



**HAL**  
open science

## Argumentation abstraite et concepts formels

Leila Amgoud, Henri Prade

► **To cite this version:**

Leila Amgoud, Henri Prade. Argumentation abstraite et concepts formels. Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2012), Nov 2012, Compiègne, France. hal-03344978

**HAL Id: hal-03344978**

**<https://hal.science/hal-03344978>**

Submitted on 15 Sep 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Argumentation abstraite et concepts formels

## A formal concept view of abstract argumentation

Leila Amgoud

Henri Prade

IRIT, CNRS, Université de Toulouse, France  
118 Route de Narbonne 31062 Toulouse Cedex 09  
{amgoud, prade}@irit.fr

### Résumé :

Cet article présente pour la première fois un parallèle entre deux théories importantes en traitement de l'information qui s'intéressent à des questions qui n'ont a priori rien à voir entre elles et qui concernent des communautés de chercheurs bien distinctes : l'analyse formelle de concepts d'une part et la théorie abstraite de l'argumentation d'autre part. Elles exploitent toutes les deux une relation binaire exprimant pour l'une un lien objet-propriété, et pour l'autre une attaque d'un argument sur un autre argument. Le parallèle se précise davantage quand on considère la relation complémentaire "n'attaque pas" : on s'aperçoit alors que la notion d'extension stable à la base des sémantiques de l'argumentation correspond à l'idée de concept formel. L'article propose une première analyse du parallèle entre la théorie abstraite de l'argumentation, et l'analyse formelle de concepts, elle-même augmentée de d'autres opérateurs que celui à la base des concepts formels, grâce à un autre rapprochement avec la théorie des possibilités. Ce parallèle paraît intéressant pour en particulier enrichir la théorie abstraite de l'argumentation dans le cas de relations bi-valuées, comme dans le cas de relations floues. Un cube d'oppositions entre huit ensembles remarquables d'arguments peut ainsi être construit.

### Mots-clés :

Analyse formelle de concepts, argumentation abstraite, relation floue, théorie des possibilités, carré d'oppositions.

### Abstract:

This paper for the first time presents a parallel between two important theories for the treatment of information which address questions that are apparently completely different and that are studied by research communities that are fully distinct : the formal concept analysis theory on the one hand and the abstract theory of argumentation on the other hand. These two theories exploit a binary relation expressing a link object-property for the first one, and the attack of an argument by another argument for the second one. The parallel becomes more accurate when considering the complementary relation "does not attack". Then, it appears that the notion of stable extension which is at the basis of the semantics for argumentation corresponds to the idea of formal concept. The paper proposes a preliminary study of the parallel between abstract argumentation theory and formal concept analysis, itself enriched with operators other than the one at the basis of formal concepts thanks to an analogy with possibility theory. This parallel appears to be of interest for

providing a richer view of the abstract theory of argumentation in the case where the relation is bi-valued, as in the case where the relation is fuzzy. A cube of oppositions between eight remarkable sets of arguments is thus obtained.

### Keywords:

Formal concept analysis, abstract argumentation, fuzzy relation, possibility theory, square of oppositions.

## 1 Introduction

L'analyse formelle de concepts [33, 29] exploite une relation binaire liant des objets et des propriétés. Cette relation peut être classique, ou bien floue [5, 6, 7]. A partir de cette relation, on définit la notion de concept formel qui correspond à des ensembles maximaux de paires de sous-ensembles d'objets et de propriétés telles que chaque objet d'un sous-ensemble a toutes les propriétés du sous-ensemble associé, et les objets du sous-ensemble sont les seuls à les avoir toutes dans le contexte considéré. Les concepts formels sont caractérisés par une équation de point fixe au travers d'une connexion de Galois. Un récent parallèle [18] avec la théorie des possibilités [19] a montré l'intérêt d'introduire d'autres opérateurs dans ce cadre conduisant à d'autres connexions [15, 22].

De manière totalement indépendante, une théorie abstraite de l'argumentation [24] a été développée sur la base d'une relation d'attaque binaire entre arguments. Cette relation, en générale classique, peut devenir floue si on cherche à prendre en compte la force des arguments [25]. On s'intéresse alors à déterminer des sous-ensembles d'arguments re-

marquables qui constituent notamment des extensions stables dans la mesure où ils sont sans conflit interne, et où chaque argument en dehors de l'extension est attaqué par un argument de l'extension.

L'exploitation d'une relation binaire classique, qui peut être plus généralement floue, amène à s'interroger sur un parallèle possible entre les deux théories, et sur un éventuel enrichissement mutuel. Dans la section suivante nous redonnons les éléments formels de la théorie abstraite de l'argumentation en insistant sur les différentes équations relationnelles existantes. On rappelle ensuite en Section 3 dans le même esprit les bases de l'analyse formelle de concepts enrichie d'opérateurs induits par un parallèle avec la théorie des possibilités. On procède en Section 4 à un parallèle entre la théorie abstraite de l'argumentation et l'analyse formelle de concepts, qui met notamment en lumière le parallèle entre extension stable et concept formel. La Section 5 considère le cas où les relations de base sont floues, suggérant en particulier des pistes pour étendre la théorie abstraite de l'argumentation au cas où les attaques sont pondérées. Les remarques de conclusion suggèrent que le traitement de ce cas peut alors être envisagé dans le cadre d'une théorie équationnelle de la logique, et que par ailleurs l'analyse des structures d'opposition peut permettre d'obtenir une vue organisée de différents sous-ensembles d'arguments remarquables.

## 2 Argumentation

P. M. Dung [24] a proposé dans un article qui a fait école de définir un *système d'argumentation* comme une paire  $(A, R)$  où  $A$  est un ensemble d'arguments, et  $R$  ( $\neq \emptyset$ ) une relation binaire sur  $A$ , i.e.,  $R \subseteq A \times A$ . Etant donné deux arguments  $a \in A$  et  $b \in A$ ,  $(a, b) \in R$ , ou de manière équivalente  $aRb$ , signifie alors que  $a$  *attaque*  $b$ . Un *système d'argumentation*  $(A, R)$  peut donc être vu comme un graphe orienté, où les arguments sont les noeuds et les arêtes les éléments

de  $R$ . Comme on peut le voir la notion d'argument, qui correspond intuitivement à un ensemble minimal cohérent de formules qui dans un cadre logique donné permettent de déduire une certaine formule, est ici "abstraitisée", tout comme la notion d'attaque (qui consiste en pratique à mettre en cause la formule déduite, soit directement, soit en invalidant une des formules de l'argument nécessaires à sa déduction). Le cadre de Dung est souvent utilisé comme un cadre de référence et un point de départ dans les travaux actuels sur l'argumentation en intelligence artificielle.

Un sous-ensemble  $S \subseteq A$  d'arguments attaque un argument  $a$  si  $\exists s \in S$  et  $sRa$ . Un sous-ensemble  $S \subseteq A$  d'arguments attaque un sous-ensemble  $S' \subseteq A$  si  $\exists s \in S$  et  $\exists s' \in S'$  et  $sRs'$ . Un sous-ensemble  $S$  d'arguments est *sans conflit* si  $\nexists (a, b) \in S \times S$  tel que  $aRb$ .

Etant donné un système d'argumentation  $(A, R)$ , la question de base qui se pose est la définition de sous-ensembles *acceptables* d'arguments ; un sous-ensemble acceptable d'arguments est appelé *extension*. Différentes formes d'acceptabilité existent. La plus populaire est la notion d'*extension stable*.

Un sous-ensemble  $S$  d'arguments sans conflit est une *extension stable* si et seulement si

$$\forall a \notin S, \exists s \in S \text{ et } sRa.$$

C'est-à-dire qu'une extension stable attaque tous les arguments en dehors. D'autres formes d'acceptabilité utilisent la notion de *défense*. Un argument  $a \in A$  est défendu par un sous-ensemble d'arguments  $S$  si et seulement si pour chaque argument  $b \in A$  qui attaque  $a$ ,  $\exists s \in S$  tel que  $sRb$ . Un sous-ensemble  $S$  d'arguments sans conflit est une *extension admissible* si et seulement si chaque argument de  $S$  est défendu par  $S$ . Une extension stable est admissible.

On peut alors introduire des ensembles remarquables associés à un argument  $a$ , ou à un sous-ensemble d'arguments  $S$  en termes d'attaque ou de défense, qui vont permettre de préciser ces

définitions et d'établir quelques propriétés :

- l'ensemble des attaquants de  $a$   
 $Ra = \{s \in A | sRa\}$  ;
- l'ensemble des arguments attaqués par  $a$   
 $aR = \{s \in A | aRs\}$  ;
- l'ensemble des arguments attaqués par  $S$   
 $R^+(S) = \{a \in A | S \text{ attaque } a\}$   
 $= \{a \in A | \exists s \in S, sRa\}$   
 $= \{a \in A | S \cap Ra \neq \emptyset\}$  ;
- l'ensemble des arguments attaquant  $S$   
 $R^-(S) = \{a \in A | a \text{ attaque } S\}$   
 $= \{a \in A | \exists s \in S, aRs\}$   
 $= \{a \in A | S \cap aR \neq \emptyset\}$  ;
- l'ensemble des arguments défendus par  $S$   
 $Def(S) = \{a \in A | S \text{ défend } a\}$   
 $= \{a \in A | \forall b \in A \text{ t.q. } bRa, \exists s \in S \text{ t.q. } sRb\}$   
 $= \{a \in A | Ra \subseteq R^+(S)\}$ .

L'ensemble des arguments défendus par  $S$  est en effet constitué des arguments dont les attaquants sont attaqués par  $S$ .

On peut alors vérifier que

- $S$  est *sans conflit* si et seulement si [1]  
 $S \subseteq \overline{R^+(S)}$ ,  
 où  $\overline{T} = A \setminus T$ . En effet ceux que  $S$  attaque sont alors dans  $\overline{S}$  ( $R^+(S) \subseteq \overline{S}$ ).
- $S$  est une *extension stable* si et seulement si [24]  
 $S = \overline{R^+(S)}$  (\*).

Cela découle de ce qui précède, et de la définition de la stabilité qui demande  $\overline{S} \subseteq R^+(S)$ . Notons aussi que l'ensemble des arguments non attaqués par  $S$  est égal à

$$\overline{R^+(S)} = \{a \in A | \forall s \in S, s\overline{Ra}\}$$

$$= \{a \in A | S \subseteq \overline{Ra}\} \quad (**)$$

où  $s\overline{Ra}$  signifie que  $s$  n'attaque pas  $a$ . Ce qui permet alors d'établir :

- $Def(S) = \overline{R^+(R^+(S))}$  [1].  
 En effet, en appliquant (\*\*) on obtient  
 $\overline{R^+(R^+(S))} = \{a \in A | \overline{R^+(S)} \subseteq \overline{Ra}\}$ ,  
 ce qui fournit la preuve puisque  $\overline{Ra} = \overline{Ra}$ , compte-tenu de la définition de  $Def(S)$ .

Donc si  $S$  est une extension stable, on a (\*), et par suite

$$Def(S) = S.$$

Dans une extension stable, les arguments se défendent donc eux-mêmes.

On peut encore établir que [8]

- $S$  est une *extension admissible* si et seulement si  $S \subseteq Def(S) \cap \overline{R^+(S)}$ . En effet, cela équivaut à  $S \subseteq Def(S) \wedge S \subseteq \overline{R^+(S)}$ , ce qui signifie bien que les arguments dans  $S$  sont à la fois défendus par  $S$  et non attaqués par  $S$  ( $S$  est donc sans conflit). Cette condition s'écrit encore  
 $S \subseteq \{a \in A | \overline{R^+(S)} \subseteq \overline{Ra} \wedge S \subseteq \overline{Ra}\}$   
 $\Leftrightarrow S \subseteq \{a \in A | (\overline{R^+(S)} \cup S) \subseteq \overline{Ra}\}$   
 $\Leftrightarrow S \subseteq \{a \in A | Ra \subseteq (R^+(S) \cap \overline{S})\}$ .
- $S$  est une *extension admissible* si et seulement si  $S \subseteq Def(S \cap \overline{R^-(S)})$ . En effet, cette condition force que  $S$  soit sans conflit, puisqu'elle exprime que tout argument de  $S$  est défendu par un argument de  $S$  qui n'attaque pas  $S$  (on a  $\overline{R^-(S)} = \{a \in A | S \subseteq a\overline{R}\}$ ). En effet, si  $aRb$  avec  $(a, b) \in S^2$ ,  $b$  ne peut être défendu par  $c$  (i.e.  $cRa$  et ainsi  $c \in R^-(S)$ ) avec  $c \in R^-(S)$ .

- Une extension admissible  $S$  est dite *complète* si et seulement si chaque argument qui est défendu par  $S$  est dans  $S$  [24]. Donc  $S$  est complète si et seulement si  $S$  est admissible et  $Def(S) \subseteq S$ . On a donc que

$S$  est une *extension complète* si et seulement si

$$S = Def(S) \cap \overline{R^+(S)}.$$

De plus, si  $S$  est une extension complète, alors

$$S = Def(S).$$

### 3 Analyse formelle de concepts

L'analyse formelle de concepts (AFC) [4, 33] fournit un cadre théorique pour l'apprentissage de hiérarchies de concepts. On se donne au départ un *contexte formel*  $\mathcal{K} = (\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$  où  $\mathcal{R}$  est une relation binaire complètement définie entre un ensemble d'objets  $\mathcal{O}$  et un ensemble de propriétés booléennes  $\mathcal{P}$  ( $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{O} \times \mathcal{P}$ ). Un contexte formel est souvent visualisé sous la forme d'une table telle que la présence d'une croix ( $\times$ ) (resp. son absence) dans une cellule

indique si un objet vérifie (resp. ne vérifie pas) la propriété correspondante.

Etant donné un objet  $x$  et une propriété  $y$ , soit  $R(x) = \{y \in \mathcal{P} \mid x\mathcal{R}y\}$  l'ensemble des propriétés possédées par l'objet  $x$  ( $x\mathcal{R}y$  signifie que  $x$  possède la propriété  $y$ ) et soit  $R(y) = \{x \in \mathcal{O} \mid x\mathcal{R}y\}$  l'ensemble des objets possédant la propriété  $y$ . On définit en AFC des correspondances entre les ensembles  $2^{\mathcal{O}}$  et  $2^{\mathcal{P}}$ . Ces correspondances sont appelés opérateurs de dérivation de Galois. L'opérateur de Galois à la base de l'AFC, noté ici  $(\cdot)^{\Delta}$  (pour des raisons qui seront claires dans la suite), permet d'exprimer l'ensemble des propriétés satisfaites par tous les objets de  $X \subseteq \mathcal{O}$  comme :

$$\begin{aligned} X^{\Delta} &= \{y \in \mathcal{P} \mid \forall x \in \mathcal{O} (x \in X \Rightarrow x\mathcal{R}y)\} \\ &= \{y \in \mathcal{P} \mid X \subseteq R(y)\} = \bigcap_{x \in X} R(x) \end{aligned}$$

Cela permet aussi d'exprimer de manière duale l'ensemble des objets satisfaisant toutes les propriétés de  $Y$  comme :

$$\begin{aligned} Y^{\Delta} &= \{x \in \mathcal{O} \mid \forall y \in \mathcal{P} (y \in Y \Rightarrow x\mathcal{R}y)\} \\ &= \{x \in \mathcal{O} \mid Y \subseteq R(x)\} = \bigcap_{y \in Y} R(y) \end{aligned}$$

La paire duale d'opérateurs  $((\cdot)^{\Delta}, (\cdot)^{\Delta})$  appliqués respectivement sur  $2^{\mathcal{O}}$  et  $2^{\mathcal{P}}$  constitue une connexion de Galois qui permet d'induire des concepts formels. Un *concept formel* est une paire  $(X, Y)$  telle que

$$X^{\Delta} = Y \text{ et } Y^{\Delta} = X.$$

Autrement dit,  $X$  est l'ensemble maximal d'objets satisfaisant toutes les propriétés déjà satisfaites par tous les objets de  $X$ . L'ensemble  $X$  (resp.  $Y$ ) est appelé *extension* (resp. *intension*) du concept. De manière équivalente,  $(X, Y)$  est un concept formel si et seulement si c'est une paire maximale au sens de l'inclusion telle que

$$X \times Y \subseteq \mathcal{R}.$$

L'ensemble de tous les concepts formels est naturellement équipé d'une relation d'ordre (notée  $\preceq$ ) et définie comme :  $(X_1, Y_1) \preceq (X_2, Y_2)$  ssi  $X_1 \subseteq X_2$  (ou  $Y_2 \subseteq Y_1$ ). Cet ensemble

muni de la relation d'ordre  $\preceq$  forme un treillis complet  $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ . Les opérateurs *meet* et *join* du treillis sont décrits par le théorème fondamental de Ganter et Wille [29] :

$$\begin{aligned} \bigwedge_{j \in J} (X_j, Y_j) &= \left( \bigcap_{j \in J} X_j, \left( \left( \bigcup_{j \in J} Y_j \right)^{\Delta} \right)^{\Delta} \right) \\ \bigvee_{j \in J} (X_j, Y_j) &= \left( \left( \left( \bigcup_{j \in J} X_j \right)^{\Delta} \right)^{\Delta}, \bigcap_{j \in J} Y_j \right) \end{aligned}$$

Dans [18], sur la base d'un parallèle avec la *théorie des possibilités* (en effet  $X^{\Delta} = \bigcap_{x \in X} R(x)$  est le pendant de la définition d'une mesure de possibilité garantie  $\Delta(F) = \min_{x \in F} \pi(x)$  où  $\pi$  est une distribution de possibilités), d'autres opérateurs ont été introduits : A savoir l'opérateur de possibilité (noté  $(\cdot)^{\Pi}$ ) et son dual l'opérateur de nécessité (noté  $(\cdot)^N$ ), ainsi que l'opérateur  $(\cdot)^{\nabla}$  dual de l'opérateur  $(\cdot)^{\Delta}$  à la base de l'AFC, définis comme suit :

–  $X^{\Pi}$  est l'ensemble des propriétés satisfaites par au moins un objet dans  $X$  :

$$X^{\Pi} = \{y \in \mathcal{P} \mid \exists x \in X, x\mathcal{R}y\}$$

$$= \{y \in \mathcal{P} \mid X \cap R(y) \neq \emptyset\}$$

$$= \bigcup_{x \in X} R(x)$$

–  $X^N$  est l'ensemble des propriétés que seuls les objets de  $X$  ont :

$$X^N = \{y \in \mathcal{P} \mid \forall x \in \mathcal{O} (x\mathcal{R}y \Rightarrow x \in X)\}$$

$$= \{y \in \mathcal{P} \mid R(y) \subseteq X\}$$

$$= \bigcap_{x \notin X} \overline{R}(x)$$

(où  $\overline{R}(x)$  est l'ensemble des propriétés que n'a pas  $x$ )

–  $X^{\nabla}$  est l'ensemble des propriétés qui ne sont pas satisfaites par au moins un objet en dehors de  $X$  :

$$X^{\nabla} = \{y \in \mathcal{P} \mid \exists x \in \overline{X}, x\mathcal{R}y\}$$

$$= \{y \in \mathcal{P} \mid R(y) \cup X \neq \mathcal{O}\}$$

$$= \bigcup_{x \notin X} \overline{R}(x)$$

Les opérateurs  $Y^{\Pi}$ ,  $Y^N$ ,  $Y^{\nabla}$  sont obtenus de manière duale. Comme établi dans [15, 22], les

paires  $(X, Y)$  telles que  $X^N = Y$  et  $Y^N = X$  (ou de manière équivalente  $X^\Pi = Y$  et  $Y^\Pi = X$ ) caractérisent des sous-contextes indépendants (i.e. qui n'ont en commun ni objets ni propriétés) à l'intérieur du contexte initial. Les paires  $(X, Y)$  telles que  $X^N = Y$  et  $Y^N = X$  sont telles que :

$$(X \times Y) \cup (\bar{X} \times \bar{Y}) \supseteq \mathcal{R}.$$

Quant à  $X^\nabla = Y$  et  $Y^\nabla = X$ , cela constitue une autre caractérisation des concepts formels.

On a montré [18, 22] que les quatre ensembles  $X^\Pi$ ,  $X^N$ ,  $X^\Delta$ ,  $X^\nabla$  constituaient des informations complémentaires, toutes nécessaires à une analyse complète de la situation de  $X$  dans le contexte formel  $\mathcal{K} = (\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ .

#### 4 Extensions stables en argumentation et concepts formels

Il y a un parallèle frappant entre l'équation (\*\*) de la Section 2

$$\overline{R^+(S)} = \{a \in A \mid S \subseteq \bar{R}a\}$$

et l'expression

$$X^\Delta = \{y \in \mathcal{P} \mid X \subseteq R(y)\} = \bigcap_{x \in X} R(x)$$

ainsi qu'entre la définition (\*) d'une extension stable  $S$

$$S = \overline{R^+(S)}$$

et celle d'un concept formel  $(X, Y)$

$$X^\Delta = Y \text{ et } Y^\Delta = X,$$

compte tenu de la similarité des définitions de  $\overline{R^+(S)}$  et  $X^\Delta$ .

Il y a bien sûr une différence évidente : pour l'argumentation on est dans le cas particulier  $\mathcal{O} = \mathcal{P} = A$ . Ce qui joue le rôle du contexte formel est donc la relation  $\bar{R}$  ("n'attaque pas") définie sur  $A \times A = \mathcal{O} \times \mathcal{P}$ .

On peut donc s'intéresser aux contreparties argumentatives de  $X^\Pi$ ,  $X^N$ , ou  $X^\nabla$ . Ce sont respectivement :

$$- \bar{R}^+(S) = \{a \in A \mid S \cap \bar{R}a \neq \emptyset\}$$

l'ensemble des arguments non attaqués par tous les arguments de  $S$ . C'est-à-dire que pour chaque argument de  $\bar{R}^+(S)$  il existe au moins un argument de  $S$  qui ne l'attaque pas. A ne pas confondre avec l'ensemble des arguments non attaqués par des arguments de  $S$  :  $\overline{R^+(S)} = \{a \in A \mid S \cap Ra = \emptyset\}$ ; on a donc  $\overline{R^+(S)} \subseteq \bar{R}^+(S)$ , de même que  $\Delta \leq \Pi$  en théorie des possibilités.

$$- \overline{\bar{R}^+(S)} = \{a \in A \mid \bar{R}a \subseteq S\} = \{a \in A \mid \bar{S} \subseteq Ra\}$$

l'ensemble des arguments qui sont attaqués par tous les arguments en dehors de  $S$ ;

$$- R^+(\bar{S}) = \{a \in A \mid S \cup \bar{R}a \neq A\} \\ = \{a \in A \mid \bar{S} \cap Ra \neq \emptyset\}$$

l'ensemble des arguments qui sont attaqués par des arguments en dehors de  $S$ . On a  $\overline{R^+(\bar{S})} \subseteq R^+(\bar{S})$ , de même que  $N \leq \nabla$  en théorie des possibilités. De plus, si  $R \neq \emptyset$  et  $\bar{R} \neq \emptyset$ , on a  $\overline{R^+(\bar{S})} \subseteq \bar{R}^+(S)$  et  $R^+(\bar{S}) \subseteq \overline{R^+(S)}$ , pendant de  $N \leq \Pi$  et de  $\Delta \leq \nabla$  respectivement. On a donc finalement

$$\overline{R^+(\bar{S})} \cup \overline{\bar{R}^+(S)} \subseteq R^+(\bar{S}) \cap \bar{R}^+(S).$$

Si on fait abstraction des complémentations, on voit qu'étant donné  $S$ , il y a donc quatre ensembles d'arguments de base :

$$R^+(S), \bar{R}^+(S), R^+(\bar{S}), \bar{R}^+(\bar{S}).$$

Ce sont les arguments attaqués par  $S$ , les arguments non attaqués par  $S$ , les arguments attaqués par non  $S$ , les arguments non attaqués par non  $S$ . La considération de ces quatre ensembles est nécessaire pour complètement caractériser la position relative de l'ensemble des attaquants d'un argument  $a$  par rapport à un ensemble  $S$  d'arguments (voir [22] pour le détail de la contrepartie possibiliste de ce fait). Il est clair que de manière duale, il y en a quatre autres en termes de  $R^-$  plutôt que de  $R^+$ .

On est aussi conduit à considérer les contreparties des quatre conditions  $X^\Delta = Y$  et  $Y^\Delta = X$ ,

$X^\nabla = Y$  et  $Y^\nabla = X$ ,  $X^\Pi = Y$  et  $Y^\Pi = X$ , et  $X^N = Y$  et  $Y^N = X$ , ce sont respectivement  $S = \overline{R^+(S)}$ ,  $S = R^+(\overline{S})$ , qui de manière équivalente caractérisent une extension stable d'une part, et les contraintes équivalentes  $S = \overline{R^+(S)}$  et  $S = \overline{R^+(\overline{S})}$  d'autre part, qui correspondent à des extensions  $S$  et  $\overline{S}$  présentant une forme d'indépendance. En effet  $S = \overline{R^+(\overline{S})} \Leftrightarrow \overline{S} = \overline{R^+(S)}$  expriment que l'ensemble des arguments qui sont attaqués par tous les arguments en dehors de  $S$  sont précisément les arguments en dehors de  $S$ .

## 5 Le cas graduel

L'idée d'étendre l'AFC à un contexte formel flou, ce qui permet d'exprimer qu'un objet satisfait une propriété à un degré donné, a été initialement proposée par Burusco et Fuentes-Gonzalez [12] avant d'être considérablement développée par Belohlavek [5, 6, 7], et par un certain nombre d'autres auteurs, comme notamment [30, 26, 31, 32]. Pour une discussion de différentes extensions graduelles de l'AFC, on pourra se reporter à [14, 16].

Nous ne donnons ici que l'opérateur de base de l'AFC floue [6] :

$$X^\Delta(y) = \bigwedge_{x \in \mathcal{O}} (X(x) \rightarrow R(x, y))$$

où maintenant  $R$  est une relation floue,  $R(x, y)$  le degré avec lequel  $x$  est en relation  $R$  avec  $y$ , et  $X$  et  $X^\Delta$  sont des ensembles flous d'objets et de propriétés respectivement, et  $\bigwedge$  est l'opérateur de conjonction min et  $\rightarrow$  un opérateur d'implication. Un choix approprié de ce connecteur (l'implication résiduelle de Gödel :  $a \rightarrow b = 1$  si  $a \leq b$ , et  $a \rightarrow b = b$  si  $a > b$ ) permet de voir un concept formel flou en termes de ses coupes de niveau  $X_\alpha, Y_\alpha$  de façon à ce que

$$(X_\alpha \times Y_\alpha) \subseteq R_\alpha$$

où  $X_\alpha \times Y_\alpha$  est maximal, avec  $R_\alpha = \{(x, y) | R(x, y) \geq \alpha\}$ ,  $X_\alpha = \{x \in \mathcal{O} | X(x) \geq \alpha\}$ ,  $Y_\alpha = \{y \in \mathcal{P} | Y(y) \geq \alpha\}$ .

L'idée d'une théorie abstraite de l'argumenta-

tion autorisant des degrés dans la relation d'attaque a été défendue récemment notamment dans [25]. En suivant le parallèle présenté dans cet article, on est ainsi conduit à caractériser une *extension stable floue* par l'équation

$$S(s) = \bigwedge_{a \in A} (S(s) \rightarrow \overline{R}(s, a))$$

où  $S(s)$  est le degré avec lequel l'argument  $s$  appartient à l'extension stable floue  $S$ ,  $\overline{R}(s, a) = 1 - R(s, a)$ ,  $R(s, a)$  étant le degré avec lequel  $s$  attaque  $a$ , ce qui généralise  $S = \overline{R^+(S)} = \{a \in A | S \subseteq \overline{Ra}\}$ .

En exploitant la contrepartie de  $(X_\alpha \times Y_\alpha) \subseteq R_\alpha$ , dans le cadre argumentatif, on voit qu'on pourra se ramener à une étude des coupes de niveaux de la relation de non-attaque  $\overline{R}$ .

Dans le même esprit, on pourra définir les extensions admissibles floues, ou définir les extensions floues de  $\overline{R^+(S)}$ ,  $R^+(\overline{S})$ , et  $\overline{R^+(\overline{S})}$ .

L'association de degrés à des arguments peut avoir plusieurs sens : ils peuvent refléter notamment la force de l'argument, ou l'incertitude associée à ses composants. La nature des degrés est aussi importante en AFC où incertitude et niveau de satisfaction d'une propriété graduelle ne doivent pas se traiter de la même façon [16]. Des traitements différents doivent aussi être envisagés en argumentation selon la nature des degrés. Celui suggéré ci-dessus concerne la force des arguments plutôt que l'incertitude.

## 6 Remarques de conclusion

Le calcul des extensions en argumentation peut s'exprimer dans un cadre de logique propositionnelle en termes d'équations algébriques comme l'a montré [9] (voir aussi [2]). Cette idée a été récemment reprise par Gabbay [28], remplaçant ainsi l'argumentation abstraite dans le cadre de la sémantique équationnelle de la logique propositionnelle, développée il y a un siècle par Louis Couturat [13]. L'exploitation de cette idée se transpose à la logique floue [28]. On pourra donc reconsidérer ce qui précède dans cette perspective.

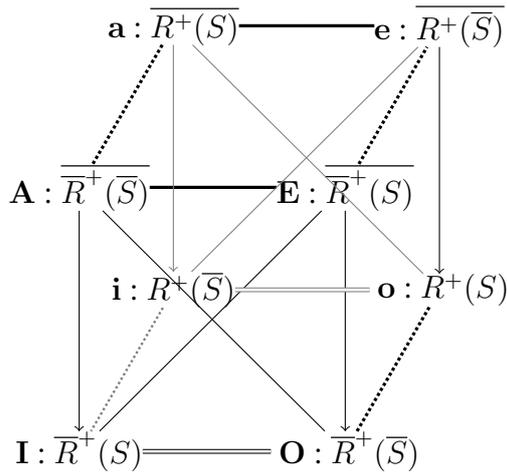


Figure 1 – Cube d’oppositions entre 8 ensembles remarquables d’arguments

Par ailleurs, en s’appuyant sur les résultats présentés dans [23] concernant les structures d’oppositions en analyse formelle de concepts et en théorie des possibilités, à la suite des travaux de Robert Blanché [11] et de Béziau [10] sur le carré d’oppositions et sa généralisation à un hexagone, on peut étudier de manière similaire les structures d’oppositions à l’œuvre dans la théorie abstraite de l’argumentation, et obtenir en particulier le cube d’oppositions de la Figure 1, où figurent les quatre ensembles d’arguments et leur complémentaires (qui sont disposés aux extrémités des diagonales). Les flèches verticales expriment des inclusions. Par exemple  $\overline{R^+(S)} \subseteq R^+(\overline{S})$  (pourvu que  $R \neq \emptyset$ ). De plus, la structure hexagonale d’oppositions obtenue dans la logique d’argumentation proposée dans [3] devra aussi être comparée à celle obtenue ici.

## Références

- [1] Amgoud, L., Cayrol, C. On the acceptability of arguments in preference-based argumentation. Proc. 14th Conf. on Uncertainty in Artif. Intellig. (UAI ’98), (Cooper, G. F., Moral, S., eds.), Madison, Wi., July 24-26, Morgan Kaufmann, 1-7, 1998.
- [2] Amgoud, L., Devred, C. Argumentation frameworks as constraint satisfaction problems. Proc. 5th Inter. Conf. on Scalable Uncertainty Management (SUM’11), (Benferhat, S., Grant, J., eds.), Dayton, Oct. 10-13, Springer, LNCS 6929, 110–122, 2011.
- [3] Amgoud, L., Prade, H. Towards a logic of argumentation. Proc. 6th Int. Conf. Scalable Uncert. Mgmt. (SUM’12), (E. Hüllermeier, S. Link, eds.), Marburg, Sept. 17-19, Springer, LNCS 7520, 558-565, 2012.
- [4] Barbut, M., Monjardet, B. Ordre et Classification. Algèbre et Combinatoire. Tome 2, Hachette, Paris, 1970.
- [5] Belohlavek, R. Fuzzy Galois connections. Math. Logic Quart., 45, 497–504, 1999.
- [6] Belohlavek, R. Fuzzy Relational Systems. Foundations and principles. Kluwer, 2002.
- [7] Belohlavek, R., Vychodil, V. What is a fuzzy concept lattice. Proc. CLA 05, Olomouc. Czech Republic, 34–45, 2005.
- [8] Besnard, P., Doutre, S. Characterization of semantics for argument systems. Proc. of the 9th Inter. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR’04), (Dubois, D., Welty, C. A., Williams, M. A., eds.) : Whistler, Canada, June 2-5, AAAI Press, 183–193, 2004.
- [9] Besnard, P., Doutre, S. Checking the acceptability of a set of arguments. Proc. 10th Inter. Workshop on Non-Monotonic Reasoning (NMR’04), Whistler, Canada, June 6-8, 59–64, 2004.
- [10] Béziau, J.-Y. The power of the hexagon. Logica Universalis, 6, 2012.
- [11] Blanché, R. Structures Intellectuelles. Essai sur l’Organisation Systématique des Concepts. Vrin, Paris. 1966.
- [12] Burusco, A., Fuentes-Gonzalez, R. The study of the L-fuzzy concept lattice. Mathware & Soft Comput. 3, 209–218, 1994.
- [13] Couturat, L. L’Algèbre de la Logique. Gauthier-Villars, Paris, 1905.
- [14] Djouadi, Y., Dubois, D., Prade, H. Différentes extensions floues de l’analyse formelle de concepts. Actes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et

- ses Applications (LFA 2009), Annecy, 5-6 Nov., Cépaduès, 141–148, 2009.
- [15] Djouadi, Y., Dubois, D., Prade, H. Possibility theory and formal concept analysis : context decomposition and uncertainty handling. Proc. Inter. Conf. on Information Process. and Mgmt. of Uncertainty in Knowledge-based Syst. (IPMU'10), (Hüllermeier, E., Kruse, R., Hoffmann, F., eds.), Dortmund, Jun. 28-Jul. 2, Springer, LNAI 6178, 260-269, 2010.
- [16] Djouadi, Y., Dubois, D., Prade, H. Graduality, uncertainty and typicality in formal concept analysis. In : 35 Years of Fuzzy Set Theory - Celebratory Volume Dedicated to the Retirement of Etienne E. Kerre, (Cornelis, C., Deschrijver, G., Nachtegael, M., Schockaert, S., Shi, Y., eds.), Studies in Fuzziness and Soft Computing vol. 261, Springer, 127-147, 2011.
- [17] Djouadi, Y., Prade, H. Possibility-theoretic extension of derivation operators in formal concept analysis over fuzzy lattices. Fuzzy Optimization and Decision Making, 10(4), 287–309, 2011.
- [18] Dubois, D., Dupin de Saint Cyr, F., Prade, H. A possibility-theoretic view of formal concept analysis. Fundamenta Informaticae, 75(1-4), 195–213, 2007.
- [19] Dubois, D., Prade, H. Théorie des Possibilités. Masson, 1987.
- [20] Dubois, D., Prade, H. Possibilistic logic : a retrospective and prospective view. Fuzzy Sets and Systems, 144, 3–23, 2004.
- [21] Dubois, D., Prade, H. Bridging gaps between several frameworks for the idea of granulation. Proc. Symp. on Foundations of Computational Intelligence (in IEEE Symposium Series on Computational Intelligence - SSCI'11) (FOCI'11), Paris, 11-15 avril, 59–65, 2011.
- [22] Dubois, D., Prade, H. Possibility theory and formal concept analysis : Characterizing independent sub-contexts. Fuzzy Sets and Systems, 196, 4–16, 2012.
- [23] Dubois, D., Prade, H. From Blanché's hexagonal organization of concepts to formal concept analysis and possibility theory. Logica Universalis, 6, 2012.
- [24] Dung, P. M. On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. Artificial Intelligence, 77, 321–358, 1995.
- [25] Dunne, P. E., Hunter, A., McBurney, P., Parsons, S., Wooldridge, M. Weighted argument systems : Basic definitions, algorithms, and complexity results. Artificial Intelligence, 175, 457–486, 2011.
- [26] Fan, S.-Q., Zhang, W.-X., Xu, W. Fuzzy inference based on fuzzy concept lattice. Fuzzy Sets & Syst., 157, 3177–3187, 2006.
- [27] Ferré, S., Ridoux, O. Introduction to logical information systems. Information Processing and Mgmt., 40, 383–419, 2004.
- [28] Gabbay, D. M. Introducing equational semantics for argumentation networks. Proc. 11th Europ. Conf. on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'11), (Weiru Liu, ed.), Belfast, UK, June 29-July 1, LNCS 6717, Springer, 19-35, 2011.
- [29] Ganter, B., Wille, R. Formal Concept Analysis, Springer-Verlag, 1999.
- [30] Georgescu, G., Popescu, A. Non-dual fuzzy connections. Archive for Mathematical Logic. 43, 1009–1039, 2004.
- [31] Lai, H., Zhang, D. Concept lattices of fuzzy contexts : formal concept analysis vs. rough set theory, Inter. J. Approx. Reason. 2009.
- [32] J. Medina and M. Ojeda-Aciego and J. Ruiz-Calvino. Formal concept analysis via multi-adjoint concept lattices. Fuzzy Sets and Systems, 160 (2), 130-144, 2009.
- [33] Wille, R. Restructuring lattice theory : an approach based on hierarchies of concepts. In Ordered Sets, (I. Rival, ed.), Reidel, Dordrecht, 445–470, 1982.