigma \triangleq \{u - v : u, v \in \Sigma\}$ .

**Remarque 6.** *L'IOP et la NSP dépendent à la fois des espaces de signaux et de mesure, du choix des pseudo-normes, du modèle  $\Sigma$  et de l'opérateur de mesure  $M$ .*

Il y a en fait équivalence entre l'existence d'une famille de décodeurs satisfaisant une propriété type IOP et la NSP robuste. Les démonstrations sont données dans [11].

**Théorème 6.** *Supposons qu'il existe des constantes strictement positives  $D_1$  et  $D_2$  telles que  $M$  vérifie*

$$\forall h \in E, \quad \|Ah\|_G \leq D_1 d_E(h, \Sigma - \Sigma) + D_2 \|Mh\|_F.$$

*Alors pour tout  $\delta > 0$ , il existe un décodeur  $\Delta_\delta$  tel que*

$$\forall x \in E, \forall e \in F, \quad \|Ax - \Delta(Mx + e)\| \leq 2D_1 d_E(x, \Sigma) + 2D_2 \|e\|_F + \delta.$$

**Théorème 7.** *Si pour certaines constantes strictement positives  $C_1$  et  $C_2$ , pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\Delta_\delta$  vérifiant*

$$\forall x \in E, \forall e \in F, \quad \|Ax - \Delta(Mx + e)\| \leq C d_E(x, \Sigma) + \delta$$

*alors la NSP robuste est vérifiée :*

$$\forall h \in E, \quad \|Ah\|_G \leq C_1 d_E(h, \Sigma - \Sigma) + C_2 \|Mh\|_F.$$

La contraposée du résultat est intéressante : si la NSP robuste n'est pas vérifiée pour une certaine matrice de mesure  $M$ , alors aucun *bon* décodeur associé n'existe. Nous illustrerons cette remarque lors de l'étude du modèle parcimonieux en dimension infinie.

Remarquons qu'une constante additive arbitrairement petite  $\delta$  apparaît dans le résultat. Dans le cas sans bruit, les auteurs fournissent une proposition permettant sous certaines hypothèses de se passer de cette constante additive. On se propose de démontrer un résultat similaire dans le cas bruité, avec un autre jeu d'hypothèses.

**Proposition 6.** *Supposons que les propositions suivantes soient vérifiées :*

1.  $(E, d_E)$  est un espace métrique localement compact ;
2.  $(F, d_F)$  est un espace métrique ;
3.  $M$  est une application linéaire continue de  $(E, d_E)$  dans  $(F, d_F)$  ;
4. L'ensemble  $\Sigma$  est borné.

*S'il existe deux réels  $D_1, D_2 > 0$  tels que*

$$\forall h \in E, \quad \|Ah\|_G \leq D_1 d_E(h, \Sigma - \Sigma) + D_2 \|Mh\|_F \quad (\text{NSP})$$

*alors pour tout  $\delta > 0$ , il existe un décodeur  $\Delta_\delta$  vérifiant*

$$\forall x \in E, \forall e \in F, \quad \|Ax - \Delta_\delta(Mx + e)\|_G \leq (2 + \delta) D_1 d_E(x, \Sigma) + (2 + \delta) D_2 \|e\|_F. \quad (\text{IOP})$$

La démonstration est similaire à celle présentée dans [11] et repose sur la construction d'un décodeur idéal à partir de

$$\inf_{u \in E} [D_1 d_E(u, \Sigma) + D_2 d_F(Mu, Mx + e)]. \quad (3.15)$$

Il est en effet naturel de chercher à minimiser à la fois la proximité au modèle et la proximité aux mesures. Le décodeur exhibé n'est en général pas réalisable. La démonstration du cas précisé reprend la disjonction de cas selon que la quantité 3.15 soit nulle ou strictement positive.

*Démonstration.* Soit  $x \in E$  et  $e \in F$ . Soit  $\delta > 0$ . Dans un premier temps, considérons le cas où

$$\inf_{u \in E} [D_1 d_E(u, \Sigma) + D_2 d_F(Mu, Mx + e)] = 0.$$

Il existe donc une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $E$  telle que

$$\begin{cases} d_E(u_n, \Sigma) \rightarrow 0 \\ d_F(Mu_n, Mx + e) \rightarrow 0 \end{cases} \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

car  $D_1$  et  $D_2$  sont strictement positifs. Comme  $\Sigma$  est supposé borné,  $d_E(u_n, \Sigma) \rightarrow 0$  contraint  $(u_n)$  à être bornée. Comme  $E$  est localement compact,  $(u_n)$  admet donc une sous-suite convergeant vers un certain  $u^* \in E$ . On a alors, en utilisant le fait que  $d_E$  soit une distance,  $d_E(u^*, \Sigma) = 0$  et comme  $d_F(Mx + e, Mu_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , par continuité de  $M$  on obtient  $Mu^* = Mx + e$ . Posons alors  $\Delta_\delta(Mx + e) = Au^*$ . Alors en appliquant (NSP) à  $x - u^*$ , on a

$$\begin{aligned} \|Ax - \Delta_\delta(Mx + e)\|_G &\leq D_1 d_E(x - u^*, \Sigma - \Sigma) + D_2 \|Mx - Mu^*\|_F \\ &\leq D_1 d_E(x, \Sigma) + D_1 d_E(u^*, \Sigma) + D_2 \|e\|_F \\ &\leq D_1 d_E(x, \Sigma) + D_2 \|e\|_F. \end{aligned}$$

Dans un second temps, supposons désormais

$$\inf_{u \in E} [D_1 d_E(u, \Sigma) + D_2 d_F(Mu, Mx + e)] > 0.$$

Par définition, pour tout  $\mu > 0$ , il existe  $u_\mu$  tel que

$$D_1 d_E(u_\mu, \Sigma) + D_2 d_F(Mu_\mu, Mx + e) \leq \inf_{u \in E} [D_1 d_E(u, \Sigma) + D_2 d_F(Mu, Mx + e)] + \mu.$$

C'est donc également valable pour

$$\mu = \delta \cdot \inf_{u \in E} [D_1 d_E(u, \Sigma) + D_2 d_F(Mu, Mx + e)] > 0$$

ce qui permet d'obtenir un certain  $u^* \in E$  vérifiant

$$D_1 d_E(u^*, \Sigma) + D_2 d_F(Mu^*, Mx + e) \leq (1 + \delta) \inf_{u \in E} [D_1 d_E(u, \Sigma) + D_2 d_F(Mu, Mx + e)].$$

On pose encore une fois  $\Delta_\delta(Mx + e) = Au^*$ , et grâce à (NSP), on a également

$$\begin{aligned} \|Ax - \Delta_\delta(Mx + e)\|_G &\leq D_1 d_E(x - u^*, \Sigma - \Sigma) + D_2 \|Mx - Mu^*\|_F \\ &\leq D_1 d_E(x, \Sigma) + D_1 d_E(u^*, \Sigma) + D_2 \|Mx + e - Mu^*\|_F + D_2 \|e\|_F \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété d'inégalité triangulaire et de symétrie de  $\|\cdot\|_F$ . On a finalement, par construction de  $u^*$ ,

$$\begin{aligned} \|Ax - \Delta_\delta(Mx + e)\|_F &\leq D_1 d_E(x, \Sigma) + D_2 \|e\|_F \\ &\quad + (1 + \delta) \inf_{u \in E} [D_1 d_E(u, \Sigma) + D_2 d_F(Mu, Mx + e)] \\ &\leq (2 + \delta) D_1 d_E(x, \Sigma) + (2 + \delta) D_2 \|e\|_F. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, la propriété (IOP) voulue est bien vérifiée.  $\square$

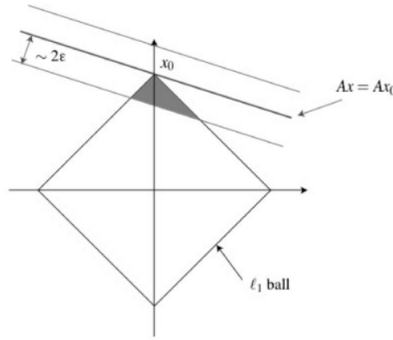


FIGURE 3.3 – Interprétation géométrique de la NSP. Cette propriété implique que l'intersection entre les vecteurs admissibles vis-à-vis des mesures et les vecteurs proches du modèle *a priori*  $\Sigma$  est « petite ». Le schéma est issu de [1] et illustre cette notion dans le cas classique d'une donnée vectorielle.

### 3.3 Des mesures de compressibilité

Dans cette section, nous examinons différents critères de *compressibilité* pour un ensemble de signaux, et nous présentons les liens entre eux. En particulier, nous introduisons la dimension *upper box-counting* et nous donnons quelques résultats techniques utiles pour manipuler cette notion.

#### 3.3.1 La dimension upper box-counting

On cherche à étudier des classes de signaux appartenant à un espace de dimension possiblement infinie. Certains ensembles ne peuvent pas être inclus dans un sous-espace de dimension finie, mais semblent intuitivement posséder une dimension « intrinsèque » finie. Il existe plusieurs outils donnant une mesure du « nombre » de degrés de liberté d'un ensemble en dimension finie et infinie.

**Définition 5.** Soit  $\mathcal{P}$  une partie relativement compacte d'un espace métrique  $(E, d)$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , on note  $N(\mathcal{P}, \epsilon)$  le nombre minimal de boules de rayon  $\epsilon$  centrées sur  $\mathcal{P}$ . On définit alors la dimension « upper box-counting » ou dimension de Minkowski-Bouligand par

$$\dim_b(\mathcal{P}) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\mathcal{P}, \epsilon))}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}.$$

Les auteurs de [12] soulignent que la finitude de cette dimension est une condition suffisante de « compressibilité ». Pour un ensemble  $\mathcal{S}$  inclus dans la sphère unité d'un espace de Hilbert  $E$ , si  $\dim_b(\mathcal{S}) < +\infty$  alors pour tout  $\delta > 0$ , il existe une application linéaire  $M$  continue de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathbb{R}^d$  pour un certain  $d$  fini telle que

$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad 1 - \delta \leq \|Mx\| \leq 1 + \delta. \quad (3.16)$$

L'argument est le suivant : on se donne un  $\delta$ -recouvrement de  $\mathcal{S}$  et on considère une base orthonormée de l'espace vectoriel engendré par les centres des boules. L'entier  $d$  peut cependant être très grand. L'article donne en fait une « recette » pour définir de manière probabiliste un opérateur  $M$  permettant d'injecter  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}^m$  avec  $m$  plus petit et contrôlé par un terme dépendant de  $\dim_b(\mathcal{S})$ ; au prix d'un choix de norme moins commode que la norme dérivée du produit scalaire de  $E$ .

Les propriétés suivantes sont indispensables pour manipuler cette dimension ; on trouvera une démonstration dans [13].

**Propriété 1.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques compacts. Alors  $X \times Y$  muni de la distance produit  $d = \max(d_X, d_Y)$  vérifie

$$\dim_b(X \times Y) \leq \dim_b(X) + \dim_b(Y).$$

**Propriété 2.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques compacts. Si  $f$  est une application de  $X$  dans  $Y$  lipschitzienne, alors

$$\dim_b(f(X)) \leq \dim_b(X).$$

On déduit de ces deux propriétés un corollaire utile concernant l'ensemble sécant d'une classe de signaux  $\Sigma$ , qui intervient de manière significative.

**Corollaire 2.** Soit  $\mathcal{P}$  une partie relativement compacte d'un espace vectoriel normé  $E$ . Alors

$$\dim_b(\mathcal{P} - \mathcal{P}) \leq 2 \dim_b(\mathcal{P}).$$

Enfin, nous démontrons un lemme qui sera utile notamment pour estimer la dimension de modèles parcimonieux en dimension infinie.

**Lemme 2.** *Soit  $\mathcal{P}$  une partie relativement compacte d'un espace vectoriel normé  $E$ . Soit  $C > 0$  une constante réelle fixée et  $k \geq 1$  un entier. Notons  $\Sigma_k$  l'ensemble des  $k$ -combinaisons linéaires d'éléments de  $\mathcal{P}$  à coefficients bornés par  $C$ . Si  $\dim_b \mathcal{P} \leq d$ , alors*

$$\dim_b (\Sigma_k \mathcal{P}) \leq kd + k.$$

*Démonstration.* Munissons l'espace produit  $\mathcal{P}^k$  de la distance produit

$$d((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) = \max_{1 \leq i \leq k} d(x_i, y_i).$$

Soit donc  $\epsilon > 0$ . Il existe un recouvrement minimal de  $\mathcal{P}^k$  muni de sa distance produit par  $N = N(\mathcal{P}^k, \epsilon)$  boules de rayon  $\epsilon$ . Notons  $\mathbf{r}^{(1)}, \dots, \mathbf{r}^{(N)}$  les centres – appartenant à  $\mathcal{P}^k$  – de ces  $N$  boules. Soit  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Écrivons  $\mathbf{r}^{(n)} = (r_1^{(n)}, \dots, r_k^{(n)})$ , et cherchons un recouvrement de l'ensemble des  $k$ -combinaisons linéaires des  $r_i^{(n)}$  à coefficients bornés par  $C$ . Notons  $[-C, C]r_i^{(n)}$  le segment

$$\left\{ \theta r_i^{(n)} \text{ pour } \theta \in [-C, C] \right\}.$$

Comme  $\mathcal{P}$  est une partie relativement compacte, elle est en particulier bornée, et il existe donc une constante  $K$  dépendant uniquement de  $\mathcal{P}$  majorant la norme de chaque  $r_i^{(n)}$ . Pour couvrir le segment  $[-C, C]r_i^{(n)}$ , il suffit de prendre  $\left\lfloor \frac{CK}{\epsilon} \right\rfloor + 1$  boules de rayon  $\epsilon$ . Or, quitte à prendre  $\epsilon \leq 1$  par exemple,

$$\left\lfloor \frac{CK}{\epsilon} \right\rfloor + 1 \leq \frac{CK + \epsilon}{\epsilon} \leq \frac{A}{\epsilon}.$$

Chaque segment  $[-C, C]r_i^{(n)}$  est couvert par  $N_C \leq \frac{A}{\epsilon}$  boules de rayon  $\epsilon$  et de centres  $\hat{r}_{i,1}^{(n)}, \dots, \hat{r}_{i,N_C}^{(n)}$ . Considérons la famille suivante :

$$\hat{\Sigma}_k^{(n)} = \left\{ \sum_{i=1}^k \hat{r}_{i,l_i}^{(n)} \text{ où } (l_1, \dots, l_k) \in \{1, \dots, N_C\}^k \right\}.$$

Alors on voit que  $|\hat{\Sigma}_k^{(n)}| \leq N_C^k$ . Si l'on considère désormais  $\hat{\Sigma}_k = \bigcup_{n=1}^N \hat{\Sigma}_k^{(n)}$  alors on a  $|\hat{\Sigma}_k| \leq N \cdot N_C^k$ . Montrons que la famille  $\hat{\Sigma}_k$  définit les centres d'un recouvrement de  $\Sigma_k \mathcal{P}$ . Soit donc  $p = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i \in \Sigma_k \mathcal{P}$ . Il existe  $n \in \{1, \dots, N\}$  tel que pour tout  $i = 1, \dots, k$ ,  $\|r_i^{(n)} - p_i\| \leq \epsilon$ . Comme chaque  $\alpha_i r_i^{(n)}$  appartient au segment  $[-C, C]r_i^{(n)}$ , il existe  $l_i \in \{1, \dots, N_C\}$  tel que  $\|\alpha_i r_i^{(n)} - \hat{r}_{i,l_i}^{(n)}\| \leq \epsilon$ . Posons  $\hat{p} = \sum_{i=1}^k \hat{r}_{i,l_i}^{(n)}$ . Alors  $\hat{p}$  appartient à  $\hat{\Sigma}_k$  et

$$\begin{aligned} \|p - \hat{p}\| &\leq \left\| p - \sum_{i=1}^k \alpha_i r_i^{(n)} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^k \alpha_i r_i^{(n)} - \hat{p} \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \|p_i - r_i^{(n)}\| + \sum_{i=1}^k \|\alpha_i r_i^{(n)} - \hat{r}_{i,l_i}^{(n)}\| \\ &\leq kC\epsilon + k\epsilon = k(C+1)\epsilon. \end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout  $p \in \Sigma_k \mathcal{P}$ , comme  $\hat{\Sigma}_k \subset \Sigma_k \mathcal{P}$ , on a donc montré que les vecteurs de  $\hat{\Sigma}_k$  forment les centres d'un  $k(C+1)\epsilon$  recouvrement de  $\Sigma_k \mathcal{P}$  de cardinal inférieur à  $N \cdot N_C^k$ , et ce,

pour tout  $\epsilon$  assez petit. On a donc

$$\begin{aligned} N(\Sigma_k \mathcal{P}, k(C+1)\epsilon) &\leq N \cdot N_C^k \\ &\leq \frac{A^k}{\epsilon^k} N(\mathcal{P}^k, \epsilon). \end{aligned}$$

On peut de là écrire

$$\frac{\ln(N(\Sigma_k \mathcal{P}, k(C+1)\epsilon))}{-\ln(k(C+1)\epsilon)} \leq \frac{k \ln(A) - k \ln(\epsilon) + \ln(N(\mathcal{P}^k, \epsilon))}{-\ln(k(C+1)\epsilon)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\Sigma_k \mathcal{P}, k(C+1)\epsilon))}{-\ln(k(C+1)\epsilon)} &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{k \ln(A) - k \ln(\epsilon) + \ln(N(\mathcal{P}^k, \epsilon))}{-\ln(\epsilon) - \ln(k(C+1))} \\ &\leq k + \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\mathcal{P}^k, \epsilon))}{-\ln(\epsilon) - \ln(k(C+1))} \end{aligned}$$

car quand  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\frac{k \ln(A)}{-\ln(\epsilon) - \ln(k(C+1))} \rightarrow 0$$

et

$$\frac{-k \ln(\epsilon)}{-\ln(\epsilon) - \ln(k(C+1))} \rightarrow k.$$

De plus, comme quand  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$-\ln(\epsilon) - \ln(k(C+1)) \sim -\ln(\epsilon),$$

alors

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\mathcal{P}^k, \epsilon))}{-\ln(\epsilon) - \ln(k(C+1))} = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\mathcal{P}^k, \epsilon))}{-\ln(\epsilon)}.$$

Mais d'après le Lemme 1,

$$\dim_b(\mathcal{P}^k) \leq k \dim_b(\mathcal{P}) \leq kd.$$

On a finalement

$$\dim_b(\Sigma_k \mathcal{P}) \leq k + kd.$$

□

**Remarque 7.** Ce résultat est conforme à l'intuition et à l'interprétation en termes de nombre de degrés de liberté : choisir un élément de  $\Sigma_k \mathcal{P}$ , c'est choisir  $k$  coefficients réels, et  $k$  éléments de  $\mathcal{P}$  où l'on a un nombre  $d$  de degrés de liberté.

### 3.3.2 Synthèse des différents critères

A ce stade, nous avons présenté trois notions importantes dans le contexte de l'acquisition compressée :

- La finitude de la dimension upper-box counting de la classe de signaux  $\Sigma$  ;
- L'existence d'un opérateur de mesure  $M$  pour lequel la NSP est vérifiée, ce qui est équivalent à l'existence d'un décodeur vérifiant l'IOP ;
- L'existence d'un opérateur de mesure  $M$  vérifiant une propriété type RIP.



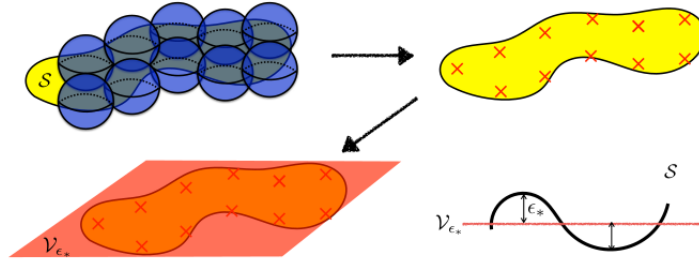


FIGURE 3.4 – Utilisation de la finitude de la dimension upper box-counting pour construire un opérateur de mesure vérifiant la RIP dans le cas d'un ensemble dont les éléments sont de norme unitaire. On choisit un  $\epsilon$ -recouvrement et on considère le sous-espace vectoriel engendré par les centres afin de construire l'opérateur à partir d'une base orthonormée. Image empruntée à [12].

Nous allons synthétiser les liens entre ces trois éléments afin d'orienter l'étude d'un modèle  $\Sigma$  et la construction d'un opérateur de mesure adaptés à notre système dynamique linéaire. L'enjeu est de pouvoir injecter de façon *stable* une classe de signaux  $\Sigma$  appartenant à un espace  $E$  de dimension grande voire infinie dans un espace  $F$  de « petite » dimension  $m$  via un opérateur de mesure  $M$  linéaire. Plus précisément, on cherche à obtenir des propriétés de type *Restricted Isometry Property* (RIP), à savoir

$$\forall x \in \Sigma - \Sigma, \quad (1 - \delta)\|x\|_E \leq \|Mx\|_F \leq (1 + \delta)\|x\|_E \quad (3.17)$$

où  $\delta$  est une certaine constante d'isométrie appartenant à  $[0, 1[$ . De manière informelle, si  $M$  vérifie une telle propriété, alors  $M$  agit approximativement comme une isométrie sur  $\Sigma$  et conserve les distances entre ses éléments; de là, on espère que  $M$  préserve la structure de  $\Sigma$  en vue d'une reconstruction des données. En étant moins exigeant, on peut rechercher une propriété de continuité et d'injectivité améliorée, en remplaçant  $1 - \delta$  et  $1 + \delta$  par des constantes strictement positives. En fait, une telle propriété est suffisante pour assurer l'existence d'un décodeur IOP; le prix à payer étant la présence de constantes potentiellement élevées et un choix plus contraignant de pseudo-norme.

**Proposition 7.** *Supposons qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\alpha\|x\|_E \leq \|Mx\|_F$  pour tout  $x \in \Sigma - \Sigma$ . Alors il existe une famille  $\{\Delta_\delta\}_{\delta>0}$  de décodeurs vérifiant l'IOP :*

$$\forall x \in E, \forall e \in F, \quad \|Ax - \delta(Mx + e)\|_G \leq 2d_M(x, \Sigma - \Sigma) + \frac{2}{\alpha}\|e\|_F + \delta,$$

où  $d_M$  est une pseudo-distance définie par  $d_M(x, y) \triangleq \|x - y\|_E + \frac{1}{\alpha}\|M(x - y)\|_F$ .

Ce résultat est démontré dans [11] et est une conséquence du Théorème 6. Si l'on suppose (3.17), alors les pseudo-normes intervenant dans le résultat ne dépendent plus de  $M$ . On observe alors qu'une reconstruction exacte de la donnée est alors possible – à  $\delta$  arbitrairement petit près. Cependant, un petit  $\alpha$  implique des constantes potentiellement très importantes dans l'expression de l'IOP. Enfin, par un résultat général que nous évoquerons au Chapitre 4, si  $E$  est un espace de Hilbert, la finitude de la dimension upper box-counting d'un ensemble  $\Sigma$  implique l'existence d'un opérateur de mesure vérifiant (3.17) avec la norme hilbertienne pour  $E$  et un certain choix de pseudo-norme pour  $F$ . Dans ce cas, la finitude de la dimension upper box-counting implique donc l'existence d'une famille de décodeurs idéaux vérifiant l'IOP.

## Chapitre 4

# Compressibilité des trajectoires d'un système dynamique linéaire

### 4.1 Action du système sur un modèle de signaux de dimension infinie

Dans cette section, nous examinons l'effet du système dynamique sur certaines classes d'entrées. Nous étudions en particulier le modèle parcimonieux sur une base hilbertienne. Nous rappelons d'abord qu'une telle classe de signaux est trop « grosse » pour espérer une reconstruction stable à partir d'un nombre fini de mesures, en détaillant l'argument donné dans [11]. Ensuite, nous montrons que l'image par le système de cette classe est quant à elle compressible au sens de la dimension upper box-counting.

#### 4.1.1 Des difficultés liées à la dimension infinie

Dans le cas d'un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne, on peut naturellement définir un signal  $k$ -parcimonieux par sa représentation sur ladite base. Munissons  $U$  d'une base  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Définissons donc l'ensemble

$$\Sigma_k \Phi \triangleq \left\{ \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i \phi_i : \Lambda \subset \mathbb{N}, |\Lambda| \leq k \right\}.$$

Cette classe de signaux constitue une généralisation naturelle des signaux  $k$ -parcimonieux sur une certaine base en dimension finie. Notons déjà que  $\Sigma_k \Phi - \Sigma_k \Phi = \Sigma_{2k} \Phi$ . On se demande s'il est possible de reconstruire les éléments de  $\Sigma_k \Phi$  à partir d'un nombre fini  $m$  de mesures linéaires. On se donne donc  $\mathcal{M}$  un opérateur continu de  $U$  dans  $F \triangleq \mathbb{R}^m$ . Nous allons observer qu'en dimension infinie, il est impossible de trouver un décodeur  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^m$  muni d'une norme vers  $U$  muni de sa norme d'espace de Hilbert vérifiant l'IOP. Pour cela, d'après le Théorème 7, il suffit de montrer que la propriété NSP n'est vérifiée pour aucun choix de constantes. Supposons donc qu'il existe deux constantes  $D_1$  et  $D_2$  strictement positives telles que

$$\forall \mathbf{h} \in U, \quad \|\mathbf{h}\| \leq D_1 d(\mathbf{h}, \Sigma_{2k} \Phi) + D_2 \|\mathcal{M}\mathbf{h}\|_F. \quad (4.1)$$

Évaluons alors cette inégalité en  $\mathbf{h}_n = \phi_n + \phi_{n+1}$ . Comme  $\mathbf{h}_n \in \Sigma_{2k} \Phi$ , il reste

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{2} \leq D_2 \|\mathcal{M}\mathbf{h}_n\|_F. \quad (4.2)$$

Pour conclure, démontrons le lemme suivant.

**Lemme 3.** *Soit  $\mathcal{E}$  un espace de Hilbert et  $L$  une forme linéaire continue sur  $\mathcal{E}$ . Si  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une famille orthonormée de  $E$ , alors  $Le_i \rightarrow 0$  quand  $i \rightarrow +\infty$ .*

*Démonstration.* Comme  $L$  est une forme linéaire continue, son noyau  $\ker L$  est un hyperplan fermé de  $\mathcal{E}$ . Par conséquent,  $(\ker L)^\perp$  est une droite vectorielle engendrée par, disons, un vecteur unitaire  $s$ , et

$$E = \ker L \oplus \text{vect}(s).$$

Par continuité de  $L$ , il suffit de montrer que  $\langle e_i, s \rangle \rightarrow 0$  quand  $i \rightarrow +\infty$ . Par inégalité de Bessel, la série  $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle e_i, s \rangle|^2$  converge, d'où nécessairement  $\langle e_i, s \rangle \rightarrow 0$ .  $\square$

$\mathcal{M}$  est un opérateur continu vers un espace vectoriel normé de dimension finie, donc chaque coordonnée  $\mathcal{M}_i$  est une forme linéaire continue. Il suffit alors d'appliquer le Lemme 3 à chaque  $\mathcal{M}_i$  et à la famille orthonormée

$$\{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{\mathbf{h}_{2n}}{\sqrt{2}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

pour obtenir une contradiction. Par contraposée du Théorème 7, on a montré qu'il n'existait aucun décodeur de  $\mathbb{R}^m$  muni d'une norme vers  $U$  muni de sa norme d'espace de Hilbert vérifiant l'IOP.

**Remarque 8.** *Cela n'exclut pas l'existence de décodeurs vérifiant l'IOP pour un autre choix de norme sur  $U$  ou pour un choix de pseudo-norme sur  $\mathbb{R}^m$ .*

#### 4.1.2 Action du système sur le modèle parcimonieux

Dans cette partie, nous fixons une base hilbertienne  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de  $U$ . On définit encore l'ensemble des signaux  $k$ -parcimonieux sur la base des  $\phi$ , à coefficients bornés par une certaine constante, que nous notons  $\Sigma_k \Phi$ . Quitte à bien choisir la constante, on peut supposer, sans perte de généralité,  $\Sigma_k \Phi \subset \mathcal{B}$ , où  $\mathcal{B}$  est la boule unité fermée de  $U$ . L'ensemble  $\Sigma_k \Phi$  est de dimension – vectorielle ou upper box-counting – infinie. Nous allons montrer que l'image par le système dynamique de cet ensemble est lui de dimension upper box-counting finie. Avant cela, nous empruntons à [13] le lemme suivant.

**Lemme 4.** *Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite décroissante de réels positifs. Alors*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{-\ln(u_n)} \leq \inf \left\{ s > 0 : \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^s < +\infty \right\}.$$

*Démonstration.* Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^s < +\infty$  pour un certain  $s > 0$ , alors pour tout  $N \geq 0$ ,

$$\sum_{n=0}^N u_n^s \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^s \triangleq S,$$

car les termes de la somme sont positifs. Puisque la suite est décroissante, on a de plus  $\sum_{n=0}^N u_n^s \geq \sum_{n=0}^N u_N^s$  d'où  $u_N^s \leq \frac{S}{N}$ . A partir de là, on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{-\ln(u_n)} \leq s,$$

ce qui permet de conclure, par définition de l'infimum.  $\square$

On peut désormais estimer la dimension de l'image du modèle parcimonieux sur la base des  $\phi_i$  par l'opérateur  $\mathcal{H}$ .

**Proposition 8** (Dimension du modèle parcimonieux). *Si pour un certain  $s \in ]0, 2]$ ,  $\sum_{i=1}^{+\infty} \|\mathcal{H}\phi_i\|^d < +\infty$ , alors*

$$\dim_b(\mathcal{H}(\Sigma_k \Phi)) \leq k(s+1).$$

*En particulier, on a toujours  $\dim_b(\mathcal{H}(\Sigma_k \Phi)) \leq 3k$ .*

*Démonstration.* Remarquons que  $\mathcal{H}(\Sigma_k \Phi)$  est formé des  $k$ -combinaisons linéaires à coefficients bornés par une certaine constante de l'ensemble suivant :

$$\mathcal{P} \triangleq \{\mathcal{H}\phi_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

D'après la Proposition 5, la série  $\sum \|\mathcal{H}\phi_i\|^2$  converge. En particulier, la suite des  $\|\mathcal{H}\phi_i\|$  tend vers 0. Quitte à réordonner les  $\phi_i$ , ce qui ne change pas l'ensemble des  $k$ -combinaisons linéaires, on peut supposer que la suite des  $\|\mathcal{H}\phi_i\|$  est décroissante. De même, on peut supposer qu'aucun terme n'est nul sans changer l'ensemble  $\mathcal{P}$ .

Supposons que pour un certain  $s \in ]0, 2]$ ,  $\sum_{i=0}^{+\infty} \|\mathcal{H}\phi_i\|^s < +\infty$ . Nous allons démontrer que dans ce cas,  $\dim_b(\mathcal{P}) \leq s$ , avant de conclure en appliquant le Lemme 2. Soit  $\epsilon > 0$ . Puisque la suite des  $\|\mathcal{H}\phi_i\|$  est supposée décroissante et converge vers 0, il existe  $n_\epsilon$  tel que  $\|\mathcal{H}\phi_{n_\epsilon+1}\| < \epsilon \leq \|\mathcal{H}\phi_{n_\epsilon}\|$ . Pour tout  $n > n_\epsilon$ ,  $\|\mathcal{H}\phi_n\| < \epsilon$ ; ainsi, prendre les  $n_\epsilon + 1$   $\epsilon$ -boules dont les centres sont les  $\sigma_1 \mathbf{g}_1, \dots, \sigma_{n_\epsilon} \mathbf{g}_{n_\epsilon}$ , auxquels on ajoute 0, fournit un recouvrement de  $\mathcal{P}$ . On en déduit  $N(\mathcal{P}, \epsilon) \leq n_\epsilon + 1$ . On a alors

$$\frac{\ln(N(\mathcal{P}, \epsilon))}{-\ln(\epsilon)} \leq \frac{\ln(n_\epsilon + 1)}{-\ln(\epsilon)} \leq \frac{\ln(n_\epsilon + 1)}{-\ln(\|\mathcal{H}\phi_{n_\epsilon}\|)},$$

et ce, pour tout  $\epsilon > 0$ . Nous pouvons désormais majorer la dimension upper box-counting de  $\mathcal{P}$  :

$$\begin{aligned} \dim_b(\mathcal{P}) &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(n_\epsilon)}{-\ln(\|\mathcal{H}\phi_{n_\epsilon}\|)} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{-\ln(\|\mathcal{H}\phi_n\|)}. \end{aligned}$$

Le Lemme 4 donne  $\dim_b(\mathcal{P}) \leq s$ , ce qui nous permet de conclure grâce au Lemme 2. Enfin, il est toujours vrai que  $\dim_b(\mathcal{P}) \leq 2$ , puisqu'on a toujours  $\sum \|\mathcal{H}\phi_i\|^2 < +\infty$ .  $\square$

On a donc exhibé un exemple de classe *incompressible* de signaux, à savoir le modèle parcimonieux sur une base hilbertienne, rendu compressible par l'action de réduction de dimension du système dynamique.

**Remarque 9.** *L'arbitraire sur la base hilbertienne permet de faire un choix de manière empirique, en utilisant par exemple une base d'ondelettes ou une autre représentation temps-fréquence adaptée à la dynamique du système.*

**Remarque 10.** *Nous pouvons cependant observer qu'en appliquant l'argument donné dans la sous-section précédente à la famille des  $\mathcal{H}\phi_i$ , la même difficulté émerge. C'est pour cela que nous allons devoir utiliser une certaine pseudo-norme sur  $\mathbb{R}^m$ . Le modèle parcimonieux reste incompressible même avec cette pseudo-norme que nous verrons par la suite.*

## 4.2 Construction d'un opérateur de mesure

A l'issue de la section précédente, nous avons exhibé un exemple de classe de trajectoires dont la dimension est finie – au sens upper box-counting. La deuxième étape dans la démarche de l'acquisition compressée serait d'établir un opérateur de mesure associé, avec lequel une reconstruction des signaux vérifiant l'IOP est possible. Dans cette section, nous allons montrer un résultat plus fort : nous exhibons un opérateur de mesure, dont la construction est non-déterministe, qui permet *presque sûrement* une reconstruction avec IOP à partir de n'importe quel modèle de trajectoires – à entrées bornées – de dimension upper box-counting finie.

### 4.2.1 Préliminaires et théorème d'injection

Notre construction d'un opérateur de mesure  $\mathcal{M}$  est inspirée d'un résultat général d'analyse donné dans [14] et évoqué dans [11]. Nous nous inspirons de la démonstration donnée dans [13]. Nous devons définir un certain nombre d'objets techniques. Pour tout  $j \geq 1$ , nous noterons  $F_j \triangleq \text{vect}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_j)$  et  $G_j \triangleq \text{vect}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_j)$ . Nous notons  $\mu$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  muni de sa tribu borélienne, ce qui nous permet de définir  $p$  la mesure de probabilité uniforme sur  $[-1, 1]$ . Notons aussi  $\mu_n$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors on sait que  $\mu_n = \otimes_{i=1}^n \mu$ , où le produit désigne le produit de mesures. En conséquence,  $p_n \triangleq \otimes_{i=1}^n p$  est une mesure de probabilité uniforme sur  $[-1, 1]^n$ . Par ailleurs, puisque les  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_j$  forment une base orthonormée de  $F_j$ , nous identifierons  $F_j$  à  $\mathbb{R}_j$  par le biais de cette base. Enfin, le produit  $\otimes_{i=1}^{+\infty} p$  définit une mesure de probabilité sur  $[-1, 1]^{\mathbb{N}^*}$ . Nous fixons un réel  $s > 1$ . Nous pouvons alors définir

$$L \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} i^{-s} \alpha_i \mathbf{g}_i : \{\alpha_i\}_{i \geq 1} \in [-1, 1]^{\mathbb{N}^*} \right\} \subset E.$$

La mesure  $\otimes_{i=1}^{+\infty} p$  induit une mesure de probabilité sur  $L$ , que nous noterons  $\mathbb{P}$ . Définissons finalement notre classe d'opérateurs de mesure :

$$L_m \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in E \mapsto (\langle \psi^{(1)}, \mathbf{x} \rangle, \dots, \langle \psi^{(m)}, \mathbf{x} \rangle)^\top \in \mathbb{R}^m : \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(m)} \in L \right\}.$$

Si  $\mathcal{M} \in L_m$ , alors  $\mathcal{M}$  est un opérateur linéaire et continu de  $E$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Le produit  $\otimes_{k=1}^m \mathbb{P}$  induit une mesure de probabilité sur  $L_m$ , que nous noterons  $\mathbb{P}_m$ . Nous allons montrer que si  $\mathcal{M} \in L_m$ , alors  $\mathbb{P}_m$ -presque sûrement,  $\mathcal{M}$  possède des propriétés souhaitées d'opérateur de mesure. Pour cela, nous aurons besoin du théorème suivant.

**Théorème 8 (Ball).** *Soit  $n \geq 1$ . Si  $\mathcal{P}$  est un hyperplan affine de  $\mathbb{R}^n$ , alors l'intersection de l'hypercube  $[-1, 1]^n$  par  $\mathcal{P}$  a un volume  $(n-1)$ -dimensionnel majoré par  $\sqrt{2} \cdot 2^{n-1}$ .*

Le point crucial dans le cadre de notre problème est que le rapport entre l'aire de la section de l'hypercube et le volume de l'hypercube ne dépend pas de la dimension. Ce théorème géométrique va nous permettre de démontrer le lemme suivant, qui mènera lui-même à la Proposition 9.

**Lemme 5.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tous  $\epsilon > 0$  et  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,*

$$p_n \{ \psi \in [-1, 1]^n : |\langle \psi, \mathbf{x} \rangle + \alpha| \leq \epsilon \} \leq \sqrt{2} \frac{\epsilon}{\|\mathbf{x}\|}.$$

*Démonstration.* Soient  $\epsilon > 0$  et  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Nous noterons  $A \triangleq \{ \psi \in [-1, 1]^n : |\langle \psi, \mathbf{x} \rangle + \alpha| \leq \epsilon \}$ . Alors puisque  $p_n$  est une mesure de probabilité uniforme sur  $[-1, 1]^n$ , on a

$$p_n(A) = \frac{\mu_n(A)}{\mu_n([-1, 1]^n)} = \frac{\mu_n(A)}{2^n}.$$

Et on peut écrire  $\mu_n(A) = \int_{\psi \in [-1,1]^n} \mathbb{1}_A(\psi) d\mu_n(\psi)$ . Supposons  $\mathbf{x} \neq 0$ . Posons  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ . Complétons  $\{\hat{\mathbf{x}}\}$  en  $\{\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ . Par changement de variable, on obtient

$$\mu_n(A) = \int_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A \left( x_1 \hat{\mathbf{x}} + \sum_{i=2}^n x_i \mathbf{e}_i \right) dx_1 \dots dx_n.$$

Remarquons désormais que pour tout  $\psi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\psi \in A \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \psi, \hat{\mathbf{x}} \rangle \in -\frac{\alpha}{\|\mathbf{x}\|} + \left[ -\frac{\epsilon}{\|\mathbf{x}\|}, \frac{\epsilon}{\|\mathbf{x}\|} \right] \triangleq B \\ \psi \in [-1, 1]^n. \end{cases}$$

On en déduit l'égalité suivante :

$$\mathbb{1}_A \left( x_1 \hat{\mathbf{x}} + \sum_{i=2}^n x_i \mathbf{e}_i \right) = \mathbb{1}_B(x_1) \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]^n} \left( x_1 \hat{\mathbf{x}} + \sum_{i=2}^n x_i \mathbf{e}_i \right).$$

Ce qui donne dans l'intégrale, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\mu_n(A) = \int_{x_1 \in \mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x_1) \left[ \int_{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{[-1,1]^n} \left( x_1 \hat{\mathbf{x}} + \sum_{i=2}^n x_i \mathbf{e}_i \right) dx_2 \dots dx_n \right] dx_1.$$

Observons désormais que le terme entre crochets est égal au volume  $(n-1)$ -dimensionnel de l'intersection entre l'hyperplan affine  $\{\psi \in \mathbb{R}^n : \langle \psi, \hat{\mathbf{x}} \rangle = x_1\}$  et l'hypercube  $[-1, 1]^n$ . D'après le Théorème 8, ce volume est majoré par  $\sqrt{2} \cdot 2^{n-1}$ . On en déduit

$$\mu_n(A) \leq \int_{x_1 \in \mathbb{R}} \sqrt{2} \cdot 2^{n-1} \mathbb{1}_B(x_1) dx_1 \leq \sqrt{2} \cdot 2^n \frac{\epsilon}{\|\mathbf{x}\|},$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

Nous allons maintenant pouvoir démontrer une inégalité similaire, mais concernant cette fois les éléments  $\mathcal{M}$  de la classe d'opérateurs de mesure  $L_m$ .

**Proposition 9** (Inégalité d'injection). *Soient  $\epsilon > 0$  et  $\mathbf{x} \in E$ . Pour tout  $j \geq 1$ ,*

$$\mathbb{P}_m \{ \mathcal{M} \in L : \|\mathcal{M}\mathbf{x}\| \leq \epsilon \} \leq \left( \frac{\sqrt{2}j^s \epsilon}{\|\pi_{E_j}(\mathbf{x})\|} \right)^m.$$

*Démonstration.* Soit  $j \geq 1$ . Remarquons d'abord que  $\|\mathcal{M}\mathbf{x}\| \leq \epsilon$  implique  $|\langle \psi^{(k)}, \mathbf{x} \rangle| \leq \epsilon$  pour tout  $k = 1, \dots, m$ , où les  $\psi^{(k)} \in L$  sont les coordonnées de  $\mathcal{M}$ . De là,

$$\mathbb{P}_m \{ \mathcal{M} \in L_m : \|\mathcal{M}\mathbf{x}\| \leq \epsilon \} \leq \prod_{k=1}^m \mathbb{P} \{ \psi \in L : |\langle \psi, \mathbf{x} \rangle| \leq \epsilon \}.$$

Nous allons pouvoir estimer le terme de droite. Ecrivons alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{ \psi \in L : |\langle \psi, \mathbf{x} \rangle| \leq \epsilon \} &= \left[ \bigotimes_{i=1}^{+\infty} p \right] \left\{ \{ \alpha_i \}_{i \geq 1} \in [-1, 1]^{\mathbb{N}^*} : \left| \sum_{i=1}^{+\infty} i^{-s} \alpha_i \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{x} \rangle \right| \leq \epsilon \right\} \\ &= [p_j \times p_j^c] \left\{ \{ \alpha_i \}_{i \geq 1} \in [-1, 1]^{\mathbb{N}^*} : \left| \sum_{i=1}^{+\infty} i^{-s} \alpha_i \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{x} \rangle \right| \leq \epsilon \right\} \\ &= [p_j \times p_j^c] \left\{ \{ \alpha_i \}_{i \geq 1} \in [-1, 1]^{\mathbb{N}^*} : \left| \left\langle \sum_{i=1}^j i^{-s} \mathbf{g}_i, \mathbf{x} \right\rangle + \sum_{i=j+1}^{+\infty} i^{-s} \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{x} \rangle \right| \leq \epsilon \right\}. \end{aligned}$$

On a scindé la série intervenant dans l'ensemble à mesurer afin de se ramener à une forme permettant d'utiliser le Lemme 5. En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire cette dernière probabilité sous la forme

$$\int_{[-1,1]^{\{i\}_{i \geq j+1}}} p_j \left\{ \{\alpha_1, \dots, \alpha_j\} \in [-1,1]^j : \left| \left\langle \sum_{i=1}^j i^{-s} \mathbf{g}_i, \mathbf{x} \right\rangle + \sum_{i=j+1}^{+\infty} i^{-s} \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{x} \rangle \right| \leq \epsilon \right\} dp_j^c(\{\alpha_i\}),$$

Notons  $\mathcal{T}$  l'opérateur de  $\ker(\mathcal{H})^\perp$  vers l'adhérence de  $\text{Im}(\mathcal{H})$  qui à  $\mathbf{f}_i$  associe  $i^{-s} \mathbf{g}_i$ . Son adjoint  $\mathcal{T}^*$  est l'opérateur qui à  $\mathbf{g}_i$  associe  $i^{-s} \mathbf{f}_i$ . On peut alors écrire

$$\left\langle \sum_{i=1}^j i^{-s} \alpha_i \mathbf{g}_i, \mathbf{x} \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^j i^{-s} \alpha_i \mathbf{g}_i, \pi_{G_j}(\mathbf{x}) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^j \alpha_i \mathbf{f}_i, \mathcal{T}^*[\pi_{G_j}(\mathbf{x})] \right\rangle.$$

Pour tout  $\{\alpha_i\}_{i \geq j+1} \in [-1,1]^{\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, j\}}$ , on a désormais

$$\begin{aligned} & p_j \left\{ \{\alpha_1, \dots, \alpha_j\} \in [-1,1]^j : \left| \left\langle \sum_{i=1}^j i^{-s} \alpha_i \mathbf{g}_i, \mathbf{x} \right\rangle + \sum_{i=j+1}^{+\infty} i^{-s} \alpha_i \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{x} \rangle \right| \leq \epsilon \right\} \\ &= p_j \left\{ \{\alpha_1, \dots, \alpha_j\} \in [-1,1]^j : \left| \left\langle \sum_{i=1}^j \alpha_i \mathbf{f}_i, \mathcal{T}^*[\pi_{G_j}(\mathbf{x})] \right\rangle + \sum_{i=j+1}^{+\infty} i^{-s} \alpha_i \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{x} \rangle \right| \leq \epsilon \right\} \\ &= p_j \left\{ \psi \in [-1,1]^j : \left| \langle \psi, \mathcal{T}^*[\pi_{G_j}(\mathbf{x})] \rangle + \sum_{i=j+1}^{+\infty} i^{-s} \alpha_i \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{x} \rangle \right| \leq \epsilon \right\}, \end{aligned}$$

en se rappelant que les  $\mathbf{f}_j$  sont orthonormés, ce qui nous permet d'identifier  $F_j$  à  $\mathbb{R}^j$ , et en notant que  $\mathcal{T}^*(G_j) \subset F_j$ . En appliquant le Lemme 5 et en remarquant que la dépendance en  $\alpha$  disparaît, on obtient

$$p_j \left\{ \{\alpha_1, \dots, \alpha_j\} \in [-1,1]^j : \left| \left\langle \sum_{i=1}^j i^{-s} \alpha_i \mathbf{g}_i, \mathbf{x} \right\rangle + \sum_{i=j+1}^{+\infty} i^{-s} \alpha_i \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{x} \rangle \right| \leq \epsilon \right\} \leq \frac{\sqrt{2}\epsilon}{\|\mathcal{T}^*[\pi_{G_j}(\mathbf{x})]\|}.$$

Comme par définition  $\pi_{G_j}(\mathbf{x}) \in G_j$ , alors  $\|\mathcal{T}^*[\pi_{G_j}(\mathbf{x})]\| \geq j^{-s} \|\pi_{G_j}(\mathbf{x})\|$ . Puisque  $p_j^c$  est une mesure de probabilité, on intègre sur tous les  $\{\alpha_i\}_{i \geq j+1} \in [-1,1]^{\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, j\}}$  pour finalement avoir

$$\mathbb{P} \{ \psi \in L : |\langle \psi, \mathbf{x} \rangle| \leq \epsilon \} \leq \frac{\sqrt{2}j^s \epsilon}{\|\pi_{G_j}(\mathbf{x})\|},$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

Nous pouvons désormais présenter le résultat principal de cette section, qui énonce que presque sûrement, un opérateur de mesure  $\mathcal{M} \in L_m$  injecte « bien » certains sous-ensembles  $\Sigma \subset \mathcal{H}(\mathcal{B})$ , de dimension upper box-counting finie, dans  $\mathbb{R}^m$ , pourvu que  $m$  soit bien choisi. Définissons d'abord

$$d(\Sigma, \epsilon) \triangleq \min \{j \in \mathbb{N} : \forall \mathbf{x} \in \Sigma, \quad d(\mathbf{x}, G_j) \leq \epsilon\}. \quad (4.3)$$

On peut alors définir pour chaque  $\Sigma \subset \mathcal{H}(\mathcal{B})$  un indice  $\tau(\Sigma)$  par

$$\tau(\Sigma) \triangleq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(d(\Sigma, \epsilon))}{-\ln(\epsilon)}. \quad (4.4)$$

L'indice  $\tau(\Sigma)$  donne une indication sur le comportement asymptotique de  $j$  en fonction de  $\epsilon$  si l'on veut que chaque élément de  $\Sigma$  soit  $\epsilon$ -proche d'un élément de  $G_j$ .

**Théorème 9.** Soit  $\Sigma$  un sous-ensemble de  $\mathcal{H}(\mathcal{B})$  de dimension upper box-counting finie  $\dim_b(\Sigma) \leq d$  et vérifiant  $\tau(\Sigma) \leq \tau < +\infty$ . Si  $m > 2d$ , alors pour tout réel  $\theta$  tel que

$$0 < \theta < \frac{m - 2d}{m(1 + s\tau)},$$

presque sûrement, il existe une constante  $C_{\mathcal{M}} > 0$  telle que

$$\forall \mathbf{x} \in \Sigma - \Sigma, \quad C_{\mathcal{M}} \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{M}\mathbf{x}\|^\theta.$$

Dans notre contexte d'acquisition compressée, ce résultat s'interprète comme étant une « lower-RIP » vérifiée presque sûrement par l'opérateur de mesure  $\mathcal{M}$  pour n'importe quel modèle de signaux  $\Sigma$ . Notons que, malheureusement, la constante intervenant dans l'inégalité dépend du choix de  $\mathcal{M}$ . Par rapport au résultat donné dans [13], nous démontrons une variante reposant sur une géométrie différente – d'où l'utilisation du théorème de Ball – permettant d'avoir une classe d'opérateurs ne dépendant pas du sous-ensemble  $\Sigma$  et à la forme relativement lisible. Les changements se trouvent notamment au sein du Lemme 5 et de la Proposition 9, la démonstration du Théorème 9 suivant les étapes de celle donnée dans [13].

*Démonstration du Théorème 9.* Remarquons d'abord que par construction, les éléments de  $L_m$  sont bornés en norme d'opérateur par  $A \triangleq \sqrt{m}\zeta(s)$ , où  $\zeta(s) \triangleq \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ . Soit donc  $\Sigma \subset \mathcal{H}(\mathcal{B})$  vérifiant  $\dim_b(\Sigma) < 2m$ . Si  $\theta$  vérifie l'hypothèse alors on peut trouver un certain  $d' > d$  et  $\tau' > \tau$  tels que

$$0 < \theta < \frac{m - 2d'}{m(1 + s\tau')},$$

Définissons les ensembles  $Z_j$  pour  $j \geq 1$  par  $Z_j \triangleq \{\mathbf{z} \in \Sigma - \Sigma : \|\mathbf{z}\| \geq 2^{-j}\}$ . Définissons également

$$Q_j \triangleq \left\{ \mathcal{M} \in L_m : \|\mathcal{M}\mathbf{z}\| < 2^{-j/\theta} \text{ pour un certain } \mathbf{z} \in Z_j \right\}.$$

Chaque  $Z_j$  est inclus dans  $\Sigma - \Sigma$ , d'où  $\dim_b(Z_j) \leq 2 \dim_b(\Sigma) < 2d'$ . Par définition de la dimension upper box-counting, il existe donc un  $2^{-j/\theta}$ -recouvrement de  $Z_j$  de cardinal  $N_j \leq c2^{2d'j/\theta}$ , où  $c$  ne dépend que de  $\Sigma$ . Soit  $\mathbf{z}_0$  un des centres du recouvrement, et  $Y_j \triangleq Z_j \cap \mathcal{B}(\mathbf{z}_0, 2^{-j/\theta})$ . Alors par inégalité triangulaire, si

$$\|\mathcal{M}\mathbf{z}_0\| \geq (1 + A)2^{-j/\theta}$$

alors

$$\forall \mathbf{z} \in \mathcal{B}(\mathbf{z}_0, 2^{-j/\theta}), \quad \|\mathcal{M}\mathbf{z}\| \geq \|\mathcal{M}\mathbf{z}_0\| - \|\mathcal{M}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)\| \geq (1 + A)2^{-j/\theta} - A2^{-j/\theta} = 2^{-j/\theta}.$$

On en déduit, en prenant la négation de cette implication,

$$\left\{ \mathcal{M} \in L_m : \|\mathcal{M}\mathbf{z}\| < 2^{-j/\theta} \text{ pour un } \mathbf{z} \in Y \right\} \subset \left\{ \mathcal{M} \in L_m : \|\mathcal{M}\mathbf{z}_0\| < (1 + A)2^{-j/\theta} \right\}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}_m \left\{ \mathcal{M} \in L_m : \|\mathcal{M}\mathbf{z}\| < 2^{-j/\theta} \text{ pour un } \mathbf{z} \in Y \right\} \leq \mathbb{P}_m \left\{ \mathcal{M} \in L_m : \|\mathcal{M}\mathbf{z}_0\| < (1 + A)2^{-j/\theta} \right\}.$$

A ce stade, nous allons définir une suite d'espaces vectoriels permettant une approximation de  $\Sigma$ . Par définition de  $\tau(\Sigma)$ , il existe une suite croissante  $\{d_j\}_{j \geq 1}$  telle que

$$\forall j \geq 1, \forall \mathbf{x} \in \Sigma, \quad d(\mathbf{x}, G_j) \leq 2^{-(j+1)},$$



avec l'estimation suivante : pour une certaine constante  $C > 0$ , on a  $d_j \leq C \cdot 2^{\tau'j}$  pour tout  $j \geq 1$ . Nous allons maintenant pouvoir utiliser la Proposition 9 avec l'indice  $d_j$  :

$$\mathbb{P}_m \left\{ \mathcal{M} \in L_m : \|M\mathbf{z}\| < 2^{-j/\theta} \text{ pour un } \mathbf{z} \in Y_j \right\} \leq (1+A)^m \left( \frac{\sqrt{2} \cdot d_j^s \cdot 2^{-j/\theta}}{\|\pi_{G_{d_j}}(\mathbf{z}_0)\|} \right)^m.$$

Par ailleurs, par inégalité triangulaire,

$$\|\pi_{G_{d_j}}(\mathbf{z}_0)\| \geq \|\mathbf{z}_0\| - \|\mathbf{z}_0 - \pi_{G_{d_j}}(\mathbf{z}_0)\| \geq 2^{-j} - 2^{-j+1} = 2^{-(j+1)}$$

car par construction  $d(\mathbf{x}, G_{d_j}) \leq 2^{-(j+1)}$  pour tout  $\mathbf{x} \in \Sigma$ . Rappelons également que l'on a  $d_j \leq C \cdot 2^{\tau'j}$ . En définitive, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_m \left\{ \mathcal{M} \in L_m : \|M\mathbf{z}\| < 2^{-j/\theta} \text{ pour un } \mathbf{z} \in Y_j \right\} &\leq (2C^s \sqrt{2}(1+A))^m \left( 2^{s\tau'j} \frac{2^{-j/\theta}}{2^{-j}} \right)^m \\ &\leq B \cdot \left( 2^{s\tau'j} \frac{2^{-j/\theta}}{2^{-j}} \right)^m, \end{aligned}$$

où l'on a noté  $B$  la constante ne dépendant pas de  $j$ . Si  $\mathcal{M}' \in Q_j$  alors il existe un centre  $\mathbf{z}_0$  du recouvrement de  $Z_j$  et un ensemble  $Y_j$  associé tel que

$$\mathcal{M}' \in \left\{ \mathcal{M} \in L_m : \|\mathcal{M}\mathbf{z}\| < 2^{-j/\theta} \text{ pour un } \mathbf{z} \in Y_j \right\}.$$

Autrement dit, si on note  $\mathbf{z}_0^{(i)}$  les  $N_j$  centres du recouvrement, et  $Y_j^{(i)}$  les « ensembles  $Y_j$  » associés, on a

$$Q_j \subset \bigcup_{i=1}^{N_j} \left\{ \mathcal{M} \in L_m : \|\mathcal{M}\mathbf{z}\| < 2^{-j/\theta} \text{ pour un } \mathbf{z} \in Y_j^{(i)} \right\}.$$

On en déduit

$$\mathbb{P}_m(Q_j) \leq N_j B \left( 2^{s\tau'j} \frac{2^{-j/\theta}}{2^{-j}} \right)^m \leq c 2^{2d'j/\theta} B \left( 2^{s\tau'j} \frac{2^{-j/\theta}}{2^{-j}} \right)^m.$$

On peut finalement écrire

$$\mathbb{P}_m(Q_j) \leq B' \cdot 2^{j[-(m-2d')/\theta + m(1+s\tau')]}$$

où l'on a rassemblé les constantes en  $B'$ . Pour que  $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_m(Q_j) < +\infty$ , il suffit que  $-(m-2d')/\theta + m(1+s\tau') < 0$  soit

$$\theta < \frac{m-2d'}{m(1+s\tau')}$$

ce qui est vrai par hypothèse. D'après le lemme de Borel-Cantelli, si  $\mathcal{M} \in L_m$ , alors presque sûrement,  $\mathcal{M}$  appartient à un nombre fini de  $Q_j$ . Soit donc  $\mathcal{M} \in L_m$ . Presque sûrement, il existe un indice  $j_0$  tel que

$$\forall j \geq j_0, \quad \mathcal{M} \notin Q_j.$$

Pour conclure, examinons les différents cas possibles. Si  $\mathbf{z} \in \Sigma - \Sigma$  vérifie  $\|\mathbf{z}\| \geq 2^{-j_0}$  alors, comme  $\mathcal{M} \notin Q_{j_0}$ , alors  $\|M\mathbf{z}\| \geq 2^{-j_0/\theta}$ . Or,  $\Sigma - \Sigma$  est compact donc borné, donc il existe  $R > 0$  tel que  $\Sigma - \Sigma \subset \mathcal{B}(0, R)$ . En particulier,

$$\frac{\|\mathbf{z}\|^{1/\theta}}{R^{1/\theta}} \leq 1$$

d'où  $\|\mathcal{M}\mathbf{z}\| \geq 2^{-j_0/\theta} R^{-1/\theta} \|\mathbf{z}\|^{1/\theta}$ . Sinon, si  $\mathbf{z}$  est non nul, il existe  $j \geq j_0$  tel que  $2^{-(j+1)} \leq \|\mathbf{z}\| \leq 2^{-j}$ . Alors comme  $\mathcal{M} \notin Q_{j+1}$ , on a de même

$$\|\mathcal{M}\mathbf{z}\| \geq 2^{-(j+1)/\theta} \geq 2^{-1/\theta} \|\mathbf{z}\|^{1/\theta}.$$

Ainsi, dans tous les cas, quel que soit  $\mathbf{z} \in \Sigma - \Sigma$ , on a

$$\|\mathcal{M}\mathbf{z}\|^\theta \geq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2^{j_0} R} \right\} \|\mathbf{z}\|.$$

En posant  $C_{\mathcal{M}} = \min\{1/2, 2^{-j_0} R^{-1}\}$ , on obtient finalement

$$\forall \mathbf{z} \in \Sigma - \Sigma, \quad C_{\mathcal{M}} \|\mathbf{z}\| \leq \|\mathcal{M}\mathbf{z}\|^\theta.$$

□

Si l'on dispose d'une information supplémentaire sur la convergence des  $\sigma_i$ , alors le résultat est valable pour tout sous-ensemble  $\Sigma \subset \mathcal{H}(\mathcal{B})$ . On a en effet la proposition suivante.

**Proposition 10** (Approximation uniforme). *Supposons qu'il existe  $\eta \in ]0, 2[$  tel que  $\sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{2-\eta} < +\infty$ . Alors on a*

$$\tau(\mathcal{H}(\mathcal{B})) \leq 2 \max \left\{ \frac{1 - \frac{\eta}{2}}{\eta}, \frac{\eta}{1 - \frac{\eta}{2}} \right\}.$$

La démonstration repose sur un contrôle des restes de la série des  $\sigma_i^2$  et sur des arguments similaires à ceux employés lors des calculs de dimension upper box-counting.

*Démonstration.* Comme  $\sigma_i$  est une suite positive et décroissante, l'hypothèse implique  $\sigma_n^{2-\eta} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ , soit

$$\sigma_n^2 = O\left(n^{-1/(1-\frac{\eta}{2})}\right).$$

Or, comme  $(1 - \frac{\eta}{2}) < 1$ , la série  $\sum n^{-1/(1-\frac{\eta}{2})}$  est convergente, donc par théorème de sommation des équivalents pour des séries positives convergentes, en notant le reste  $R_N \triangleq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \sigma_n^2$ , on obtient

$$R_N = O\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} n^{-1/(1-\frac{\eta}{2})}\right) = O\left(N^{1-1/(1-\frac{\eta}{2})}\right) = O\left(N^{-\eta/(1-\frac{\eta}{2})}\right).$$

Si  $\eta/(1 - \frac{\eta}{2}) \geq 1$ , alors pour tout  $d > (1 - \frac{\eta}{2})/\eta$ , la série de terme général  $R_N^d$  converge. Sinon, cette série converge pour tout  $d > (1 - \frac{\eta}{2})/\eta$ . On en déduit que

$$\inf \left\{ d > 0 \text{ tel que } \sum_{N=1}^{+\infty} R_N^d < +\infty \right\} \leq \max \left\{ \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)/\eta, \eta/\left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \right\} \triangleq A.$$

Puisque que  $R_N$  est une suite décroissante strictement positive convergeant vers 0, le Lemme 4 donne

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N)}{-\ln(R_N)} \leq \tau.$$

Cette estimation va nous permettre d'obtenir le résultat d'approximation. Soit  $\epsilon > 0$ . Comme la suite  $(R_N)$  décroît vers 0, il existe  $N_\epsilon$  tel que

$$R_{N_\epsilon+1} < \epsilon \leq R_{N_\epsilon}.$$

Soit  $N > N_\epsilon$ . Soit  $\mathbf{x} = \mathcal{H}\mathbf{u} \in H(\mathcal{B})$ . Alors, comme précédemment, on peut obtenir

$$d(\mathbf{x}, G_N) \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \sqrt{\sum_{i=N+1}^{+\infty} \sigma_i^2} \leq \sqrt{\epsilon},$$

et ce, pour  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$  arbitraire. On en déduit  $d(\sqrt{\epsilon}) \leq N_\epsilon + 1$ . On procède désormais comme pour les calculs de dimension upper box-counting :

$$\frac{\ln(d(\mathcal{H}(\mathcal{B}), \sqrt{\epsilon}))}{-\ln(\epsilon)} \leq \frac{\ln(N_\epsilon + 1)}{-\ln(\epsilon)} \leq \frac{\ln(N_\epsilon + 1)}{-\ln(R_{N_\epsilon})}.$$

D'où,  $\epsilon$  étant arbitraire,

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(d(\mathcal{H}(\mathcal{B}), \epsilon))}{-\ln(\epsilon)} \leq 2 \cdot \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\epsilon)}{-\ln(R_{N_\epsilon})} \leq 2 \cdot \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N)}{-\ln(R_N)} \leq 2A.$$

□

#### 4.2.2 Existence d'un décodeur idéal vérifiant l'IOP

Maintenant que nous disposons d'un théorème d'injection fournissant une lower-RIP, nous pouvons montrer l'existence d'un décodeur idéal vérifiant l'IOP pour certains modèles  $\Sigma \subset \mathcal{H}(\mathcal{B})$ . Prenons  $\mathcal{M} \in L_m$ . Le corollaire suivant découle immédiatement du Théorème 9 et de la Proposition 7.

**Corollaire 3.** *Sous les hypothèses du Théorème 9, pour chaque ensemble  $\Sigma \subset H(\mathcal{B})$  vérifiant  $\dim_b(\Sigma) \leq d < +\infty$  et  $\tau(\Sigma) \leq \tau < +\infty$ , presque sûrement, il existe une famille  $\{\Delta_\delta\}_{\delta>0}$  de décodeurs associés à  $\mathcal{M}$  vérifiant une IOP :*

$$\forall \mathbf{x} \in E, \forall \mathbf{e} \in \mathbb{R}^m, \quad \|\mathbf{x} - \Delta_\delta(\mathcal{M}\mathbf{x} + \mathbf{e})\| \leq 2d_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \Sigma) + \frac{2}{C_{\mathcal{M}}} \|\mathbf{e}\|^\theta + \delta.$$

Dans ce cas, le décodeur est une fonction de  $\mathbb{R}^m$  dans  $E$ . En considérant un décodeur plus spécifique, à valeurs dans l'adhérence de  $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ , on peut supprimer le terme additif en  $\delta$ .

**Corollaire 4.** *Sous les hypothèses du Théorème 9, pour chaque ensemble  $\Sigma \subset H(\mathcal{B})$  vérifiant  $\dim_b(\Sigma) \leq d < +\infty$  et  $\tau(\Sigma) \leq \tau < +\infty$ , presque sûrement, il existe un décodeur  $\Delta$ , défini sur  $\mathbb{R}^m$  à valeurs dans l'adhérence de  $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ , associé à  $\mathcal{M}$ , vérifiant une IOP :*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}(\mathcal{B}), \forall \mathbf{e} \in \mathbb{R}^m, \quad \|\mathbf{x} - \Delta(\mathcal{M}\mathbf{x} + \mathbf{e})\| \leq 2d_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \Sigma) + \frac{2}{C_{\mathcal{M}}} \|\mathbf{e}\|^\theta.$$

*Démonstration.* On applique la Proposition 7 en prenant comme espace de signaux l'adhérence de  $\mathcal{H}(\mathcal{B})$  pour obtenir une famille de décodeurs  $\Delta_\delta$  vérifiant

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}(\mathcal{B}), \forall \mathbf{e} \in \mathbb{R}^m, \quad \|\mathbf{x} - \Delta_\delta(\mathcal{M}\mathbf{x} + \mathbf{e})\| \leq 2d_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \Sigma) + \frac{2}{C_{\mathcal{M}}} \|\mathbf{e}\|^\theta + \delta.$$

Puisque  $\mathcal{H}$  est un opérateur compact, l'adhérence de  $\mathcal{H}(\mathcal{B})$  est compacte. Ainsi, chaque suite  $\{\Delta_{1/n}(\mathcal{M}\mathbf{x} + \mathbf{e})\}_{n \geq 1}$  pour  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$  et  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$  admet une sous-suite convergente vers une limite  $\mathbf{l}$ , ce qui permet de définir  $\Delta(\mathcal{M}\mathbf{x} + \mathbf{e}) \triangleq \mathbf{l}$ . Par continuité, un tel décodeur vérifie l'IOP sans terme additif.

□

# Conclusion

Ces dernières années, le formalisme de l'acquisition compressée s'est considérablement enrichi afin de réduire l'écart qui persistait entre la théorie et les applications. Nous avons évoqué des généralisations à des espaces de signaux de dimension infinie ainsi que de nouvelles formulations très générales du problème. Dans certains cas une réduction empirique à la dimension finie – par le biais d'une discrétisation par exemple – peut faire perdre à la donnée son caractère parcimonieux et mener à une reconstruction de qualité moindre. La dimension infinie, indispensable pour traiter des signaux analogiques par exemple, apporte en revanche un certain nombre de difficultés techniques.

**Acquisition compressée et systèmes dynamiques** En considérant des signaux issus de systèmes dynamiques, l'enjeu est double. Il s'agit d'un part d'apporter des éléments quant à l'application de l'acquisition compressée au problème d'estimation d'état, qui est omniprésent en ingénierie. D'autre part, si l'on adopte une approche traitement du signal, parce que la plupart des signaux naturels sont *filtrés* par des processus physiques, nous pouvons nuancer les limitations intrinsèques à la dimension infinie.

**Objectifs et résultats** Nous nous sommes intéressés à l'estimation de trajectoires issues d'un système dynamique linéaire dans le contexte de l'acquisition compressée. A ce titre, la première étape est d'étudier certains modèles de signaux de *petite dimension*, ce qui généralise la notion de parcimonie. La deuxième étape est d'étudier le procédé d'acquisition, et donc de construire un opérateur de mesure permettant l'existence d'un procédé de reconstruction. Nous avons examiné la dimension du modèle parcimonieux passé à travers le système dynamique, et nous avons construit un opérateur de mesure ne dépendant que du système.

**Perspectives** Nous avons vu que les résultats donnés dans le Chapitre 4 étaient en fait valables pour tout système admettant une représentation intégrale – en fait, tout signal image d'une certaine classe d'opérateurs. Dans le Chapitre 2, nous avons donné une définition générale d'un système dynamique en guise d'introduction. On peut alors se demander quelles sont les hypothèses à vérifier pour un système dynamique linéaire de dimension finie afin d'obtenir l'existence d'une telle représentation. Dans le Chapitre 3, nous avons utilisé un résultat d'existence de décodeur idéal en observant que la démonstration reposait sur un certain infimum. Dans un cadre d'acquisition compressée, il serait intéressant d'étudier les propriétés du problème d'optimisation générique associé afin de concevoir un décodeur réalisable, éventuellement adapté au système dynamique. Enfin, nous avons construit un opérateur de mesure garantissant une reconstitution théorique de la donnée sans erreur, avec un nombre de mesures dont on peut raisonnablement penser qu'il est minimal. En revanche, l'argument utilisé ne nous permet pas d'obtenir un contrôle sur les constantes intervenant dans la propriété IOP. Une piste serait d'essayer cette fois d'obtenir de meilleures constantes et une véritable RIP, quitte à augmenter le nombre de mesures.

# Bibliographie

- [1] Emmanuel J. Candès, Justin K. Romberg, and Terence Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59(8) :1207–1223, August 2006.
- [2] Simon Foucart and Holger Rauhut. *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Springer New York, New York, NY, 2013.
- [3] William B. Johnson and Joram Lindenstrauss. Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space. *Contemporary mathematics*, 26(189-206) :1, 1984.
- [4] Richard Baraniuk, Mark Davenport, Ronald DeVore, and Michael Wakin. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices. *Constructive Approximation*, 28(3) :253–263, 2008.
- [5] R. E. Kalman. Mathematical Description of Linear Dynamical Systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, 1(2) :152–192, January 1963.
- [6] David G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE transactions on military electronics*, 8(2) :74–80, 1964.
- [7] Gilles Lacombe and Francis Hirsch. *Éléments d’analyse fonctionnelle*. Sciences Sup. Dunod, 2009.
- [8] Jason N. Laska, Sami Kirolos, Marco F. Duarte, Tamer S. Ragheb, Richard G. Baraniuk, and Yehia Massoud. Theory and Implementation of an Analog-to-Information Converter using Random Demodulation. In *2007 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pages 1959–1962, New Orleans, LA, USA, May 2007. IEEE.
- [9] Masaaki Nagahara, Daniel E. Quevedo, and Dragan Nešić. Maximum hands-off control : a paradigm of control effort minimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(3) :735–747, 2016.
- [10] Ben Adcock and Anders C. Hansen. Generalized sampling and infinite-dimensional compressed sensing. *Foundations of Computational Mathematics*, 16(5) :1263–1323, 2016.
- [11] Anthony Bourrier, Mike E. Davies, Tomer Peleg, Patrick Pérez, and Rémi Gribonval. Fundamental performance limits for ideal decoders in high-dimensional linear inverse problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 60(12) :7928–7946, 2014.
- [12] Gilles Puy, Mike Davies, and Rémi Gribonval. Recipes for stable linear embeddings from Hilbert spaces to  $\mathbb{R}^m$ . 2017.
- [13] James C Robinson. Dimensions and Embeddings in Analysis TCC Lectures, Spring 2018. page 50.
- [14] Brian R. Hunt and Vadim Yu Kaloshin. Regularity of embeddings of infinite-dimensional fractal sets into finite-dimensional spaces. *Nonlinearity*, 12(5) :1263, 1999.