HAL open science

Sur la stabilité des intégrales orbitales nilpotentes

Jean-Loup Waldspurger

To cite this version:

Jean-Loup Waldspurger. Sur la stabilité des intégrales orbitales nilpotentes. 2021. hal-03335243

HAL Id: hal-03335243

https://hal.science/hal-03335243v1

Preprint submitted on 6 Sep 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la stabilité des intégrales orbitales nilpotentes

J.-L. Waldspurger

6 septembre 2021

Abstract Let G be a connected reductive group defined over a non-archimedean local field of characteristic 0. We assume G is quasi-split, adjoint and absolutly simple. Let $\mathfrak{g}$ be the Lie algebra of G. We consider the space of the invariant distributions on $\mathfrak{g}(F)$, which are stable and supported by the set of nilpotent elements of $\mathfrak{g}(F)$. Magdy Assem has stated several conjectures which describe this space. We prove some of these conjectures, assuming that the residual characteristic of F is "very large" relatively to G.

Résumé Soit G un groupe réductif connexe défini sur un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On suppose que G est quasi-déployé, adjoint et absolument simple. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et considérons l'espace des distributions invariantes sur $\mathfrak{g}(F)$, qui sont stables et dont le support est formé d'éléments nilpotents. Magdy Assem a formulé des conjectures décrivant cet espace. Nous prouvons une partie de ces conjectures, sous l'hypothèse que la caractéristique résiduelle de F est "très grande" relativement à G.

1 Introduction

1.1 Enoncé du théorème

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle et G un groupe réductif connexe défini sur F. On note $\mathbb{F}_q$ le corps résiduel de F, q étant son nombre d'éléments, p la caractéristique de $\mathbb{F}_q$ et val_F la valuation usuelle de F. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On identifie G et $\mathfrak{g}$ aux ensembles de leurs points sur une clôture algébrique $\bar{F}$ de F.

On note $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ l'espace des fonctions sur $\mathfrak{g}(F)$ à valeurs complexes, localement constantes et à support compact. On note $I(\mathfrak{g}(F))$ le quotient de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par le sous-espace des fonctions dont toutes les intégrales orbitales sont nulles. On note $I(\mathfrak{g}(F))^*$ l'espace dual de $I(\mathfrak{g}(F))$. C'est l'espace des distributions invariantes sur $\mathfrak{g}(F)$ (invariantes par conjugaison par $G(F)$, où on appelle conjugaison l'action adjointe). On définit le sous-espace $SI(\mathfrak{g}(F))^*$ des distributions stables, cf. 2.4.1.

Notons $\mathfrak{g}_{nil}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$. On note $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil} \subset I(\mathfrak{g}(F))^*$ le sous-espace des distributions invariantes à support dans $\mathfrak{g}_{nil}(F)$. Cet espace se décrit aisément. Notons $\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$ l'ensemble des orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}(F)$, c'est-à-dire des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $\mathfrak{g}_{nil}(F)$. A toute orbite $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$, on associe l'intégrale orbitale $I_\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}$, cf. 6.1.1. C'est un élément de $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ et la famille $(I_\mathcal{O})_{\mathcal{O}\in\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj}$ est une base de cet espace. On pose $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil} = SI(\mathfrak{g}(F))^* \cap$

$I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$. Cet espace est assez mystérieux et on n'en connaît pas actuellement de description générale. Le but de l'article est d'en donner une description partielle sous des hypothèses restrictives.

Magdy Assem a formulé des conjectures à ce propos ([4], conjectures A et C de l'introduction). En fait, il considérait des distributions invariantes sur $G(F)$ à support unipotent mais la traduction est immédiate. Rappelons ces conjectures, du moins partiellement. Notons $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ l'ensemble des orbites nilpotentes algébriques de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire l'ensemble des classes de conjugaison par $G = G(\bar{F})$ dans $\mathfrak{g}_{nil} = \mathfrak{g}_{nil}(\bar{F})$. Notons Γ_F le groupe de Galois de $\bar{F}/F$. Ce groupe agit sur $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ et on note $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$ le sous-ensemble des points fixes. Tout orbite $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$ est contenue dans une unique orbite algébrique $\underline{\mathcal{O}} \in (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$. Pour $\underline{\mathcal{O}} \in (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$, notons $I(\mathfrak{g}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}}$ l'espace de distributions engendré par les intégrales orbitales $I_{\mathcal{O}}$ pour $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$, $\mathcal{O} \subset \underline{\mathcal{O}}$. Posons $SI(\mathfrak{g}_{nil}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}} = SI(\mathfrak{g}(F))^* \cap I(\mathfrak{g}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}}$. La première conjecture est

(1) $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ est la somme directe des $SI(\mathfrak{g}_{nil}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}}$ quand $\underline{\mathcal{O}}$ décrit $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$.

Bien que très naturelle, cette assertion n'est absolument pas évidente.

Lusztig a défini le sous-ensemble des orbites nilpotentes (algébriques) spéciales. Bien que leur définition soit très peu parlante pour moi, ces orbites jouent un rôle particulier et essentiel dans de nombreuses situations. Elles interviennent ici par la deuxième conjecture

(2) soit $\underline{\mathcal{O}} \in (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$; si $\underline{\mathcal{O}}$ n'est pas spéciale, $SI(\mathfrak{g}_{nil}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}} = \{0\}$.

La troisième conjecture est plus subtile. Magdy Assem la pose en supposant que G est quasi-déployé et classique. Supposons plutôt, puisque ce seront nos hypothèses, que G est adjoint, quasi-déployé et absolument simple. Soit $\underline{\mathcal{O}} \in (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$, supposons que $\underline{\mathcal{O}}$ soit spéciale. Parce que G est quasi-déployé, l'ensemble $\underline{\mathcal{O}} \cap \mathfrak{g}(F)$ est non vide, cf. [19] théorème 4.2. Fixons un élément e de cet ensemble. Notons $Z_G(e)$ le commutant de e dans G, $Z_G(e)^0$ sa composante neutre et posons $A(e) = Z_G(e)/Z_G(e)^0$. Lusztig a défini un quotient $\bar{A}(e)$ de ce groupe, que l'on appelle comme il se doit le quotient de Lusztig. Il y a une application naturelle $d_e : H^1(\Gamma_F, Z_G(e)) \to H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$. L'ensemble des orbites $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$ telles que $\mathcal{O} \subset \underline{\mathcal{O}}$ s'identifie au noyau $H^1(\Gamma_F, Z_G(e))_1$ de l'application naturelle entre ensembles pointés $H^1(\Gamma_F, Z_G(e)) \to H^1(\Gamma_F, G)$. Pour un élément $h \in H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$, notons $E(\underline{\mathcal{O}}, h)$ l'ensemble des orbites $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$ telles que $\mathcal{O} \subset \underline{\mathcal{O}}$ et dont le paramètre dans $H^1(\Gamma_F, Z_G(e))_1$ appartient à $d_e^{-1}(h)$. Remarquons que cet ensemble peut a priori être vide puisqu'il n'est pas clair que l'application d_e soit surjective, ni a fortiori sa restriction à $H^1(\Gamma_F, Z_G(e))_1$. Notons $I(\mathfrak{g}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}},h}$ l'espace de distributions engendré par les intégrales orbitales $I_{\mathcal{O}}$ pour $\mathcal{O} \in E(\underline{\mathcal{O}}, h)$ et posons $SI(\mathfrak{g}_{nil}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}},h} = SI(\mathfrak{g}_{nil}(F))^* \cap I(\mathfrak{g}_{nil}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}},h}$. L'assertion que Magdy Assem pose comme conjecture dans le cas où G est classique est

(3) pour $h \in H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$ tel que $E(\underline{\mathcal{O}}, h) \neq \emptyset$, l'espace $SI(\mathfrak{g}_{nil}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}},h}$ est une droite ; l'espace $SI(\mathfrak{g}_{nil}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}}$ est la somme directe de ces droites.

Enonçons maintenant notre théorème. On suppose que G est adjoint, quasi-déployé et absolument simple. Supposons que p est "très grand" relativement à G, précisément que l'hypothèse $(Hyp)_2(p)$ de 2.1.2 est vérifiée. Cela signifie que $p \geq c_1 val_F(p) + c_2$, où c_1 et c_2 sont des entiers dépendant de G. On doit définir les "orbites exceptionnelles". Il n'y en a pas si G n'est pas de type E_7 ou E_8. Si G est de type E_7 ou E_8, on utilise la classification des éléments de $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ de [7] pages 403 à 407. On dit qu'une orbite $\underline{\mathcal{O}} \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$ est exceptionnelle dans les cas suivants :

G est de type E_7 et $\underline{\mathcal{O}}$ est de type $A_4 + A_1$;

G est de type E_8 et $\underline{\mathcal{O}}$ est de type $A_4 + A_1$ ou $E_6(a_1) + A_1$.

Théorème. *(i) Les assertions (1) et (2) ci-dessus sont vérifiées.*

(ii) Soit $\underline{\mathcal{O}} \in (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$, supposons que $\underline{\mathcal{O}}$ soit spéciale et fixons $e \in \mathfrak{g}(F) \cap \underline{\mathcal{O}}$. L'application d_e se restreint en une surjection $H^1(\Gamma_F, Z_G(e))_1 \to H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$. Supposons que $\underline{\mathcal{O}}$ ne soit pas exceptionnelle ou que 4 divise $q-1$. Alors la dimension de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}}$ est égale au nombre d'éléments de $H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$. Supposons que $\underline{\mathcal{O}}$ soit exceptionnelle et que 4 ne divise pas $q-1$. Alors la dimension de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}}$ est 2 tandis que le nombre d'éléments de $H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$ est 4.

Remarques. (4) Ces assertions sont déjà connues dans le cas des groupes classiques non ramifiés, c'est-à-dire déployés sur une extension non ramifiée, cf. [43] IX.16, ainsi que dans le cas où G est de type G_2, cf. [11].

(5) Dans le cas où $\underline{\mathcal{O}}$ est exceptionnelle et où 4 ne divise pas $q-1$, l'assertion (ii) interdit à (3) d'être vérifiée. Dans les autres cas, l'assertion (ii) ne démontre nullement (3) mais est évidemment compatible avec cette assertion.

(6) L'hypothèse que p est "très grand" n'est utilisée de façon essentielle qu'en un seul point, cf. 2.4.2. Elle assure une propriété que l'on a démontrée dans [47] dont la preuve utilise l'exponentielle. Il est probable qu'en utilisant les différents substituts de cette application, par exemple les quasi-logarithmes de Kazhdan et Varshavsky, on peut réduire la condition sur p à "p grand", c'est-à-dire $p \geq c$, où c est une constante dépendant de G (c'est par exemple l'hypothèse de [43]). Il est par contre certain que la démonstration ne marche pas pour p trop petit.

(7) L'hypothèse que G est quasi-déployé est restrictive. Par contre, celle qu'il est adjoint et absolument simple ne l'est guère. En général, l'espace $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ est isomorphe au même espace relatif au groupe adjoint G_{AD} de G. Un groupe adjoint G se décompose en produit de composantes simples et l'espace $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ est produit tensoriel des espaces analogues pour chaque composante. Enfin, si G est adjoint et simple, c'est la restriction à la Weil d'un groupe adjoint absolument simple G' défini sur une extension F' de F de degré fini et on se ramène aisément au groupe G' en changeant de corps de base.

Dans les deux paragraphes suivants, on explique la structure de la preuve.

1.2 L'espace $\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$

Posons quelques définitions dans une situation plus générale : G est un groupe réductif connexe défini sur F et on suppose que p est très grand relativement à G. Notons $\mathfrak{g}_{ell}(F)$ le sous-ensemble des éléments semi-simples réguliers et elliptiques de $\mathfrak{g}(F)$. On note $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace des éléments cuspidaux de $I(\mathfrak{g}(F))$, c'est-à-dire des $f \in I(\mathfrak{g}(F))$ telles que les intégrales orbitales $I^G(X, f)$ sont nulles pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$ qui est semi-simple régulier mais pas elliptique. On note $I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace des $f \in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ telles que les fonctions $X \mapsto I^G(X, f)$ soient constantes sur les classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}_{ell}(F)$.

On note G_{AD} le groupe adjoint de G et G_{SC} son revêtement simplement connexe. Introduisons l'immeuble de Bruhat-Tits $Imm(G_{AD})$ de G. Il se décompose en facettes, on note $S(G)$ l'ensemble des sommets. Pour $s \in S(G)$, on dispose du sous-groupe parahorique $K_s \subset G(F)$, de son plus grand sous-groupe distingué pro-p-unipotent K_s^+ et du groupe réductif connexe G_s défini sur $\mathbb{F}_q$ tel que $G_s(\mathbb{F}_q) = K_s/K_s^+$. Il y a des objets correspondants pour les algèbres de Lie : $\mathfrak{k}_s \subset \mathfrak{g}(F)$, $\mathfrak{k}_s^+ \subset \mathfrak{k}_s$ et l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_s$ de G_s. On introduit une transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ possédant les propriétés habituelles et telle que, pour tout $s \in S(G)$, on ait $\mathbf{1}_s = q^{dim(\mathfrak{g}_s)/2}\mathbf{1}_s^+$, où $\mathbf{1}_s$ et $\mathbf{1}_s^+$ sont les fonctions caractéristiques de $\mathfrak{k}_s$ et $\mathfrak{k}_s^+$. Cette transformation de Fourier se descend en une

transformation de l'espace $I(\mathfrak{g}(F))$. Notons $\mathfrak{g}_{tn}$ le sous-ensemble des éléments topologiquement nilpotents de $\mathfrak{g}$. On introduit le sous-espace $FC(\mathfrak{g}(F)) \subset I(\mathfrak{g}(F))$ formée des éléments $f \in I(\mathfrak{g}(F))$ tels que les intégrales orbitales $I^G(X, f)$ et $I^G(X, \hat{f})$ sont nulles pour tout $X \in \mathfrak{g}(F) - \mathfrak{g}_{tn}(F)$. L'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$ est contenu dans $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. On pose $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = FC(\mathfrak{g}(F)) \cap I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. On considère aussi l'espace $FC(\mathfrak{g}_{SC}(F))$. Le groupe $G(F)$ agit par conjugaison sur cet espace et on note $FC^G(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ le sous-espace des invariants. On a l'inclusion $FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F)) \subset FC^G(\mathfrak{g}_{SC}(F))$.

L'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$ se décrit de la façon suivante. Pour un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{F}_q$, Lusztig a défini la notion de faisceau-caractère cuspidal à support nilpotent dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathbf{G}$. Le groupe de Galois $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ de $\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q$ agit sur ces faisceaux. Notons $\mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g})$ le sous-ensemble des faisceaux invariants par cette action. Pour $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g})$, on peut munir $\mathcal{E}$ d'une action de Frobenius (c'est-à-dire que l'on fixe un isomorphisme entre $Fr^*(\mathcal{E})$ et $\mathcal{E}$, où $Fr \in \Gamma_{\mathbb{F}_q}$ est l'élément de Frobenius) et il s'en déduit une fonction caractéristique $f_{\mathcal{E}}$ sur $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$, qui est à support nilpotent. Soit $s \in S(G)$, supposons $Z(G_s)^0 = \{1\}$. Pour $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g}_s)$, on définit la fonction $f_{\mathcal{E}}$ sur $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q) = \mathfrak{k}_s/\mathfrak{k}_s^+$. On l'identifie à une fonction sur $\mathfrak{k}_s$ invariante par translations par $\mathfrak{k}_s^+$ et on l'étend à $\mathfrak{g}(F)$ tout entier par 0 hors de $\mathfrak{k}_s$. Notons $f^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{E}}$ la fonction obtenue. Alors $FC(\mathfrak{g}(F))$ est engendré par les images dans $I(\mathfrak{g}(F))$ de ces fonctions $f^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{E}}$ quand s décrit les sommets de $Imm(G_{AD})$ tels que $Z(G_s)^0 = \{1\}$ et $\mathcal{E}$ décrit $\mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g}_s)$. Dans la suite de cette introduction, on identifie un élément de $FC(\mathfrak{g}(F))$ à un relèvement dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ qui est combinaison linéaire de fonctions $f^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{E}}$. On a prouvé dans [48] que l'on pouvait définir un sous-ensemble $\underline{S}^{st}(G)$ de l'ensemble des sommets précédents et, pour tout $s \in \underline{S}^{st}(G)$, un sous-ensemble $\mathbf{FC}^{st}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g}_s) \subset \mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g}_s)$ de sorte que, quand s décrit $\underline{S}^{st}(G)$ et $\mathcal{E}$ décrit $\mathbf{FC}^{st}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g}_s)$, les images dans $I(\mathfrak{g}(F))$ des fonctions $f^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{E}}$ forment une base de $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

On introduit un certain espace $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$ et une application antilinéaire injective $D^G : \mathcal{D}(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*$. Pour cette introduction, décrivons seulement les éléments de l'image de D^G. Notons F^{nr} l'extension non ramifiée maximale de F. Notons $\mathcal{L}^{nr}_F$ l'ensemble des sous-groupes $H \subset G$ qui sont définis sur F et qui sont des F^{nr}-Levi, c'est-à-dire qu'il existe un sous-groupe parabolique P de G défini sur F^{nr} tel que H soit une composante de Levi de P. Soit $H \in \mathcal{L}^{nr}_F$. Fixons un élément $X_H \in \mathfrak{z}(H)(F)$ qui est entier et de réduction régulière. Cela signifie que pour tout caractère algébrique x^* de $Z(H)^0$ (identifié à une forme linéaire sur $\mathfrak{z}(H)$), $x^*(X_H)$ est un entier de $\bar{F}$ et que, pour toute racine α de $Z(H)^0$ dans $\mathfrak{g}$, $\alpha(X_H)$ est une unité. Soit $\varphi \in FC^H(\mathfrak{h}_{SC}(F))$. Introduisons la distribution $D^G_{X_H,\varphi}$ définie par

$$D^G_{X_H,\varphi}(f) = \int_{G(F)} \int_{\mathfrak{h}_{SC}(F)} f(g^{-1}(X_H + Z)g)\bar{\varphi}(Z)\, dZ\, dg$$

pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ (on note l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$ comme une conjugaison). Les mesures doivent être convenablement normalisées. L'intégrale ci-dessus converge dans l'ordre indiqué. Il s'avère que la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ de la transformation de Fourier $\hat{D}^G_{X_H,\varphi}$ ne dépend pas du choix de X_H. Notons $k(H, \varphi)$ la distribution à support dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ qui coïncide avec cette restriction. Alors $D^G(\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F)))$ est l'espace de distributions engendré par les $k(H, \varphi)$ quand H décrit $\mathcal{L}^{nr}_F$ et φ décrit $FC^H(\mathfrak{h}_{SC}(F))$.

On introduit le sous-espace $\mathcal{H} \subset C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ engendré par les fonctions f telles qu'il existe une sous-algèbre d'Iwahori $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}(F)$ de sorte que f soit invariante par translations par $\mathfrak{j}$. Notons $\mathcal{H}^*$ son dual. On dispose de l'application de restriction $res_{\mathcal{H}} : I(\mathfrak{g}(F))^* \to$

$\mathcal{H}^*$. Notons $\hat{D}^G(\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F)))$ l'espace des transformées de Fourier de $D^G(\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F)))$. En utilisant un résultat de DeBacker, cf. [8], on montre que les restrictions de $res_{\mathcal{H}}$ à $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ et à $\hat{D}^G(\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F)))$ sont injectives et ont même image. Il existe donc un unique isomorphisme (antilinéaire) $\delta : I(\mathfrak{g}(F))^* \to \mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$ de sorte que $res_{\mathcal{H}}(J) = res_{\mathcal{H}}(\hat{D}^G(\delta(J)))$ pour tout $J \in I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$. Notons $\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace des éléments $d \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$ tels que $D^G(d)$ est stable. On prouve facilement, cf. lemme 6.1.4, que

(1) $\delta(SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}) = \mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

Pour exploiter cette égalité, on doit décrire l'espace $\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Soient $H, H' \in \mathcal{L}^{nr}_F$. Disons que ces deux groupes sont stablement conjugués s'il existe $g \in G$ tel que $H' = g^{-1}Hg$ et, pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, $g\sigma(g)^{-1}$ appartient à H. Supposons que H et H' soient stablement conjugués et fixons g vérifiant les propriétés précédentes. Alors l'application $Ad(g^{-1})$ se restreint en un torseur intérieur $\psi : H \to H'$. Par une propriété basique de l'endoscopie, un tel torseur définit un isomorphisme $transfert_\psi : I^{st}_{cusp}(\mathfrak{h}(F)) \to I^{st}_{cusp}(\mathfrak{h}'(F))$. Une conséquence des résultats de [47] est que cet isomorphisme se restreint en un isomorphisme de $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ sur $FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F))$. On montre que celui-ci ne dépend pas du choix de l'élément g, on le note $\iota_{H',H}$. Notons $\mathcal{L}^{nr,st}_F$ l'ensemble des $H \in \mathcal{L}^{nr}_F$ tels que $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)) \neq \{0\}$. Il est conservé par conjugaison stable. Notons $\mathcal{L}^{nr,st}_F/st-conj$ l'ensemble des classes de conjugaison stable dans $\mathcal{L}^{nr,st}_F$. Soit $\mathcal{C} \in \mathcal{L}^{nr,st}_F/st-conj$. Fixons des représentants $(H_i)_{i=1,\dots,n}$ des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $\mathcal{C}$. Pour $\varphi \in FC^{st}(\mathfrak{h}_{1,SC}(F))$, posons

$$k^{st}(\mathcal{C},\varphi) = \sum_{i=1,\dots,n} |W^{nr}(H_i)^{\Gamma^{nr}_F}||W_F(H_i)|^{-1}k(H_i, \iota_{H_i,H_1}(\varphi)).$$

Les constantes sont des nombres d'éléments de groupes de Weyl qui seront définis plus tard. Dans cette formule, le groupe H_1 joue un rôle particulier mais c'est insignifiant, les espaces $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ étant canoniquement isomorphes pour $H \in \mathcal{C}$. Le résultat principal de la première section est que l'espace $\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est le sous-espace de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$ tel que $D^G(\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$ soit engendré par les distributions $k^{st}(\mathcal{C},\varphi)$ quand $\mathcal{C}$ décrit $\mathcal{L}^{nr,st}_F/st-conj$ et φ décrit $FC^{st}(\mathfrak{h}_{1,SC}(F))$ (H_1 étant un élément de $\mathcal{C}$). Plus précisément ces distributions forment une base de $D^G(\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$ si φ décrit seulement une base de $FC^{st}(\mathfrak{h}_{1,SC}(F))$.

Imposons désormais les hypothèses du théorème : G est quasi-déployé sur F, adjoint et absolument simple. Fixons une paire de Borel épinglée $\mathfrak{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G conservée par l'action de Γ_F (B est un sous-groupe de Borel, $T \subset B$ est un sous-tore maximal et $(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ est un épinglage). On note W le groupe de Weyl de G relatif à T. Le groupe Γ_F agit sur W, on note W^{I_F} le sous-groupe des invariants par le groupe d'inertie $I_F \subset \Gamma_F$. Notons $\mathcal{L}^{st}_{F,sd}$ l'ensemble des F-groupes de Levi standard M tels que $FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC}(F)) \neq \{0\}$. Pour un tel groupe, notons $Norm_{W^{I_F}}(M)$ le sous-groupe des éléments de W^{I_F} qui conservent M, W^{M,I_F} l'analogue de W^{I_F} quand on remplace G par M et $W^{I_F}(M) = Norm_{W^{I_F}}(M)/W^{M,I_F}$. Posons $\Gamma^{nr}_F = \Gamma_F/I_F$. Ce groupe est isomorphe au groupe de Galois $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ et est topologiquement engendré par l'élément de Frobenius Fr. Ce groupe Γ^{nr}_F agit sur $W^{I_F}(M)$. On dit que deux éléments $w, w' \in W^{I_F}(M)$ sont Fr-conjugués s'il existe $u \in W^{I_F}(M)$ tel que $w' = Fr(u)wu^{-1}$ (la définition usuelle est plutôt $uwFr(u)^{-1}$, des raisons techniques nous ont conduit à la modifier). On note $W^{I_F}(M)/Fr-conj$ l'ensemble des classes de Fr-conjugaison. On montre en 2.3.8 qu'il existe une bijection naturelle de $\mathcal{L}^{nr,st}_F/st-conj$ sur l'ensemble des paires $(M, Cl_{Fr}(w))$ où $M \in \mathcal{L}^{st}_{F,sd}$ et $Cl_{Fr}(w) \in W^{I_F}(M)/Fr-conj$. Plus précisément, soient $\mathcal{C} \in \mathcal{L}^{nr,st}_F/st-conj$, notons $(M, Cl_{Fr}(w))$ son image par cette bijection et soit $H \in \mathcal{C}$. Alors H est conjugué à M par un élément de $G(F^{nr})$, il y a une bijection naturelle

de $\underline{S}^{st}(H_{AD})$ sur $\underline{S}^{st}(M_{AD})$ et, pour tout $s_H \in \underline{S}^{st}(H_{AD})$, d'image s_M dans $\underline{S}^{st}(M_{AD})$, il y a une bijection naturelle de $\mathbf{FC}^{st}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{h}_{SC,s_H})$ sur $\mathbf{FC}^{st}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{m}_{SC,s_M})$. Cela entraîne que les espaces $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ et $FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC}(F))$ sont de même dimension. Mais cela ne suffit pas pour identifier ces espaces. En effet, les fonctions caractéristiques $f_{\mathcal{E}}$ introduites ci-dessus dépendent du choix d'une action de Frobenius sur le faisceau $\mathcal{E}$ et, à notre connaissance, il n'y a pas de choix canonique d'une telle action. Les groupes H et M sont isomorphes sur F^{nr} puisqu'ils sont conjugués par un élément de $G(F^{nr})$ mais l'isomorphisme n'est pas en général un torseur intérieur. Il n'y a pas de transfert endoscopique qui puisse nous aider. Le problème est résolu dans la section 4, qui est la plus technique de l'article. Soient H, s_H, M, s_M comme précédemment. Soit $\mathcal{E}_H \in \mathbf{FC}^{st}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{h}_{SC,s_H})$, notons $\mathcal{E}_M$ son image dans $\mathbf{FC}^{st}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{m}_{SC,s_M})$. Munissons $\mathcal{E}_M$ d'une action de Frobenius. On définit en 4.1.5 un procédé pour en déduire une action de Frobenius sur $\mathcal{E}_H$. On en déduit un isomorphisme canonique $\iota_{H,M} : FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$. On montre en 4.3.1 que cet isomorphisme est compatible au transfert endoscopique, c'est-à-dire que si $H' \in \mathcal{L}^{nr,st}_F$ est stablement conjugué à H, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)) \\ & \iota_{H,M} \nearrow & \\ FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC}(F)) & & \downarrow \iota_{H',H} \\ & \iota_{H',M} \searrow & \\ & & FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)) \end{array}$$

Soient $M \in \mathcal{L}^{st}_{F,sd}$ et $s_M \in \underline{S}^{st}(M_{AD})$. Pour tout $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{m}_{SC,s_M})$, on munit $\mathcal{E}$ d'une action de Frobenius. On note $\mathcal{B}(M, s_M)$ l'ensemble des fonctions caractéristiques $f_{\mathcal{E}}$ quand $\mathcal{E}$ décrit $\mathbf{FC}^{st}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{m}_{SC,s_M})$. Notons $\mathcal{B}_W(G)$ l'ensemble des quadruplets (M, s_M, φ, w) où M et s_M sont comme ci-dessus, $\varphi \in \mathcal{B}(M, s_M)$ et w parcourt $W^{I_F}(M)$ à Fr-conjugaison près. Considérons un tel quadruplet. Au couple (M, w) est associé une classe de conjugaison stable $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}^{nr,st}_F$. Fixons $H_1 \in \mathcal{C}$. Posons simplement $\varphi_{H_1} = \iota_{H_1,M}(\varphi^{\mathfrak{m}_{SC}})$. On a défini ci-dessus la distribution $k^{st}(\mathcal{C}, \varphi_{H_1})$. On pose $k(M, s_M, \varphi, w) = c(w)k^{st}(\mathcal{C}, \varphi_{H_1})$, où $c(w)$ est une constante non nulle qui sera définie dans l'article. Alors la famille $(k(M, s_M, \varphi, w))_{(M,s_M,\varphi,w)\in\mathcal{B}_W(G)}$ est une base de l'espace $D^G(\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F)))$. Soit $M \in \mathcal{L}^{st}_{F,sd}$. Notons $Irr(W^{I_F}(M))$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de $W^{I_F}(M)$. Le groupe Γ^{nr}_F agit sur $W^{I_F}(M)$ donc sur $Irr(W^{I_F}(M))$. On note $Irr_F(W^{I_F}(M))$ le sous-ensemble des points fixes. Pour $\rho \in Irr_F(W^{I_F}(M))$, on peut prolonger ρ en une représentation irréductible du produit semi-direct $W^{I_F}(M) \rtimes \Gamma^{nr}_F$ et on fixe un tel prolongement $\rho^\flat$. On note $\mathcal{B}_{Irr}(G)$ l'ensemble des quadruplets (M, s_M, φ, ρ) où M et s_M sont comme ci-dessus, $\varphi \in \mathcal{B}(M, s_M)$ et $\rho \in Irr_F(W^{I_F}(M))$. Pour un tel quadruplet, on pose

$$k(M, s_M, \varphi, \rho) = |W^{I_F}(M)|^{-1} \sum_{w\in W^{I_F}(M)} trace(\rho^\flat(wFr^{-1})k(M, s_M, \varphi, w).$$

Alors

(2) la famille $(k(M, s_M, \varphi, \rho))_{(M,s_M,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}_{Irr}(G)}$ est encore une base de l'espace $D^G(\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F)))$.

Pour $(M, s_M, \varphi, \rho) \in \mathcal{B}_{Irr}(G)$, notons $I(M, s_M, \varphi, \rho)$ l'élément de $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ tel que $D^G \circ \delta(I(M, s_M, \varphi, \rho)) = k(M, s_M, \varphi, \rho)$. D'après (1) et (2), $(I(M, s_M, \varphi, \rho))_{(M,s_M,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}_{Irr}(G)}$ est une base de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$. Pour en déduire le théorème, on a besoin de renseignements sur l'écriture d'une distribution $I(M, s_M, \varphi, \rho)$ dans la base $(I_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O}\in\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj}$ de $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$.

1.3 Paramétrages

Pour cela, on doit commencer par paramétrer l'ensemble $\mathcal{B}_{Irr}(G)$. Introduisons l'extension modérément ramifiée maximale F^{mod} de F contenue dans $\bar{F}$. Notons Γ_F^{mod}, resp. I_F^{mod}, le groupe de Galois de F^{mod}/F, resp. F^{mod}/F^{nr}. Modulo certains choix, on peut identifier Γ_F^{mod} au produit semi-direct $I_F^{mod} \rtimes \Gamma_F^{nr}$. On a fixé un épinglage $\mathfrak{E}$ de G conservé par Γ_F. On en déduit de façon usuelle une "donnée de racines", c'est-à-dire un sextuplet $(X^*(T), X_*(T), \Sigma, \check{\Sigma}, \Delta, \check{\Delta})$ (Σ est l'ensemble des racines de T dans $\mathfrak{g}$, $\check{\Sigma}$ l'ensemble des coracines etc...). Le groupe Γ_F agit sur cette donnée et l'hypothèse sur p assure que cette action se factorise en une action de Γ_F^{mod}. En particulier, puisqu'on a identifié $\Gamma_F^{nr} \simeq \Gamma_{\mathbb{F}_q}$ à un sous-groupe de Γ_F^{mod}, il y a une action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ sur la donnée de racines. On peut alors introduire un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{F}_q$ dont la donnée de racines est isomorphe à celle de G, cet isomorphisme étant équivariant pour les actions de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ (si G est déployé sur F, $\mathbf{G}$ est simplement le groupe adjoint simple et déployé sur $\mathbb{F}_q$ de même type que G). L'action de I_F^{mod} sur la donnée de racines définit une action algébrique de I_F^{mod} sur $\mathbf{G}$. Remarquons que cette action n'est pas forcément définie sur $\mathbb{F}_q$. D'autre part, on connaît la structure de I_F^{mod}. On peut fixer un pro-générateur γ de ce groupe et l'action de I_F^{mod} est déterminée par l'unique automorphisme associé à γ.

Comme plus haut, on note $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ l'ensemble des orbites nilpotentes dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\bar{\mathbb{F}}_q)$ de $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{N}$ de $\mathfrak{g}_{nil}/conj$, auquel on imposera quelques conditions techniques. Le groupe Γ_F agit sur $\mathfrak{g}$ et donc sur $\mathfrak{g}_{nil}/conj$. On note $\mathcal{N}(\Gamma_F)$ le sous-ensemble des éléments $N \in \mathcal{N}$ dont l'orbite est conservée par Γ_F (on peut imposer qu'un élément de $\mathcal{N}(\Gamma_F)$ est fixé par $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ mais on ne peut pas toujours imposer qu'il l'est par I_F^{mod}). Soit $N \in \mathcal{N}(\Gamma_F)$. On définit comme plus haut les groupes $Z_{\mathbf{G}}(N)$, $Z_{\mathbf{G}}(N)^0$, $A(N) = Z_{\mathbf{G}}(N)/Z_{\mathbf{G}}(N)^0$ et le quotient de Lusztig $\bar{A}(N)$. Le groupe I_F^{mod} agit sur $\mathbf{G}$ via un quotient fini que l'on note $\Gamma_{F^G/F^{nr}}$. En général, ce quotient est d'ordre 1 ou 2 mais il peut être d'ordre 3 dans le cas où G est un groupe trialitaire de type D_4. Introduisons le produit semi-direct $\mathbf{G} \rtimes \Gamma_{F^G/F^{nr}}$ et son sous-ensemble $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \times \{\gamma\}$ (où on note encore γ l'image dans $\Gamma_{F^G/F^{nr}}$ du pro-générateur fixé de I_F^{mod}). On note $Z_{\tilde{\mathbf{G}}}(N)$ le sous-ensemble des éléments $(g, \gamma) \in \tilde{\mathbf{G}}$ telles que $g\gamma(N)g^{-1} = N$. Le groupe $Z_{\mathbf{G}}(N)$ agit sur cet ensemble par multiplication à gauche ou à droite et $Z_{\tilde{\mathbf{G}}}(N)$ est un bitorseur pour ces actions, c'est-à-dire que, pour chacune d'elle, $Z_{\tilde{\mathbf{G}}}(N)$ est un espace principal homogène sous $Z_{\mathbf{G}}(N)$. On pose $\tilde{A}(N) = Z_{\mathbf{G}}(N)^0 \backslash Z_{\tilde{\mathbf{G}}}(N)$. Les actions de $Z_{\mathbf{G}}(N)$ se quotientent en des actions de $A(N)$ sur $\tilde{A}(N)$ et $\tilde{A}(N)$ est un bitorseur pour ces actions. On montrera qu'on peut quotienter en $\tilde{A}(N)$ en un ensemble $\tilde{\bar{A}}(N)$ qui est un bitorseur pour des actions à droite et à gauche du groupe $\bar{A}(N)$. Notons $\mathcal{M}(G, N)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $\bar{A}(N)$ de couples (d, μ) où $d \in \tilde{\bar{A}}(N)$ et μ est une représentation irréductible du commutant $Z_{\bar{A}(N)}(d)$ de d dans $\bar{A}(N)$. Notons $\mathcal{N}_{sp}$ le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{N}$ dont l'orbite est spéciale et posons $\mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F) = \mathcal{N}_{sp} \cap \mathcal{N}(\Gamma_F)$. Notons enfin $\mathcal{M}_F(G)$ l'ensemble des triplets (N, d, μ) tels que $N \in \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$ et $(d, \mu) \in \mathcal{M}(G, N)$ (on note un élément de $\mathcal{M}(G, N)$ par un couple le représentant). En 6.2.1, nous définirons une application injective

$$\boldsymbol{\nabla}_F : \mathcal{B}_{Irr}(G) \to \mathcal{M}_F(G).$$

Indiquons l'origine de cette définition. Supposons que G soit déployé. L'action de γ sur $\mathbf{G}$ est triviale, on peut l'oublier et supprimer les $\tilde{}$ dans les définitions ci-dessus. On a aussi $\mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F) = \mathcal{N}_{sp}$. Dans [32] théorème 2.4, Lusztig établit une bijection $\nabla : \mathcal{A}(\mathbf{G}) \to \mathcal{M}_F(G)$, où $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ est l'ensemble des faisceaux-caractères unipotents sur $\mathbf{G}$. On

sait décrire l'ensemble $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ en décomposant les complexes induits à partir de faisceaux-caractères unipotents et cuspidaux sur des groupes de Levi standard de $\mathbf{G}$. Un tel groupe $\mathbf{M}$ correspond à un groupe de Levi standard M de G. On sait décrire les faisceaux-caractères unipotents et cuspidaux sur $\mathbf{M}$. Les descriptions de [47] paragraphe 9 montrent qu'il y a une injection naturelle qui, à un couple (s_M, φ) associe un tel faisceau-caractère unipotent et cuspidal sur $\mathbf{M}$, (s_M, φ) parcourant les couples ci-dessus, c'est-à-dire $s_M \in \underline{S}^{st}(M_{AD})$ et $\varphi \in \mathcal{B}(M, s_M)$. Cette injection est bijective si G est classique ou si $q-1$ est divisible par 3.4.5. On en déduit facilement une injection naturelle de $\mathcal{B}_{Irr}(G)$ dans $\mathcal{A}(\mathbf{G})$. Alors $\boldsymbol{\nabla}_F$ est la composée de cette injection et de la bijection ∇ de Lusztig. Cette construction se généralise au cas où G est déployé sur F^{nr}. Dans le cas où G n'est pas déployé sur F^{nr}, on donnera une autre définition de $\boldsymbol{\nabla}_F$. Il est possible qu'elle se rattache à une analogue de la bijection ∇ pour le groupe non connexe $\mathbf{G} \rtimes \Gamma_{F^G/F^{nr}}$. Mais nous avons préféré utiliser des moyens plus terre-à-terre.

Pour calculer l'écriture d'une distribution appartenant à $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ dans la base $(I_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O}\in\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj}$, on doit introduire une famille de fonctions dans $I(\mathfrak{g}(F))$ qui séparent les éléments de la base. La construction d'une telle famille est connue, cf. [43] IX pour les groupes classiques non ramifiés et [11] pour un groupe de type G_2. Notons $\mathcal{J}^*_F$ l'ensemble des couples $(s, \mathcal{O}_s)$ où $s \in S(G)$ et $\mathcal{O}_s \in \mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)/conj$ (avec une notation compréhensible). Dans [9], DeBacker associe à $(s, \mathcal{O}_s) \in \mathcal{J}^*_F$ une orbite $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$, qui est caractérisée de la façon suivante. Rappelons que $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q) = \mathfrak{k}_s/\mathfrak{k}_s^+$, il y a donc une application de réduction $\mathfrak{k}_s \to \mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$. Considérons l'ensemble $E(s, \mathcal{O}_s)$ des $e \in \mathfrak{k}_s \cap \mathfrak{g}_{nil}(F)$ dont la réduction appartient à $\mathcal{O}_s$. Alors $\mathcal{O}$ est la plus petite orbite nilpotente dans $\mathfrak{g}_{nil}(F)$ qui coupe $E(s, \mathcal{O}_s)$. C'est-à-dire que $\mathcal{O} \cap E(s, \mathcal{O}_s) \neq \emptyset$ et, si $\mathcal{O}' \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$ vérifie $\mathcal{O}' \cap E(s, \mathcal{O}_s) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{O}$ est contenue dans l'adhérence de $\mathcal{O}'$ pour la topologie p-adique. A l'aide de la théorie des $\mathfrak{sl}(2)$-triplets, on associe à $(s, \mathcal{O}_s)$ une fonction $h_{s,\mathcal{O}_s} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, à support dans $\mathfrak{k}_s$ et invariante par translations par $\mathfrak{k}_s^+$, qui vérifie les propriétés suivantes :

$h_{s,\mathcal{O}_s} \in \mathcal{H}$;

soit $\mathcal{O}' \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$, supposons que $I_{\mathcal{O}'}(h_{s,\mathcal{O}_s}) \neq 0$; alors $\mathcal{O}$ est contenue dans l'adhérence de $\mathcal{O}'$;

$I_{\mathcal{O}}(h_{s,\mathcal{O}_s}) = 1$.

Pour tout $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$, il existe au moins un couple $(s, \mathcal{O}_s) \in \mathcal{J}^*_F$ qui s'envoie sur $\mathcal{O}$ par l'application de DeBacker. La famille $(h_{s,\mathcal{O}_s})_{(s,\mathcal{O}_s)\in\mathcal{J}^*_F}$ sépare donc la famille de distributions $(I_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O}\in\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj}$.

Pour $N \in \mathcal{N}(\Gamma_F)$, notons $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $\bar{A}(N)$ dans l'ensemble des couples $(d, v) \in \tilde{\bar{A}}(N) \times \bar{A}(N)$ tels que $vdv^{-1} = d^q$ (cette définition doit être modifiée dans le cas d'un groupe trialitaire de type D_4). Notons $\bar{\mathcal{C}}_F$ l'ensemble des triplets (N, d, v) où $N \in \mathcal{N}(\Gamma_F)$ et $(d, v) \in \bar{\mathcal{C}}_F(N)$ (comme plus haut, un élément de $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$ est noté comme un couple le représentant). Dans 3.2.6, nous définirons une application surjective $\bar{c}_F : \mathcal{J}^*_F \to \bar{\mathcal{C}}_F$. La première composante de cette application se définit facilement. Soit $(s, \mathcal{O}_s) \in \mathcal{J}^*_F$. On lui a associé une orbite $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$. Cette orbite est contenue dans une orbite sur la clôture algébrique $\bar{F}$ de F. Notons $\underline{\mathcal{O}} \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$ cette dernière orbite. Il y a une bijection naturelle entre $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ et $\mathfrak{g}_{nil}/conj$: les deux groupes G et $\mathbf{G}$ sont de même type, l'un sur $\bar{F}$, l'autre sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, et on sait que la classification des orbites nilpotentes ne dépend pas du corps de base, pourvu que celui-ci soit algébriquement clos de caractéristique nulle ou positive et assez grande. Ainsi, à $\underline{\mathcal{O}}$ correspond une orbite dans $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ dont on note N le représentant dans $\mathcal{N}$. Alors $N \in \mathcal{N}(\Gamma_F)$ et $\bar{c}_F(s, \mathcal{O}_s) \in \bar{\mathcal{C}}_F(N)$. Les deux autres composantes de $\bar{c}_F(s, \mathcal{O}_s)$

sont reliées à l'ensemble de cohomologie $H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$, où e est un élément de $\mathcal{O}$. On montrera d'ailleurs que cet ensemble est en bijection naturelle avec $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$.

Ces paramétrages nous permettent d'énoncer le calcul clé de l'article. Soient $(M, s_M, \varphi, \rho) \in \mathcal{B}_{Irr}(G)$ et $(s, \mathcal{O}_s) \in \mathcal{J}_F^*$. Posons $\boldsymbol{\nabla}_F(M, s_M, \varphi, \rho) = (N, d, \mu)$ et $\bar{c}_F(s, \mathcal{O}_s) = (N', d', v')$. On note $d(N)$ et $d(N')$ les dimensions des orbites de N et N'. On note $\hat{k}(M, s_M, \varphi, \rho)$ la transformée de Fourier de $k(M, s_M, \varphi, \rho)$. On a alors (cf. 6.3.1) :

(1)(i) si $\hat{k}(M, s_M, \varphi, \rho)(h_{s,\mathcal{O}_s}) \neq 0$, alors ou bien $d_{N'} < d_N$, ou bien $N = N'$ et d et d' sont conjugués par $\bar{A}(N)$ dans $\tilde{\bar{A}}(N)$;

(ii) si $(N, d) = (N', d')$, $\hat{k}(M, s_M, \varphi, \rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})$ est non nul et s'exprime par une formule explicite.

Pour démontrer ce résultat, on se ramène à un calcul dans l'espace $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$ et on utilise de façon essentielle les constructions de Lusztig (correspondance de Springer généralisée, fonctions de Green etc...), en particulier les résultats de [30].

Soit $(M, s_M, \varphi, \rho) \in \mathcal{B}_{Irr}(G)$. Ecrivons $I(M, s_M, \varphi, \rho)$ dans la base $(I_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj}$:

$$I(M, s_M, \varphi, \rho) = \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj} c(M, s_M, \varphi, \rho, \mathcal{O}) I_{\mathcal{O}}.$$

On a expliqué ci-dessus qu'à une orbite $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$, on pouvait associer un élément de $\mathcal{N}$ que l'on note $N_{\mathcal{O}}$. A l'aide de (1)(i), on montre que

(2) soit $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$, supposons $c(M, s_M, \varphi, \rho, \mathcal{O}) \neq 0$; alors $d(N_{\mathcal{O}}) < d(N)$ ou $N_{\mathcal{O}} = N$.

Posons alors

$$I^{max}(M, s_M, \varphi, \rho) = \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj, N_{\mathcal{O}} = N} c(M, s_M, \varphi, \rho, \mathcal{O}) I_{\mathcal{O}}.$$

C'est la somme des termes "maximaux" de la décomposition de $I(M, s_M, \varphi, \rho)$. En utilisant l'homogénéité des intégrales orbitales nilpotentes, on vérifie que la stabilité de $I(M, s_M, \varphi, \rho)$ entraîne celle de $I^{max}(M, s_M, \varphi, \rho)$. En utilisant de nouveau (1)(i) et maintenant (1)(ii), on prouve que $(I^{max}(M, s_M, \varphi, \rho))_{(M, s_M, \varphi, \rho) \in \mathcal{B}_{Irr}(G)}$ est une base de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$. La première assertion du théorème s'en déduit. En effet, une distribution $I^{max}(M, s_M, \varphi, \rho)$ est portée par une unique orbite $\underline{\mathcal{O}} \in (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$ et celle-ci est spéciale : si l'on écrit $\boldsymbol{\nabla}_F(M, s_M, \varphi, \rho) = (N, d, \mu)$, $\underline{\mathcal{O}}$ est l'orbite dans $\mathfrak{g}_{nil}$ qui correspond à l'orbite de N dans $\mathfrak{g}_{nil}$ par la bijection évoquée plus haut.

Soit $\underline{\mathcal{O}} \in (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$, supposons que cette orbite est spéciale et notons N l'élément de $\mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$ qui lui correspond. Notons $\mathcal{M}_F(G, N)$ le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{M}_F(G)$ qui sont de la forme (N, d, μ), c'est-à-dire dont la première composante est N. D'après le résultat ci-dessus, la dimension de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}}$ est égale au nombre d'éléments de $Im(\boldsymbol{\nabla}_F) \cap \mathcal{M}_F(G, N)$, où $Im(\boldsymbol{\nabla}_F)$ est l'image de l'application $\boldsymbol{\nabla}_F$. Pour $e \in \mathfrak{g}(F) \cap \underline{\mathcal{O}}$, on a dit ci-dessus que $H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$ a même nombre d'éléments que $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$. L'assertion (ii) du théorème dit qu'hormis les cas particuliers indiqués, les ensembles $Im(\boldsymbol{\nabla}_F) \cap \mathcal{M}_F(G, N)$ et $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$ ont même nombre d'éléments. Si G est classique ou si $q-1$ est divisible par 3.4.5, l'application $\boldsymbol{\nabla}_F$ est surjective et les deux ensembles sont d'une nature combinatoire simple. Le calcul est alors facile. Si G est exceptionnel et $q-1$ n'est pas divisible par 3.4.5, $\boldsymbol{\nabla}_F$ n'est plus surjective. Cela vient du fait qu'il y a des couples (M, s_M) avec $M \in \mathcal{L}^{st}_{F,sd}$ et $s_M \in \underline{S}^{st}(M_{AD})$ pour lesquels certains éléments de $\mathbf{FC}^{st}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{m}_{SC,s_M})$ "disparaissent" : les faisceaux-caractères existent bien mais ne sont plus invariants par l'action de Frobenius. Du côté de $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$, la situation est aussi différente du cas où $q-1$

est assez divisible à cause de l'égalité $vdv^{-1} = d^q$ qui intervient dans la définition de cet ensemble : cette égalité équivaut à $vdv^{-1} = d$ si $q-1$ est assez divisible mais ne l'est pas en général. On montre qu'hormis les cas particuliers indiqués dans l'assertion (ii) du théorème, ces modifications se compensent et que les ensembles $Im(\boldsymbol{\nabla}_F) \cap \mathcal{M}_F(G,N)$ et $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$ ont encore même nombre d'éléments. Ce n'est toutefois pas le cas si $\underline{\mathcal{O}}$ est exceptionnelle et que $q-1$ n'est pas divisible par 4. Ce point est un peu mystérieux mais on peut dire pour se rassurer qu'il est habituel dans la théorie des groupes finis que ces orbites exceptionnelles créent des perturbations.

Comme on le voit, cet article doit beaucoup aux travaux de Lusztig. Je remercie celui-ci pour les explications qu'il m'a fournies.

2 L'espace $\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$

2.1 Immeubles

2.1.1 Notations

Soit F un corps local non-archimédien de caractéristique nulle. On note $\mathbb{F}_q$ le corps résiduel de F, q étant son nombre d'éléments, p la caractéristique de $\mathbb{F}_q$, $\mathfrak{o}_F$ l'anneau d'entiers de F et $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal. On fixe des clôtures algébriques $\bar{F}$ de F et $\bar{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$. Toutes les extensions algébriques de F, resp. $\mathbb{F}_q$, que l'on considérera seront supposées incluses dans $\bar{F}$, resp. $\bar{\mathbb{F}}_q$. On note val_F la valuation usuelle de F et on la prolonge à $\bar{F}$ en une valuation à valeurs dans $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. On note $|.|_F$ la valeur absolue usuelle de F, que l'on prolonge aussi à $\bar{F}$.

On note $\mathbb{N}_{>0}$ l'ensemble des entiers strictement positifs.

Considérons un groupe G agissant sur un ensemble U. Pour $u \in U$, on note $Z_G(u)$ le fixateur de u dans G. Pour un sous-ensemble $V \subset U$, on note $Norm_G(V)$ le stabilisateur de V dans G.

Pour tout groupe abélien R, on note $R^\vee = Hom(R, \mathbb{C}^\times)$ son groupe des caractères. Soit k un corps. Pour tout espace vectoriel V sur k, on note V^* son dual. Pour tout $\mathbb{Z}$-module R, on note $R_k = R \otimes_{\mathbb{Z}} k$.

Soit k une extension algébrique de F ou $\mathbb{F}_q$. On note Γ_k le groupe de Galois de $\bar{k}/k$. Pour toute extension galoisienne k' de k, on note $\Gamma_{k'/k}$ le groupe de Galois de k'/k. On note F^{nr} l'extension non ramifiée maximale de F. Son corps résiduel s'identifie à $\bar{\mathbb{F}}_q$. On note I_F le sous-groupe d'inertie de Γ_F, c'est-à-dire le groupe $\Gamma_{F^{nr}}$. On pose simplement $\Gamma_F^{nr} = \Gamma_{F^{nr}/F} \simeq \Gamma_{\mathbb{F}_q}$. On note Fr l'élément de Frobenius de l'un ou l'autre de ces deux groupes.

Pour tout groupe algébrique H défini sur k, on note H^0 sa composante neutre et $Z(H)$ son centre. Pour tout tore T défini sur k, on note $X_*(T)$, resp. $X^*(T)$, son groupe de cocaractères algébriques, resp. caractères algébriques, définis sur $\bar{k}$.

Soit G un groupe réductif connexe défini sur k. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, G_{AD} le groupe adjoint et G_{SC} le revêtement simplement connexe de G_{AD}. On note $\underline{\pi} : G \to G_{AD}$ la projection naturelle. Pour un sous-groupe algébrique H de G, on note $H_{ad} = \underline{\pi}(H)$ son image dans G_{AD} et H_{sc} l'image réciproque de H_{ad} dans G_{SC}. On identifie G à $G(\bar{k})$. Ce groupe et beaucoup d'objets qui lui sont reliés sont alors munis d'une action de Γ_k que l'on note $\sigma \mapsto \sigma_G$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement $\sigma = \sigma_G$. Pour $g \in G$, on note $Ad(g)$ la conjugaison par g dans G ou l'action adjointe de g dans $\mathfrak{g}$. On

notera aussi ces actions $x \mapsto gxg^{-1}$ ou $X \mapsto gXg^{-1}$. On note $\mathfrak{g}_{reg}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_{nil}$ l'ensemble des éléments nilpotents. Pour $x \in G$, resp. $X \in \mathfrak{g}$, on note G_x, resp. G_X, la composante neutre de $Z_G(x)$, resp. $Z_G(X)$. Pour tout sous-groupe parabolique P de G, on note U_P son radical unipotent. Un Levi de G est un sous-groupe de G qui est la composante de Levi d'un sous-groupe parabolique de G. La notion de Levi "sur k" est ambigüe, précisons-la. Nous dirons qu'un sous-groupe $M \subset G$ est un Levi défini sur k si M est un Levi et qu'il est défini sur k. Nous dirons que c'est un k-Levi si M est défini sur k et qu'il existe un sous-groupe parabolique P de G défini sur k tel que M soit une composante de Levi de P. On appelle paire parabolique un couple (P, M) tel que P soit un sous-groupe parabolique de G et M une composante de Levi de P. Si P est un sous-groupe de Borel, on parlera d'une paire de Borel. On dit que la paire est définie sur k si P et M le sont. Fixons une paire parabolique (P, M) définie sur k et minimale, c'est-à-dire minimale parmi les paires paraboliques définies sur k. On appelle alors sous-groupe parabolique standard un sous-groupe parabolique Q tel que $P \subset Q$ et Levi standard une composante de Levi L contenant M d'un sous-groupe parabolique standard. Si L est un Levi standard, alors L est défini sur k si et seulement si c'est un k-Levi (le groupe parabolique standard Q associé à L est unique et est donc conservé par Γ_k si L l'est). Pour un Levi M de G, on pose $W(M) = Norm_G(M)/M$.

Fixons une paire de Borel (B, T) de G. On note Σ l'ensemble des racines de T dans $\mathfrak{g}$ et Δ le sous-ensemble de racines simples. A toute racine α est associée une sous-algèbre radicielle $\mathfrak{u}_\alpha$. Pour toute $\alpha \in \Delta$, fixons un élément non nul $E_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$. Le triplet $(B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ est appelé un épinglage de G. On dit qu'il est défini sur k si (B, T) l'est et que l'action de Γ_k permute les éléments E_α pour $\alpha \in \Delta$. A tout Levi M de G contenant T est associé un sous-ensemble $\Sigma^M \subset \Sigma$. Si M est standard, il lui est associé un sous-ensemble $\Delta^M \subset \Delta$ qui est une base de Σ^M. On utilise pour le système de racines Σ les notations usuelles : à toute racine $\alpha \in \Sigma$ est associée une coracine $\check{\alpha} \in X_*(T_{sc})$, que l'on peut identifier à un élément de $\mathfrak{t}_{sc} = X_*(T_{sc}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{k}$; on note $\check{\Delta} = \{\check{\alpha}, \alpha \in \Delta\}$; à toute racine simple $\alpha \in \Delta$ est associé un poids $\varpi_\alpha \in X^*(T_{sc})$ et un copoids $\check{\varpi}_\alpha \in X_*(T_{ad})$. On note $W(T)$ ou simplement W le groupe de Weyl relatif à T, c'est-à-dire $W = Norm_G(T)/T$. Le groupe W agit naturellement sur l'ensemble des Levi de G contenant T. Pour un tel Levi M, on note $Norm_W(M)$ le groupe des $w \in W$ tel que $w(M) = M$. On a alors $W(M) = Norm_W(M)/W^M$. Supposons que G_{SC} soit absolument quasi-simple. On utilise alors pour le système de racines de G les notations de Bourbaki [6] p. 250-275, en particulier la numérotation des éléments de Δ.

On note A_G le plus grand sous-tore de $Z(G)$ qui soit déployé sur k et on pose $\mathcal{A}_G = X_{*,\mathbb{R}}(A_G) = X_*(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On note $\mathfrak{g}_{ell}(k)$ le sous-ensemble des éléments elliptiques de $\mathfrak{g}_{reg}(k)$, c'est-à-dire des $X \in \mathfrak{g}_{reg}(k)$ tels que $A_{G_X} = A_G$. Si $k \subset F^{nr}$, on note A_G^{nr} le plus grand sous-tore de $Z(G)$ qui soit déployé sur F^{nr} et on pose $\mathcal{A}_G^{nr} = X_*(A_G^{nr}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

On note $Aut(G)$ le groupe d'automorphismes algébriques de G. Il contient le groupe d'automorphismes intérieurs, lequel s'identifie à G_{AD}. On pose $Out(G) = Aut(G)/G_{AD}$.

2.1.2 Les hypothèses sur p

Dans chaque paragraphe de l'article, il est donné un groupe réductif connexe G sur une extension algébrique k de F ou de $\mathbb{F}_q$. Notons $rg(G)$ le rang de G sur $\bar{k}$ et $h(G)$ le plus grand nombre de Coxeter des composantes irréductibles de G sur $\bar{k}$. On impose toujours l'hypothèse

$(Hyp)_1(p) : p \geq sup(3h(G), rg(G) + 2, 5)$.

Dans les paragraphes 2.2.6 à 2.4.15 et dans la section 6, le groupe G est défini sur une extension de F et on impose l'hypothèse plus forte

$(Hyp)_2(p)$: $p \geq 5$ et il existe un entier $N \geq 1$ tel qu'il existe un plongement défini sur F de G dans $GL(N)$ et que $p \geq (2 + val_F(p))N$.

Signalons quelques conséquences de ces hypothèses. Supposons que G soit défini sur $\bar{\mathbb{F}}_q$. L'hypothèse $(Hyp)_1(p)$ implique que l'exponentielle est définie sur les éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$, cf. [7] proposition 5.5.5. Précisément, soit $X \in \mathfrak{g}$ un élément nilpotent. Notons $ad(X)$ l'application $Y \mapsto [X, Y]$ de $\mathfrak{g}$ dans lui-même. Alors on a $ad(X)^p = 0$ et il existe un unique homomorphisme algébrique

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbb{F}}_q & \to & G_{SC} \\ t & \mapsto & exp(tX) \end{array}$$

tel que, pour tout $t \in \bar{\mathbb{F}}_q$, on ait l'égalité

$$Ad(exp(tX)) = \sum_{i=0,\ldots,p-1} \frac{t^i ad(X)^i}{i!}.$$

Supposons que G soit défini sur F. L'hypothèse $(Hyp)_1(p)$ implique que G est déployé sur une extension galoisienne finie modérément ramifiée de F. L'hypothèse $(Hyp)_2(p)$ implique que l'exponentielle (qui est bien définie en caractéristique nulle) se restreint en un isomorphisme de l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents de $\mathfrak{g}(F)$ sur l'ensemble des éléments topologiquement unipotents de $G(F)$, cf. [12] lemme B.0.3.

2.1.3 Forme intérieure quasi-déployée

Pour la suite de la section, sauf mention explicite du contraire, G est un groupe réductif connexe défini sur F.

Introduisons la forme intérieure quasi-déployée G^* de G et fixons un torseur intérieur $\psi : G \to G^*$ sur $\bar{F}$. On introduit le cocycle $u_G : \Gamma_F \to G_{AD}$ de sorte que $\psi(\sigma_G(g)) = u_G(\sigma)\sigma_{G^*}(\psi(g))u_G(\sigma)^{-1}$ pour tous $\sigma \in \Gamma_F$ et $g \in G$. Fixons une paire parabolique (P_{min}, M_{min}) de G définie sur F et minimale et fixons une paire de Borel (B^*, T^*) de G^* définie sur F. Quitte à composer ψ avec un automorphisme intérieur de G^*, on suppose que $(\psi(P_{min}), \psi(M_{min}))$ est standard. On note cette paire (P^*_{min}, M^*_{min}). On sait que cette dernière paire est uniquement déterminée (elle ne dépend pas de l'automorphisme intérieur choisi), qu'elle est définie sur F et que u_G (ou plutôt sa classe) provient d'un élément de $H^1(\Gamma_F, M^*_{min,ad})$. Comme on le sait, l'inflation $H^1(\Gamma_F^{nr}, M^*_{min,ad}) \to H^1(\Gamma_F, M^*_{min,ad})$ est bijective. On peut donc supposer que u_G se factorise en une application de Γ_F^{nr} dans $M^*_{min,ad}$. Alors ψ est un isomorphisme défini sur F^{nr}. Le groupe M^*_{min} possède la propriété suivante :

(1) soit $w \in W^{\Gamma_F}$, supposons que $w(M^*_{min})$ soit un Levi standard ; alors $w(M^*_{min}) = W^*_{min}$.

C'est une conséquence du fait que toutes les paires paraboliques de G définies sur F et minimales sont conjuguées.

On dit qu'un F-Levi M^* de G^* se transfère à G si et seulement si $\psi^{-1}(M^*)$ est conjugué à un F-Levi de G. Montrons que

(2) un F-Levi standard M^* de G^* se transfère à G si et seulement si M^* contient M^*_{min}.

Notons P^* le sous-groupe parabolique standard de composante de Levi M^*. Supposons $M^*_{min} \subset M^*$. Parce que u_G prend ses valeurs dans M^*_{min}, on vérifie que la paire

$(\psi^{-1}(P^*), \psi^{-1}(M^*))$ de G est définie sur F, donc $\psi^{-1}(M^*)$ est un F-Levi de G. Inversement, supposons que $\psi^{-1}(M^*)$ soit conjugué à un F-Levi de G. Alors il est conjugué à un F-Levi standard L. Posons $L^* = \psi(L)$. C'est un Levi standard de G^* qui contient M^*_{min}. Pour la même raison que ci-dessus, puisque L est un F-Levi, L^* est aussi un F-Levi. Puisque $\psi^{-1}(M^*)$ est conjugué à L, M^* est conjugué à L^*. Les deux groupes M^* et L^* sont des F-Levi conjugués. D'après [39] théorème A, ils sont conjugués par un élément de $G(F)$. Soit $g \in G(F)$ tel que $gL^*g^{-1} = M^*$. Le groupe $gM^*_{min}g^{-1}$ est un F-Levi de M^*. Quitte à multiplier g à gauche par un élément de $M^*(F)$, on peut supposer que $gM^*_{min}g^{-1}$ est un F-Levi standard. Le groupe gT^*g^{-1} est un F-Levi minimal de gM^*g^{-1}. Quitte à multiplier g à gauche par un élément de $gM^*_{min}(F)g^{-1}$, on peut supposer que $gT^*g^{-1} = T^*$. Donc g définit un élément $w \in W^{\Gamma_F}$ tel que $M^* = w(L^*)$. D'après (1), on a $w(M^*_{min}) = M^*_{min}$. Puisque $M^*_{min} \subset L^*$, cela entraîne que $M^*_{min} \subset M^*$. Cela prouve (2).

2.1.4 Immeubles de Bruhat-Tits

On note $Imm(G_{AD})$ l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe adjoint G_{AD} sur F. Le groupe $G(F)$, et plus généralement le groupe $G_{AD}(F)$, agissent sur cet immeuble. D'autre part, celui-ci est décomposé en facettes. On note $Fac(G)$ l'ensemble des facettes et $S(G) \subset Fac(G)$ l'ensemble des sommets. Pour tout $\mathcal{F} \in Fac(G)$, on note $\bar{\mathcal{F}}$ son adhérence et $S(\bar{\mathcal{F}})$ l'ensemble des sommets appartenant à $\bar{\mathcal{F}}$. On note $K^\dagger_{\mathcal{F}}$ le stabilisateur de $\mathcal{F}$ dans $G(F)$, $K^0_{\mathcal{F}} \subset K^\dagger_{\mathcal{F}}$ le sous-groupe parahorique, $K^+_{\mathcal{F}}$ son plus grand sous-groupe distingué pro-p-unipotent et $G_{\mathcal{F}}$ le groupe réductif connexe sur $\mathbb{F}_q$ défini par Bruhat et Tits tel que $K^0_{\mathcal{F}}/K^+_{\mathcal{F}} \simeq G_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. Il y a des objets correspondants dans l'algèbre de Lie : $\mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{k}_{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{g}(F)$, avec $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}} \simeq \mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. Pour $x \in Imm(G_{AD})$, on pose $K^0_x = K^0_{\mathcal{F}}$, $\mathfrak{k}_x = \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ etc... où $\mathcal{F}$ est la facette à laquelle appartient x. On ajoute des indices AD, resp. SC, pour les mêmes objets relatifs au groupe G_{AD}, resp. G_{SC} : $K^\dagger_{\mathcal{F},AD}$ etc...

On considérera aussi l'immeuble de G_{AD} sur des extensions algébriques K de F. On ajoutera alors la lettre K dans la notation : $Imm_K(G_{AD})$, $S_K(G)$ etc... Si K/F est galoisienne, le groupe $\Gamma_{K/F}$ agit sur $Imm_K(G_{AD})$ et, si K/F est modérément ramifiée, $Imm(G_{AD})$ s'identifie à l'ensemble des points fixes par $\Gamma_{K/F}$ dans $Imm_K(G_{AD})$. Une facette $\mathcal{F}$ de $Imm(G_{AD})$ ne reste pas une facette de $Imm_K(G_{AD})$ mais est incluse dans une unique facette $\mathcal{F}_K$ de cet immeuble et on pose simplement $K^0_{\mathcal{F},K} = K^0_{\mathcal{F}_K,K}$, etc... Si $K = F^{nr}$, on simplifiera certaines notations en remplaçant F^{nr} par un exposant ^{nr}, par exemple on notera et $\mathcal{F}^{nr} = \mathcal{F}_{F^{nr}}$ $K^{0,nr}_{\mathcal{F}} = K^0_{\mathcal{F}^{nr},F^{nr}}$.

Notons $\mathcal{T}_{max}$ l'ensemble des sous-tores de G définis et déployés sur F maximaux (c'est-à-dire maximaux parmi les sous-tores définis et déployés sur F). Notons de même $\mathcal{T}^{nr}_{max}$ l'ensemble des sous-tores de G définis et déployés sur F^{nr} maximaux. A $S \in \mathcal{T}_{max}$ est associé un appartement $App(S) \subset Imm(G_{AD})$. C'est un espace affine sous le groupe $\mathcal{A}_S/\mathcal{A}_G$. De même, soit F' une extension galoisienne de F modérément ramifiée et soit $T \in \mathcal{T}_{F',max}$. A T est associé un appartement $App_{F'}(T) \subset Imm_{F'}(G_{AD})$. Supposons que $S \subset T$ et que T soit défini sur F. Alors $App(S)$ est l'ensemble des points fixes par $\Gamma_{F'/F}$ dans $App_{F'}(T)$, cf. [42] 2.6.1. Rappelons que, pour tout $S \in \mathcal{T}_{max}$, il existe un tore $T \in \mathcal{T}^{nr}_{max}$ tel que $S \subset T$ et que T soit défini sur F, cf. [42] 1.10.

Pour tout $x \in Imm(G_{AD})$ et tout réel $r \in \mathbb{R}$, resp. tel que $r \geq 0$, Moy et Prasad ont défini un $\mathfrak{o}_F$-réseau $\mathfrak{k}_{x,r} \subset \mathfrak{g}(F)$, resp. un sous-groupe $K_{x,r} \subset G(F)$. L'application $r \mapsto \mathfrak{k}_{x,r}$, resp. $r \mapsto K_{x,r}$, est décroissante et on pose $\mathfrak{k}_{x,r+} = \cup_{r'>r}\mathfrak{k}_{x,r'}$, resp. $K_{x,r+} = \cup_{r'>r}K_{x,r'}$. En particulier $\mathfrak{k}_{x,0} = \mathfrak{k}_x$ et $\mathfrak{k}_{x,0+} = \mathfrak{k}^+_x$, resp. $K_{x,0} = K^0_x$, $K_{x,0+} = K^+_x$. Pour $X \in \mathfrak{g}(F)$, on dit que X est entier, resp. topologiquement nilpotent, si et seulement s'il

existe $x \in Imm(G_{AD})$ tel que $X \in \mathfrak{k}_{x,0}$, resp. $X \in \mathfrak{k}_{x,0+}$. On note $\mathfrak{g}_{ent}(F)$, resp. $\mathfrak{g}_{tn}(F)$, le sous-ensemble des éléments entiers, resp. topologiquement nilpotents.

Soit $x \in Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$. En général, on a $G_{SC,x} \neq G_{x,SC}$ et même $\mathfrak{g}_{SC,x} \neq \mathfrak{g}_{x,SC}$: $G_{x,SC}$ s'identifie au revêtement simplement connexe du groupe dérivé de $G_{SC,x}$. On a toutefois

(1) si x est un sommet de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$, alors $\mathfrak{g}_{SC,x} = \mathfrak{g}_{x,SC}$.

En effet, si x est un sommet de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$, $Z(G_{SC,x})^0$ est trivial et $G_{x,SC}$ est un revêtement de $G_{SC,x}$.

2.1.5 Immeubles et F^{nr}-Levi

Soit H un F^{nr}-Levi de G. Remarquons que l'ensemble des tores $T \in \mathcal{T}_{max}^{nr}$ tels que $T \subset H$ est égal à l'analogue $\mathcal{T}_{max}^{H,nr}$ pour H de l'ensemble $\mathcal{T}_{max}^{nr}$. On note $Imm_{F^{nr}}^{G}(H_{ad})$ la réunion des appartements $App_{F^{nr}}(T)$ dans $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ sur cet ensemble de sous-tores. Il y a une projection naturelle $p_H : Imm_{F^{nr}}^{G}(H_{ad}) \to Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$. Pour un sous-tore $T \subset H$ appartenant à $\mathcal{T}_{max}^{nr}$, on a

(1) $p_H^{-1}(App_{F^{nr}}^{H}(T)) = App_{F^{nr}}(T)$,

où $App_{F^{nr}}^{H}(T)$ est l'appartement associé à T dans $Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$.

Supposons que H soit défini sur F. L'ensemble $Imm_{F^{nr}}^{G}(H_{ad})$ est stable par l'action de Γ_F^{nr}. On note $Imm^G(H_{ad})$ l'ensemble des points fixes. Il s'identifie comme ensemble à l'immeuble étendu de H_{ad} mais il faut prendre garde que les décompositions en facettes ne sont pas les mêmes. La projection p_H est équivariante pour les actions de Γ_F^{nr}, on note encore $p_H : Imm^G(H_{ad}) \to Imm(H_{AD})$ sa restriction, qui est encore surjective. L'ensemble $Imm^G(H_{ad})$ est une réunion de facettes de $Imm(G_{AD})$ et, pour toute telle facette $\mathcal{F} \subset Imm^G(H_{ad})$, $p_H(\mathcal{F})$ est incluse dans une facette de $Imm(H_{AD})$ que l'on note $\mathcal{F}_H$. La décomposition de $Imm^G(H_{ad})$ est pour nous induite par celle de $Imm(G_{AD})$. Pour $x \in Imm^G(H_{ad})$, on a

(2) $\mathfrak{k}_{p_H(x)}^{H} = \mathfrak{k}_x \cap \mathfrak{h}(F)$; plus généralement, $\mathfrak{k}_{p_H(x),r}^{H} = \mathfrak{k}_{x,r} \cap \mathfrak{h}(F)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$;

(3) $K_{p_H(x)}^{H,0} = K_x^0 \cap H(F)$.

Soit F' une extension galoisienne finie de F, modérément ramifiée. Montrons que

(4) $Imm^G(H_{ad}) = (Imm_{F'}^{G}(H_{ad}))^{\Gamma_{F'/F}}$.

Il suffit de prouver que $Imm_{F^{nr}}^{G}(H_{ad}) = (Imm_{F'^{nr}}^{G}(H_{ad}))^{\Gamma_{F'^{nr}/F^{nr}}}$. Le membre de gauche est clairement inclus dans celui de droite. Soit $x \in (Imm_{F'^{nr}}^{G}(H_{ad}))^{\Gamma_{F'^{nr}/F^{nr}}}$. La projection $p_H : Imm_{F'^{nr}}^{G}(H_{ad}) \to Imm_{F'^{nr}}(H_{AD})$ est équivariante pour les actions galoisiennes. Donc $p_H(x)$ appartient à $Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$. Fixons un tore $T \in \mathcal{T}_{max}^{H,nr}$ tel que $p_H(x) \in App_{F^{nr}}^{H}(T)$. Le commutant $Z_H(T)$ est un tore. Notons T' le plus grand sous-tore déployé sur F'^{nr} de $Z_H(T)$. On a aussi $p_H(x) \in App_{F'^{nr}}^{H}(T')$. En appliquant (1), on a $x \in App_{F'^{nr}}(T')$. Mais, par hypothèse, x est fixé par $\Gamma_{F'^{nr}/F^{nr}}$. Donc $x \in App_{F'^{nr}}(T')^{\Gamma_{F'^{nr}/F^{nr}}} = App_{F^{nr}}(T)$. Cela prouve que x appartient à $Imm_{F^{nr}}^{G}(H_{ad})$, d'où (4).

Supposons que H soit un F-Levi de G. Dans ce cas

(5) $Imm^G(H_{ad})$ est la réunion des appartements $App(S)$ de $Imm(G_{AD})$ pour les sous-tores S de H qui appartiennent à $\mathcal{T}_{max}$.

La preuve est similaire à celle de (4). Soit $x \in Imm^G(H_{ad})$. Alors $p_H(x) \in Imm(H_{AD})$. Fixons un sous-tore S de H défini et déployé sur F, maximal, de sorte que $p_H(x) \in App^H(S)$. Fixons un tore $T \in \mathcal{T}_{max}^{H,nr}$ qui contient S et est défini sur F. Alors $p_H(x) \in App_{F^{nr}}^{H}(T)$. En appliquant (1), x appartient à $App_{F^{nr}}(T)$. Parce que H est un F-Levi, S

est encore déployé maximal dans G. Alors $App_{F^{nr}}(T)^{\Gamma_F^{nr}} = App(S)$. Le point x appartient à cet ensemble, ce qui prouve (5).

Remarquons que l'espace $\mathcal{A}_H/\mathcal{A}_G$ agit naturellement sur $Imm^G(H_{ad})$ et que la projection p_H n'est autre que la projection sur l'espace des orbites pour cette action. Dans le cas où H est elliptique, c'est-à-dire $A_H = A_G$, p_H est un isomorphisme. En conséquence :

(6) supposons H elliptique, soit s un sommet de $Imm(H_{AD})$; alors $p_H^{-1}(s)$ est un sommet de $Imm^G(H_{ad})$.

Cela résulte du fait que la décomposition en facettes de $Imm^G(H_{ad})$ est plus fine que celle de $Imm(H_{AD})$.

2.1.6 F^{nr}-Levi et groupes en réduction

Soient $T \in \mathcal{T}_{max}^{nr}$ et $x \in App_{F^{nr}}(T) \subset Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$. Du tore T se déduit un sous-tore maximal T_x de G_x. On a $X_*(T) \simeq X_*(T_x)$ et il y a une bijection $T' \mapsto T'_x$ entre les sous-tores de T et ceux de T_x : $X_*(T'_x)$ correspond à $X_*(T')$ par l'isomorphisme précédent.

Remarque. Les mêmes définitions et propriétés valent si l'on considère une facette $\mathcal{F} \subset App_{F^{nr}}(T)$. Par exemple, du tore T se déduit un tore maximal $T_{\mathcal{F}}$ de $G_{\mathcal{F}}$.

Soit H un F^{nr}-Levi de G. Considérons un tore $T \in \mathcal{T}_{max}^{H,nr}$, un point $x \in App_{F^{nr}}(T) \subset Imm_{F^{nr}}^G(H_{ad})$ et sa projection $x_H = p_H(x) \in App_{F^{nr}}^H(T) \subset Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$. On a $A_H^{nr} \subset T$ et de A_H^{nr} se déduit un sous-tore $A_{H,x}^{nr}$ de T_x. Notons H_x l'image dans G_x de $K_x^{0,nr} \cap H(F^{nr})$. Alors H_x s'identifie au groupe H_{x_H} associé au point x_H de $Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$. Le tore $A_{H,x}^{nr}$ est contenu dans $Z(H_x)^0$. Montrons que

(1) H_x est le commutant de $A_{H,x}^{nr}$ dans G_x ; on a l'égalité $A_{H,x}^{nr} = Z(H_x)^0$ si et seulement si x_H est un sommet de $Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$.

Notons Σ^{nr} l'ensemble des racines de T dans $\mathfrak{g}$ et Σ_x celui des racines de T_x dans $\mathfrak{g}_x$. Par l'isomorphisme $X^*(T) \simeq X^*(T_x)$, Σ_x s'identifie à un sous-ensemble $\Sigma^{nr}(G_x) \subset \Sigma^{nr}$, notons plus précisément $\beta \mapsto \beta^G$ cette bijection. Notons $\Sigma_x^{H_x}$, resp. resp. $\Sigma^{nr,H}$, l'ensemble des racines de T_x dans H_x, resp. de T dans H. Pour $\beta \in \Sigma_x$, on a $\beta \in \Sigma_x^{H_x}$ si et seulement si $\beta^G \in \Sigma^{nr,H}$, c'est-à-dire si et seulement si $\beta^G = 1$ sur A_H^{nr}. Cette condition équivaut à $\beta = 1$ sur $A_{H,x}^{nr}$, c'est-à-dire β intervient dans le commutant de $A_{H,x}^{nr}$. Cela démontre la première assertion. Le point x_H est un sommet de $Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$ si et seulement si $Z(H_{x_H})^0$ et A_H^{nr} ont même dimension. Cela entraîne la seconde assertion.

Soit H un F-Levi de G. Considérons un tore $S \in \mathcal{T}_{max}^H$, un point $x \in App(S) \subset Imm^G(H_{ad})$ et sa projection $x_H = p_H(x) \in App^H(S) \subset Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$. De A_H se déduit un sous-tore $A_{H,x}$ de S_x. On a

(2) H_x est le commutant de $A_{H,x}$ dans G_x ; $A_{H,x}$ est le plus grand sous-tore de $Z(H_x)^0$ déployé sur $\mathbb{F}_q$ si et seulement si x_H est un sommet de $Imm(H_{AD})$.

On fixe un tore $T \in \mathcal{T}_{max}^{H,nr}$ contenant S et défini sur F et on reprend les notations précédentes. Parce que H est un F-Levi, c'est le commutant de A_H dans G. Une racine $\beta \in \Sigma^{nr}$ vaut donc 1 sur A_H si et seulement si elle vaut 1 sur A_H^{nr}. Par la correspondance $\beta \mapsto \beta^G$, on en déduit qu'une racine $\beta \in \Sigma_x$ vaut 1 sur $A_{H,x}$ si et seulement si elle vaut 1 sur $A_{H,x}^{nr}$. Les commutants dans G_x de $A_{H,x}$ et $A_{H,x}^{nr}$ sont donc égaux. En appliquant (1), on en déduit la première assertion de (2). Le tore $A_{H,x}$ est en tout cas un sous-tore de $Z(H_x)^0$ déployé sur $\mathbb{F}_q$. C'est le plus grand tel sous-tore si et seulement si ce plus grand sous-tore a la même dimension que $A_{H,x}$, ou encore que A_H. Mais cette condition équivaut à ce que x_H soit un sommet de $Imm(H_{AD})$. Cela démontre (2).

Soient $T \in \mathcal{T}_{max}^{nr}$ et $x \in App_{F^{nr}}(T) \subset Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$. Considérons un $\bar{\mathbb{F}}_q$-Levi $\bar{H}$ de G_x et supposons que $Z(\bar{H})^0 \subset T_x$. Introduisons le sous-tore $T_{\bar{H}} \subset T$ tel que $T_{\bar{H},x} =$

$Z(\bar{H})^0$. Notons H la composante neutre du commutant de $T_{\bar{H}}$ dans G. C'est un F^{nr}-Levi contenant T donc $x \in Imm^G_{F^{nr}}(H_{ad})$. Posons $x_H = p_H(x)$. Alors

(3) x_H est un sommet de $Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$; on a $A^{nr}_H = T_{\bar{H}}$ et $H_x = \bar{H}$.

Le même calcul que dans la preuve de (1) montre que H_x et $\bar{H}$ ont mêmes ensembles de racines donc sont égaux. Par construction, $T_{\bar{H}}$ est un sous-tore déployé sur F^{nr} de $Z(H)^0$. Donc $T_{\bar{H}} \subset A^{nr}_H$ et, par réduction, $Z(\bar{H})^0 \subset A^{nr}_{H,x}$. Mais $A^{nr}_{H,x}$ est central dans $H_x = \bar{H}$, d'où $A^{nr}_{H,x} \subset Z(\bar{H})^0$. Ces deux tores sont donc égaux, d'où $A^{nr}_H = T_{\bar{H}}$. Puisque $A^{nr}_{H,x} = Z(\bar{H})^0 = Z(H_x)^0$, x_H est un sommet de $Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$ d'après (1).

Remarque. Soient $S \in \mathcal{T}_{max}$, $T \in \mathcal{T}^{nr}_{max}$, supposons que $S \subset T$ et que T soit défini sur F. Soit $x \in App(S) \subset Imm(G_{AD})$ et soit $\bar{H}$ soit un $\mathbb{F}_q$-Levi de G_x tel que $Z(\bar{H})^0 \subset T_x$. Notons $\bar{S}$ le plus grand sous-tore de $Z(\bar{H})^0$ déployé sur $\mathbb{F}_q$. On a $\bar{S} \subset S_x$ et on peut introduire le sous-tore $S_{\bar{H}} \subset S$ tel que $S_{\bar{H},x} = \bar{S}$. On prendra garde qu'en général, les commutants de $T_{\bar{H}}$ et de $S_{\bar{H}}$ ne sont pas égaux.

2.1.7 Description d'un appartement et d'une alcôve

Supposons d'abord G quasi-déployé. On fixe une paire de Borel épinglée $\mathfrak{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ conservée par Γ_F. L'ensemble Δ plus les relations de produit scalaire entre les racines forme le diagramme de Dynkin $\mathcal{D}$ de G. Si G est absolument quasi-simple, on note α_0 l'opposée de la plus grande racine dans Σ et on pose $\Delta_a = \{\alpha_0\} \cup \Delta$. L'ensemble Δ_a plus les relations de produit scalaire entre les racines forme le diagramme de Dynkin étendu $\mathcal{D}_a$ de G. En général, l'ensemble Δ, resp. le diagramme $\mathcal{D}$, se décompose en union d'ensembles Δ', resp. de diagrammes $\mathcal{D}'$, analogues associés aux composantes quasi-simples de G_{SC} sur $\bar{F}$. On pose $\Delta_a = \cup\Delta'_a$, $\mathcal{D}_a = \cup\mathcal{D}'_a$, la réunion portant sur les composantes quasi-simples de G_{SC}. On note $Aut(\mathcal{D})$ et $Aut(\mathcal{D}_a)$ les groupes d'automorphismes des diagrammes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_a$.

On prolonge l'épinglage en une famille de Chevalley $(\dot{E}_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$. On entend par là que

$\dot{E}_\alpha$ est un élément non nul de $\mathfrak{u}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Sigma$;

pour $\alpha \in \Delta$, $\dot{E}_\alpha = E_\alpha$;

pour $\alpha, \alpha' \in \Sigma$ tels que $\alpha + \alpha' \in \Sigma$, $[\dot{E}_\alpha, \dot{E}_{\alpha'}] = r(\alpha, \alpha')\dot{E}_{\alpha+\alpha'}$, où $r(\alpha, \alpha') \in \mathbb{Z}$ est non nul et premier à p ;

$[\dot{E}_\alpha, \dot{E}_{-\alpha}] = \check{\alpha}$.

Cette famille détermine un unique point $s_0 \in Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ de sorte que $\mathfrak{k}^{nr}_{s_0}$ soit l'ensemble des points fixes par I_F dans le $\mathfrak{o}_{\bar{F}}$-réseau engendré par les éléments de la famille et par $X_*(T) \subset \mathfrak{t}$. On note T^{nr} le plus grand sous-tore de T déployé sur F^{nr}. On a $X_*(T^{nr}) = X_*(T)^{I_F}$. On note C^{nr} l'alcôve de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ qui vérifie les conditions suivantes : elle est contenue dans l'appartement $App_{F^{nr}}(T^{nr})$ associé à T^{nr}, s_0 appartient à la clôture de C^{nr} et $\mathfrak{k}^{nr}_{C^{nr}} \cap \mathfrak{b}(F^{nr}) = \mathfrak{k}^{nr}_{s_0} \cap \mathfrak{b}(F^{nr})$. Le point s_0 est fixé par l'action galoisienne de Γ^{nr}_F et l'alcôve C^{nr} est conservée par cette action. A l'alcôve C^{nr} est associé un ensemble de racines affines : les annulateurs de ces racines affines sont les murs de l'alcôve et elles sont positives sur celle-ci. Notons Δ^{nr}_a l'ensemble de racines sous-jacent à cet ensemble de racines affines. Ce sont des formes linéaires sur $X_*(T)^{I_F} = X_*(T^{nr})$. Cet ensemble de racines Δ^{nr}_a plus les relations de produit scalaire entre elles forment un diagramme $\mathcal{D}^{nr}_a$. Si $\mathcal{D}^{nr}_a$ est connexe, les éléments de $S(\bar{C}^{nr})$ correspondent aux éléments de Δ^{nr}_a. On note $\beta \mapsto s_\beta$ cette bijection. Pour toute facette $\mathcal{F}$ de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ contenue dans $\bar{C}^{nr}$, le groupe $G_{\mathcal{F}}$ est muni d'une paire de Borel $(B_{\mathcal{F}}, T_{\mathcal{F}})$: $B_{\mathcal{F}}$, resp. $T_{\mathcal{F}}$, est l'image par réduction de $B(F^{nr}) \cap K^{0,nr}_{\mathcal{F}}$, resp. $T(F^{nr}) \cap K^{0,nr}_{\mathcal{F}}$. Notons que $B_{\mathcal{F}}$, resp. $T_{\mathcal{F}}$, est aussi l'image de $K^{0,nr}_{C^{nr}}$, resp. $T^{nr}(\mathfrak{o}_{F^{nr}}) \subset K^{0,nr}_{\mathcal{F}}$.

Posons $N^{nr} = K^{\dagger,nr}_{C^{nr},AD} \cap Norm_{G_{AD}(F^{nr})}(T)$, $N^{nr}_0 = K^{0,nr}_{C^{nr},AD} \cap Norm_{G_{AD}(F^{nr})}(T)$ et $\bar{N}^{nr} = N^{nr}/N^{nr}_0 \simeq K^{\dagger,nr}_{C^{nr},AD}/K^{0,nr}_{C^{nr},AD}$. D'après [14] lemme 14, on a $\bar{N}^{nr} \simeq (Z(\hat{G}_{SC})^{I_F})^\vee$, en particulier, c'est un groupe abélien. On sait que $H^1(\Gamma_F, G_{AD}) \simeq H^1(\Gamma^{nr}_F, \bar{N}^{nr})$ (cf. [44] p. 441) et ce dernier groupe n'est autre que le quotient $\bar{N}^{nr}_{\Gamma^{nr}_F}$ de $\bar{N}^{nr}$ par le sous-groupe des $Fr(n)n^{-1}$ pour $n \in \bar{N}^{nr}$. Remarquons que $\bar{N}^{nr}_{\Gamma^{nr}_F}$ est aussi égal à $(Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F})^\vee$ et on retrouve l'isomorphisme de Kottwitz $H^1(\Gamma_F, G_{AD}) \simeq (Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F})^\vee$, cf. [20] théorème 1.2.

Supprimons l'hypothèse que G est quasi-déployé. Comme en 2.1.3, on fixe une forme quasi-déployée G^* de G, un torseur intérieur $\psi : G \to G^*$ et le cocycle associé u_G. On effectue les constructions précédentes pour ce groupe G^* (on ajoute si besoin est des exposants $*$). Au cocycle u_G est associé un élément de $\bar{N}^{nr,*}_{\Gamma^{nr}_F}$. Relevons ce dernier en un élément de $\bar{N}^{nr,*}$. On peut ensuite relever celui-ci en un élément $n_G \in N^{nr,*}$ de sorte que n_G se prolonge en un cocycle de Γ^{nr}_F dans $G^*_{AD}(F^{nr})$, c'est-à-dire un cocycle $\underline{n}_G$ tel que $\underline{n}_G(Fr) = n_G$. On note encore $\underline{n}_G$ le cocycle de Γ_F dans $G^*(F^{nr})$ obtenu par inflation. On peut alors supposer que $G(F^{nr}) = G^*(F^{nr})$, que ψ est l'identité et que l'on a les égalités d'actions galoisiennes $\sigma_G(g) = \underline{n}_G(\sigma)\sigma_{G^*}(g)\underline{n}_G(\sigma)^{-1}$ pour tous $g \in G(F^{nr})$ et $\sigma \in \Gamma_F$. Le tore T est conservé par cette action. Remarquons que T^{nr} est encore le plus grand sous-tore de T déployé sur F^{nr} puisque les deux actions sur G et G^* coïncident sur I_F. On note S le plus grand sous-tore de T déployé sur F pour l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$. Le groupe Γ^{nr}_F agit sur $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ par $(\sigma, x) \mapsto \underline{n}_G(\sigma) \circ \sigma(x)$ et $Imm(G_{AD})$ est le sous-ensemble des points fixes. L'alcôve C^{nr} est conservée par l'action galoisienne. On note C son sous-ensemble de points fixes. C'est une alcôve de $Imm(G_{AD})$, qui appartient à l'appartement $App(S)$ associé à S. L'ensemble $S(\bar{C})$ des sommets contenus dans l'adhérence de C s'identifie à celui des orbites de l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ de Γ^{nr}_F dans $S(\bar{C}^{nr})$.

Remarque. On a décrit deux conditions de représenter la classe de cocycle u_G : ci-dessus, on la représente par un cocycle qui conserve C^{nr} ; en 2.1.3, on l'a représentée par un cocycle qui conserve M^*_{min}. Ces deux représentations ne sont en général pas compatibles.

2.1.8 Un lemme sur les épinglages

Pour ce paragraphe, on modifie nos hypothèses en posant $k = \bar{F}$ ou $k = \bar{\mathbb{F}}_q$ et en supposant que G est un groupe réductif connexe défini sur k. On suppose que G est adjoint et simple.

On fixe une paire de Borel épinglée $\mathfrak{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G. Notons α_0 l'opposée de la plus grande racine dans Σ et posons $\Delta_a = \Delta \cup \{\alpha_0\}$. Il existe une unique relation linéaire

(1) $\sum_{\alpha\in\Delta_a} d(\alpha)\alpha = 0$

avec $d(\alpha_0) = 1$. On a $d(\alpha) \in \mathbb{N}_{>0}$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Fixons un élément non nul E_{α_0} de $\mathfrak{u}_{\alpha_0}$. Appelons épinglage affine la famille $\mathfrak{E}_a = (T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta_a})$. Pour $\alpha \in \Delta_a$, on note $E_{-\alpha}$ l'unique élément de $\mathfrak{u}_{-\alpha}$ tel que $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \check{\alpha}$. On note Ω le sous-groupe des éléments de W dont l'action sur Σ conserve Δ_a. Il s'identifie à un sous-groupe de $Aut(\mathcal{D}_a)$. D'après [6] VI.2.3, on a

(2) Ω est abélien ; l'application $\omega \mapsto \omega(\alpha_0)$ est une bijection de Ω sur le sous-ensemble des $\alpha \in \Delta_a$ telles que $d(\alpha) = 1$; on a l'égalité $Aut(\mathcal{D}_a) = \Omega \rtimes Aut(\mathcal{D})$.

Montrons que

(3) pour $\omega \in \Omega$ et $\alpha \in \Delta_a$, on a $d(\omega(\alpha)) = d(\alpha)$.

En appliquant ω^{-1} à la relation (2), on obtient

$$\sum_{\alpha\in\Delta_a} d(\omega(\alpha))\alpha = 0.$$

Cette relation est proportionnelle à (1). Puisque, dans les deux relations, le plus petit coefficient vaut 1, le coefficient de proportionnalité ne peut qu'être égal à 1. D'où (3).

Notons $\mathbf{\Omega}$ le sous-groupe des éléments de G qui conservent $\mathfrak{E}_a$ (en particulier qui normalisent T).

Proposition. *L'application naturelle $\mathbf{\Omega} \to \Omega$ est bijective.*

Preuve. Rappelons d'abord que de notre épinglage $\mathfrak{E}$ se déduit une section $S : W \to G$. Pour tout $\alpha \in \Sigma$, notons w_α la symétrie élémentaire associée à α, qui est un élément de W. Par définition, $S(w_\alpha) = exp(E_\alpha)exp(-E_{-\alpha})exp(E_\alpha)$ pour $\alpha \in \Delta$. D'autre part, pour deux éléments $w_1, w_2 \in W$, on a l'égalité

(4) $S(w_1w_2) = t(w_1, w_2)S(w_1)S(w_2)$,

où

$$t(w_1, w_2) = \prod_{\alpha\in\Sigma,\alpha>0,w_1^{-1}(\alpha)<0,w_2^{-1}w_1^{-1}(\alpha)>0} \check{\alpha}(-1),$$

cf. [22] lemme 2.1.A. Bien sûr, la notion de positivité est relative au Borel B. Remarquons qu'en fait, on peut définir la section S comme à valeurs dans G_{SC} et que les relations précédentes restent vraies dans ce groupe G_{SC}. On a aussi

(5) soient $\alpha, \beta \in \Delta$ et $u \in W$; supposons $u(\alpha) = \beta$; alors $S(u)(E_\alpha) = E_\beta$.

C'est bien connu, rappelons brièvement l'argument. On peut se placer pour un instant dans G_{SC}. On a en tout cas $S(u)(E_\alpha) = \lambda E_\beta$ pour un $\lambda \in \bar{F}^\times$. Les définitions de $S(w_\alpha)$ et $S(w_\beta)$ entraînent que $S(u)S(w_\alpha)S(u)^{-1} = \check{\beta}(\lambda)S(w_\beta)$. Pour démontrer que $\lambda = 1$, il suffit de prouver que $S(u)S(w_\alpha) = S(w_\beta)S(u)$. A l'aide de (4), on voit que les deux membres sont égaux à $S(uw_\alpha)$. Cela prouve (5).

L'application de l'énoncé est évidemment injective (un élément de G qui conserve T et fixe E_α pour tout $\alpha \in \Delta_a$, et même seulement $\alpha \in \Delta$, est l'élément neutre puisque G est adjoint). D'après (2), il nous suffit de fixer $\beta \in \Delta$ tel que $d(\beta) = 1$ et de construire un élément $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{\Omega}$ tel que $\boldsymbol{\omega}(\beta) = \alpha_0$. En tout cas, l'élément $\omega \in \Omega$ qui envoie β sur α_0 se construit de la façon suivante, cf. [6] VI.2.3 proposition 6. Notons Σ^β le sous-système de racines de Σ engendré par $\Delta - \{\beta\}$ et W^β son groupe de Weyl. Notons w_0 l'élément de plus grande longueur de W et w^β celui de W^β. Alors $\omega = w_0w^\beta$. L'image de E_β par $S(\omega)$ est de la forme $\lambda^{-1}E_0$ pour un $\lambda \in k^\times$. Posons $\boldsymbol{\omega} = S(\omega)\check{\varpi}_\beta(\lambda)$. Alors $\boldsymbol{\omega}$ est un élément de $Norm_G(T)$ qui envoie E_β sur E_{α_0}. Soit $\alpha \in \Delta - \{\beta\}$. On a $Ad(\check{\varpi}_\beta(\lambda))(E_\alpha) = E_\alpha$ donc $\boldsymbol{\omega}(E_\alpha) = S(\omega)(E_\alpha)$. Mais $\omega(\alpha) \in \Delta$ et, d'après (5), on a $S(\omega)(E_\alpha) = E_{\omega(\alpha)}$. Posons $\gamma = \omega(\alpha_0)$. Il reste seulement à prouver que $\boldsymbol{\omega}(E_{\alpha_0}) = E_\gamma$. On a $\alpha_0(\check{\varpi}_\beta(\lambda)) = \beta(\check{\varpi}_\beta(\lambda))^{-d(\beta)} = \lambda^{-1}$ puisque $d(\beta) = 1$. Donc $\boldsymbol{\omega}(E_{\alpha_0}) = \lambda^{-1}S(\omega)(E_{\alpha_0})$. Puisque $E_{\alpha_0} = \lambda S(\omega)(E_\beta)$, on obtient $\boldsymbol{\omega}(E_{\alpha_0}) = S(\omega)S(\omega)(E_\beta)$. En utilisant (4), on obtient $\boldsymbol{\omega}(E_{\alpha_0}) = Ad(t) \circ S(\omega^2)(E_\beta)$, où $t = t(\omega, \omega)$. On a $\omega^2(\beta) = \gamma$, d'où, comme ci-dessus, $S(\omega^2)(E_\beta) = E_\gamma$. Il reste à prouver que $Ad(t)(E_\gamma) = E_\gamma$, autrement dit $\gamma(t) = 1$. Puisque $\gamma = \omega(\alpha_0)$, cela équivaut à $\alpha_0(t_0) = 1$, où $t_0 = \omega^{-1}(t)$. On calcule

$$t_0 = \prod_{\alpha\in\Sigma;\alpha>0,\omega(\alpha)<0,\omega^{-1}(\alpha)<0} \check{\alpha}(-1).$$

L'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha > 0$ et $\omega(\alpha) < 0$ est $\Sigma^+ - \Sigma^{\beta,+}$, où les exposants $+$ désignent les sous-ensembles de racines positives. De même, l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha > 0$ et $\omega^{-1}(\alpha) < 0$ est $\Sigma^+ - \Sigma^{\gamma,+}$. Notons $\Sigma^{\beta,\gamma}$ le sous-ensemble de racines de Σ engendré par $\Sigma - \{\beta, \gamma\}$. En notant $\mathbf{1}_{\Sigma^+}$, $\mathbf{1}_{\Sigma^{\beta,+}}$ etc... les fonctions caractéristiques des ensembles Σ^+, $\Sigma^{\beta,+}$ etc..., on obtient qu'un élément $\alpha \in \Sigma$ vérifie les conditions $\alpha > 0$, $\omega(\alpha) < 0$, $\omega^{-1}(\alpha) < 0$ si et seulement si $\mathbf{1}_{\Sigma^+}(\alpha) - \mathbf{1}_{\Sigma^{\beta,+}}(\alpha) - \mathbf{1}_{\Sigma^{\gamma,+}}(\alpha) + \mathbf{1}_{\Sigma^{\beta,\gamma,+}}(\alpha) = 1$. Définissons de la façon usuelle $2\check{\rho} = \sum_{\alpha>0} \check{\alpha}$ et de même $2\check{\rho}^\beta$ etc.... Posons $X = 2\check{\rho} - 2\check{\rho}^\beta - 2\check{\rho}^\gamma + 2\check{\rho}^{\rho,\gamma}$. Alors $t_0 = X(-1)$ et $\alpha_0(t_0) = (-1)^{<\alpha_0, X>}$. Il nous suffit de prouver que $< \alpha_0, X > \in 2\mathbb{Z}$. Notons que les éléments $2\check{\rho}$ etc... appartiennent à $\mathbb{Z}[\check{\Delta}]$ et que seules comptent leurs images dans $\mathbb{Z}[\check{\Delta}]/2\mathbb{Z}[\check{\Delta}]$.

On va calculer $< \alpha_0, X >$ cas par cas.

Supposons G de type A_{n-1}, avec $n \geq 2$. On identifie de façon usuelle Δ_a à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, α_0 s'identifiant à 0. Alors $\alpha_0 = -\varpi_1 - \varpi_{n-1}$. Soit $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'élément s'identifiant à β. Alors ω est la translation par $-i$. Il en résulte que γ s'identifie à $n-i$. Autrement dit, γ est l'image de α par l'automorphisme extérieur habituel θ de G qui préserve $\mathfrak{E}$ et envoie α_j sur α_{n-j}. Il résulte des définitions qu'alors X est invariant par cet automorphisme. On a $X \in \mathbb{Z}[\check{\Delta}]$ donc $< \varpi_1, X > \in \mathbb{Z}$. Puisque $\varpi_{n-1} = \theta(\varpi_1)$, on obtient $< \alpha_0, X > = -2 < \varpi_1, X > \in 2\mathbb{Z}$.

Supposons G de type B_n, avec $n \geq 2$. On a $\Omega \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'unique élément $\beta \in \Delta$ tel que $d(\beta) = 1$ est α_1. Si $n = 2$, $\alpha_0 = -2\varpi_{\alpha_2}$ et forcément $< \alpha_0, X > \in 2\mathbb{Z}$. Supposons $n \geq 3$. Alors $\alpha_0 = -\varpi_{\alpha_2}$. Le système $\check{\Sigma}$ est de type C_n avec pour "racines simples" $\check{\alpha}_1, ..., \check{\alpha}_n$ et le système $\check{\Sigma}^{\alpha_1}$ est de type C_{n-1} avec pour "racines simples" $\check{\alpha}_2, ..., \check{\alpha}_n$. On voit que le coefficient de $\check{\alpha}_2$ dans $2\check{\rho}$ comme dans $2\check{\rho}^{\alpha_1}$ est pair. Donc $< \alpha_0, X > \in 2\mathbb{Z}$.

Supposons G de type C_n avec $n \geq 2$. On a $\Omega \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'unique élément $\beta \in \Delta$ tel que $d(\beta) = 1$ est α_n. On a $\alpha_0 \equiv -\alpha_n \; mod \; 2\mathbb{Z}[\Delta]$. Mais $< \alpha_n, \check{\alpha} > \in 2\mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Delta$, donc $< \alpha_0, X > \in 2\mathbb{Z}$.

Supposons G de type D_n avec $n \geq 4$. On a $\Omega \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ si n est pair et $\Omega \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si n est impair. Les éléments $\beta \in \Delta$ tels que $d(\beta) = 1$ sont $\alpha_1, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ et on a $\alpha_0 = -\varpi_{\alpha_2}$. Le coefficient de $\check{\alpha}_2$ dans $2\check{\rho}$ est pair. Le système Σ^{α_1} est de type D_{n-1} et le coefficient de $\check{\alpha}_2$ dans $2\check{\rho}^{\alpha_1}$ est pair. Les systèmes $\Sigma^{\alpha_{n-1}}$ et Σ^{α_n} sont de type A_{n-1} et les coefficients de $\check{\alpha}_2$ dans $2\check{\rho}^{\alpha_{n-1}}$ et $2\check{\rho}^{\alpha_n}$ sont pairs. On ne peut avoir $\beta \neq \gamma$ que si n est impair et $\{\beta, \gamma\} = \{\alpha_{n-1}, \alpha_n\}$. Dans ce cas, $\Sigma^{\alpha_{n-1},\alpha_n}$ est de type A_{n-2}. Les hypothèses $n \geq 4$ et n impair entraînent $n - 2 \geq 3$ et on voit encore que le coefficient de $\check{\alpha}_2$ dans $2\check{\rho}^{\alpha_{n-1},\alpha_n}$ est pair. Donc $< \alpha_0, X > \in 2\mathbb{Z}$.

Supposons G de type E_6. On a $\Omega \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Les éléments $\beta \in \Delta$ tels que $d(\beta) = 1$ sont α_1, α_6 et on a $\alpha_0 = -\varpi_{\alpha_2}$. On a $2\check{\rho} \in 2\mathbb{Z}[\check{\Delta}]$. Les systèmes Σ^{α_1} et Σ^{α_6} sont de type D_5, le système $\Sigma^{\alpha_1,\alpha_6}$ est de type D_4 et on voit que $2\check{\rho}^{\alpha_1}$, $2\check{\rho}^{\alpha_6}$ et $2\check{\rho}^{\alpha_1,\alpha_6}$ appartiennent tous à $2\mathbb{Z}[\check{\Delta}]$. Donc $< \alpha_0, X > \in 2\mathbb{Z}$.

Supposons G de type E_7. On a $\Omega \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'unique élément $\beta \in \Delta$ tel que $d(\beta) = 1$ est α_7 et on a $\alpha_0 = -\varpi_{\alpha_1}$. Le coefficient de $\check{\alpha}_1$ dans $2\check{\rho}$ est pair. Le système Σ^{α_7} est de type E_6 et on a $2\check{\rho}^{\alpha_7} \in 2\mathbb{Z}[\check{\Delta}]$. Donc $< \alpha_0, X > \in 2\mathbb{Z}$.

Pour les groupes de type E_8, F_4 ou G_2, $\Omega = \{1\}$ et le lemme est trivial. $\square$

On identifie le groupe $Out(G)$ au sous-groupe $\boldsymbol{Out}(G)$ des éléments de $Aut(G)$ qui conservent l'épinglage $\mathfrak{E}$. On a :

(6) si G n'est pas de type A_{n-1} avec n impair, tout élément de $\boldsymbol{Out}(G)$ fixe E_0.

Cf. [21] 1.3.5.

Supposons que G n'est pas de type A_{n-1} avec n impair. Alors $\boldsymbol{Out}(G)$ normalise $\boldsymbol{\Omega}$. Evidemment, $Out(G)$ s'identifie à $Aut(\mathcal{D})$. Le lemme ci-dessus permet d'identifier $Aut(\mathcal{D}_a) = \Omega \rtimes Aut(\mathcal{D})$ au sous-groupe $\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a) = Ad(\boldsymbol{\Omega}) \rtimes \boldsymbol{Out}(G)$ de $Aut(G)$.

2.1.9 Racines affines

On revient à nos hypothèses : G est un groupe réductif connexe défini sur F. Dans ce paragraphe, on suppose que G est absolument quasi-simple. On introduit les objets définis en 2.1.7. La paire de Borel épinglée $\mathfrak{E}$ est conservée par I_F.

Décrivons plus précisément l'appartement $App_{F^{nr}}(T^{nr})$ et la chambre C^{nr}. On pose $\mathcal{A}^{nr} = X_{*,\mathbb{R}}(T^{nr})$. L'appartement $App_{F^{nr}}(T^{nr})$ est isomorphe à $\mathcal{A}^{nr}$, le point s_0 d'identifiant à $0 \in \mathcal{A}^{nr}$. Toute racine $\alpha \in \Sigma$ se restreint en une forme linéaire α^{res} sur $\mathcal{A}^{nr}$. On note Σ^{nr} l'ensemble des α^{res} pour $\alpha \in \Sigma$. C'est un système de racines irréductible, pas toujours réduit. On note Δ^{nr} le sous-ensemble des α^{res} pour $\alpha \in \Delta$. C'est une base du sous-système des racines indivisibles de Σ^{nr}.

Pour $\beta \in \Sigma^{nr}$ et $b \in \mathbb{R}$, notons $\beta[b]$ la forme affine $H \mapsto \beta(H) + b$ sur $\mathcal{A}^{nr}$. Pour tout $\beta \in \Sigma^{nr}$, il existe un sous-ensemble $\Gamma_\beta \subset \mathbb{R}$ tel que l'ensemble des racines affines Σ^{aff} sur $\mathcal{A}^{nr}$ soit celui des $\beta[b]$, où $\beta \in \Sigma^{nr}$ et $b \in \Gamma_\beta$. Pour $\beta \in \Delta^{nr}$, posons $\beta^{aff} = \beta[0] = \beta$. Il existe une racine supplémentaire $\beta_0 \in \Sigma^{nr}$ et un élément $b_0 \in \Gamma_{\beta_0}$ de sorte qu'en posant $\beta_0^{aff} = \beta_0[b_0]$ et $\Delta_a^{nr} = \{\beta_0\} \cup \Delta^{nr}$, on ait :

l'ensemble C^{nr} est celui des $H \in \mathcal{A}^{nr}$ tels que $\beta^{aff}(H) > 0$ pour tout $\beta \in \Delta_a^{nr}$.

Notons E la plus petite extension de F^{nr} telle que G soit déployé sur E et posons $e = [E : F^{nr}]$. On a en fait $b_0 = \frac{1}{e}$, cf. [48] 1.6. Il existe une unique relation

$$(1) \qquad \sum_{\beta \in \Delta_a^{nr}} d(\beta)\beta^{aff} = 1,$$

où $d(\beta_0) = e$. On a alors $d(\beta) \in \mathbb{N}_{>0}$ pour tout $\beta \in \Delta_a^{nr}$.

Notations. L'ensemble Δ est numéroté comme dans [6]. Soit $\beta \in \Delta^{nr}$, notons α_{i_1}, α_{i_2},... les éléments de Δ dont β est la restriction. On note alors $\beta = \beta_{i_1,i_2,\ldots}$. L'ensemble $S(\bar{C}^{nr})$ des sommets adhérents à C^{nr} est naturellement en bijection avec Δ_a^{nr}. Pour $\beta = \beta_{i_1,i_2,\ldots} \in \Delta_a^{nr}$, on note s_β ou $s_{i_1,i_2,\ldots}$ le sommet associé à β. Remarquons que le sommet s_0 déjà introduit est associé à β_0.

Le groupe $\Gamma_{E/F^{nr}}$ est cyclique et agit sur $\mathcal{D}$ par un homomorphisme injectif $\Gamma_{E/F^{nr}} \to Aut(\mathcal{D})$. On fixe un générateur γ de $\Gamma_{E/F^{nr}}$ et on note $\theta \in Aut(\mathcal{D})$ son image. On note encore θ l'unique automorphisme de G qui conserve l'épinglage et dont l'action déduite sur $\mathcal{D}$ est θ. Rappelons que l'on a prolongé l'épinglage $\mathfrak{E}$ en une famille de Chevalley $(\dot{E}_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$. Pour $\alpha \in \Delta$, on a $\gamma(\dot{E}_\alpha) = \theta(\dot{E}_\alpha)$ par définition. On en déduit que cette égalité reste vraie pour tout $\alpha \in \Sigma$. Soit $\beta \in \Sigma^{res}$, fixons $\alpha \in \Sigma$ tel que $\alpha^{res} = \beta$ et notons $e(\beta)$ le plus petit élément $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $\theta^n(\alpha) = \alpha$. Si β est indivisible, on a $\theta^{e(\beta)}(\dot{E}_\alpha) = \dot{E}_\alpha$, cf. [21] 1.3.5. Quitte à modifier notre famille de Chevalley, on peut supposer $\theta^n(\dot{E}_\alpha) = \dot{E}_{\theta^n(\alpha)}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si β est divisible, on a $e(\beta) = 1$ mais $\theta(\dot{E}_\alpha) = -\dot{E}_\alpha$, cf. [21] 1.3.7. Si $\beta \in \Delta^{nr}$, β est toujours indivisible et on pose $E_\beta = \sum_{n=0,\ldots,e(\beta)-1} \dot{E}_{\theta^n(\alpha)}$. On a $E_\beta \in \mathfrak{g}(F^{nr})$. En général, β_0 est indivisible. Il y a un cas particulier où β_0 est divisible : c'est celui où G est de type A_{n-1} avec $n \geq 3$, n impair et où E est l'extension quadratique de F^{nr}. En tout cas, fixons une uniformisante ϖ_E de E telle que $\varpi_E^e \in F^{nr,\times}$. On pose $E_{\beta_0} = \sum_{n=0,\ldots,e(\beta_0)-1} \gamma^n(\varpi_E)\dot{E}_{\theta^n(\alpha)}$ où, comme ci-dessus, $\alpha^{res} = \beta_0$. Cela dépend des choix de α, $\dot{E}_\alpha$ et ϖ_E. Changer ces choix multiplie E_{β_0} par un élément de $\mathfrak{o}_{F^{nr}}^\times$. On pose $\mathfrak{E}_a = (T^{nr}, (E_\beta)_{\beta\in\Delta_a^{nr}})$ et on appelle cette famille un épinglage affine. Remarquons que l'on a supprimé le groupe B et que, d'après les propriétés ci-dessus, $\mathfrak{E}_a$ est conservé par I_F.

Remarque (2). Supposons que G soit quasi-déployé sur F et que $\mathfrak{E}$ soit conservé par l'action de Γ_F. Il est clair que la famille $(E_\beta)_{\beta\in\Delta^{nr}}$ est conservée par cette action. On peut supposer que E_{β_0} est fixée par cette action. En effet l'élément construit ci-dessus est fixé par I_F. Pour un élément $\sigma \in \Gamma_F$, on vérifie qu'il existe $x(\sigma) \in \mathfrak{o}_{F^{nr}}^\times$ tel que $\sigma(E_{\beta_0}) = x(\sigma)E_{\beta_0}$ et $x(\sigma)$ ne dépend que de la projection de σ dans Γ_F^{nr}. L'application $\sigma \mapsto x(\sigma)$ est un cocycle de Γ_F^{nr} dans $\mathfrak{o}_{F^{nr}}^\times$. Un tel cocycle est un cobord donc il existe $x \in \mathfrak{o}_{F^{nr}}^\times$ tel que $x(\sigma) = x\sigma(x)^{-1}$. L'élément xE_{β_0} est alors fixé par Γ_F. Mais xE_{β_0} est issu de la même construction que E_{β_0} où l'on a remplacé ϖ_E par $x\varpi_E$.

On note $\mathbf{\Omega}^{nr}$ le sous-groupe des éléments de $G_{AD}(F^{nr})$ qui conservent $\mathfrak{E}_a$. Il est inclus dans le groupe N^{nr} défini en 2.1.7 et il y a un homomorphisme naturel $N^{nr} \to Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$. Supposons que G soit déployé sur F^{nr}. On a alors $e = 1$, $\Sigma^{nr} = \Sigma$, $\beta_0 = \alpha_0$, $\Delta_a^{nr} = \Delta_a$, $\mathcal{D}_a^{nr} = \mathcal{D}_a$. Si de plus G est adjoint, on a $\mathbf{\Omega}^{nr} = \mathbf{\Omega}$. Il est clair que l'image de N^{nr} dans $Aut(\mathcal{D}_a)$ est incluse dans le groupe Ω défini en 2.1.8. Le lemme 2.1.8 implique que l'image de N^{nr} dans $Aut(\mathcal{D}_a)$ est Ω.

Lemme. *Supposons que G soit adjoint et ne soit pas déployé sur F^{nr}. Alors l'homomorphisme $\mathbf{\Omega}^{nr} \to Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$ est bijectif.*

Preuve. Soit $g \in \mathbf{\Omega}^{nr}$ un élément du noyau de cet homomorphisme. Puisque $g \in \mathbf{\Omega}^{nr}$, $Ad(g)$ conserve T^{nr}. Mais le commutant de T^{nr} dans G est T donc g normalise T et définit un élément $w \in W$. Pour tout $\alpha \in \Sigma$, $Ad(g)$ envoie $\mathfrak{u}_\alpha$ sur $\mathfrak{u}_{w(\alpha)}$. Soit $\alpha \in \Delta$. L'automorphisme $Ad(g)$ fixe $E_{\alpha^{res}}$. Cet élément $E_{\alpha^{res}}$ est la somme des $E_{\alpha'}$ où α' parcourt les éléments de Δ conjugués à α par une puissance de θ. La propriété précédente implique que $Ad(g)$ permute ces $E_{\alpha'}$, en particulier envoie E_α sur $E_{w(\alpha)}$. Ainsi $Ad(g)$ conserve l'épinglage $\mathfrak{E}$. Puisqu'on a supposé G adjoint, cela entraîne $g = 1$. D'où l'injectivité de l'homomorphisme de l'énoncé.

En examinant tous les cas possibles, on voit que $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$ est réduit à $\{1\}$ sauf dans les deux cas suivants :

(3) G est de type A_{n-1} avec $n \geq 4$, n est pair et le corps E est l'extension quadratique de F^{nr} ;

(4) G est de type D_n avec $n \geq 4$ et le corps E est l'extension quadratique de F^{nr}.

Dans ces cas, $Aut(\mathcal{D}_a^{nr}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour démontrer la surjectivité de l'homomorphisme de l'énoncé, on peut supposer que l'on est dans l'un de ces deux cas et relever dans $\mathbf{\Omega}^{nr}$ l'unique élément non trivial $\omega \in Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$.

Considérons le cas (3). L'élément non trivial de $\Gamma_{E/F^{nr}}$ agit sur Δ par l'automorphisme θ habituel : $\theta(\alpha_i) = \alpha_{n-i}$. On a $\Delta^{nr} = \{\beta_{i,n-i}; i = 1, ..., n/2-1\} \cup \{\beta_{n/2}\}$. La racine β_0 est la restriction commune de $\alpha' = -(\alpha_1 + ... + \alpha_{n-2})$ et de $\alpha'' = -(\alpha_2 + ... + \alpha_{n-1})$. On a $E_{\beta_{i,n-i}} = E_{\alpha_i} + E_{\alpha_{n-i}}$, $E_{\beta_{n/2}} = E_{\alpha_{n/2}}$. On peut supposer $\theta(\dot{E}_{\alpha'}) = \dot{E}_{\alpha''}$; alors $E_{\beta_0} = \lambda\varpi_E(\dot{E}_{\alpha'} - \dot{E}_{\alpha''})$ avec $\lambda \in \mathfrak{o}_{F^{nr}}^\times$. L'élément ω permute β_0 et $\beta_{1,n-1}$ et fixe les autres éléments de Δ_a^{nr}. Introduisons le Levi standard M de G associé au sous-ensemble $\Delta^M \subset \Delta$ défini par $\Delta^M = \{\alpha_i; i = 2, ..., n-2\}$. Notons w_0, resp. w_0^M, l'élément de plus grande longueur de W, resp. W^M, posons $w = w_0 w_0^M$. On vérifie que w est fixé par θ, que w fixe α_i pour $i = 2, ..., n-2$ et que w permute α_1 et α'' ainsi que α_{n-1} et α'. Donc l'action de w sur Σ se descend en une action sur Σ^{res} qui conserve Δ_a^{nr} et agit sur cet ensemble par ω. Il existe un élément $\mu \in \mathfrak{o}_{F^{nr}}^\times$ tel que $S(w)(E_{\alpha_1}) = \mu\dot{E}_{\alpha''}$. L'automorphisme $S(w)$ est fixé par θ et on en déduit $S(w)(E_{\alpha_{n-1}}) = \mu\dot{E}_{\alpha'}$. Posons $\boldsymbol{\omega} = S(w)\check{\varpi}_{\alpha_1}(-\lambda\mu^{-1}\varpi_E)\check{\varpi}_{\alpha_{n-1}}(\lambda\mu^{-1}\varpi_E)$. C'est un élément de $G(F^{nr})$. La définition est

faite pour que $\boldsymbol{\omega}(E_{\beta_{1,n-1}}) = E_{\beta_0}$. Les mêmes arguments qu'en 2.1.8 montrent que $\boldsymbol{\omega}$ fixe $E_{\beta_{n/2}}$ et $E_{\beta_{i,n-i}}$ pour $i = 2, ..., n/2 - 1$. Il reste à prouver que $\boldsymbol{\omega}(E_{\beta_0}) = E_{\beta_{1,n-1}}$. On a

$$(5) \qquad \boldsymbol{\omega}(E_{\beta_0}) = \lambda\varpi_E S(w)\check{\varpi}_{\alpha_1}(-\lambda\mu^{-1}\varpi_E)\check{\varpi}_{\alpha_{n-1}}(\lambda\mu^{-1}\varpi_E)(\dot{E}_{\alpha'} - \dot{E}_{\alpha''})$$

$$= \lambda\varpi_E S(w)(-\lambda^{-1}\mu\varpi_E^{-1}\dot{E}_{\alpha'} - \lambda^{-1}\mu\varpi_E^{-1}\dot{E}_{\alpha''}) = -\mu S(w)(\dot{E}_{\alpha'} + \dot{E}_{\alpha''}) = -S(w)^2(E_{\alpha_1} + E_{\alpha_{n-1}}).$$

Notons Σ^+, resp. Σ^{M+}, l'ensemble des racines positives dans Σ, resp. Σ^M. L'ensemble des $\alpha > 0$ telles que $w(\alpha) < 0$ est $\Sigma^+ - \Sigma^{M+}$. Grâce à 2.1.8(4), on a $S(w)^2 = t$, où $t = \prod_{\alpha\in\Sigma^+-\Sigma^{M,+}} \check{\alpha}(-1)$. Alors (5) devient $\boldsymbol{\omega}(E_{\beta_0}) = -Ad(t)(E_{\beta_{1,n-1}})$. Pour obtenir l'égalité cherchée $\boldsymbol{\omega}(E_{\beta_0}) = E_{\beta_{1,n-1}}$, il nous reste à prouver que $\alpha_1(t) = \alpha_{n-1}(t) = -1$. On calcule facilement la somme des éléments de $\Sigma - \Sigma^{M+}$: c'est $(n-1)(\alpha_1 + ... + \alpha_{n-1})$. D'où $t = (\check{\alpha}_1 + ... + \check{\alpha}_{n-1})((-1)^{n-1})$. D'où $\alpha_1(t) = \alpha_{n-1}(t) = (-1)^{n-1}$. Puisque n est pair, on a bien $\alpha_1(t) = \alpha_{n-1}(t) = -1$, ce qui achève la preuve dans le cas (3).

Considérons le cas (4). L'élément non trivial de $\Gamma_{E/F^{nr}}$ agit sur Δ par l'automorphisme θ habituel : θ permute α_{n-1} et α_n et fixe les autres éléments de Δ. On a $\Delta^{nr} = \{\beta_i; i = 1, ..., n-2\} \cup \{\beta_{n-1,n}\}$. Posons

$$(\alpha', \alpha'') = \begin{cases} (-(\alpha_1 + ... + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}), -(\alpha_2 + ... + \alpha_{n-2} + \alpha_n)) & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-(\alpha_1 + ... + \alpha_{n-2} + \alpha_n), -(\alpha_2 + ... + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1})) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La racine β_0 est la restriction commune de α' et de α''. On a $E_{\beta_i} = E_{\alpha_i}$ pour $i = 1, ..., n-2$, $E_{\beta_{n-1,n}} = E_{\alpha_{n-1}} + E_{\alpha_n}$. On peut supposer $\theta(\dot{E}_{\alpha'}) = \dot{E}_{\alpha''}$; alors $E_{\beta_0} = \lambda\varpi_E(\dot{E}_{\alpha'} - \dot{E}_{\alpha''})$ avec $\lambda \in \mathfrak{o}_{F^{nr}}^\times$. L'élément ω permute $\beta_{n,n-1}$ et β_0 et permute β_i et β_{n-1-i} pour $i = 1, ..., n-2$. Introduisons le Levi standard M de G associé au sous-ensemble $\Delta^M \subset \Delta$ défini par $\Delta^M = \{\alpha_i; i = 1, ..., n-2\}$. Notons w_0, resp. w_0^M, l'élément de plus grande longueur de W, resp. W^M, posons $w = w_0 w_0^M$. On vérifie que w est fixé par θ, que w permute α_i et α_{n-1-i} pour $i = 1, ..., n-2$ et permute α_{n-1} et α' ainsi que α_n et α''. Donc l'action de w sur Σ se descend en une action sur Σ^{res} qui conserve Δ_a^{nr} et agit sur cet ensemble par ω. Il existe un élément $\mu \in \mathfrak{o}_{F^{nr}}^\times$ tel que $S(w)(E_{\alpha_{n-1}}) = \mu\dot{E}_{\alpha'}$. Comme ci-dessus, on a aussi $S(w)(E_{\alpha_n}) = \mu\dot{E}_{\alpha''}$. On pose $\boldsymbol{\omega} = S(w)\check{\varpi}_{n-1}(\lambda\mu^{-1}\varpi_E)\check{\varpi}_n(-\lambda\mu^{-1}\varpi_E)$. C'est un élément de $G(F^{nr})$. Comme dans le cas (3), il faut prouver que $\boldsymbol{\omega}(E_{\beta_0}) = E_{\beta_{n-1,n}}$. Un calcul analogue à (5) conduit à l'égalité

$$\boldsymbol{\omega}(E_{\beta_0}) = (-1)^n S(w)^2(E_{\beta_{n-1,n}}).$$

On a $S(w)^2 = t$, où t est défini comme dans le cas (2). Il reste à prouver que $\alpha_{n-1}(t) = \alpha_n(t) = (-1)^n$. On note $2\check{\rho}$, resp. $2\check{\rho}^M$, la somme des coracines $\check{\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma$, resp. $\alpha \in \Sigma^M$. On a $t = (2\check{\rho})(-1)(2\check{\rho}^M)(-1)$. Puisque Σ est de type D_n, $2\check{\rho}$ appartient à $2X_*(T)$, donc $(2\check{\rho})(-1) = 1$. L'élément $2\check{\rho}^M$ est combinaison linéaire des $\check{\alpha}_i$ pour $i = 1, ..., n-2$ et seule $\check{\alpha}_{n-2}$ n'est pas annulée par α_{n-1} et α_n. Le coefficient de $\check{\alpha}_{n-2}$ est $n-2$. On obtient $\alpha_{n-1}(t) = \alpha_n(t) = (-1)^{n-2} = (-1)^n$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Que G soit déployé ou pas sur F^{nr}, on a

(6) soient $x, y \in \bar{C}^{nr}$; supposons qu'il existe $g \in G_{AD}(F^{nr})$ tel que $gx = y$; alors il existe $\omega \in \boldsymbol{\Omega}^{nr}$ tel que $\omega x = y$.

Preuve. Les alcôves C'^{nr} de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ telles que y appartienne à l'adhérence de C'^{nr} correspondent bijectivement aux sous-groupes de Borel de G_y. Puisque ces groupes de Borel forment une unique orbite pour l'action de G_y, l'ensemble d'alcôves précédent forme une unique orbite pour l'action de $K_y^{0,nr}$. Les deux alcôves C^{nr} et $g(C^{nr})$ appartiennent à cet ensemble. Quitte à multiplier g à gauche par un élément de $K_y^{0,nr}$, on

peut supposer que l'action de G sur l'immeuble conserve C^{nr}. L'alcôve C^{nr} appartient aux deux appartements associés à T^{nr} et à $Ad(g)(T^{nr})$. Il en résulte que ces tores sont conjugués par un élément de $K^{0,nr}_{C^{nr}} \subset K^{0,nr}_y$. Quitte à multiplier g à gauche par un élément de $K^{0,nr}_{C^{nr}}$, on peut supposer que l'action de G sur l'immeuble conserve C^{nr} et que $Ad(g)$ conserve T^{nr}. Alors de l'action de g se déduit une action sur le diagramme $\mathcal{D}^{nr}_a$. Il résulte du lemme 2.1.8 et du lemme ci-dessus que cette action se relève en un élément $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}^{nr}$. Posons $t = g\boldsymbol{\omega}^{-1}$. Alors $Ad(t)$ conserve T, l'action de t sur $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ conserve C^{nr} et l'action déduite de t sur $\mathcal{D}^{nr}_a$ est triviale. Cela entraîne $t \in T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})$. Ce groupe est contenu dans $K^{0,nr}_y$. Quitte à multiplier g à gauche par t^{-1}, on a alors $g = \boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}^{nr}$. Cela prouve (6).

2.1.10 Discrétisation de l'immeuble ; le groupe G

Notons F^{mod} la plus grande extension modérément ramifiée de F contenue dans $\bar{F}$. On note Γ^{mod}_F, resp. I^{mod}_F, le groupe de Galois de l'extension F^{mod}/F, resp. F^{mod}/F^{nr}.

Notons $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers $n \geq 1$ premiers à p. Soit ϖ_F une uniformisante de F. On sait que l'on peut fixer, et on fixe, une famille $(\varpi_{1/n})_{n\in\mathbb{P}}$ d'éléments de $\bar{F}^\times$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

$\varpi_1 = \varpi_F$;

pour tous $n, m \in \mathbb{P}$, $\varpi^m_{1/nm} = \varpi_{1/n}$.

Alors F^{mod} est l'extension de F engendrée par F^{nr} et les $\varpi_{1/n}$ pour $n \in \mathbb{P}$. Le groupe Γ^{nr}_F s'identifie au sous-groupe des élements $\sigma \in \Gamma^{mod}_F$ tels que $\sigma(\varpi_{1/n}) = \varpi_{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{P}$. On obtient ainsi une décomposition en produit semi-direct $\Gamma^{mod}_F = I^{mod}_F \rtimes \Gamma^{nr}_F$. En particulier, le Frobenius se relève en un élément de Γ^{mod}_F.

Pour $n \in \mathbb{P}$, notons $\boldsymbol{\zeta}_{1/n}$, resp. $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{1/n}$, le groupe des racines de l'unité dans $\bar{F}^\times$, resp. $\bar{\mathbb{F}}^\times_q$, d'ordre divisant n. On a $\cup_{n\in\mathbb{P}}\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{1/n} = \bar{\mathbb{F}}^\times_q$. On pose $\boldsymbol{\zeta} = \cup_{n\in\mathbb{P}}\boldsymbol{\zeta}_{1/n}$. Notons $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ en p, c'est-à-dire l'anneau des $r \in \mathbb{Q}$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{P}$ de sorte que $rn \in \mathbb{Z}$. On sait que $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\boldsymbol{\zeta}$. On fixe un homomorphisme $r \mapsto \zeta_r$ de $\mathbb{Z}_{(p)}$ sur $\boldsymbol{\zeta}$ qui se quotiente en un isomorphisme $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z} \simeq \boldsymbol{\zeta}$. On note $r \mapsto \bar{\zeta}_r$ son composé avec l'application de réduction de $\boldsymbol{\zeta}$ dans $\bar{\mathbb{F}}^\times_q$. Ce composé est un isomorphisme $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z} \to \bar{\mathbb{F}}^\times_q$. Pour tout $\sigma \in I^{mod}_F$ et tout $n \in \mathbb{P}$, il existe un unique élément de $\boldsymbol{\zeta}_{1/n}$ noté $\zeta(\sigma)_{1/n}$ tel que $\sigma(\varpi_{1/n}) = \zeta(\sigma)^{-1}_{1/n}\varpi_{1/n}$ (on a choisi $\zeta(\sigma)^{-1}_{1/n}$ plutôt que $\zeta(\sigma)_{1/n}$ car cela simplifiera certaines formules ci-dessous). Pour $n, m \in \mathbb{P}$, on a $\zeta(\sigma)^m_{1/nm} = \zeta(\sigma)_{1/n}$. On note γ l'unique élément de I^{mod}_F tel que $\zeta(\gamma)_{1/n} = \zeta_{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{P}$. L'élément γ est un progénérateur de I^{mod}_F.

Supposons G quasi-déployé sur F. On fixe une paire de Borel épinglée $\mathfrak{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G conservée par l'action galoisienne. Le groupe Γ_F agit sur $X_*(T)$ et notre $(Hyp)_1(p)$, cf. 2.1.2, implique que cette action est modérément ramifiée, c'est-à-dire se quotiente en une action de $\Gamma^{mod}_F = \Gamma_{F^{mod}/F}$. Le sextuplet $(X^*(T), X_*(T), \Sigma, \check{\Sigma}, \Delta, \check{\Delta})$ est une donnée de racines munie d'une action de Γ_F. Comme on le sait, on peut introduire un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ qui a les mêmes données de racines. C'est-à-dire que l'on peut fixer une paire de Borel épinglée $\mathfrak{E} = (\mathbf{B}, \mathbf{T}, (\mathbf{E}_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de $\mathbf{G}$ et des isomorphismes compatibles $X_*(\mathbf{T}) \simeq X_*(T)$ et $X^*(\mathbf{T}) \simeq X^*(T)$ identifiant les racines et coracines des groupes $\mathbf{G}$ et G ainsi que leurs racines et coracines simples. De l'homomorphisme de réduction $\mathfrak{o}^\times_{\bar{F}} \to \bar{\mathbb{F}}^\times_q$ se déduit un homomorphisme de $T(\mathfrak{o}_{\bar{F}})$ dans $\mathbf{T}$ que l'on note $t \mapsto \bar{t}$. Les groupes de Weyl de G relativement à T et de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}$ sont isomorphes, on les note tous deux W. L'action de I_F sur la donnée de racines devient une action par automorphismes algébriques de I_F sur $\mathbf{G}$ préservant la paire de Borel épinglée $\mathfrak{E}$. De

l'action de $\Gamma_F^{nr} \subset \Gamma_F^{mod}$ sur $\mathfrak{E}$ se déduit une action sur $\mathfrak{E}$ qui munit $\mathbf{G}$ d'une structure de groupe sur $\mathbb{F}_q$. En général, les automorphismes définissant l'action de I_F ne sont pas définis sur $\mathbb{F}_q$.

Remarque. La structure de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{F}_q$ dépend en général du choix de notre famille $(\varpi_{1/n})_{n\in\mathbb{P}}$ qui nous a permis de relever Γ_F^{nr} en un sous-groupe de Γ_F^{mod}. Toutefois, si G est déployé sur F^{nr}, cette structure est canonique.

Posons $\mathbb{T} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$. Le groupe Γ_F agit sur $\mathbb{T}$ via son action sur $X_*(T)$. On définit deux homomorphismes

$$v : T(F^{mod}) \to \mathbb{T},\ \underline{v} : \mathbb{T} \to T(F^{mod})$$

de la façon suivante. On a $T(F^{mod}) = X_*(T) \otimes F^{mod,\times}$ et v est le produit tensoriel de l'identité de $X_*(T)$ et de la valuation $val_F : F^{mod,\times} \to \mathbb{Z}_{(p)}$. Pour $y \in \mathbb{T}$, on choisit $n \in \mathbb{P}$ tel que $ny \in X_*(T)$ et on définit $\underline{v}(y) = (ny)(\varpi_{1/n})$. Cela ne dépend pas du choix de n. L'application $v \circ \underline{v}$ est l'identité de $\mathbb{T}$. L'application v est équivariante pour les actions de I_F mais $\underline{v}$ ne l'est pas.

On définit un homomorphisme $j_T : \mathbb{T} \to \mathbf{T}$ qui est le produit tensoriel de l'isomorphisme $X_*(T) \simeq X_*(\mathbf{T})$ et de l'homomorphisme $r \mapsto \zeta_r$ de $\mathbb{Z}_p$ sur $\bar{\mathbb{F}}_q^\times$. Cet homomorphisme j_T se quotiente en un isomorphisme $\mathbb{T}/X_*(T) \simeq \mathbf{T}$.

A tout sous-tore T' de T sont associés un sous-tore $\mathbf{T}'$ de $\mathbf{T}$ et un sous-groupe $\mathbb{T}'$ de $\mathbb{T}$: $X_*(\mathbf{T}')$ correspond à $X_*(T')$ et $\mathbb{T}' = X_*(T') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$. Pour toute extension F' de F contenue dans F^{mod}, on note $T_{F'}$ le plus grand sous-tore de T déployé sur F' et $A_{G,F'}$ le plus grand tore central dans G déployé sur F'. Si $F' = F^{nr}$, on note plutôt ces tores T^{nr} et A_G^{nr}. Soit F' une extension finie de F^{nr} contenue dans F^{mod}. Au tore T est associé un appartement $App_{F'}(T_{F'})$ dans $Imm_{F'}(G_{AD})$, qui s'identifie à $X_{*,\mathbb{R}}(T_{F'})/X_{*,\mathbb{R}}(A_{G,F'})$. Pour éviter les confusions, on note s_0 le point 0 de ce dernier groupe. Le groupe $\Gamma_{F'/F}$ agit sur $App_{F'}(T_{F'})$ et sur $X_{*,\mathbb{R}}(T_{F'})/X_{*,\mathbb{R}}(A_{G,F'})$ et l'identification est équivariante pour ces actions. Le groupe $\mathbb{T}_{F'}$ est contenu dans $X_*(T_{F'}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et il s'en déduit un homomorphisme $a_T : \mathbb{T}_{F'} \to App_{F'}(T_{F'})$ qui se quotiente en une injection $\mathbb{T}_{F'}/\mathbb{A}_{G,F'} \to App_{F'}(T_{F'})$ d'image dense. On vérifie que, si $x, x' \in App_{F'}(T_{F'})$ et s'il existe $g \in G(F')$ tel que $gx = x'$, alors x appartient à l'image de a_T si et seulement s'il en est de même de x'. Pour $t \in T(F')$, on a l'égalité $t^{-1}s_0 = a_T \circ v(t)$ (remarquons que l'équivariance de l'homomorphisme v implique que $v(t)$ appartient à $\mathbb{T}_{F'}$).

Soit $y \in \mathbb{T}^{nr}$. Fixons $n \in \mathbb{P}$ tel que $ny \in X_*(T^{nr})$. Pour $\sigma \in I_F$, on pose $t_y(\sigma) = (ny)(\zeta(\sigma)_{1/n})$. C'est un élément de $T^{nr}(\mathfrak{o}_{F^{nr}})$ dont on note $\bar{t}_y(\sigma)$ la réduction dans $\mathbf{T}^{nr}$. On a $\underline{v}(y) \in T^{nr}(F^{mod})$ et on vérifie l'égalité $\underline{v}(y)\sigma(\underline{v}(y))^{-1} = t_y(\sigma)$. Pour $\sigma = \gamma$, on a $\bar{t}_y(\gamma) = j_T(y)$.

Soit F' une extension finie de F^{nr} contenue dans F^{mod} et supposons G déployé sur F'. Alors le groupe résiduel $G_{s_0,F'}$ s'identifie à $\mathbf{G}$. Précisément, de la paire de Borel épinglée $\mathfrak{E}$ se déduit une telle paire $\mathfrak{E}_{s_0,F'} = (B_{s_0,F'}, T_{s_0,F'}, (E_{\alpha,s_0,F'})_{\alpha\in\Delta})$ de $G_{s_0,F'}$. En particulier, $E_{\alpha,s_0,F'}$ est la réduction naturelle de $E_\alpha \in \mathfrak{k}_{s_0,F'}$. On peut identifier et on identifie $G_{s_0,F'}$ à $\mathbf{G}$ de sorte que $\mathfrak{E}_{s_0,F'}$ s'identifie à $\mathfrak{E}$, l'identification étant compatible aux isomorphismes $X_*(T_{s_0,F'}) \simeq X_*(T) \simeq X_*(\mathbf{T})$. Dans le cas où G est non ramifié, on peut choisir $F' = F^{nr}$ et G_{s_0} s'identifie à $\mathbf{G}$.

On a supposé G quasi-déployé sur F. On peut lever cette restriction en considérant que G est défini sur F^{nr} (ou sur une extension finie non ramifiée de F sur laquelle G est déployé). Les mêmes constructions s'appliquent, en oubliant les actions de Γ_F^{nr}. C'est-à-dire que $\mathbf{G}$ est seulement défini sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, pas sur $\mathbb{F}_q$.

2.1.11 Description des groupes $G_{\mathcal{F}}$

Soit $x \in a_T(\mathbb{T}^{nr}) \subset App_{F^{nr}}(T^{nr})$. Fixons $\tilde{x} \in \mathbb{T}^{nr}$ tel que $a_T(\tilde{x}) = x$ et une extension finie F' de F^{nr} contenue dans F^{mod} telle que G soit déployé sur F' et que $\underline{v}(\tilde{x})$ appartienne à $T^{nr}(F')$. On a $x = a_T(\tilde{x}) = a_T \circ v \circ \underline{v}(\tilde{x}) = \underline{v}(\tilde{x})^{-1}s_0$. Alors $Ad(\underline{v}(\tilde{x}))$ se restreint en un isomorphisme de $\mathfrak{k}_{x,F'}$ sur $\mathfrak{k}_{s_0,F'}$ qui entrelace l'action naturelle de I_F sur $\mathfrak{k}_{x,F'}$ et l'action $\sigma \mapsto Ad(t_{\tilde{x}}(\sigma)) \circ \sigma$ sur $\mathfrak{k}_{x_0,F'}$. Donc cet isomorphisme se restreint en un isomorphisme de $\mathfrak{k}_x^{nr}$ sur le sous-ensemble des points fixes dans $\mathfrak{k}_{s_0,F'}$ par l'action précédente. On a identifié l'espace réduit $\mathfrak{g}_{s_0,F'}$ à $\mathfrak{g}$. Par réduction, $\mathfrak{g}_x$ s'identifie au sous-espace des points fixes dans $\mathfrak{g}$ par l'action $\sigma \mapsto Ad(\bar{t}_{\tilde{x}}(\sigma)) \circ \sigma$ de I_F. Le groupe G_x s'identifie au sous-groupe de $\mathbf{G}$ déterminé par cette algèbre de Lie, c'est-à-dire la composante neutre du sous-espace des points fixes dans $\mathbf{G}$ par l'action précédente. Cette description ne dépend pas du choix du relèvement $\tilde{x}$ de x : on ne peut changer $\tilde{x}$ que par un élément central, cela ne modifie pas $Ad(\underline{v}(\tilde{x}))$.

Remarquons que l'on peut aussi bien remplacer ci-dessus l'action de I_F par celle du générateur γ. On a $\bar{t}_{\tilde{x}}(\gamma) = j_T(\tilde{x})$ et l'action de γ est $Ad(j_T(\tilde{x})) \circ \gamma$. Dans le cas où G est déployé sur F^{nr}, l'action de γ sur $\mathbf{G}$ est triviale et on obtient que l'image de G_x dans $\mathbf{G}$ est $\mathbf{G}_{j_T(\tilde{x})}$ (dont on rappelle qu'il s'agit de $Z_{\mathbf{G}}(j_T(\tilde{x}))^0$).

Soit $\mathcal{F}$ une facette de $App_{F^{nr}}(T^{nr})$. L'intersection $\mathcal{F} \cap a_T(\mathbb{T}^{nr})$ est non vide. On choisit x dans cette intersection. On a $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^{nr} = \mathfrak{k}_x^{nr}$ et la construction précédente fournit des homomorphismes $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{g}$ et $G_{\mathcal{F}} \to \mathbf{G}$ que l'on note tous deux $\iota_{x,\mathcal{F}}$.

Lemme. *Soit $\mathcal{F}$ une facette de $App_{F^{nr}}(T^{nr})$. Les homomorphismes $\iota_{x,\mathcal{F}}$ ne dépendent pas du choix de $x \in \mathcal{F} \cap a_T(\mathbb{T}^{nr})$.*

Preuve. Soient $x, y \in \mathcal{F} \cap a_T(\mathbb{T}^{nr})$. On relève x et y en des éléments $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ de $\mathbb{T}$. On peut fixer un élément $n \in \mathbb{P}$ commun tel que $n\tilde{x}, n\tilde{y} \in X_*(T^{nr})$. Fixons une extension finie F' de F^{nr} contenue dans F^{mod}, contenant $\varpi_{1/n}$ et telle que G soit déployé sur F'. Notons e' l'indice de ramification de F'/F^{nr}. Remarquons que n divise e'.

Parce que $x \in \mathcal{F}$, on a les égalités $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^{nr} = \mathfrak{k}_x^{nr}$, $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^{+,nr} = \mathfrak{k}_x^{+,nr}$, $K_{\mathcal{F}}^{0,nr} = K_x^{0,nr}$ et $K_{\mathcal{F}}^{+,nr} = K_x^{+,nr}$. Les homomorphismes $\iota_{x,\mathcal{F}}$ sont par définition les composés

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{F}} = \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^{nr}/\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^{+,nr} = \mathfrak{k}_x^{nr}/\mathfrak{k}_x^{+,nr} \subset \mathfrak{k}_{x,F'}/\mathfrak{p}_{F'}\mathfrak{k}_{x,F'} = \mathfrak{g}_{x,F'} \overset{\tau(\tilde{x})}{\to} \mathfrak{g}$$

et

$$G_{\mathcal{F}} = K_{\mathcal{F}}^{0,nr}/K_{\mathcal{F}}^{+,nr} = K_x^{0,nr}/K_x^{+,nr} \subset K_{x,F'}^0/K_{x,F'}^+ = G_{x,F'} \overset{\tau(\tilde{x})}{\to} \mathbf{G},$$

où on a noté $\tau(\tilde{x})$ l'isomorphisme déduit par réduction de $Ad(\underline{v}(\tilde{x}))$. On a une description analogue des homomorphismes $\iota_{y,\mathcal{F}}$.

Posons $t = \underline{v}(\tilde{y})^{-1}\underline{v}(\tilde{x})$. L'action de t sur l'immeuble $Imm_{F'}(G_{AD})$ envoie x sur y. Donc $Ad(t)$ envoie $\mathfrak{k}_{x,F'}$ sur $\mathfrak{k}_{y,F'}$ et $K_{x,F'}^0$ sur $K_{y,F'}^0$ et on en déduit par réduction des isomorphismes $\mathfrak{g}_{x,F'} \to \mathfrak{g}_{y,F'}$ et $G_{x,F'} \to G_{y,F'}$ que l'on note tous deux τ. Les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{x,F'} & & \\ & \searrow \tau(\tilde{x}) & \\ \downarrow \tau & & \mathfrak{g} \\ & \nearrow \tau(\tilde{y}) & \\ \mathfrak{g}_{y,F'} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G_{x,F'} & & \\ & \searrow \tau(\tilde{x}) & \\ \downarrow \tau & & \mathbf{G} \\ & \nearrow \tau(\tilde{y}) & \\ G_{y,F''} & & \end{array}$$

Il nous suffit donc de prouver que les diagrammes suivants sont eux-aussi commutatifs :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_x & \to & \mathfrak{g}_{x,F'} \\ \| & & \\ \mathfrak{g}_{\mathcal{F}} & & \downarrow \tau \\ \| & & \\ \mathfrak{g}_y & \to & \mathfrak{g}_{y,F'} \end{array}$$

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} G_x & \to & G_{x,F'} \\ \| & & \\ G_{\mathcal{F}} & & \downarrow \tau \\ \| & & \\ G_y & \to & G_{y,F'} \end{array}$$

On étend notre épinglage en une famille de Chevalley $(\dot{E}_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$, cf. 2.1.7. Ainsi, pour tout $\alpha \in \Sigma$, $\dot{E}_\alpha$ est une base de l'espace radiciel $\mathfrak{u}_\alpha$. Pour $r \in \frac{1}{e'}\mathbb{Z}$, notons $\mathfrak{u}_{\alpha,r}$ le $\mathfrak{o}_{F'}$-module $\mathfrak{p}_{F'}^{e'r}\dot{E}_\alpha$. Comme on le sait $\mathfrak{k}_{x,F'}$ est la somme de $\mathfrak{t}(\mathfrak{o}_{F'})$ et des $\mathfrak{u}_{\alpha,-\alpha(x)}$ pour $\alpha \in \Sigma$ (remarquons que par construction, $\alpha(x) \in \frac{1}{n}\mathbb{Z} \subset \frac{1}{e'}\mathbb{Z}$). Notons (Σ) l'ensemble des orbites de I_F dans Σ. Pour $(\alpha) \in (\Sigma)$, notons $\mathfrak{u}_{(\alpha)}$ la somme directe des $\mathfrak{u}_{\alpha'}$ pour $\alpha' \in (\alpha)$. Pour $r \in \frac{1}{e'}\mathbb{Z}$, notons $\mathfrak{u}_{(\alpha),r}$ la somme directe des $\mathfrak{u}_{\alpha',r}$ pour $\alpha' \in (\beta)$. Cet espace est conservé par l'action de I_F. Puisque $x \in App_{F^{nr}}(T^{nr})$, $\alpha'(x)$ ne dépend pas de $\alpha' \in (\alpha)$, on peut noter ce nombre $(\alpha)(x)$. Alors $\mathfrak{k}_x^{nr}$ est la somme de $\mathfrak{t}(\mathfrak{o}_{F'})^{I_F}$ et des $\mathfrak{u}_{(\alpha),-(\alpha)(x)}^{I_F}$ pour $(\alpha) \in (\Sigma)$. De même, $\mathfrak{k}_x^{+,nr}$ est la somme de $\mathfrak{t}(\mathfrak{p}_{F'})^{I_F}$ et des $\mathfrak{u}_{(\alpha),-(\alpha)(x)+1/e'}^{I_F}$ pour $(\alpha) \in (\Sigma)$. Notons $(\Sigma)(x)$ l'ensemble des $(\alpha) \in (\Sigma)$ tels que $\mathfrak{u}_{(\alpha),-(\alpha)(x)}^{I_F} \neq \mathfrak{u}_{(\alpha),-(\alpha)(x)+1/e'}^{I_F}$. Alors $\mathfrak{g}_x^{nr}$ est la somme des images par réduction de $\mathfrak{t}(\mathfrak{o}_{F'})^{I_F}$ et des $\mathfrak{u}_{(\alpha),-(\alpha)(x)}^{I_F}$ pour $(\alpha) \in (\Sigma)(x)$.

On a des descriptions analogues de $\mathfrak{k}_{y,F'}$, $\mathfrak{k}_y^{nr}$ et $\mathfrak{k}_y^{+,nr}$. Puisque $\mathfrak{k}_x^{nr} = \mathfrak{k}_y^{nr}$ et $\mathfrak{k}_x^{+,nr} = \mathfrak{k}_y^{+,nr}$, on a les égalités $\mathfrak{u}_{(\alpha),-(\alpha)(x)}^{I_F} = \mathfrak{u}_{(\alpha),-(\alpha)(y)}^{I_F}$ et $\mathfrak{u}_{(\alpha),-(\alpha)(x)+1/e'}^{I_F} = \mathfrak{u}_{(\alpha),-(\alpha)(y)+1/e'}^{I_F}$ pour tout $(\alpha) \in (\Sigma)$. Les égalités précédentes entraînent $(\Sigma)(x) = (\Sigma)(y)$. Pour $r \in \frac{1}{e'}\mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathfrak{u}_{(\alpha),r}^{I_F}$ ne détermine pas r. Mais, si $\mathfrak{u}_{(\alpha),r}^{I_F} \neq \mathfrak{u}_{(\alpha),r+1/e'}^{I_F}$, l'ensemble $\mathfrak{u}_{(\alpha),r}^{I_F}$ détermine r : c'est le plus grand élément $r' \in \frac{1}{e'}\mathbb{Z}$ tel qu'un élément de $\mathfrak{u}_{(\alpha),r}^{I_F} - \mathfrak{u}_{(\alpha),r+1/e'}^{I_F}$ appartienne à $\mathfrak{u}_{(\alpha),r'}$. Il en résulte que, pour $(\alpha) \in (\Sigma)(x) = (\Sigma)(y)$, on a $(\alpha)(x) = (\alpha)(y)$.

Il résulte de ces descriptions que, pour prouver la commutativité du diagramme (1), il suffit de prouver que $Ad(t)$ se restreint en l'identité de $\mathfrak{t}(\mathfrak{o}_{F'})^{I_F}$ et des $\mathfrak{u}_{(\alpha),-(\alpha)(x)}^{I_F}$ pour $(\alpha) \in (\Sigma)(x) = (\Sigma)(y)$. Puisque $t \in T^{nr}(F')$, $Ad(t)$ est bien l'identité sur $\mathfrak{t}(\mathfrak{o}_{F'})^{I_F}$. Soit $(\alpha) \in (\Sigma)(x)$. Puisque $t \in T^{nr}(F')$, $\alpha'(t)$ ne dépend pas de $\alpha' \in (\alpha)$, notons $(\alpha)(t)$ cette valeur. Alors $Ad(t)$ agit sur $\mathfrak{u}_{(\alpha)}$ par multiplication par $(\alpha)(t)$. Par définition de t, on a $(\alpha)(t) = \varpi_{1/n}^{(\alpha)(n\tilde{x}-n\tilde{y})} = \varpi_{1/n}^{(\alpha)(nx-ny)}$. Mais $(\alpha) \in (\Sigma)(x) = (\Sigma)(y)$ donc $(\alpha)(x) = (\alpha)(y)$. Donc $(\alpha)(t) = 1$ et $Ad(t)$ est bien l'identité sur $\mathfrak{u}_{(\alpha),-(\alpha)(x)}^{I_F}$. Cela prouve la commutativité du diagramme (1).

Le groupe $G_{\mathcal{F}}$ est engendré par son sous-tore maximal image par réduction de $T^{nr}(\mathfrak{o}_{F^{nr}})$ et par les exponentielles des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$. Quand on se restreint au tore

maximal, le diagramme (2) est commutatif pour la même raison que ci-dessus : t appartient à $T(F')$. Pour les exponentielles des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$, l'identité requise résulte de la commutativité du diagramme (1). Cela démontre la commutativité de (2) et prouve le lemme. $\square$

Ce lemme nous autorise à noter $\iota_{\mathcal{F}}$ l'homomorphisme $\iota_{x,\mathcal{F}}$ pour un élément quelconque $x \in \mathcal{F} \cap a_T(\mathbb{T}^{nr})$.

Supposons que G soit quasi-déployé et que $\mathcal{F}$ soit conservée par l'action de Γ_F^{nr}. On peut alors choisir un élément $x \in a_T(\mathbb{T}) \cap \mathcal{F}$. L'élément $\underline{v}(\tilde{x})$ est fixé par Γ_F^{nr}. On en déduit

(3) supposons que G soit quasi-déployé et que $\mathcal{F}$ soit conservée par Γ_F^{nr} ; alors l'homomorphisme $\iota_{\mathcal{F}}$ est équivariant pour les actions de Γ_F^{nr}.

2.1.12 Adhérence d'une facette

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux facettes de $App_{F^{nr}}(T^{nr})$. Supposons $\mathcal{F}' \subset \bar{\mathcal{F}}$. On a alors l'inclusion $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^{nr} \subset \mathfrak{k}_{\mathcal{F}'}^{nr}$. La réduction de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^{nr}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}'}$ est une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ est canoniquement son quotient de Levi, c'est-à-dire le quotient de $\mathfrak{p}_{\mathcal{F}}$ par son radical nilpotent. On peut l'identifier de façon unique à la sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{p}_{\mathcal{F}}$ contenant l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_{\mathcal{F}'}$ du tore maximal $T_{\mathcal{F}'}$ de $G_{\mathcal{F}'}$ déduit par réduction de T^{nr}. On a alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{\mathcal{F}} & & \\ & \searrow \iota_{\mathcal{F}} & \\ \downarrow & & \bar{\mathfrak{g}} \\ & \nearrow \iota_{\mathcal{F}'} & \\ \mathfrak{g}_{\mathcal{F}'} & & \end{array}$$

Lemme. *Le diagramme ci-dessus est commutatif.*

Preuve. On fixe $x \in \mathcal{F} \cap a_T(\mathbb{T}^{nr})$ et $y \in \mathcal{F}' \cap a_T(\mathbb{T}^{nr})$. On reprend les constructions de la preuve précédente. On est encore ramené à prouver que $Ad(t)$ se restreint en l'identité de $\mathfrak{u}_{(\alpha)}$ pour $(\alpha) \in (\Sigma)(x)$. On n'a plus $(\Sigma)(x) = (\Sigma)(y)$ mais tout-de-même l'inclusion $(\Sigma)(x) \subset (\Sigma)(y)$. Pour $(\alpha) \in (\Sigma)(x)$, on a encore $(\alpha)(x) = (\alpha)(y)$. Cela suffit pour conclure. $\square$

2.1.13 Action de $G(F^{nr})$

Soient $\mathcal{F}$ une facette de $App_{F^{nr}}(T^{nr})$ et $g \in G(F^{nr})$. Notons $\mathcal{F}' = g\mathcal{F}$ l'image de $\mathcal{F}$ par l'action de g sur $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ et supposons $\mathcal{F}' \subset App_{F^{nr}}(T^{nr})$. De $Ad(g)$ se déduisent des isomorphismes de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}'}$ et de $G_{\mathcal{F}}$ sur $G_{\mathcal{F}'}$ que l'on note tous deux $\overline{Ad(g)}$. Fixons $x \in \mathcal{F} \cap a_T(\mathbb{T}^{nr})$, posons $x' = gx$. On a $x' \in \mathcal{F}' \cap a_T(\mathbb{T}^{nr})$. Fixons des éléments $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ dans $\mathbb{T}^{nr}$ tels que $a_T(\tilde{x}) = x$ et $a_T(\tilde{x}') = x'$.

Lemme. *Il existe $z \in Z(\mathbf{G})$ et $u \in \mathbf{G}$ de sorte que*

(i) les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{cccc} & G_{\mathcal{F}} & \stackrel{\iota_{\mathcal{F}}}{\to} & \mathbf{G} & \\ \overline{Ad(g)} & \downarrow & & \downarrow & Ad(u) \\ & G_{\mathcal{F}'} & \stackrel{\iota_{\mathcal{F}'}}{\to} & \mathbf{G} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{g}_{\mathcal{F}} & \stackrel{\iota_{\mathcal{F}}}{\to} & \mathfrak{g} & \\ \overline{Ad(g)} & \downarrow & & \downarrow & Ad(u) \ ; \\ & \mathfrak{g}_{\mathcal{F}'} & \stackrel{\iota_{\mathcal{F}'}}{\to} & \mathfrak{g} & \end{array}$$

(ii) on a l'égalité $zuj_T(\tilde{x})\gamma(u)^{-1} = j_T(\tilde{x}')$.

Preuve. Puisque que x et x' appartiennent à $App_{F^{nr}}(T^{nr})$ et qu'il existe $g \in G(F^{nr})$ de sorte que $gx = x'$, on sait que $g \in K_{x'}^{0,nr} N_{G(F^{nr})}(T)$. Choisissons $g' \in N_{G(F^{nr})}(T)$ et $k_1 \in K_{x'}^{0,nr}$ tels que $g = k_1 g'$. On a encore $g'x = x'$. L'image de g' dans W est fixe par I_F. Le groupe de Weyl de G_{s_0} est W^{I_F}. Ce groupe se relève en un sous-groupe de $K_{s_0}^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(T)$. On peut donc fixer un élément $w \in K_{s_0}^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(T)$ qui a même image que g' dans W. En posant $\tau = g'w^{-1}$, on a alors $\tau \in T(F^{nr})$. Posons $t = \underline{v}(\tilde{x})$ et $t' = \underline{v}(\tilde{x}')$. Fixons une extension finie F' de F^{nr} contenue dans F^{mod} de sorte que $t, t' \in T^{nr}(F')$ et que G soit déployé sur F'. Ainsi qu'on l'a déjà dit, on a $x = t^{-1}s_0$ et $x' = t'^{-1}s_0$. L'égalité $g'x = x'$ devient $\tau w t^{-1} s_0 = t'^{-1} s_0$, c'est-à-dire $t'\tau w t^{-1} \in K_{s_0,F'}^{\dagger}$. Puisque w appartient à $K_{s_0}^{0,nr}$, il fixe s_0 et on a aussi bien $t'\tau w t^{-1} w^{-1} \in K_{s_0,F'}^{\dagger}$. Remarquons que $t'\tau w t^{-1} w^{-1} \in T(F')$. Puisque s_0 est hyperspécial dans $Imm_{F'}(G_{AD})$, on a l'égalité $K_{s_0,F'}^{\dagger} = Z(G)(F')K_{s_0,F'}^{0}$. L'intersection de ce groupe avec $T(F')$ est $Z(G)(F')T(\mathfrak{o}_{F'})$. On peut donc fixer $z_1 \in Z(G)(F')$ et $u_1 \in T(\mathfrak{o}_{F'})$ de sorte que $t'\tau w t^{-1} w^{-1} = z_1 u_1$, ou encore $t' = z_1 u_1 w t w^{-1} \tau^{-1}$. Remarquons que z_1, u_1, wtw^{-1} et τ appartiennent tous à $T(F')$ donc commutent. Par définition, on a $t_{\tilde{x}'}(\gamma) = t'\gamma(t')^{-1}$, $t_{\tilde{x}}(\gamma) = t\gamma(t)^{-1}$. On utilise l'égalité précédente en se rappelant que w et τ sont fixes par I_F. On obtient une égalité que l'on peut écrire au choix sous les formes

$$t_{\tilde{x}'}(\gamma) = z_1\gamma(z_1)^{-1}u_1 w t_{\tilde{x}}(\gamma)\gamma(w)^{-1}\gamma(u_1)^{-1},$$

$$t_{\tilde{x}'}(\gamma) = z_1\gamma(z_1)^{-1}u\gamma(u_1)^{-1} w t_{\tilde{x}}(\gamma) w^{-1}.$$

Les éléments $t_{\tilde{x}'}(\gamma)$ et $t_{\tilde{x}'}(\gamma)$ appartiennent à $T^{nr}(\mathfrak{o}_{F'})$. On a aussi $u_1\gamma(u_1)^{-1} \in T(\mathfrak{o}_{F'})$. Il en résulte que $z_1\gamma(z_1)^{-1}$ appartient aussi à $T(\mathfrak{o}_{F'})$. Posons $k_2 = t'k_1t'^{-1}$. Puisque $k_1 \in K_{x'}^{0,nr}$, k_2 appartient à $K_{s_0,F'}^{0}$ et est fixe par $Ad(t_{\tilde{x}'}(\gamma)) \circ \gamma$. On a donc $t_{\tilde{x}'}(\gamma) = k_2 t_{\tilde{x}'}(\gamma)\gamma(k_2)^{-1}$ et on obtient

$$t_{\tilde{x}'}(\gamma) = z_1\gamma(z_1)^{-1}u_2 t_{\tilde{x}}(\gamma)\gamma(u_2)^{-1},$$

où $u_2 = k_2 u_1 w$. On réduit cette égalité dans $\mathbf{G}$. Les réductions de $t_{\tilde{x}'}(\gamma)$ et $t_{\tilde{x}}(\gamma)$ sont $j_T(\tilde{x}')$ et $j_T(\tilde{x})$. Il est clair que $z_1\gamma(z_1)^{-1}$ se réduit en un élément $z \in Z(\mathbf{G})$. On note u la réduction de u_2. On obtient alors $j_T(\tilde{x}') = zuj_T(\tilde{x})\gamma(u)^{-1}$, ce qui est l'assertion (ii) de l'énoncé.

L'application $\iota_{\mathcal{F}'} \circ \overline{Ad(g)}$ se déduit par réduction de l'application $Ad(t'k_1g')$. On a $t'k_1g' = k_2t'\tau w = z_1k_2u_1wt = z_1u_2t$. Puisque z_1 est central, on a $Ad(t'k_1g') = Ad(u_2)Ad(t)$. Mais l'application qui se déduit en réduction de cet opérateur est précisément $Ad(u) \circ \iota_{\mathcal{F}}$. D'où l'assertion (i). $\square$

2.2 L'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$

2.2.1 Fonctions sur les algèbres de Lie

Pour les cinq premiers paragraphes de cette sous-section, on considère un groupe G réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$. On impose comme toujours l'hypothèse $(Hyp)_1(p)$, cf. 2.1.2.

On note $\mathbf{C}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ l'espace des fonctions sur $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$ à valeurs complexes et $C(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ le sous-espace des fonctions invariantes par conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$ (on notera aussi $C^G(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ ce dernier espace s'il y a ambiguïté sur le groupe G). On ajoute un indice "nil", resp. "cusp", resp. "nil,cusp", pour désigner le sous-espace des fonctions à support nilpotent, resp. des fonctions cuspidales, resp. des fonctions cuspidales et à support nilpotent. On munit l'espace $\mathbf{C}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ du produit hermitien défini positif

$$(f, f') = |G(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{X \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)} \bar{f}(X) f'(X)$$

pour tous $f, f' \in \mathbf{C}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$. Fixons un caractère non trivial $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$ et une forme bilinéaire symétrique $< ., . >$ sur $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$ non dégénérée et invariante par conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$. On définit la transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ de $C(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ par

$$\hat{f}(X) = q^{-dim(\mathfrak{g})/2} \sum_{Y \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)} \psi(< X, Y >) f(Y).$$

Le carré de cette transformation est l'application $f \mapsto f^-$ définie par $f^-(X) = f(-X)$.

On considérera aussi l'espace $C^G(\mathfrak{g}_{SC}(\mathbb{F}_q))$ des fonctions sur $\mathfrak{g}_{SC}(\mathbb{F}_q))$ qui sont invariantes par conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$

2.2.2 Faisceaux-caractères cuspidaux sur les algèbres de Lie

La notion de faisceau-caractère nécéssite de fixer un nombre premier $l \neq p$, ces faisceaux sont alors des $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux. On va rappeler la définition de diverses fonctions issues de ces faisceaux. Celles-ci prennent leurs valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$. On fixe un isomorphisme entre ce corps et $\mathbb{C}$ et ces fonctions deviennent des fonctions à valeurs complexes. Puisque nous ne ferons aucun raisonnement de nature géométrique, nous oublierons ce passage par le corps $\bar{\mathbb{Q}}_l$ et présenterons les objets comme s'ils étaient à valeurs complexes.

Lusztig a défini la notion de faisceau-caractère cuspidal à support nilpotent sur $\mathfrak{g}$. Il n'y en a que si $Z(G)$ est fini. Remarquons que cette notion dépend non seulement de $\mathfrak{g}$ mais du groupe G : en supposant G semi-simple, ces faisceaux-caractères ne sont en général pas les mêmes pour les groupes G_{SC} et G_{AD}, alors que leurs algèbres de Lie sont les mêmes. On note $\mathbf{FC}^G(\mathfrak{g})$ l'ensemble de ces faisceaux-caractères cuspidaux et à support nilpotent, ou simplement $\mathbf{FC}(\mathfrak{g})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le groupe G. Un tel faisceau $\mathcal{E}$ est porté par une orbite nilpotente $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Fixons $N \in \mathcal{O}_\mathcal{E}$. Alors le faisceau est déterminé par une représentation irréductible ξ_N de $Z_G(N)/Z_G(N)^0$ à valeurs dans un espace vectoriel complexe V de dimension finie. Le groupe $Z_G(N)/Z_G(N)^0$ agit par multiplication à droite sur $G/Z_G(N)^0$. On note $G/Z_G(N)^0 \times_{\xi_N} V$ le quotient de $G/Z_G(N)^0 \times V$ par la relation d'équivalence $(gZ_G(N)^0 z, v) \equiv (gZ_G(N)^0, \xi_N(z)v)$ pour tout $z \in Z_G(N)/Z_G(N)^0$. L'application

$$G/Z_G(N)^0 \times_{\xi_N} V \overset{(gZ_G(N)^0, v) \mapsto gNg^{-1}}{\to} \mathcal{O}_\mathcal{E}$$

fait apparaître $G/Z_G(N)^0 \times_{\xi_N} V$ comme un système local sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{E}$ est, à un décalage près, ce système local prolongé au-dessus de $\mathfrak{g}$ par 0 hors de $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. On a fixé un élément $N \in \mathcal{O}_\mathcal{E}$. Soit $x \in G$, posons $N' = x^{-1}Nx$. En remplaçant ci-dessus N par N' et ξ_N par la représentation $\xi_{N'} = \xi_N \circ Ad(x)$ de $Z_G(N')/Z_G(N')^0$ dans V, on obtient un faisceau isomorphe au précédent.

Le groupe $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ agit sur l'ensemble $\mathbf{FC}(\mathfrak{g})$. On note $\mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g})$ le sous-ensemble des points fixes. Pour $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g})$, on fixe une action de Frobenius sur $\mathcal{E}$. Il s'en déduit des actions sur les fibres de $\mathcal{E}$ au-dessus des éléments de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ fixés par $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ et on suppose que ces actions sont d'ordre fini. De cette action de Frobenius sur $\mathcal{E}$ se déduit une fonction caractéristique $f_{\mathcal{E}} \in C^G_{nil,cusp}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$. Elle ne dépend du choix de l'action de Frobenius que par une homothétie. Dans [47], on a défini l'espace $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ comme le sous-espace de $C(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ engendré par les fonctions caractéristiques $f_{\mathcal{E}}$ pour $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g})$. D'après Lusztig, cf. [28], l'espace $FC(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ est le sous-espace des fonctions $f \in C(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ telles que f et $\hat{f}$ sont à support dans $\mathfrak{g}_{nil}(\mathbb{F}_q)$.

On considérera aussi l'ensemble $\mathbf{FC}^G(\mathfrak{g}_{SC})$ des faisceaux-caractères cuspidaux et à support nilpotent sur $\mathfrak{g}_{SC}$ qui sont équivariants par l'action de G sur $\mathfrak{g}_{SC}$. On appelera ces faisceaux des G-faisceaux. Cela revient à remplacer dans les constructions précédentes le groupe G par $G/Z(G)^0$. Un G-faisceau caractère cuspidal à support nilpotent sur $\mathfrak{g}_{SC}$ est un tel faisceau pour G_{SC} tel que la représentation ξ_N ci-dessus de $Z_{G_{SC}}(N)/Z_{G_{SC}}(N)^0$ se factorise par la surjection $Z_{G_{SC}}(N)/Z_{G_{SC}}(N)^0 \to Z_G(N)/Z_G(N)^0$. On définit les variantes évidentes $\mathbf{FC}^G_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g}_{SC})$ et $FC^G(\mathfrak{g}_{SC}(\mathbb{F}_q))$ des objets introduits ci-dessus.

2.2.3 Faisceaux-caractères sur les algèbres de Lie

Rappelons deux propriétés importantes. Soient M un Levi de G et $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^M(\mathfrak{m}_{SC})$. D'après [24] théorème 9.2, on a

(1) les sous-groupes paraboliques de G de composante de Levi M sont tous contenus dans une même classe de conjugaison par G ;

(2) pour tout $n \in Norm_G(M)$, l'action $Ad(n)$ sur $\mathfrak{m}_{SC}$ conserve $\mathcal{E}$.

Posons $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et fixons $N \in \mathcal{O}$. Le faisceau $\mathcal{E}$ est déterminé par une représentation irréductible ξ_N de $Z_M(N)/Z_M(N)^0$ dans un $\bar{\mathbb{Q}}_l$-espace V. Comme nous l'avons dit, on considérera plutôt que V est un espace complexe. Notons $\mathfrak{z}_{reg}(M)$ le sous-ensemble des éléments de $\mathfrak{z}(M)$ dont le commutant dans G est égal à M. Posons $\mathcal{V}_{reg} = \{(X, gZ_M(N)) \in \mathfrak{g}\times G/Z_M(N); g^{-1}Xg \in N+\mathfrak{z}_{reg}(M)\}$ et $\tilde{\mathcal{V}}_{reg} = \{(X, gZ_M(N)^0) \in \mathfrak{g}\times G/Z_M(N)^0; g^{-1}Xg \in N + \mathfrak{z}_{reg}(M)\}$. Le groupe $Z_M(N)/Z_M(N)^0$ agit par multiplication à droite sur $\tilde{\mathcal{V}}_{reg}$ et le quotient de $\tilde{\mathcal{V}}_{reg}$ par cette action est $\mathcal{V}_{reg}$. On définit comme en 2.2.2 le système local $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_{reg}} = \tilde{\mathcal{V}}_{reg} \times_{\xi_N} V$ sur $\mathcal{V}_{reg}$. Notons $p_{reg} : \mathcal{V}_{reg} \to \mathfrak{g}$ l'application $(X, gZ_M(N)) \mapsto X$. Notons ∇_{reg} son image et ∇ l'adhérence de ∇_{reg}. On introduit le système local $p_{reg,*}(\mathcal{C}_{\mathcal{V}_{reg}})$ sur ∇_{reg}. On note K le complexe prolongement d'intersection de $p_{reg,*}(\mathcal{C}_{\mathcal{V}_{reg}})[dim(\nabla)]$. C'est un faisceau pervers de support ∇.

Le groupe $Norm_G(M)$ agit sur $\mathfrak{m}_{SC}$ en conservant le faisceau $\mathcal{E}$. Lusztig a prouvé que l'algèbre d'endomorphismes du complexe K était isomorphe à l'algèbre du groupe $W(M)$, cf. [24] théorème 9.2. Concrètement, cela signifie ce qui suit. Notons $Norm_G(M, N)$ le sous-groupe des $n \in Norm_G(M)$ tels que $nNn^{-1} = N$. Un élément de $n \in Norm_G(M)$ conserve $\mathcal{E}$ comme on vient de le dire, donc conserve $\mathcal{O}$. Il existe donc $m \in M$ tel que $nm \in Norm_G(M, N)$. Donc l'inclusion $Norm_G(M, N) \to Norm_G(M)$ se quotiente en une bijection $Norm_G(M, N)/Z_M(N) \simeq W(M)$. Alors la représentation ξ_N de $Z_M(N)$ dans V se prolonge en une représentation irréductible ϵ_N de $Norm_G(M, N)$. Fixons un tel prolongement. On munit $\mathcal{V}_{reg}$ de l'action $n \mapsto \tau_n$ de $Norm(M, N)$ définie par $\tau_n(X, gZ_M(N)) \mapsto (X, gZ_M(N)n^{-1})$ et on munit $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_{reg}}$ de l'action compatible $n \mapsto \tilde{\tau}_n$ de $Norm(M, N)$ définie par $\tilde{\tau}_n(X, gZ_M(N)^0, v) \mapsto (X, gZ_M(N)^0n^{-1}, \epsilon_N(n)v)$. Ces actions se quotientent en des actions de $W(M)$. On a $p_{reg} \circ \tau_n = p_{reg}$. Donc $\tilde{\tau}_n$ se descend en un endomorphisme de $p_{reg,*}(\mathcal{C}_{\mathcal{V}_{reg}})[dim(\nabla)]$, qui se prolonge en un endomorphisme de K.

On obtient ainsi une action de $W(M)$ sur K.

A l'orbite nilpotente $\mathcal{O} \subset \mathfrak{m}_{SC} \subset \mathfrak{m}$ est associée une orbite induite $\underline{\mathcal{O}}$ dans $\mathfrak{g}$: si P est un sous-groupe parabolique de G de composante de Levi M, $\underline{\mathcal{O}}$ est l'unique orbite nilpotente de $\mathfrak{g}$ telle que $\underline{\mathcal{O}} \cap (\mathcal{O} + \mathfrak{u}_P)$ soit ouvert dans $\mathcal{O} + \mathfrak{u}_P$. La restriction de K à $\underline{\mathcal{O}}$ est un système local irréductible, cf. [24] théorème 9.2. Donc, pour $\underline{N} \in \underline{\mathcal{O}}$, $\tau_{n,K}$ agit sur la fibre de K au-dessus de $\underline{N}$ par un scalaire indépendant de $\underline{N}$. L'application qui à n associe ce scalaire est un caractère de $W(M)$. On a choisi ci-dessus une représentation ϵ_N. Il y a un unique choix pour lequel le caractère précédent est trivial. Nous noterons $\epsilon_N^\flat$ cette représentation et c'est celle que nous utilisons dans la suite.

Pour tout $\rho \in Irr(W(M))$, fixons une réalisation de ρ dans un espace V_ρ. Il existe un unique faisceau pervers irréductible $K_{M,\mathcal{E}\rho}$ de sorte que

$$(3) \qquad K \simeq \oplus_{\rho \in Irr(W(M))} V_\rho \otimes K_{M,\mathcal{E},\rho},$$

l'isomorphisme entrelaçant l'action de $W(M)$ sur K en l'action évidente sur le membre de droite.

On a choisi un élément $N \in \mathcal{O}$. Soit N' un autre élément de $\mathcal{O}$. Fixons m tel que $N' = m^{-1}Nm$. En reprenant la construction en remplaçant N par N' et la représentation ξ_N de $Z_M(N)$ par la représentation $\xi_{N'} = \xi_N \circ Ad(m)$ de $Z_M(N')$, on obtient le même complexe K. L'action de $W(M)$ est inchangée, en utilisant bien sûr la représentation canonique $\epsilon_{N'}^\flat$ de $Norm_G(M, N')$. On a $Norm_G(M, N') = m^{-1}Norm_G(M, N)m$ et on vérifie que

(4) $\epsilon_{N'}^\flat = \epsilon_N^\flat \circ Ad(m)$.

Indiquons quelques propriétés de la représentation $\epsilon_N^\flat$ qui résultent de sa construction.

(5) L'application $\epsilon_N^\flat$ coïncide avec ξ_N sur $Z_M(N)$.

(6) Soit L un Levi de G contenant M. En remplaçant G par L, on définit l'application $\epsilon_N^{L,\flat}$ de $Norm_L(M, N)$. Alors la restriction de $\epsilon_N^\flat$ à $Norm_L(M, N)$ est égale à $\epsilon_N^{L,\flat}$.

(7) Supposons que G soit un produit $G_1 \times G_2$ de deux groupes réductifs connexes définis sur $\bar{\mathbb{F}}_q$. Tous nos objets se décomposent : $M = M_1 \times M_2$, $N = N_1 \oplus N_2$, $Norm_G(M, N) = Norm_{G_1}(M_1, N_1) \times Norm_{G_2}(M_2, N_2)$. Alors $\epsilon_N^\flat = \epsilon_{N_1}^{G_1,\flat} \otimes \epsilon_{N_2}^{G_2,\flat}$.

(8) Considérons un groupe réductif connexe G' défini sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ et un homomorphisme $\delta : G' \to G$. On suppose que le noyau de δ est central dans G' et que l'homomorphisme composé $G' \xrightarrow{\delta} G \to G_{AD}$ est surjectif. Notons $M' = \delta^{-1}(M)$. On a $\mathfrak{m}'_{SC} = \mathfrak{m}_{SC}$. La construction appliquée à G' et M' fournit un caractère $\epsilon_N^{G',\flat}$ de $Norm_{G'}(M', N)$. On a alors $\epsilon_N^{G',\flat} = \epsilon_N^\flat \circ \delta$.

Supposons que M est un tore, donc $N = 0$. Le système local $\mathcal{E}$ est trivial et on vérifie que

(9) si M est un tore, $\epsilon_0^\flat = 1$.

2.2.4 Calcul de $\epsilon_N^\flat$ sous des hypothèses restrictives

Soient M un Levi de G et $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^M(\mathfrak{m}_{SC})$. Posons $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\mathcal{E}$. On a défini l'orbite induite $\underline{\mathcal{O}}$. Imposons les hypothèses simplificatrices

(1) G est semi-simple, M est un Levi propre maximal et, pour $\underline{N} \in \underline{\mathcal{O}}$, le groupe $Z_G(\underline{N})/Z_G(\underline{N})^0$ est abélien.

Notons $\bar{\mathcal{O}}$ l'adhérence de $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{m}_{SC}$. Soit P un sous-groupe parabolique de G de composante de Levi M. Fixons deux éléments $N \in \mathcal{O}$ et $\underline{N} \in (N + \mathfrak{u}_P) \cap \underline{\mathcal{O}}$. Montrons que

(2) l'ensemble des $gP \in G/P$ tels que $g^{-1}\underline{N}g \in \bar{\mathcal{O}} + \mathfrak{z}(M) + \mathfrak{u}_P$ est réduit à P ;
(3) le groupe $Z_M(N)/Z_M(N)^0$ est abélien.
Il y a deux homomorphismes naturels

$$\begin{array}{ccc} & & Z_G(\underline{N})/Z_G(\underline{N})^0 \\ & \nearrow j & \\ Z_P(\underline{N})/Z_P(\underline{N})^0 & & \\ & \searrow j' & \\ & & Z_M(N)/Z_M(N)^0 \end{array}$$

D'après [24], corollaire 7.3, l'homomorphisme j' est surjectif et l'homomorphisme j est injectif. Puisque $Z_G(\underline{N})/Z_G(\underline{N})^0$ est abélien d'après (1), il en résulte que $Z_M(N)/Z_M(N)^0$ l'est aussi, d'où (3). D'après [24] corollaire 7.4 et théorème 9.2(c), le complexe K du paragraphe précédent se restreint à $\underline{\mathcal{O}}$ en un système local irréductible correspondant à une représentation de $Z_G(\underline{N})/Z_G(\underline{N})^0$ qui est induite à partir du sous-groupe $j(Z_P(\underline{N})/Z_P(\underline{N})^0)$. Puisque $Z_G(\underline{N})/Z_G(\underline{N})^0$ est abélien, une représentation induite ne peut être irréductible que si le sous-groupe à partir duquel se fait l'induction est le groupe tout entier. Donc j est surjective. On sait que $Z_G(\underline{N})^0 = Z_P(\underline{N})^0$, cf. [24] preuve de 7.3(d). La surjectivité de j équivaut donc à l'égalité $Z_G(\underline{N}) = Z_P(\underline{N})$. Montrons que

(4) $\underline{\mathcal{O}} \cap (\bar{\mathcal{O}} + \mathfrak{z}_M + \mathfrak{u}_P) = \underline{\mathcal{O}} \cap (\mathcal{O} + \mathfrak{u}_P)$.

Un élément de $\bar{\mathcal{O}} + \mathfrak{z}_M + \mathfrak{u}_P$ n'est nilpotent que si sa composante dans $\mathfrak{z}_M$ est nulle. Le membre de gauche ci-dessus est donc égal à $\underline{\mathcal{O}} \cap (\bar{\mathcal{O}} + \mathfrak{u}_P)$. Soit $\mathcal{O}' \in \mathfrak{m}_{SC,nil}/conj$ telle que $\mathcal{O}' \subset \bar{\mathcal{O}}$ et $\underline{\mathcal{O}} \cap (\mathcal{O}' + \mathfrak{u}_P) \neq \emptyset$. Introduisons l'orbite induite $\underline{\mathcal{O}}'$. Par définition de cette induite, on a $(\mathcal{O}' + \mathfrak{u}_P) \subset \bar{\underline{\mathcal{O}}}'$, donc $\underline{\mathcal{O}} \subset \bar{\underline{\mathcal{O}}}'$ puis $dim(\underline{\mathcal{O}}) \leq dim(\underline{\mathcal{O}}')$. D'après [33] théorème 1.3(a), on a $dim(\underline{\mathcal{O}}) = dim(\mathcal{O}) + 2dim(U_P)$, $dim(\underline{\mathcal{O}}') = dim(\mathcal{O}') + 2dim(U_P)$. Donc $dim(\mathcal{O}) \leq dim(\mathcal{O}')$. Avec l'hypothèse $\mathcal{O}' \subset \bar{\mathcal{O}}$, cela entraîne $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$. L'assertion (4) en résulte.

D'après (4), l'ensemble des $gP \in G/P$ tels que $g^{-1}\underline{N}g \in \bar{\mathcal{O}} + \mathfrak{z}(M) + \mathfrak{u}_P$ est égal à celui des $gP \in G/P$ tels que $g^{-1}\underline{N}g \in \mathcal{O} + \mathfrak{u}_P$. D'après [33] théorème 1.3(d), celui-ci est égal à $Z_G(\underline{N})P$. On a vu plus haut que $Z_G(\underline{N}) \subset P$, donc l'ensemble précédent est égal à P. Cela prouve (2).

D'après (3), la représentation ξ_N est un caractère et son espace V est égal à $\mathbb{C}$. La représentation $\epsilon_N^\flat$ est elle-aussi un caractère.

Le complexe K admet la description suivante. Posons $\mathcal{W} = \{(X, gZ_M(N)U_P) \in \mathfrak{g} \times G/Z_M(N)U_P; g^{-1}Xg \in N + \mathfrak{z}(M) + \mathfrak{u}_P\}$. Posons $\tilde{\mathcal{W}} = \{(X, gZ_M(N)^0U_P) \in \mathfrak{g} \times G/Z_M(N)^0U_P; g^{-1}Xg \in N + \mathfrak{z}(M) + \mathfrak{u}_P\}$. Le groupe $Z_M(N)/Z_M(N)^0$ agit par multiplication à droite sur $\tilde{\mathcal{W}}$ et le quotient de $\tilde{\mathcal{W}}$ par cette action est $\mathcal{W}$. On définit le système local $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{W}} \otimes_{\xi_N} \mathbb{C}$ sur $\mathcal{W}$. Introduisons le sous-ensemble $\mathcal{W}_{reg}$ de $\mathcal{W}$ formé des $(X, gZ_M(N)U_P)$ tels que $g^{-1}Xg \in N + \mathfrak{z}_{reg}(M) + \mathfrak{u}_P$ et le sous-ensemble similaire $\tilde{\mathcal{W}}_{reg}$ de $\tilde{\mathcal{W}}$. Les applications $\iota : (X, gZ_M(N)) \mapsto (X, gZ_M(N)U_P)$ et $\tilde{\iota} : (X, gZ_M(N)^0) \mapsto (X, gZ_M(N)^0U_P)$ sont des isomorphismes de $\mathcal{V}_{reg}$ sur $\mathcal{W}_{reg}$ et de $\tilde{\mathcal{V}}_{reg}$ sur $\tilde{\mathcal{W}}_{reg}$. Le système local $\iota^*(\mathcal{C})$ sur $\mathcal{V}_{reg}$ est le système $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_{reg}}$. On note $p_1 : \mathcal{W} \to \mathfrak{g}$ la projection $(X, gZ_M(N)U_P) \mapsto X$. Son image est la clôture de $p_1(\mathcal{W}_{reg})$, qui est égal à $p_{reg}(\mathcal{V}_{reg}) = \nabla_{reg}$. Donc l'image de p_1 est ∇. Lusztig prouve que K est égal à $p_{1!}(\mathcal{C})[dim(\nabla)]$, cf. [24] proposition 4.5.

Puisque M est un Levi propre maximal, le groupe $Norm_G(M)/M$ a au plus 2 éléments. La propriété 2.2.3(1) implique que ce groupe a bien 2 éléments. La restriction de $\epsilon_N^\flat$ à $Z_M(N)$ est ξ_N. Pour déterminer complètement $\epsilon_N^\flat$, il suffit de fixer $n \in Norm_G(M, N) - Z_M(N)$ et de calculer $\epsilon_N^\flat(n)$.

Puisque M est un Levi propre et maximal, $\mathfrak{z}(M)$ est une droite. Fixons-en un générateur Z. Il appartient à $\mathfrak{z}_{reg}(M)$. Soit $\nu \in \bar{\mathbb{F}}_q^\times = \mathbb{G}_m(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Il existe un unique $u_\nu \in U_P$ tel que $u_\nu^{-1}(\nu Z + \underline{N})u_\nu = \nu Z + N$. L'application $\nu \mapsto u_\nu$ est algébrique, c'est-à-dire est un morphisme algébrique de $\mathbb{G}_m$ dans U_P. Puisque la variété G/P est projective, le morphisme $\nu \mapsto u_\nu n^{-1}P$ de $\mathbb{G}_m$ dans G/P se prolonge en un morphisme de $\mathbb{A}^1$ dans G/P, autrement dit se prolonge en 0. Notons g_0P sa valeur en 0. Pour $\nu \neq 0$, on a $nu_\nu^{-1}(\nu Z + \underline{N})u_\nu n^{-1} = -\nu Z + N$. On en déduit que $g_0^{-1}\underline{N}g_0 \in \bar{\mathcal{O}} + \mathfrak{u}_P$. D'après (2), on a $g_0P = P$. Notons P^{op} le sous-groupe parabolique de G de composante de Levi M et opposé à P. Puisque l'application $\underline{v} \mapsto \underline{v}P$ de $U_{P^{op}}$ dans G/P est une carte de la variété G/P au voisinage de $P \in G/P$, il existe un voisinage de Zariski $\mathbb{A}'$ de 0 dans $\mathbb{A}^1$ tel que notre morphisme de $\mathbb{A}^1$ dans G/P se relève en un morphisme de $\mathbb{A}'$ dans $U_{P^{op}}$, que l'on note $\nu \mapsto \underline{v}'_\nu$. On a $\underline{v}'_0 = 1$. Pour $\nu \neq 0$, on a $u_\nu n^{-1}P = \underline{v}'_\nu P$ et on peut écrire de façon unique $u_\nu n^{-1} = \underline{v}'_\nu m_\nu v'_\nu$ avec $m_\nu \in M$ et $v'_\nu \in U_P$. Les applications $\nu \mapsto m_\nu$ et $\nu \mapsto v'_\nu$ sont algébriques. L'égalité $nu_\nu^{-1}(\nu Z + \underline{N})u_\nu n^{-1} = -\nu Z + N$ équivaut à

$$\underline{v}_\nu'^{-1}(\nu Z + \underline{N})\underline{v}'_\nu = m_\nu v'_\nu(-\nu Z + N)v_\nu'^{-1}m_\nu^{-1}.$$

On décompose chaque terme selon la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_{P^{op}} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{u}_P$. Le membre de gauche se prolonge en $\nu = 0$, sa valeur en 0 est $\underline{N}$, dont la composante dans $\mathfrak{m}$ est N. La composante dans $\mathfrak{m}$ du membre de droite est $-\nu Z + m_\nu N m_\nu^{-1}$. Donc l'application $\nu \mapsto m_\nu N m_\nu^{-1}$ se prolonge en un morphisme de $\mathbb{A}'$ dans $\mathcal{O}$ dont la valeur en $\nu = 0$ est N. L'application $m \mapsto mNm^{-1}$ de M dans $\mathcal{O}$ est submersive en $m = 1$. Il existe donc un voisinage $\mathbb{A}''$ de 0 dans $\mathbb{A}'$ tel que notre application $\nu \mapsto m_\nu N m_\nu^{-1}$ se relève en un morphisme de $\mathbb{A}''$ dans M dont la valeur en 0 est 1. On note $\nu \mapsto m'_\nu$ ce morphisme. Pour $\nu \neq 0$, on a alors $m_\nu = m'_\nu z_\nu$ où $z_\nu \in Z_M(N)$. L'application $\nu \mapsto z_\nu$ est algébrique et il en est de même de $\nu \mapsto z_\nu Z_M(N)^0 \in Z_M(N)/Z_M(N)^0$. Puisque ce dernier groupe est fini, l'application $\nu \mapsto z_\nu Z_M(N)^0$ est constante. On peut donc fixer $z \in Z_M(N)^0$ de sorte que $z_\nu = zz_\nu^0$, avec $z_\nu^0 \in Z_M(N)^0$. Posons $\lambda = \epsilon_N^\flat(n)$. Pour $\nu \neq 0$, le triplet $(\nu Z + \underline{N}, u_\nu Z_M(N)^0, 1)$ appartient à $\tilde{\mathcal{V}}_{reg} \times_{\xi_N} \mathbb{C}$. Son image par $\tilde{\tau}_n$ est $(\nu Z + \underline{N}, u_\nu n^{-1} Z_M(N)^0, \lambda) = (\nu Z + \underline{N}, \underline{v}'_\nu m'_\nu z z_\nu^0 v'_\nu Z_M(N)^0, \lambda)$. En poussant ces éléments dans $\tilde{\mathcal{W}}_{reg} \otimes_{\xi_N} \mathbb{C}$, on a $\tilde{\iota}(\nu Z + \underline{N}, u_\nu Z_M(N)^0, 1) = (\nu Z + \underline{N}, Z_M(N)^0 U_P, 1)$ et $\tilde{\iota}(\nu Z + \underline{N}, \underline{v}'_\nu m'_\nu z z_\nu^0 v'_\nu Z_M(N)^0, \lambda) = (\nu Z + \underline{N}, \underline{v}'_\nu m'_\nu Z_M(N)^0 U_P, \lambda\xi_N(z))$. Les composantes dans $\tilde{\mathcal{W}}_{reg}$ de ces deux termes se prolongent en $\nu = 0$ et leur valeur commune en ce point est $(\underline{N}, Z_M(N)^0 U_P)$. Donc $\tau_{n,K}$ agit sur la fibre de K au-dessus de $\underline{N}$ par le scalaire $\lambda\xi_N(z)$. Par définition de $\epsilon_N^\flat(n)$, ce scalaire vaut 1. D'où l'égalité

(5) $\epsilon_N^\flat(n) = \xi_N(z)^{-1}$.

Considérons le cas particulier où

(6) G est semi-simple, M est un Levi propre maximal et $\mathcal{O}$ est l'orbite régulière de $\mathfrak{m}_{SC}$.

L'hypothèse (1) est vérifiée : $\underline{\mathcal{O}}$ est l'orbite régulière de $\mathfrak{g}$ et on a $Z_G(\underline{N})/Z_G(\underline{N})^0 \simeq Z(G)/Z(G)^0$. Fixons un sous-tore maximal T de M et un sous-groupe de Borel B^M de M contenant T de sorte que $N \in \mathfrak{u}_{B^M}$. Il existe alors un sous-groupe $R \subset U_{B^M}$ tel que $Z_M(N) = Z(M)R$. Pour $\nu \in \mathbb{A}''$, on écrit $z_\nu^0 = z_\nu''^0 r''_\nu$ avec $z_\nu''^0 \in Z(M)^0$ et $r''_\nu \in R$. Posons $B = B^M U_P$. Le groupe B est un sous-groupe de Borel de G. On note $B^{M,opp}$ et B^{opp} les sous-groupes de Borel opposés de B^M et B. Puisque $m'_0 = 1$, il existe un voisinage $\mathbb{A}^\dagger$ de 0 dans $\mathbb{A}''$ de sorte que, pour $\nu \in \mathbb{A}^\dagger$, on puisse écrire $m'_\nu = \underline{v}''_\nu t''_\nu v''_\nu$ avec $\underline{v}''_\nu \in U_{B^{M,opp}}$, $t''_\nu \in T$, $v''_\nu \in U_{B^M}$. Les applications $\nu \mapsto \underline{v}''_\nu$, $\nu \mapsto t''_\nu$ et $\nu \mapsto v''_\nu$ sont algébriques dans $\mathbb{A}^\dagger$ et valent 1 en $\nu = 0$. Pour $\nu \neq 0$, posons $\underline{v}_\nu = \underline{v}'_\nu \underline{v}''_\nu$, $t_\nu = t''_\nu z z_\nu^{0''}$, $v_\nu = v''_\nu r''_\nu v'_\nu$. On a $\underline{v}_\nu \in U_{B^{opp}}$, $t_\nu \in T$, $v_\nu \in U_B$ et on a l'égalité

(7) $u_\nu n^{-1} = \underline{v}_\nu t_\nu v_\nu$.

L'application $\nu \mapsto \underline{v}_\nu$ se prolonge algébriquement à $\mathbb{A}^\dagger$ et sa valeur en 0 est 1. L'application $\nu \mapsto t_\nu$ ne se prolonge pas forcément à $\mathbb{A}^\dagger$. Mais notons $\mathbf{t}_\nu$, resp. $\mathbf{z}$, l'image de t_ν, resp. z, dans $T/Z(M)^0$. Alors l'application $\nu \mapsto \mathbf{t}_\nu$ se prolonge à $\mathbb{A}^\dagger$ et sa valeur en 0 est $\mathbf{z}$. Cela détermine $\mathbf{z}$, donc aussi $\xi_N(z)$.

2.2.5 Fonctions caractéristiques

On reprend les constructions du paragraphe 2.2.3 en supposant que M est un $\mathbb{F}_q$-Levi de G et que $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^M_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{m}_{SC})$. On suppose $\mathcal{E}$ muni d'une action de Frobenius, c'est-à-dire que l'on fixe un isomorphisme $Fr^*(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{E}$. Concrètement, l'orbite $\mathcal{O} := \mathcal{O}_\mathcal{E}$ est conservée par l'action galoisienne et on choisit l'élément N dans $\mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. La représentation ξ_N de $Z_M(N)$ dans V est alors conservée par l'action de Frobenius. On fixe un automorphisme r_N de V tel que $\xi_N(z)r_N = r_N\xi_N(Fr(z))$ pour tout $z \in Z_M(N)$. On suppose r_N d'ordre fini. L'isomorphisme $Fr^*(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{E}$, c'est-à-dire

$$Fr^*(M/Z_M(N)^0 \times_{\xi_N} V) \to M/Z_M(N)^0 \times_{\xi_N} V$$

est alors $(mZ_M(N)^0, v) \mapsto (Fr^{-1}(m)Z_M(N)^0, r_N(v))$. Soit N' un autre élément de $\mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$, fixons $m \in M$ tel que $N' = m^{-1}Nm$ et remplaçons dans la construction ci-dessus l'élément N par N' et ξ_N par $\xi_{N'} = \xi_N \circ Ad(m)$. Pour obtenir la même action de Frobenius sur $\mathcal{E}$, on doit choisir l'isomorphisme

(1) $r_{N'} = r_N\xi_N(Fr(m)m^{-1})$.

Remarquons que le prolongement canonique $\epsilon^\flat_N$ de ξ_N à $Norm_G(M,N)$ vérifie la relation

(2) $\epsilon^\flat_N(n)r_N = r_N\epsilon^\flat_N(Fr(n))$ pour tout $n \in Norm_G(M,N)$.

Le groupe $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ agit sur $W(M)$. Il agit aussi sur $Irr(W(M))$. Notons $Irr_{\mathbb{F}_q}(W(M))$ le sous-ensemble des représentations conservées par cette action. Pour tout $\rho \in Irr_{\mathbb{F}_q}(W(M))$, fixons un prolongement continu $\rho^\flat$ de ρ au produit semi-direct $W(M) \rtimes \Gamma_{\mathbb{F}_q}$, "continu" signifiant qu'il est trivial sur $\Gamma_{\mathbb{F}_{q^n}}$ pour un certain entier $n \geq 1$. Evidemment, si $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ agit trivialement sur $W(M)$, on suppose que $\rho^\flat$ est triviale sur $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. Pour une représentation $\rho \in Irr(W(M)) - Irr_{\mathbb{F}_q}(W(M))$, posons $\rho' = \rho \circ Fr$ et fixons simplement un isomorphisme $\rho^\flat(Fr^{-1}) : V_\rho \to V_{\rho'}$ tel que $\rho^\flat(Fr^{-1})\rho(Fr(w)) = \rho'(w)\rho^\flat(Fr^{-1})$ pour tout $w \in W(M)$. De l'isomorphisme $Fr^*(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{E}$ se déduit naturellement un isomorphisme $Fr^*(K) \simeq K$. Pour tout $\rho \in Irr(W(M))$, il existe un unique isomorphisme $Fr^*(K_{M,\mathcal{E},\rho}) \simeq K_{M,\mathcal{E},\rho\circ Fr}$ de sorte que, par l'isomorphisme 2.2.3(3), notre isomorphisme $Fr^*(K) \simeq K$ s'identifie à la somme sur $\rho \in Irr(W(M))$ des produits tensoriels des isomorphismes $Fr^*(K_{M,\mathcal{E},\rho}) \simeq K_{M,\mathcal{E},\rho\circ Fr}$ et $\rho^\flat(Fr^{-1}) : V_\rho \to V_{\rho\circ Fr}$. En particulier, pour $\rho \in Irr_{\mathbb{F}_q}(W(M))$, $K_{M,\mathcal{E},\rho}$ est ainsi muni d'une action de Frobenius. On note $\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho}$ sa fonction caractéristique.

On dit que deux éléments $w, w' \in W(M)$ sont Fr-conjugués si et seulement s'il existe $u \in W(M)$ tel que $w = Fr(u)w'u^{-1}$.

Remarque. La place du Frobenius dans cette relation est un peu inhabituelle. On l'a choisie par souci de cohérence avec certaines définitions de Lusztig.

On note $W(M)/Fr-conj$ l'ensemble des classes de Fr-conjugaison. Soit $w \in W(M)$. Fixons un représentant $n \in Norm_G(M,N)$ de w et un élément $g \in G$ tel que $gFr(g)^{-1} = n^{-1}$. Posons $M_w = g^{-1}Mg$. Alors M_w est défini sur $\mathbb{F}_q$. De $\mathcal{E}$ se déduit naturellement un M_w-faiceau-caractère cuspidal $\mathcal{E}_w$ sur $\mathfrak{m}_{w,SC}$. On pose $\mathcal{O}_w = g^{-1}\mathcal{O}g$, $N_w = g^{-1}Ng$ et on définit la représentation ξ_{N_w} de $Z_{M_w}(N_w)$ dans V par $\xi_{N_w}(z) = \xi_N(gzg^{-1})$ pour tout

$z \in Z_{M_w}(N_w)$. Alors $\mathcal{E}_w$ est le faisceau-caractère porté par l'orbite $\mathcal{O}_w$ qui est associé à la représentation ξ_{N_w} de $Z_{M_w}(N_w)$. On a $N_w \in \mathcal{O}_w^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. On définit l'automorphisme $r_{N_w} = r_N \epsilon_N^\flat(n)$ de V et on munit $\mathcal{E}_w$ de l'action de Frobenius définie comme plus haut par l'automorphisme r_{N_w}. On reprend alors la construction de 2.2.3 où l'on remplace M et $\mathcal{E}$ par M_w et $\mathcal{E}_w$. On obtient un complexe K_w muni d'une action de Frobenius. On note $\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},w}$ sa fonction caractéristique. Elle ne dépend pas des choix effectués (excepté bien sûr celui de l'action de Frobenius de départ sur $\mathcal{E}$) et ne dépend que de la classe de Fr-conjugaison de w. Pour $\rho \in Irr_{\mathbb{F}_q}(W(M))$, on a alors l'égalité

(3) $\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho} = |W(M)|^{-1} \sum_{w \in W(M)} trace(\rho^\flat(w^{-1}Fr))\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},w}$,

cf. [25] 10.4.5.

Pour $w \in W(M)$, notons $f_{\mathcal{E}_w}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{E}_w$ muni de l'action de Frobenius définie ci-dessus. C'est une fonction à support nilpotent sur $\mathfrak{m}_{w,SC}(\mathbb{F}_q)$, que l'on peut considérer comme une fonction à support nilpotent sur $\mathfrak{m}(\mathbb{F}_q)$. Elle est invariante par conjugaison par $M_w(\mathbb{F}_q)$. On dispose de l'induction de Deligne-Lusztig $R_{M_w}^G : C(\mathfrak{m}_w(\mathbb{F}_q)) \to C(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$. On note $Q_{M,\mathcal{E},w}$ l'image de $f_{\mathcal{E}_w}$ par $R_{M_w}^G$. D'après [29] théorème 1.14, on a l'égalité

(4) $Q_{M,\mathcal{E},w}(X) = (-1)^{dim(Z(M)^0)}\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},w}(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$.

Soit $g \in G(\mathbb{F}_q)$, posons $M' = g^{-1}Mg$. L'application $Ad(g)^{-1}$ transporte $\mathcal{E}$ en un faisceau $\mathcal{E}'$ sur $\mathfrak{m}'_{SC}$, qui est muni d'une action de Frobenius. Elle établit aussi une bijection $w \mapsto w'$ de $W(M)$ sur $W(M')$. Il est clair que $Q_{M',\mathcal{E}',w'} = Q_{M,\mathcal{E},w}$.

Pour tout Levi H de G défini sur $\mathbb{F}_q$, posons $W_{\mathbb{F}_q}(H) = Norm_{G(\mathbb{F}_q)}(H)/H(\mathbb{F}_q)$. Les deux relations suivantes résultent du corollaire 9.11 de [25]. Pour tout $w, w' \in W(M)$, on a

$$(5)(Q_{M,\mathcal{E},w}, Q_{M,\mathcal{E},w'}) = \begin{cases} |W_{\mathbb{F}_q}(M_w)||Z(M_w)^0(\mathbb{F}_q)|^{-1}q^{dim(\mathcal{O}_\mathcal{E})-dim(M_{SC})} & \text{si } w \text{ et } w' \text{ sont } Fr- \text{ conjugués} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'autre part, soient $(M', \mathcal{E}', w')$ vérifiant les mêmes propriétés que $(M, \mathcal{E}, w)$. On a l'égalité

(6) $(Q_{M,\mathcal{E},w}, Q_{M',\mathcal{E}',w'}) = 0$ si $(M', \mathcal{E}')$ n'est pas conjugué à $(M, \mathcal{E})$ par un élément de $G(\mathbb{F}_q)$.

D'autres fonctions nous seront utiles. Soit M un $\mathbb{F}_q$-Levi de G tel que $\mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}^M(\mathfrak{m}_{SC})$ soit non vide. Soit $w \in W(M)$. De l'application $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}_w$ de $\mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}^M(\mathfrak{m}_{SC})$ dans $\mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}^{M_w}(\mathfrak{m}_{w,SC})$ se déduit une application $f_\mathcal{E} \mapsto f_{\mathcal{E}_w}$ qui se prolonge par linéarité en un isomorphisme $\iota_{M_w,M}^\flat : FC^M(\mathfrak{m}_{SC}(\mathbb{F}_q)) \to FC^{M_w}(\mathfrak{m}_{w,SC}(\mathbb{F}_q))$. Soit $\varphi \in FC^{M_w}(\mathfrak{m}_{w,SC}(\mathbb{F}_q))$. Fixons un élément $X_w \in \mathfrak{z}_{reg}(M_w, \mathbb{F}_q)$. Notons $\varphi_{X_w}^\natural$ la fonction sur $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$, à support dans $X_w + \mathfrak{m}_{w,SC}(\mathbb{F}_q)$, telle que, pour $Y \in \mathfrak{m}_{w,SC}(\mathbb{F}_q)$, on ait $\varphi_{X_w}^\natural(X_w + Y) = \varphi(Y)$. Notons φ_{X_w} la fonction sur $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$ définie par

$$\varphi_{X_w}(Z) = |M_w(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{g \in G(\mathbb{F}_q)} \varphi_{X_w}^\natural(g^{-1}Zg).$$

Notons enfin $\mathcal{Q}_\varphi$ la restriction à $\mathfrak{g}_{nil}(\mathbb{F}_q)$ de $\hat{\varphi}_{X_w}$. Cette fonction ne dépend pas du choix de X_w. Soit $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}^M(\mathfrak{m}_{SC})$, appliquons la construction à $\varphi = f_{\mathcal{E}_w}$. On a

(7) $\mathcal{Q}_{f_{\mathcal{E}_w}}$ est la restriction à $\mathfrak{g}_{nil}(\mathbb{F}_q)$ de $\hat{Q}_{M,\mathcal{E},w}$.

Cette égalité a été prouvée par Kazhdan dans le cas où M_w est un tore, cf. [16]. Dans le cas général, la proportionnalité des deux fonctions résulte de [28] 7(a). On a donné une

preuve de l'égalité en [43] proposition II.8. Dans cette référence, le groupe est supposé classique mais cette hypothèses ne sert pas pour la preuve en question.

L'espace $C_{nil}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ a pour base la famille des fonctions $\mathcal{Q}_\varphi$, quand M décrit les $\mathbb{F}_q$-Levi de G, à conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$ près, tels que $\mathbf{FC}^M_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{m}_{SC}) \neq \emptyset$, w décrit $W(M)/Fr-conj$ et φ décrit une base de $FC^{M_w}(\mathfrak{m}_{w,SC}(\mathbb{F}_q))$.

Notons $W(M)_{Fr-reg}$ le sous-ensemble des $w \in W(M)$ tels que l'action de wFr^{-1} dans $X_{*,\mathbb{Q}}(Z(M)^0)/X_{*,\mathbb{Q}}(Z(G)^0)$ n'ait pas de point fixe non nul. Il est conservé par Fr-conjugaison. On note $W(M)_{Fr-reg}/Fr-conj$ l'ensemble des classes de Fr-conjugaison dans $W(M)_{Fr-reg}$. Alors $C_{nil,cusp}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q))$ a pour base la famille des fonctions $\mathcal{Q}_\varphi$, quand M décrit les $\mathbb{F}_q$-Levi de G, à conjugaison par $G(\mathbb{F}_q)$ près, tels que $\mathbf{FC}^M_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{m}_{SC}) \neq \emptyset$, w décrit $W(M)_{Fr-reg}/Fr-conj$ et φ décrit une base de $FC^{M_w}(\mathfrak{m}_{w,SC}(\mathbb{F}_q))$, cf. [25] théorème 1.14.

2.2.6 Les espaces $I(\mathfrak{g}(F))$ et $FC(\mathfrak{g}(F))$

Pour la fin de la section 1, G est un groupe réductif connexe défini sur F et on suppose vérifiée l'hypothèse $(Hyp)_2(p)$, cf. 2.1.2.

Fixons un caractère non trivial ψ de F et une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée $< .,. >$ sur $\mathfrak{g}(F)$, invariante par l'action par conjugaison de $G(F)$. On définit la transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par la formule usuelle

$$\hat{f}(X) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y)\psi(< X, Y >)\, dY,$$

où dY est la mesure autoduale. Le carré de cette transformation est l'application $f \mapsto f^-$, où $f^-(X) = f(-X)$. On peut choisir et on choisit la forme $< .,. >$ de sorte que, pour tout $\mathcal{F} \in Fac(G)$, on ait l'égalité $\hat{\mathbf{1}}_{\mathfrak{k}_\mathcal{F}} = |\mathfrak{g}_\mathcal{F}(\mathbb{F}_q)|^{1/2}\mathbf{1}_{\mathfrak{k}^+_\mathcal{F}}$, où l'on a noté $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_\mathcal{F}}$ et $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}^+_\mathcal{F}}$ les fonctions caractéristiques de $\mathfrak{k}_\mathcal{F}$ et $\mathfrak{k}^+_\mathcal{F}$. La mesure sur $\mathfrak{g}(F)$ vérifie alors l'égalité $mes(\mathfrak{k}^+_\mathcal{F}) = |\mathfrak{g}_\mathcal{F}(\mathbb{F}_q)|^{-1/2}$ pour tout $\mathcal{F} \in Fac(G)$. On peut relever cette mesure en une mesure de Haar sur $G(F)$ telle que $mes(K^+_\mathcal{F}) = mes(\mathfrak{k}^+_\mathcal{F})$ pour tout $\mathcal{F}$. Des mesures analogues seront choisies sur tout autre groupe réductif connexe. Pour $\mathcal{F} \in Fac(G)$, la transformation de Fourier se descend naturellement en une transformation de l'espace $C(\mathfrak{g}_\mathcal{F}(\mathbb{F}_q))$ et c'est celle-ci que nous utilisons.

Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ et $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$, on définit l'intégrale orbitale

$$I^G(X, f) = d^G(X)^{1/2} \int_{G_X(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}Xg)\, dg,$$

où d^G est le discriminant de Weyl. On note $C^\infty_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace des $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ telles que $I^G(X, f) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ tel que $X \notin \mathfrak{g}_{ell}(F)$. On note $I(\mathfrak{g}(F))$ le quotient de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par le sous-espace des fonctions f telles que $I^G(X, f) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$. Les intégrales orbitales se descendent en des formes linéaires sur $I(\mathfrak{g}(F))$. On note $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ l'image de $C^\infty_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ dans $I(\mathfrak{g}(F))$.

Pour $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on définit l'intégrale orbitale stable $S^G(X, f)$ comme la somme des $I^G(X', f)$ où X' parcourt un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans la classe de conjugaison stable de X. On note $SI(\mathfrak{g}(F))$ le quotient de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par le sous-espace des fonctions f telles que $S^G(X, f) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$. C'est aussi un quotient de $I(\mathfrak{g}(F))$. On note $SI_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ l'image de $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ dans $SI(\mathfrak{g}(F))$.

Pour une facette $\mathcal{F} \in Fac(G)$, l'espace des fonctions sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ s'identifie à un sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$: une fonction sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q) \simeq \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^+$ se relève en une fonction sur $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ puis s'étend à $\mathfrak{g}(F)$ par 0 hors de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$. On note $FC(\mathfrak{g}(F))$ l'image dans $I(\mathfrak{g}(F))$ de l'espace

$$\sum_{s \in S(G)} FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)).$$

On sait qu'en fait, cette image est contenue dans le sous-espace $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$, cf. [47] proposition 10.

La transformation de Fourier se descend en une transformation de l'espace $I(\mathfrak{g}(F))$. L'espace $FC(\mathfrak{g}(F))$ est le sous-espace des $f \in I(\mathfrak{g}(F))$ telles que $I^G(X, f) = I^G(X, \hat{f}) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}(F) - \mathfrak{g}_{tn}(F)$., cf. [47] proposition 10.

Le groupe $G(F)$ agit par conjugaison sur l'espace $FC(\mathfrak{g}_{SC}(F))$. On note $FC^G(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ le sous-espace des invariants.

Soit $s \in Imm(G_{AD})$. En général s n'est pas un sommet de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$. C'est seulement l'unique point fixe par l'action de Frobenius dans une facette de cet immeuble qui est conservée par cette action. Toutefois, on a la propriété suivante.

Lemme. *Soit $s \in Imm(G_{AD})$. Supposons que $\mathbf{FC}(\mathfrak{g}_s) \neq \emptyset$. Alors s est un sommet de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$.*

Preuve. Si s appartient à une facette de dimension strictement positive, le groupe $Z(G_s)^0$ est non trivial et $\mathbf{FC}(\mathfrak{g}_s) = \emptyset$ comme on l'a dit en 2.2.2. $\square$

2.2.7 Les espaces $I_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}(F))$ et $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$

Fixons un ensemble de représentants $Endo_{ell}(G)$ des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de G, cf. [34] I.1.5. A chaque telle donnée $\mathbf{G}'$ est associé un groupe endoscopique G' et on fixe un facteur de transfert $\Delta^{\mathbf{G}'}$ sur $\mathfrak{g}'(F) \times \mathfrak{g}(F)$. Cela permet de définir le transfert endoscopique

$$transfert^{\mathbf{G}'} : I(\mathfrak{g}(F)) \to SI(\mathfrak{g}'(F)).$$

On note $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$ le sous-espace des $f \in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ tels que $transfert^{\mathbf{G}''}(f) = 0$ pour tout $\mathbf{G}'' \in Endo_{ell}(G)$, $\mathbf{G}'' \neq \mathbf{G}'$. D'après [34] proposition I.4.11, on a l'égalité

$$I_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)} I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}').$$

Cette décomposition est stable par transformation de Fourier.

Pour $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$, on pose $FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}') = FC(\mathfrak{g}(F)) \cap I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$. D'après [47] proposition 12, on a l'égalité

$$FC(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)} FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}').$$

Il y a une unique donnée endoscopique elliptique de G, à équivalence près, dont le groupe endoscopique associé est une forme intérieure quasi-déployée G^* de G. On l'appelle la donnée principale et on la note $\mathbf{G}$. On pose simplement $I_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}(F)) = I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G})$ et $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = FC(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G})$. Si G est semi-simple, l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est insensible aux isogénies, c'est-à-dire est le même pour G, G_{SC} et G_{AD}. L'application naturelle $I_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}(F)) \to SI_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ est bijective.

2.2.8 Décomposition de l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$

Fixons un ensemble $\underline{S}(G)$ de représentants des orbites de l'action de $G(F)$ dans $S(G)$. D'après [47] 10(2), l'application naturelle

$$(1) \qquad \oplus_{s\in\underline{S}(G)} FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))^{K_s^\dagger} \to FC(\mathfrak{g}(F))$$

est bijective. Soit $s \in S(G)$. Puisqu'on peut choisir $\underline{S}(G)$ contenant s, l'application naturelle $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))^{K_s^\dagger} \to FC(\mathfrak{g}(F))$ est injective. On note $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ le sous-espace des éléments de $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))^{K_s^\dagger}$ dont l'image dans $FC(\mathfrak{g}(F))$ appartient à $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

Soit $s \in S(G)$. Considérons l'orbite de s pour l'action de $G(F)$ sur $Imm(G_{AD})$. Elle se décompose en un nombre fini d'orbites pour l'action de $G_{SC}(F)$. Fixons un ensemble de représentants $\underline{S}(s)$ de ces dernières orbites. Pour $s' \in \underline{S}(s)$, fixons $g_{s'} \in G(F)$ tel que $g_{s'}s = s'$. De $Ad(g_{s'})$ se déduit un isomorphisme $C_{nil,cusp}^{G_{SC,s}}(\mathfrak{g}_{SC,s}(\mathbb{F}_q)) \to C_{nil,cusp}^{G_{SC,s'}}(\mathfrak{g}_{SC,s'}(\mathbb{F}_q))$ encore noté $Ad(g_{s'})$. Posons $\underline{S}(G_{SC}) = \cup_{s\in\underline{S}(G)}\underline{S}(s)$. Alors $\underline{S}(G_{SC})$ est un ensemble de représentants des orbites de l'action de $G_{SC}(F)$ dans $S(G)$. On a l'isomorphisme analogue à (1) :

$$(2) \qquad \oplus_{s'\in\underline{S}(G_{SC})} FC(\mathfrak{g}_{SC,s'}(\mathbb{F}_q)) \to FC(\mathfrak{g}_{SC}(F)).$$

On a supprimé les exposants $K_{SC,s'}^\dagger$ car, G_{SC} étant simplement connexe, on a $K_{SC,s'}^\dagger = K_{SC,s'}^0$ et l'invariance par ce groupe est automatique.

Supposons $A_G^{nr} = \{1\}$. Pour tout $s \in S(G)$, on a l'égalité $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_{SC,s}$. L'espace $C_{nil,cusp}^{G_s}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ s'identifie à l'espace d'invariants $(C_{nil,cusp}^{G_{SC,s}}(\mathfrak{g}_{SC,s}(\mathbb{F}_q)))^{K_s^0}$. De même, d'après les définitions de ces espaces, $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ s'identifie à l'espace d'invariants $FC(\mathfrak{g}_{SC,s}(\mathbb{F}_q))^{K_s^0}$, donc $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))^{K_s^\dagger}$ s'identifie à $FC(\mathfrak{g}_{SC,s}(\mathbb{F}_q))^{K_s^\dagger}$. Pour $s \in \underline{S}(G)$, définissons

$$(3) \qquad j_s : FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))^{K_s^\dagger} \to \oplus_{s'\in\underline{S}(s)} FC(\mathfrak{g}_{SC,s'}(\mathbb{F}_q))$$

comme la composée de l'application précédente et de l'application $\oplus_{s'\in\underline{S}(s)} Ad(g_{s'})$, le tout multiplié par $|\underline{S}(s)|^{-1}$. On définit

$$j : \oplus_{s\in\underline{S}(G)} FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))^{K_s^\dagger} \to \oplus_{s'\in\underline{S}(G_{SC})} FC(\mathfrak{g}_{SC,s'}(\mathbb{F}_q))$$

comme la somme des j_s pour $s \in \underline{S}(G)$. Par (1) et (2), j s'identifie à un homomorphisme $FC(\mathfrak{g}(F)) \to FC(\mathfrak{g}_{SC}(F))$. L'espace $G(F)$ agit naturellement sur $FC(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ et, par construction, l'image de j est égale au sous-espace des invariants $FC(\mathfrak{g}_{SC}(F))^{G(F)}$.

Lemme. *(i) Soit $s \in S(G)$ tel que $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$. Alors les orbites de s pour les actions de $G(F)$ et de $G_{AD}(F)$ sur $Imm(G_{AD})$ sont égales.*

(ii) On a l'égalité $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{s\in\underline{S}(G)} FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$.

(iii) Supposons $A_G^{nr} = \{1\}$. Alors l'homomorphisme j se restreint en un isomorphisme $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$.

On démontrera ce lemme en 2.2.11.

2.2.9 Immeubles et restriction à la Weil

Considérons une extension finie modérément ramifiée F' de F et un groupe réductif connexe G' défini sur F. Supposons que $G = Res_{F'/F}(G')$, c'est-à-dire que G est la restriction à la Weil de G'.

Supposons d'abord que F'/F soit totalement ramifiée. Alors on a l'égalité $Imm_{F^{nr}}(G_{AD}) = Imm_{F'^{nr}}(G'_{AD})$, cette identification étant équivariante pour les actions de $\Gamma_F^{nr} \simeq \Gamma_{F'}^{nr}$. Donc aussi $Imm(G_{AD}) = Imm_{F'}(G'_{AD})$. Pour tout sommet s de cet immeuble commun, on a $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}'_s$, cette identification étant équivariante pour les actions de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. L'égalité $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = FC(\mathfrak{g}'_s(\mathbb{F}_q))$ résulte de la construction de ces espaces. On a aussi $\mathfrak{g}(F) = \mathfrak{g}'(F')$ et $SI(\mathfrak{g}(F)) = SI(\mathfrak{g}'(F'))$. On en déduit que $FC(\mathfrak{g}(F)) = FC(\mathfrak{g}'(F'))$ et $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = FC^{st}(\mathfrak{g}'(F'))$. Pour tout $s \in S(G)$, on a $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = FC^{st}(\mathfrak{g}'_s(\mathbb{F}_q))$. Plus généralement, soit E une extension finie non ramifiée de F de degré d. On a $FC^{st}(\mathfrak{g}(E)) = FC^{st}(\mathfrak{g}'(EF'))$ et, pour tout $s \in S_E(G)$, on a $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_{q^d})) = FC^{st}(\mathfrak{g}'_s(\mathbb{F}_{q^d}))$.

Passons au cas général. Notons f le degré résiduel de l'extension F'/F. L'immeuble $Imm_{F'^{nr}}(G'_{AD})$ est muni d'une action, non pas du Frobenius Fr, mais de Fr^f. L'immeuble $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ s'identifie à $Imm_{F'^{nr}}(G'_{AD})^f$, l'action du Frobenius étant

$$(x_1, ..., x_f) \mapsto (Fr^f(x_f), x_1, ..., x_{f-1}).$$

Un sommet s de $Imm(G_{AD})$ s'identifie à $(s', ..., s')$, où s' est un sommet de $Imm_{F'}(G'_{AD})$. On a $\mathfrak{g}_s = (\mathfrak{g}'_{s'})^f$, l'action du Frobenius étant donnée par la même formule que ci-dessus. D'où $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q) = \mathfrak{g}'_{s'}(\mathbb{F}_{q^f})$. De nouveau, l'égalité $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = FC(\mathfrak{g}'_{s'}(\mathbb{F}_{q^f}))$ résulte de la construction de ces espaces. On a encore $SI(\mathfrak{g}(F)) = SI(\mathfrak{g}'(F'))$ et on en déduit l'égalité $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = FC^{st}(\mathfrak{g}'_{s'}(\mathbb{F}_{q^f}))$. Plus généralement, soit E une extension finie non ramifiée de F de degré d. Notons b le pgcd de f et d. On voit que l'application $x = (x_1, ..., x_f) \mapsto (x_1, ..., x_b)$ identifie $Imm_E(G_{AD})$ à $Imm_{F'E}(G'_{AD})^b$. Pour un sommet $s = (s_1, ..., s_b)$ de $Imm_E(G_{AD})$, on a $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_{q^d}) = \oplus_{i=1,...,b}\mathfrak{g}'_{s_i}(\mathbb{F}_{q^{fd/b}})$. On en déduit $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_{q^d})) = \otimes_{i=1,...,b}FC^{st}(\mathfrak{g}'_{s_i}(\mathbb{F}_{q^{fd/b}}))$. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(E))$ est le produit tensoriel de b copies de $FC^{st}(\mathfrak{g}'(EF'))$.

2.2.10 Action d'automorphismes

Dans ce paragraphe, on suppose que G est absolument quasi-simple. Soit δ un automorphisme de G défini sur F^{nr}. Il s'en déduit un automorphisme de $Imm_{F^{nr}}(G)$ encore noté δ.

Lemme. *Soit $s \in S(G)$ tel que $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$. Supposons que $\delta(s)$ appartienne à $Imm(G_{AD})$. Alors il existe $g \in G_{SC}(F)$ tel que $\delta(s) = gs$.*

Preuve. On fixe des objets comme en 2.1.7. On ne perd rien à supposer que $s \in S(\bar{C})$. Fixons une alcôve C' de $Imm(G_{AD})$ telle que $\delta(s) \in \bar{C}'$. On peut fixer $g \in G_{SC}(F)$ tel que $C' = g(C)$. L'alcôve C' est l'ensemble des points fixes par Γ_F^{nr} d'une alcôve C'^{nr} de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ et on a aussi $C'^{nr} = g(C^{nr})$. Posons $C''^{nr} = \delta(C^{nr})$. C'est encore une alcôve de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ et, puisque $s \in \bar{C}^{nr}$, on a $\delta(s) \in \bar{C}''^{nr}$. L'ensemble des alcôves de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ dont l'adhérence contient $\delta(s)$ est en bijection avec celui des sous-groupes de Borel de $G_{\delta(s)}$. Ce dernier forme une unique orbite pour l'action de $G_{\delta(s)}$ et on en déduit que l'ensemble d'alcôves précédent forme une unique orbite pour l'action de $K_{\delta(s)}^{0,nr}$. On peut donc fixer $k \in K_{\delta(s)}^{0,nr}$ tel que $k(C''^{nr}) = C'^{nr}$. Posons $\delta' = Ad(g^{-1}k) \circ \delta$. Alors δ' conserve C^{nr}. L'action de δ' sur C^{nr} se fait par un élément de $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$. D'après l'hypothèse que $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$ et d'après [48] 9(4), s est fixe par cette action. Il en résulte que $Ad(k) \circ \delta(s) = gs$. Puisque $k \in K_{\delta(s)}^{0,nr}$, on a aussi $Ad(k) \circ \delta(s) = \delta(s)$, d'où $\delta(s) = gs$. $\square$

2.2.11 Démonstration du lemme 2.2.8

Supposons d'abord G simplement connexe. L'assertion (iii) est triviale. On peut identifier G à un produit de groupes de la forme $Res_{F'/F}(G')$, où F'/F est une extension finie modérément ramifiée de F (grâce à l'hypothèse sur p) et G' est un groupe réductif défini sur F' qui est simplement connexe et absolument quasi-simple. Il résulte de 2.2.9 que l'immeuble $Imm(G_{AD})$ s'identifie au produit des $Imm_{F'}(G'_{AD})$ et $FC(\mathfrak{g}(F))$, resp. $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$, s'identifie au produit tensoriel des $FC(\mathfrak{g}'(F'))$, resp. $FC^{st}(\mathfrak{g}'(F'))$. On voit qu'il suffit de démontrer le lemme pour chaque composante G' où l'on remplace F par F'. Cela nous ramène au cas où G est absolument quasi-simple. L'assertion (ii) est alors [48] 9.1. L'assertion (i) résulte du lemme 2.2.10 appliqué aux automorphismes adjoints.

Passons au cas général. Si $A_G^{nr} \neq \{1\}$, on a $Z(G_s)^0 \neq \{1\}$ pour tout sommet $s \in S(G)$ donc $FC(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ d'après 2.2.2 et tout est nul. On suppose désormais $A_G^{nr} = \{1\}$. De la décomposition $\mathfrak{g}_{SC} \oplus \mathfrak{z}(G) = \mathfrak{g}$ se déduit un isomorphisme $C_c^\infty(\mathfrak{g}_{SC}(F)) \otimes C_c^\infty(\mathfrak{z}(G)(F)) \simeq C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. Le groupe $G(F)$ agit sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ et les espaces qui s'en déduisent et de l'isomorphisme ci-dessus se déduit un isomorphisme

$$(1) \qquad I_{cusp}(\mathfrak{g}_{SC}(F))^{G(F)} \otimes C_c^\infty(\mathfrak{z}(G)(F)) \simeq I_{cusp}(\mathfrak{g}(F)).$$

L'action de $G(F)$ sur $\mathfrak{g}_{SC}(F)$ préservant les classes de conjugaison stable, l'action de $G(F)$ sur $SI_{cusp}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ est triviale et l'isomorphisme (1) se restreint en un isomorphisme

$$(2) \qquad I_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F)) \otimes C_c^\infty(\mathfrak{z}(G)(F)) \simeq I_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}(F)).$$

Soit $s \in S(G)$. Comme on l'a dit en 2.2.8, parce que $A_G^{nr} = \{1\}$, l'espace $C_{nil,cusp}^{G_s}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ s'identifie à l'espace d'invariants $C_{nil,cusp}^{G_{SC,s}}(\mathfrak{g}_{SC,s}(\mathbb{F}_q))^{K_s^0}$. Notons f_Z la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathfrak{z}(G)_{tn}(F)$, notons $proj : I_{cusp}(\mathfrak{g}_{SC}(F)) \to I_{cusp}(\mathfrak{g}_{SC}(F))^{G(F)}$ la projection naturelle et $\iota : I_{cusp}(\mathfrak{g}_{SC}(F))^{G(F)} \to I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ la composée de l'application $f \mapsto f \otimes f_Z$ et de l'isomorphisme (1). L'application ι est injective. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_{nil,cusp}^{G_s}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) & \to & I_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \\ \downarrow & & \uparrow \iota \circ proj \\ C_{nil,cusp}^{G_{SC,s}}(\mathfrak{g}_{SC,s}(\mathbb{F}_q)) & \to & I_{cusp}(\mathfrak{g}_{SC}(F)) \end{array}$$

Il résulte alors des constructions que le diagramme suivant est aussi commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & FC(\mathfrak{g}(F)) & \to & I_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \\ & & \downarrow j & & \uparrow \iota \\ FC(\mathfrak{g}_{SC}(F)) & \supset & FC(\mathfrak{g}_{SC}(F))^{G(F)} & \to & I_{cusp}(\mathfrak{g}_{SC}(F))^{G(F))} \end{array}$$

Par définition de $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ et $FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ et puisque l'isomorphisme (1) se restreint en l'isomorphisme (2), l'isomorphisme j se restreint en un isomorphisme de $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ sur $FC(\mathfrak{g}_{SC}(F))^{G(F)} \cap FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$. Mais tout élément de $FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ est forcément invariant par $G(F)$ donc l'espace précédent n'est autre que $FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$. Cela démontre l'assertion (iii) du lemme 2.2.8.

Soit $f \in FC(\mathfrak{g}(F))$. Ecrivons $f = \oplus_{s \in \underline{S}(G)} f_s$ conformément à la décomposition 2.2.8(1). Pour $s \in \underline{S}(G)$, écrivons $j_s(f_s) = \oplus_{s' \in \underline{S}(s)} f'_{s'}$ selon 2.2.8(3). Alors $j(f) = \oplus_{s' \in \underline{S}(G_{SC})} f'_{s'}$. Appliquons le (ii) de l'énoncé déjà démontré pour G_{SC}. Alors

$$f \in FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) \iff j(f) \in FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F)) \iff \forall s' \in \underline{S}(G_{SC}),\ f_{s'} \in FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$$

$$\iff \forall s \in \underline{S}(G),\ j(f_s) \in FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F)) \iff \forall s \in \underline{S}(G),\ f_s \in FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$$
$$\iff \forall s \in \underline{S}(G),\ f_s \in FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)).$$

Cela prouve (ii).

Enfin, soit $s \in \underline{S}(G)$, supposons que les orbites de s pour les actions de $G(F)$ et de $G_{AD}(F)$ sur $Imm(G_{AD})$ ne sont pas égales. Alors, pour tout $s' \in \underline{S}(s)$, les orbites de s' pour les actions de $G_{SC}(F)$ et de $G_{AD}(F)$ sur $Imm(G_{AD})$ ne sont pas égales. D'après le (i) de l'énoncé déjà démontré pour G_{SC}, on a $FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC,s'}(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$ pour tout $s' \in \underline{S}(s)$. Les mêmes équivalences que ci-dessus montrent que $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \{0\}$. Cela prouve (i). $\square$

2.2.12 Extensions non ramifiées et espaces $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$

Soit s un sommet de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ fixé par l'action de Γ_F^{nr}. Alors s est aussi un sommet de $Imm(G_{AD})$ et, plus généralement, s est aussi un sommet de $Imm_E(G_{AD})$ pour toute extension non ramifiée E de F.

Lemme. *Soit s un sommet de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ fixé par l'action de Γ_F^{nr} et soit E une extension non ramifiée de F de degré fini d. Si $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$, alors $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_{q^d})) \neq \{0\}$. A fortiori, si $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) \neq \{0\}$, alors $FC^{st}(\mathfrak{g}(E)) \neq \{0\}$.*

Preuve. La dernière assertion résulte de la première et du lemme 2.2.8, en tenant compte du fait qu'un sommet $s \in S(G)$ tel que $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$ reste forcément un sommet dans $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$, cf. lemme 2.2.6.

Démontrons la première assertion. L'hypothèse $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$ implique $A_G^{nr} = \{1\}$. D'après le (iii) du lemme 2.2.8, on peut remplacer G par G_{SC}. On peut décomposer G en produit $G_1 \times ... \times G_n$ où, pour tout $i = 1, ..., n$, $G_i = Res_{F_i/F}(G_i')$, F_i étant une extension finie modérément ramifiée de F et G_i' étant un groupe défini sur F_i', simplement connexe et absolument quasi-simple. L'immeuble $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ s'identifie au produit des $Imm_{F^{nr}}(G_{i,AD})$ et s s'identifie à une famille de sommets $s_i \in Imm_{F^{nr}}(G_{i,AD})$, qui sont fixés par Γ_F^{nr}. On a $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) = \otimes_{i=1,...,n} FC^{st}(\mathfrak{g}_{s_i}(\mathbb{F}_q))$ et une égalité analogue vaut en remplaçant q par q^d. Alors il suffit de traiter chaque groupe G_i. Autrement dit, on peut supposer $i = 1$. On pose simplement $F' = F_1$ et $G' = G_1'$. Supposons d'abord $F' = F$. Alors l'assertion du lemme résulte des descriptions de [48] paragraphe 9. Traitons le cas général. Notons f le degré résiduel de F'/F et b le pgcd de d et f. On a vu en 2.2.9 que s s'identifiait à un sommet $s' \in Imm_{F'}(G'_{AD})$ et que l'on avait des isomorphismes $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \simeq FC^{st}(\mathfrak{g}'_{s'}(\mathbb{F}_{q^f}))$ et $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_{q^d})) \simeq FC^{st}(\mathfrak{g}'_{s'}(\mathbb{F}_{q^{df/b}}))^{\otimes b}$. L'hypothèse entraîne que $FC^{st}(\mathfrak{g}'_{s'}(\mathbb{F}_{q^f})) \neq \{0\}$. Puisque G' est absolument quasi-simple, on vient de voir que cela entraîne $FC^{st}(\mathfrak{g}'_{s'}(\mathbb{F}_{q^{df/b}})) \neq \{0\}$, donc aussi $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_{q^d})) \neq \{0\}$. $\square$

On note $S^{st}(G)$ l'ensemble des sommets $s \in S(G)$ tels que $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$. On a $S^{st}(G) \subset S_{F^{nr}}(G)$. Le lemme ci-dessus montre que, si E est une extension finie non ramifiée de F, on a $S^{st}(G) \subset S_E^{st}(G)$. On note $S^{nr,st}(G)$ la réunion des $S_E^{st}(G)$ quand E décrit les extensions finies non ramifiées de F.

Supposons G absolument quasi-simple. On a

(1) soit $s \in S^{nr,st}(G)$; alors il existe $g \in G_{SC}(F^{nr})$ tel que $gs \in Imm(G_{AD})$.

Comme en 2.1.7, on fixe un torseur intérieur $\psi : G \to G^*$ dont le cocycle associé $\underline{n}_G$ conserve l'alcôve C^{nr}. Alors C^{nr} est une alcôve de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ et l'action galoisienne sur $S(\bar{C}^{nr})$ se fait par des éléments de $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$. A conjugaison près par un élément

de $G_{SC}(F^{nr})$, on peut supposer que $s \in S(\bar{C}^{nr})$. Alors, d'après [48] 9(4), l'hypothèse $s \in S^{nr,st}(G)$ entraîne que s est fixé par tout élément de $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$, donc par l'action galoisienne. Cela prouve (1).

2.2.13 Levi standard et espaces FC

Dans ce paragraphe, seule compte la structure de G sur F^{nr}. On fixe un épinglage $\mathfrak{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ défini sur F^{nr}.

Proposition. *Soit M un F^{nr}-Levi standard de G. Supposons qu'il existe un sommet $s_M \in Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$ de sorte que $\mathbf{FC}^{M_{s_M}}(\mathfrak{m}_{SC,s_M}) \neq \emptyset$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) soit $w \in W^{I_F}$, supposons que $w(M)$ soit encore un Levi standard ; alors $w(M) = M$;

(ii) soient P', P'' deux sous-groupes paraboliques de G définis sur F^{nr} de composantes de Levi M ; alors P' et P'' sont conjugués par un élément de W^{I_F}.

Preuve. Commençons par déduire l'assertion (ii) de (i). La preuve est standard.

Soit P le sous-groupe parabolique standard de composante de Levi M. Il est défini sur F^{nr}. Pour démontrer (ii), il suffit de démontrer la même assertion (ii) pour les deux couples (P, P') et (P, P''). On peut donc supposer $P'' = P$. Puisque $T \subset M \subset P'$, il y a en tout cas un $w \in W$ tel que $w(P')$ soit standard. Posons $P_0 = w(P')$ et notons M_0 sa composante de Levi contenant T. Pour $\sigma \in I_F$, on a $\sigma(P_0) = \sigma(w)(\sigma(P')) = \sigma(w)(P')$ puisque P' est défini sur F^{nr}. Donc $\sigma(P_0)$ est conjugué à P_0 par $\sigma(w)w^{-1}$. L'action galoisienne permute les sous-groupes paraboliques standard, donc le groupe $\sigma(P_0)$ est standard. Deux sous-groupes paraboliques standard ne sont conjugués que s'ils sont égaux. Donc $\sigma(P_0) = P_0$. A fortiori, W^{M_0} est conservée par σ. Les égalités $P_0 = w(P') = \sigma(w)(P')$ entraînent que la classe $W^{M_0}w$ est conservée par σ. On peut remplacer w par l'unique élément de plus petite longueur de cette classe. Alors cet élément est conservé par σ. Cela étant vrai pour tout $\sigma \in I_F$, on a $w \in W^{I_F}$. Mais on a $w(M) = M_0$. Le (i) de l'énoncé entraîne $M_0 = M$. Alors $P_0 = P$ et P' est conjugué à P par un élément de W^{I_F}. Cela prouve (ii).

Démontrons maintenant (i). Evidemment, cette assertion est triviale si $M = G$. On suppose $M \neq G$. Soit $w \in W^{I_F}$ tel que $w(M)$ soit un Levi standard. D'après [35] lemme 2.1.2, on peut trouver des suites $L_1, ..., L_n$ et $M_1, ..., M_{n+1}$ de F^{nr}-Levi standard de G et, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, un élément $w_i \in W^{L_i, I_F}$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

- pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, M_i et M_{i+1} sont des F^{nr}-Levi propres et maximaux de L_i ;
- pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $w_i(M_i) = M_{i+1}$;
- $M = M_1$ et $w = w_n ... w_1$.

Les Levi M_i étant tous conjugués à M vérifient la même hypothèse que celui-ci. Pour prouver que $w(M) = M$, il suffit de prouver que $M_{i+1} = M_i$ pour tout i. Pour cela, on peut remplacer le groupe G par L_i. Cela nous ramène au cas où M est un F^{nr}-Levi standard propre et maximal de G.

D'autre part, les hypothèses ainsi que la conclusion de (i) ne changent pas si l'on remplace le couple (G, M) par (G_{SC}, M_{sc}). On peut donc supposer G simplement connexe. Alors G est produit de groupes de la forme $Res_{F'/F^{nr}}(G')$ où F' est une extension finie modérément ramifiée de F^{nr} et G' est un groupe absolument quasi-simple simplement connexe défini sur F'. Le Levi M se décompose conformément en produit de

$Res_{F'/F^{nr}}(M')$. On voit que l'hypothèse de l'énoncé sur M entraîne la même hypothèse pour chaque Levi M'. La conclusion de (i) pour chaque couple (G', M') entraîne la même conclusion pour (G, M). Enfin, l'hypothèse de maximalité de M entraîne que pour l'un des groupes G', M' est un F'-Levi propre et maximal de G'. Pour les autres G', on a $M' = G'$ auquel cas la conclusion de (i) est triviale. En conclusion, on peut supposer que G est simplement connexe et absolument quasi-simple et que M est un F^{nr}-Levi standard propre et maximal de G.

On utilise les objets introduits en 2.1.9 et 2.1.10 relatifs à notre épinglage $\mathfrak{E}$. Au Levi M correspond un sous-ensemble $\Delta^M \subset \Delta$ et un sous-diagramme $\mathcal{D}^M \subset \mathcal{D}$. L'ensemble Δ^M est maximal parmi les sous-ensembles propres de Δ qui sont conservés par I_F. Pour démontrer (i), il suffit de prouver l'assertion suivante :

(1) soit $\mathcal{D}'$ un sous-diagramme de $\mathcal{D}$ conservé par l'action de I_F ; supposons que $\mathcal{D}'$ soit isomorphe à $\mathcal{D}^M$, l'isomorphisme préservant les actions de I_F ; alors $\mathcal{D}' = \mathcal{D}^M$.

Supposons d'abord que G soit déployé sur F^{nr}. Alors $\Delta^M = \Delta - \{\alpha\}$ pour une unique racine $\alpha \in \Delta$. Si G est de type B_n, C_n, E_7, E_8, F_4, G_2, la propriété (1) est vérifiée pour tout Levi standard maximal propre (indépendamment de l'hypothèse de l'énoncé). Pour les cas restants, on utilisera l'argument suivant :

(2) supposons que $M_{SC} = SL(n) \times M''$ avec $n \geq 2$; soit z un élément non trivial z du centre de $SL(n)$; alors l'image de z dans M n'appartient pas à $Z(M)^0$.

En effet, soit $s_M \in Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$ tel que $\mathbf{FC}^{M_{s_M}}(\mathfrak{m}_{SC,s_M}) \neq \emptyset$. On a $s = (s', s'')$, où $s' \in Imm_{F^{nr}}(PGL(n))$ et $s'' \in Imm_{F^{nr}}(M''_{AD})$ et il existe $\mathcal{E}' \in \mathbf{FC}(\mathfrak{sl}(n)_{s'})$ et $\mathcal{E}'' \in \mathbf{FC}(\mathfrak{m}''_{s''})$ de sorte que $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}''$ soit M_{s_M}-équivariant. Le groupe $SL(n)_{s'}$ est $SL(n)$, cette fois sur $\bar{\mathbb{F}}_q$. L'élément z se réduit en un élément non trivial $\bar{z} \in Z(SL(n)_{s'})$. Supposons que l'image de z dans M appartienne à $Z(M)^0$. Alors l'image de $\bar{z}$ dans M_{s_M} appartient à $Z(M_{s_M})^0$. Les faisceaux-caractères cuspidaux à support nilpotent de $SL(n)_{s'}$ sont en bijection avec l'ensemble des caractères primitifs de $Z(SL(n)_{s'}) \simeq \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{1/n}$, cf. 2.1.10. Ainsi $\mathcal{E}'$ correspond à un tel caractère ξ. Le faisceau $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}''$ étant M_{s_M}-équivariant, on doit avoir $\xi(\bar{z}) = 1$. Mais c'est impossible puisque ξ est primitif. Cela prouve (2).

Supposons que G soit de type A_{n-1}. Alors M_{SC} est de la forme $SL(n') \times SL(n'')$ avec $n', n'' \geq 1$ et $n' + n'' = n$. On peut supposer $n' \geq n''$. Si $n' \neq n''$, il existe $\zeta \in \boldsymbol{\zeta}$ tel que $\zeta^{n'} = 1$ et $\zeta^{n''} \neq 1$. Pour un tel ζ, notons z l'élément diagonal de $SL(n')$ de coefficients diagonaux $\zeta^{n''}$. On vérifie que c'est un élément non trivial de $Z(SL(n'))$ et que son image dans M appartient à $Z(M)^0$. C'est impossible d'après (2). Donc $n' = n''$. Mais alors la propriété (1) est vérifiée.

Supposons que G soit de type D_n avec $n \geq 4$. Alors (1) est vérifié sauf si $\alpha = \alpha_{n-1}$, $\alpha = \alpha_n$ et, si $n = 4$, $\alpha = \alpha_1$. Supposons par exemple $\alpha = \alpha_n$. On a $M_{SC} = SL(n)$. Soit ζ une racine primitive n-ième de l'unité dans $F^{nr,\times}$. Posons $z = \prod_{i=1,\ldots,n-1} \check{\alpha}_i(\zeta^{2i})$. C'est un élément non trivial du centre de M_{SC}. On vérifie que $z = (4\check{\varpi}_{\alpha_n})(\zeta)$. Puisque l'élément $4\check{\varpi}_{\alpha_n}$ appartient à $X_*(Z(M)^0)$, la relation (2) interdit à M de vérifier l'hypothèse de l'énoncé.

Supposons que G soit de type E_6. Si $\alpha = \alpha_2$ ou $\alpha = \alpha_4$, la propriété (1) est vérifiée. Supposons $\alpha = \alpha_3$ (la même preuve vaut pour $\alpha = \alpha_5$). Alors $M_{SC} = SL(2) \times SL(5)$. On vérifie que l'image dans M de l'élément non trivial du centre de $SL(2)$ est égale à $(3\check{\varpi}_{\alpha_3})(-1)$. Puisque $3\check{\varpi}_{\alpha_3}$ appartient à $X_*(Z(M)^0)$, la relation (2) interdit à M de vérifier l'hypothèse de l'énoncé. Supposons maintenant $\alpha = \alpha_1$ (la même preuve vaut pour $\alpha = \alpha_6$). Alors M_{SC} est de type D_5. Soit $s_M \in Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$ tel que $\mathbf{FC}^{M_{s_M}}(\mathfrak{m}_{SC,s_M}) \neq \emptyset$. D'après [48] 6.8, le groupe M_{SC,s_M} est aussi de type D_5. Son centre est isomorphe au groupe des racines quatrièmes de l'unité dans $\bar{\mathbb{F}}_q^\times$. Un faisceau-caractère cuspidal à

support nilpotent sur $\mathfrak{m}_{SC,s_M}$ correspond à un caractère primitif de ce groupe, cf. [48] 2.8. Le même raisonnement qu'en (2) montre que, si M vérifie la condition de l'énoncé et si z est un élément non trivial du centre de M_{SC}, alors l'image de z dans M n'appartient pas au centre de $Z(M)^0$. Or, soit i une racine quatrième de l'unité dans $F^{nr,\times}$. Posons $z = \check{\alpha}_2(-i)\check{\alpha}_3(i)\check{\alpha}_4(-1)\check{\alpha}_6(-1)$. Alors z est un élément non trivial du centre de M_{SC} et l'image de z dans M est égale à $(3\check{\varpi}_1)(i)$. Puisque $3\check{\varpi}_1$ appartient à $X_*(Z(M)^0)$, on obtient une contradiction.

Supposons enfin que G ne soit pas déployé sur F^{nr}. Une inspection cas par cas montre que (1) est vérifiée pour tous les sous-diagrammes $\mathcal{D}^M$ propres et maximaux parmi les sous-diagrammes conservés par I_F. Cela achève la démonstration du (i) de l'énoncé. □

2.2.14 L'ensemble $\mathcal{L}^{nr,st}$

On note $\mathcal{L}_F^{nr}$ le sous-ensemble des F^{nr}-Levi de G qui sont définis sur F. On note $\mathcal{L}_F^{nr,st}$ le sous-ensemble des éléments $H \in \mathcal{L}_F^{nr}$ tels que $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)) \neq \{0\}$.

Remarque. Tout F^{nr}-Levi H défini sur F qui est un tore maximal appartient à $\mathcal{L}_F^{nr,st}$: on a $\mathfrak{h}_{SC} = \{0\}$ et $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)) = \mathbb{C}$.

D'après le lemme 2.2.12, on a $\mathcal{L}_F^{nr,st} \subset \mathcal{L}_{F'}^{nr,st}$ pour toute extension finie non ramifiée F' de F. On note $\mathcal{L}^{nr}$, resp. $\mathcal{L}^{nr,st}$, la réunion des $\mathcal{L}_{F'}^{nr}$, resp. $\mathcal{L}_{F'}^{nr,st}$, quand F' parcourt les extensions finies non ramifiées de F. Ces deux ensembles sont conservés par conjugaison par F^{nr}. L'ensemble $\mathcal{L}^{nr}$ est celui des F^{nr}-Levi de G. Remarquons que $\mathcal{L}^{nr,st}$ ne change pas par une extension finie non ramifiée du corps de base et que l'application $H \mapsto H_{sc}$ est une bijection de $\mathcal{L}^{nr,st}$ sur $\mathcal{L}^{nr,st,G_{SC}}$.

Supposons que G soit absolument quasi-simple. On va décrire l'ensemble $\mathcal{L}^{nr,st}$. Pour les raisons que l'on vient de donner, on peut supposer G simplement connexe et quasi-déployé sur F. On fixe une paire de Borel épinglée $\mathfrak{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta}))$ définie sur F. On renvoie à [48] paragraphe 9 pour une description cas pas cas de l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Il est aisé d'en déduire une description du sous-ensemble des éléments de $\mathcal{L}^{nr,st}$ qui sont standard. Le Levi $M = T$ appartient toujours à cet ensemble d'après la remarque ci-dessus.

Fixons un F^{nr}-Levi standard M. On suppose $M \neq T$. De la paire de Borel épinglée $\mathfrak{E}$ se déduit une telle paire $\mathfrak{E}^M = (B \cap M, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta^M}))$, dont on déduit comme en 2.1.7 une alcôve $C^{nr,M} \subset Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$. On pose $S^{st}(\bar{C}^{nr,M}) = S^{nr,st}(M) \cap S(\bar{C}^{nr,M})$ (il s'agit ici de sommets de $Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$). On décrit ci-dessous les conditions portant sur le diagramme $\mathcal{D}^M$ qui sont nécessaires et suffisantes pour que $M \in \mathcal{L}^{nr,st}$. On indique le nombre d'éléments de $S^{st}(\bar{C}^{nr,M})$ et les diagrammes des groupes $M_{s_M,SC}$ quand s_M décrit $S^{st}(\bar{C}^{nr,M})$, que l'on note $\mathcal{D}_{s_M}$ pour simplifier la notation. Pour les groupes de type A_{n-1}, D_n avec $n \geq 5$, E_6, on note θ l'unique automorphisme d'ordre 2 de $\mathcal{D}$. Pour un groupe de type D_4, on note θ l'automorphisme de $\mathcal{D}$ qui permute α_3 et α_4 et fixe α_1 et α_2 et on note θ_3 celui qui fixe α_2 et envoie $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)$ sur $(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_1)$. Par abus de notation, on pose $B_1 = C_1 = A_1$ et $D_2 = A_1 \times A_1$.

(A_{n-1}, nr) Supposons que G est de type A_{n-1} avec $n \geq 2$ et que G est déployé sur F^{nr}. Aucun M ne convient.

(A_{n-1}, ram) Supposons que G est de type A_{n-1} avec $n \geq 3$ et que I_F agit sur $\mathcal{D}$ via un homomorphisme surjectif $I_F \to \{1, \theta\}$. Alors $\mathcal{D}^M$ est de type A_{m-1} avec $3 \leq m \leq n$, $m \equiv n \, mod \, 2\mathbb{Z}$, et il existe $h, k \in \mathbb{N}$ avec $h = k$ ou $h = k+1$ tels que $m = h^2 + k(k+1)$. On a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 1$ et, pour l'unique élément $s_M \in S^{st}(\bar{C}^{nr,M})$, $\mathcal{D}_{s_M}$ est de type $B_{(h^2-1)/2} \times C_{k(k+1)/2}$ si n est impair, $D_{h^2/2} \times C_{k(k+1)/2}$ si n est pair.

(B_n) Supposons que G est de type B_n avec $n \geq 2$. Alors $\mathcal{D}^M$ est de type B_m avec $2 \leq m \leq n$ et il existe $h, k \in \mathbb{N}$ tels que k est pair, h est impair, $|k-h| = 1$ et $2m+1 = k^2+h^2$. On a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 1$ et, pour l'unique élément $s_M \in S^{st}(\bar{C}^{nr,M})$, $\mathcal{D}_{s_M}$ est de type $D_{k^2/2} \times B_{(h^2-1)/2}$.

(C_n) Supposons que G est de type C_n avec $n \geq 2$. Alors $\mathcal{D}^M$ est de type C_m avec $2 \leq m \leq n$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = k(k+1)$. On a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 1$ et, pour l'unique élément $s_M \in S^{st}(\bar{C}^{nr,M})$, $\mathcal{D}_{s_M}$ est de type $C_{k(k+1)/2} \times C_{k(k+1)/2}$.

(D_n, nr) Supposons que G est de type D_n avec $n \geq 4$ et que G est déployé sur F^{nr}. Alors $\mathcal{D}^M$ est de type D_m avec $4 \leq m \leq n$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel k est pair et $m = k^2$. On a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 1$ et, pour l'unique élément $s_M \in S^{st}(\bar{C}^{nr,M})$, $\mathcal{D}_{s_M}$ est de type $D_{k^2/2} \times D_{k^2/2}$.

(D_n, ram) Supposons que G est de type D_n avec $n \geq 4$ et que I_F agit sur $\mathcal{D}$ via un homomorphisme surjectif $I_F \to \{1, \theta\}$. Alors $\mathcal{D}^M$ est de type (D_m, ram) avec $9 \leq m \leq n$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel k est impair et $m = k^2$. On a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 1$ et, pour l'unique élément $s_M \in S^{st}(\bar{C}^{nr,M})$, $\mathcal{D}_{s_M}$ est de type $B_{(k^2-1)/2} \times B_{(k^2-1)/2}$.

$(D_4, 3-ram)$ Supposons que G est de type D_4 et que I_F agit sur $\mathcal{D}$ via un homomorphisme surjectif $I_F \to \{1, \theta_3, \theta_3^2\}$. Alors $M = G$. On a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 2$ et les deux diagrammes $\mathcal{D}_{s_M}$ sont de type G_2 et $A_1 \times A_1$.

(E_6, nr) Supposons que G est de type E_6 et que G est déployé sur F^{nr}. Alors $\mathcal{D}^M$ est de type E_6 ou D_4. Si $\mathcal{D}^M$ est de type E_6, c'est-à-dire $M = G$, on a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 1$ et, pour l'unique élément $s_M \in S^{st}(\bar{C}^{nr,M})$, $\mathcal{D}_{s_M}$ est de type $A_2 \times A_2 \times A_2$. Si $\mathcal{D}^M$ est de type D_4, on a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 1$ et, pour l'unique élément $s_M \in S^{st}(\bar{C}^{nr,M})$, $\mathcal{D}_{s_M}$ est de type $A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$.

(E_6, ram) Supposons que G est de type E_6 et que I_F agit sur $\mathcal{D}$ via un homomorphisme surjectif $I_F \to \{1, \theta\}$. Alors $\mathcal{D}^M$ est de type (E_6, ram) ou (A_5, ram). Si $\mathcal{D}^M$ est de type (E_6, ram), c'est-à-dire $M = G$, on a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 2$ et les deux diagrammes $\mathcal{D}_{s_M}$ sont de type F_4 et $A_2 \times A_2$. Si $\mathcal{D}^M$ est de type (A_5, ram), on a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 1$ et, pour l'unique élément $s_M \in S^{st}(\bar{C}^{nr,M})$, $\mathcal{D}_{s_M}$ est de type $A_1 \times A_1 \times A_1$.

(E_7) Supposons que G est de type E_7. Alors $\mathcal{D}^M$ est de type E_7, E_6 ou D_4. Si $\mathcal{D}^M$ est de type E_7, c'est-à-dire $M = G$, on a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 1$ et, pour l'unique élément $s_M \in S^{st}(\bar{C}^{nr,M})$, $\mathcal{D}_{s_M}$ est de type $A_3 \times A_3 \times A_1$. Les autres M sont comme dans le type (E_6, nr).

(E_8) Supposons que G est de type E_8. Alors $\mathcal{D}^M$ est de type E_8, E_7, E_6 ou D_4. Si $\mathcal{D}^M$ est de type E_8, c'est-à-dire $M = G$, on a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 7$ et les sept diagrammes $\mathcal{D}_{s_M}$ sont de type E_8, D_8, $A_1 \times A_2 \times A_5$, $A_4 \times A_4$, $D_5 \times A_3$, $E_6 \times A_2$, $E_7 \times A_1$. Les autres M sont comme dans le type E_7.

(F_4) Supposons que G est de type F_4. Alors $\mathcal{D}^M$ est de type F_4 ou $B_2 = C_2$. Si $\mathcal{D}^M$ est de type F_4, c'est-à-dire $M = G$, on a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 5$ et les cinq diagrammes $\mathcal{D}_{s_M}$ sont de type F_4, $A_1 \times C_3$, $A_2 \times A_2$, $A_3 \times A_1$, B_4. Si $\mathcal{D}^M$ est de type B_2, on a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 1$ et, pour l'unique élément $s_M \in S^{st}(\bar{C}^{nr,M})$, $\mathcal{D}_{s_M}$ est de type $A_1 \times A_1$.

(G_2) Supposons que G est de type G_2. Alors $M = G$. On a $|S^{st}(\bar{C}^{nr,M})| = 3$ et les trois diagrammes $\mathcal{D}_{s_M}$ sont de type G_2, $A_1 \times A_1$, A_2.

Remarquons que

(1) M_{SC} est toujours absolument quasi-simple.

D'autre part, les diagrammes $\mathcal{D}^M$ sont tous conservés par le groupe $Aut(\mathcal{D})$. Il en résulte que

(2) si G est quasi-déployé sur F, tout F^{nr}-Levi standard appartenant à $\mathcal{L}^{nr,st}$ est un F-Levi.

2.2.15 Construction de F^{nr}-Levi

On suppose que G est absolument quasi-simple. On utilise les constructions de 2.1.7 et 2.1.9.

Soit Λ un sous-ensemble de Δ_a^{nr} tel que $\Lambda \neq \Delta_a^{nr}$. Notons A_Λ^{nr} la composante connexe du groupe des $t \in T^{nr}$ tels que $\beta(t) = 1$ pour tout $\beta \in \Lambda$. Notons M_Λ le commutant de A_Λ^{nr} dans G. C'est un F^{nr}-Levi de G. Montrons que

(1) l'ensemble des racines de T^{nr} dans $\mathfrak{m}_\Lambda$ est $\Sigma^{nr} \cap \mathbb{Q}[\Lambda]$; le rang de $M_{\Lambda,SC}$ sur F^{nr} est égal à $|\Lambda|$; on a $A_\Lambda^{nr} = A_{M_\Lambda}^{nr}$.

Puisque l'espace des relations linéaires entre éléments de Δ_a^{nr} est une droite, A_Λ^{nr} est de dimension $|\Delta_a^{nr}| - |\Lambda| - 1$. Son annulateur dans $X_{*,\mathbb{Q}}(T^{nr})$ est un espace de dimension Λ. Puisque cet espace contient Λ par construction, cet annulateur est $\mathbb{Q}[\Lambda]$. La première assertion s'en déduit et la deuxième est conséquence de la première. On a $A_\Lambda^{nr} \subset A_{M_\Lambda}^{nr}$ par définition de M_Λ. Ces deux tores étant de même dimension, ils sont égaux. Cela prouve (1).

Pour $x \in \bar{C}^{nr}$, notons $\Lambda(x)$ l'ensemble des $\beta \in \Delta_a^{nr}$ telles que $\beta^{aff}(x) = 0$. On a dit que de la paire de Borel fixée (B, T) se déduisait une paire de Borel (B_x, T_x) de G_x. L'ensemble des racines simples de G_x pour cette paire s'identifie à $\Lambda(x)$. L'appartement $App_{F^{nr}}(T^{nr}) \subset Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ est contenu dans $Imm_{F^{nr}}^G(M_{\Lambda,ad})$. Montrons que

(2) il existe un unique point $s_\Lambda \in Imm_{F^{nr}}(M_{\Lambda,AD})$ tel que, pour tout $x \in \bar{C}^{nr}$ tel que $\Lambda \subset \Lambda(x)$, on ait l'égalité $p_{M_\Lambda}(x) = s_\Lambda$; ce point s_Λ est un sommet de $Imm_{F^{nr}}(M_{\Lambda,AD})$; pour x comme ci-dessus, M_{Λ,s_Λ} est le $\bar{\mathbb{F}}_q$-Levi standard de G_x associé au sous-ensemble Λ de $\Lambda(x)$.

L'appartement $App_{F^{nr}}(T^{nr})$ est un espace affine sous le groupe $\mathcal{A}^{nr} := X_{*,\mathbb{R}}(T^{nr})$. L'appartement associé à T^{nr} dans $Imm_{F^{nr}}(M_{\Lambda,AD})$ est le quotient de $App_{F^{nr}}(T^{nr})$ par l'action du sous-groupe $\mathcal{A}_\Lambda^{nr} := X_{*,\mathbb{R}}(A_{M_\Lambda}^{nr})$. D'après la troisième assertion de (1), ce groupe est l'annulateur de Λ dans $\mathcal{A}^{nr}$. Considérons deux éléments $x, x' \in \bar{C}^{nr}$ tels que $\Lambda \subset \Lambda(x) \cap \Lambda(x')$. Soit $X \in \mathcal{A}^{nr}$ tel que $x' = x + X$. Pour $\beta \in \Lambda$, on $\beta^{aff}(x) = \beta^{aff}(x') = 0$. Donc $\beta(X) = 0$. Cela entraîne que $X \in \mathcal{A}_\Lambda^{nr}$. Donc x et x' ont même projection dans $Imm_{F^{nr}}(M_{\Lambda,AD})$. Cela démontre la première assertion de (2). Soit x comme précédemment, posons $s_\Lambda = p_{M_\Lambda}(x)$. D'après 2.1.6(2), le Levi M_{Λ,s_Λ} de G_x est le commutant de la réduction de A_Λ^{nr} dans G_x. Il est clair que les éléments de Λ annulent cette réduction. Donc M_{Λ,s_Λ} contient le Levi standard de G_x associé au sous-ensemble Λ de $\Lambda(x)$. Donc le rang de $M_{\Lambda,s_\Lambda,SC}$ est au moins égal à $|\Lambda|$. Ce rang est au plus égal à $|\Lambda|$ d'après (1), donc M_{Λ,s_Λ} est égal au Levi standard de G_x associé à l'ensemble Λ. Enfin, puisque le rang de $M_{\Lambda,s_\Lambda,SC}$ est égal au rang de $M_{\Lambda,SC}$ sur F^{nr}, s_Λ est un sommet de $Imm_{F^{nr}}(M_{\Lambda,AD})$. Cela prouve (2).

Remarque. Il y a un certain conflit de notations : dans le cas où Λ est réduit à une racine β, le s_Λ de l'assertion (2) n'est pas le sommet s_β.

Remarquons que l'ensemble des x intervenant dans l'assertion (2) contient les sommets s_β associés aux éléments $\beta \in \Delta_a^{nr} - \Lambda$: on a $\Lambda(s_\beta) = \Delta_a^{nr} - \{\beta\}$.

2.2.16 Identification des couples (M, s_M) tels que $s_M \in S^{nr,st}(M)$

On suppose G absolument quasi-simple et quasi-déployé sur F. On suppose que l'épinglage $\mathfrak{E}$ est défini sur F. On pose $C = C^{nr} \cap Imm(G_{AD})$. C'est une alcôve de cet immeuble.

Soient M un F-Levi de G et $s_M \in Imm(M_{AD}) \cap S^{nr,st}(M)$. Ces hypothèses impliquent que M_{SC} est absolument quasi-simple, cf. 2.2.14(1).

Proposition. *(i) Il existe un unique ensemble $\Lambda \subset \Delta_a^{nr}$, $\Lambda \neq \Delta_a^{nr}$ tel que les couples (M, s_M) et (M_Λ, s_Λ) soient conjugués par $G(F^{nr})$. Ces deux couples sont conjugués par un élément de $G_{SC}(F)$. L'ensemble Λ est conservé par l'action galoisienne et M_Λ est un F-Levi.*

(ii) Soit $x \in Imm^G(M_{ad})$ tel que $p_M(x) = s_M$. Alors il existe un élément de $G_{SC}(F)$ qui conjugue (M, s_M) en (M_Λ, s_Λ) et qui conjugue x en un élément $x' \in \bar{C}$ tel que $\Lambda \subset \Lambda(x')$.

Preuve. Démontrons l'assertion suivante, qui est une forme affaiblie de (ii) :

(1) soit $x \in Imm^G(M_{ad})$ tel que $p_M(x) = s_M$; alors il existe un sous-ensemble $\Lambda \subset \Delta_a^{nr}$, $\Lambda \neq \Delta_a^{nr}$, et un élément de $G_{SC}(F)$ qui conjugue (M, s_M) en (M_Λ, s_Λ) et qui conjugue x en un élément $x' \in \bar{C}$ tel que $\Lambda \subset \Lambda(x')$.

Puisque M est un F-Levi, $\mathcal{T}_{max}^M$ est le sous-ensemble des $T' \in \mathcal{T}_{max}$ tels que $T' \subset M$. Fixons un tore $S' \in \mathcal{T}_{max}^M$ tel que s_M appartienne à l'appartement associé à S' dans $Imm(M_{AD})$. Alors x appartient à l'appartement $App(S')$ associé à S' dans $Imm(G_{AD})$. Notons S le plus grand sous-tore de T déployé sur F (rappelons que T est le tore de l'épinglage $\mathfrak{E}$). Les éléments de $\mathcal{T}_{max}$ forment une unique orbite sous l'action de $G_{SC}(F)$. Quiite à effectuer une conjugaison par un élément de ce groupe, on peut supposer $S' = S$. Tout élément de l'appartement $App(S)$ est conjugué à un élément de $\bar{C}$ par un élément de $Norm_{G_{SC}}(S)(F)$. Quitte à effectuer une conjugaison par un élément de ce groupe, on peut supposer non seulement que $S' = S$ mais que, de plus, $x \in \bar{C}$. Puisque G est quasi-déployé, T est le commutant de S dans G. Puisque $S \subset M$, cela entraîne $T \subset M$. En appliquant 2.1.6(2), on introduit le sous-tore $A_{M,x}$ de T_x et son commutant dans G_x. Celui-ci est égal à M_{s_M}. Tout $\mathbb{F}_q$-Levi de G_x contenant T_x est conjugué à un $\mathbb{F}_q$-Levi standard par un élément de $Norm_{G_{x,SC}}(T_x)(\mathbb{F}_q)$. Un élément de ce groupe se relève en un élément de $K_{SC,x}^0$ qui normalise S. Quitte à effectuer une conjugaison par un élément de ce groupe, on peut donc supposer de plus que M_{s_M} est un $\mathbb{F}_q$-Levi standard de G_x. Celui-ci correspond à un sous-ensemble Λ de l'ensemble $\Lambda(x)$ des racines simples de G_x. Puisque M_{s_M} est un $\mathbb{F}_q$-Levi, Λ est conservé par l'action galoisienne. On introduit le tore A_Λ^{nr} de T^{nr}, cf. 2.2.15. Le groupe $Z(M_{s_M})^0$ est la composante neutre de l'annulateur de Λ dans T_x et est donc égal à $A_{\Lambda,x}^{nr}$. Puisque $A_{M,x}$ est contenu dans $Z(M_{s_M})^0$, on en déduit $A_{M,x} \subset A_{\Lambda,x}^{nr}$, ce qui se relève en $A_M \subset A_\Lambda^{nr}$. Alors le commutant M de A_M contient le commutant M_Λ de A_Λ^{nr}. Puisque s_M est un sommet de $Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$, le rang de M_{SC} sur F^{nr} est égal au rang de $M_{s_M,SC}$, c'est-à-dire $|\Lambda|$, qui est égal au rang de $M_{\Lambda,SC}$ sur F^{nr}. L'inclusion $M_\Lambda \subset M$ est donc une égalité. On a alors $s_M = p_M(x) = p_{M_\Lambda}(x) = s_\Lambda$. Cela démontre (1).

L'assertion (1) prouve l'existence d'un ensemble Λ vérifiant les conditions de (i). Il reste à prouver son unicité. Cette unicité rendra l'assertion (1) équivalente à (ii).

On va démontrer l'unicité de Λ en supposant que G est adjoint (cela ne fait que renforcer l'assertion). Considérons un ensemble $\Lambda \subset \Delta_a^{nr}$, $\Lambda \neq \Delta_a^{nr}$, tel que les couples (M, s_M) et (M_Λ, s_Λ) soient conjugués par un élément de $G(F^{nr})$. Notons $\mathcal{D}_\Lambda$ le diagramme obtenu en supprimant de $\mathcal{D}_a^{nr}$ les sommets n'appartenant pas à Λ. C'est le diagramme de Dynkin de M_{Λ,s_Λ} donc aussi celui de M_{s_M}, que l'on a noté $\mathcal{D}_{s_M}$ en 2.2.14.

Si M est un tore, ce diagramme est vide donc $\Lambda = \emptyset$. Si $M = G$, le rang de M_{s_M} est égal au rang semi-simple de G sur F^{nr} donc $\Delta_a^{nr} - \Lambda$ a un unique sommet, qui n'est

autre que s_Λ. On a $G_{s_\Lambda} = M_{s_M}$. La description de 2.2.14 montre que le diagramme $\mathcal{D}_{s_M}$ détermine s_M, donc Λ. On suppose dans la suite que M n'est ni un tore, ni G lui-même.

Supposons d'abord que G est déployé sur F^{nr}. On a $\Delta_a^{nr} = \Delta_a$ et on rappelle l'unique relation

$$\sum_{\alpha\in\Delta_a} d(\alpha)\alpha = 0$$

telle que $d(\alpha_0) = 1$. On a

(2) Λ contient toutes les racines $\alpha \in \Delta_a$ telles que $d(\alpha) = 1$.

Supposons que $\alpha_0 \notin \Lambda$. On a $\Delta_a = \{\alpha_0\} \cup \Delta$ donc $\Lambda \subset \Delta$. Alors Λ détermine un unique Levi standard L_Λ dont $\mathcal{D}_\Lambda$ est le diagramme de Dynkin. Par définition de A_Λ^{nr}, ce tore n'est autre que A_{L_Λ}. Donc $L_\Lambda = M_\Lambda$. Le diagramme $\mathcal{D}_\Lambda$ est à la fois le diagramme de racines de M_Λ et de M_{Λ,s_Λ}. Donc les groupes M et M_{s_M} ont même diagramme de Dynkin. Mais cela contredit notre description de 2.2.14. Cette contradiction interdit notre hypothèse $\alpha_0 \notin \Lambda$. Soit $\alpha \in \Delta_a$ tel que $d(\alpha) = 1$. Alors α est conjugué à α_0 par un élément du groupe Ω, cf. 2.1.8(2). Fixons $\omega \in \Omega$ tel que $\omega(\alpha) = \alpha_0$, posons $\Lambda' = \omega(\Lambda)$. Rappelons que ω est un élément du groupe de Weyl W que l'on peut relever en un élément de $G(F^{nr})$. Donc les couples $(M_{\Lambda'}, s_{\Lambda'})$ et (M_Λ, s_Λ) sont conjugués par un élément de $G(F^{nr})$ et les couples $(M_{\Lambda'}, s_{\Lambda'})$ et (M, s_M) le sont aussi. En appliquant ce que l'on vient de démontrer, on a $\alpha_0 \in \Lambda'$, donc $\alpha \in \Lambda$. Cela prouve (2).

En passant en revue les diagrammes $\mathcal{D}_{s_M}$ décrits en 2.2.14, on voit que, dans presque tous les cas, il y a un unique ensemble Λ qui satisfait la relation (2) et tel que $\mathcal{D}_\Lambda = \mathcal{D}_{s_M}$. Les exceptions sont : G est de type E_7 ou E_8 et M est de type D_4 ; ou G est de type F_4 et M est de type B_2. Dans ce dernier cas, on voit que les racines de M_{s_M} proviennent de racines longues de M. Donc Λ doit être formé de racines longues. Il n'y a alors qu'un ensemble Λ possible. Supposons que G est de type E_7 ou E_8 et que M est de type D_4. Introduisons le diagramme $\mathcal{D}_a^M$ de M. On note ses racines avec des exposants M. On peut identifier les racines de M_{s_M} aux extrémités de ce diagramme. La racine α_2^M est alors l'opposée de la demi-somme de ces racines extrêmes. Donc l'opposée de la demi-somme des éléments de Λ doit être une racine de M_Λ a fortiori de G. Puisque $\alpha_0 \in \Lambda$ d'après (2), on obtient que

$$-\frac{1}{2}(\alpha_0 + \sum_{\alpha\in\Lambda-\{\alpha_0\}} \alpha) \in \Sigma,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}(\sum_{\alpha\in\Delta-(\Lambda-\{\alpha_0\})} d(\alpha)\alpha) + \frac{1}{2}(\sum_{\alpha\in\Lambda-\{\alpha_0\}} (d(\alpha)-1)\alpha) \in \Sigma.$$

Puisque cette expression est une racine, ses coefficients doivent être entiers. Donc $d(\alpha)$ est impair pour tout $\alpha \in \Lambda - \{\alpha_0\}$. Or il s'avère que l'ensemble des $\alpha \in \Delta$ tels que $d(\alpha)$ est impair a 3 éléments. C'est aussi le nombre d'éléments de $\Lambda - \{\alpha_0\}$. Donc $\Lambda - \{\alpha_0\}$ est égal à cet ensemble des $\alpha \in \Delta$ tels que $d(\alpha)$ est impair. Alors $\Lambda - \{\alpha_0\}$ et aussi Λ est uniquement déterminé.

Supposons maintenant que G ne soit pas déployé sur F^{nr}. On voit encore que, dans presque tous les cas, il y a un unique ensemble Λ tel que $\mathcal{D}_\Lambda = \mathcal{D}_{s_M}$. Les exceptions sont du cas où G est de type A_{n-1} et M est de type A_{m-1}, avec $3 \leq m \leq n$, $m \equiv n \, mod \, 2\mathbb{Z}$, $m = h^2 + k(k+1)$ avec $(h,k) \in \{(1,1),(2,1),(2,2)\}$. Dans ces cas, le diagramme $\mathcal{D}_{s_M}$ dégénère et est trop petit pour être reconnaissable. Supposons $m = 3$, $h = k = 1$. Le diagramme $\mathcal{D}_{s_M}$ est de type A_1. L'unique racine β de ce diagramme s'identifie à un

élément de $\Sigma^{M,res} \subset \Sigma^{res}$. En utilisant les résultats de [48] 4.5, on voit que $\beta = \beta_0^M$ et cette racine est divisible, c'est-à-dire que $\beta/2$ appartient aussi à $\Sigma^{M,res}$. Donc β est divisible dans Σ^{res}. Or il n'y a qu'une telle racine dans Δ_a^{nr}. Donc Λ est forcément réduit à cette unique racine. Supposons $m = 6$, $h = 2$ et $k = 1$ ou $m = 10$, $h = k = 2$. L'entier n est pair. On note θ l'automorphisme habituel de Δ. On a $\Delta^{nr} = \{\beta_{i,n-i}; i = 1, ..., n/2-1\} \cup \{\beta_{n/2}\}$ et $\beta_0 = -\frac{1}{2}((\alpha_1 + ... + \alpha_{n-2}) + (\alpha_2 + ... + \alpha_{n-1}))$. On calcule

$$\beta_0 + \beta_{1,n-1} + 2(\sum_{i=2,...,n/2-1} \beta_{i,n-i}) + \beta_{n/2} = 0.$$

Des propriétés analogues valent pour M (on ajoute alors des exposants M). En utilisant les résultats de [48] 4.5, on voit que, pour $m = 6$, les racines dont sont issues les racines simples de M_{s_M} sont β_0^M, $\beta_{1,5}^M$ et β_3^M. On constate que

$$(3) \qquad \frac{1}{2}(\beta_0^M + \beta_{1,5}^M + \beta_3^M) = -\beta_{2,4}^M.$$

Si $m = 10$, les racines dont sont issues les racines simples de M_{s_M} sont β_0^M, $\beta_{1,9}^M$, $\beta_{3,7}^M$, $\beta_{4,6}^M$ et β_5^M. On constate que

$$(4) \qquad \frac{1}{2}(\beta_0^M + \beta_{1,9}^M + 2\beta_{3,7}^M + 2\beta_{4,6}^M + \beta_5^M) = -\beta_{2,8}^M.$$

Transférons à Λ les propriétés ci-dessus. D'abord, la composante C_1 ou C_3 de $\mathcal{D}_\Lambda$ doit contenir une racine longue (correspondant à $\beta_{m/2}^M$). Il n'y en a qu'une possible dans Δ_a^{nr}, à savoir $\beta_{n/2}$. Donc cette composante C_1, resp. C_3, est $\{\beta_{n/2}\}$, resp. $\{\beta_{n/2-2,n/2+2}, \beta_{n/2-1,n/2+1}, \beta_{n/2}\}$. Il reste les deux racines de la composante $D_2 = A_1 \times A_1$, notons-les β' et β''. Elles appartiennent à Δ_a^{nr} et sont distinctes des racines déjà déterminées. Posons

$$\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2}(\beta' + \beta'' + \beta_{n/2}), & \text{si } m = 6, \\ \frac{1}{2}(\beta' + \beta'' + 2\beta_{n/2-2,n/2+2} + 2\beta_{n/2-1,n/2+1} + \beta_{n/2}), & \text{si } m = 10. \end{cases}$$

D'après (3) et (4), γ doit appartenir à Σ^{nr}. Supposons $\beta', \beta'' \neq \beta_0$. Alors $\beta' = \beta_{i,n-i}$ et $\beta'' = \beta_{j,n-j}$ pour deux entiers $i, j \in \{1, ..., n/2 - 1\}$. Alors les égalités précédentes décrivent γ dans la base Δ^{nr}. Les coefficients doivent être entiers. Or le coefficient de $\beta_{n/2}$ est $1/2$. Cette contradiction prouve que l'une des deux racines β' ou β'' est égale à β_0. On peut poursuivre le calcul : le fait que $\gamma \in \Sigma^{nr}$ entraîne que l'autre racine est forcément $\beta_{1,n-1}$. On peut aussi se rappeler que l'unique élément non trivial de $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$ permute β_0 et $\beta_{1,n-1}$. Le même argument que l'on a utilisé dans la preuve de (2) prouve que, puisque Λ contient forcément β_0, il contient aussi $\beta_{1,n-1}$. Cela achève la preuve de la proposition. $\square$

L'ensemble $S(\bar{C})$ est en bijection avec les orbites de l'action de Γ_F^{nr} dans $S(\bar{C}^{nr})$ ou encore dans Δ_a^{nr}. Pour $s \in S(\bar{C})$, l'orbite associée est égale à $\Delta_a^{nr} - \Lambda(s)$. Appliquée à un sommet, l'assertion (ii) de la proposition devient la suivante

(5) soit s un sommet de $Imm^G(M_{ad})$ tel que $p_M(s) = s_M$; alors il existe un élément de $G_{SC}(F)$ qui conjugue (M, s_M) en (M_Λ, s_Λ) et qui conjugue s en un élément de $s' \in S(\bar{C})$ dont l'orbite galoisienne associée est contenue dans $\Delta_a^{nr} - \Lambda$.

Remarque. On a supposé que G était quasi-déployé sur F et que M était un F-Levi. Mais la première phrase de l'énoncé s'applique à un F^{nr}-Levi, même si G n'est pas quasi-déployé sur F : il suffit de remplacer le corps de base F par une extension non ramifiée convenable.

Décrivons explicitement les ensembles Λ déterminés par les arguments de la preuve, dans le cas où M n'est ni un tore, ni G tout entier. Rappelons que l'on a numéroté les éléments de Δ_a^{nr} soit par des entiers, soit par des familles d'entiers dans le cas où G n'est pas déployé sur F^{nr}. Notons symboliquement $\underline{i}$ de tels indices. On note $I(\Lambda)$ l'ensemble des indices $\underline{i}$ tels que $\beta_{\underline{i}} \in \Lambda$. Les entiers h et k figurant ci-après sont ceux de la description de 2.2.14.

Supposons G de type (A_{n-1}, ram) et M est de type A_{m-1}, avec $3 \leq m < n$. Si m est impair, $I(\Lambda) = \{0, (1, n-1), ..., (k(k+1)/2-1, n+1-k(k+1)/2)\} \cup \{((n-h^2)/2, (n+h^2)/2), ..., ((n-1)/2, (n+1)/2)\}$. Si m est pair, $I(\Lambda) = \{0, (1, n-1), ...(h^2/2-1, n+1-h^2/2)\} \cup \{((n-k(k+1))/2+1, (n+k(k+1))/2-1), ..., (n/2-1, n/2+1), n/2\}$.

Supposons G de type B_n et M de type B_m avec $2 \leq m < n$. Alors $I(\Lambda) = \{0, ..., k^2/2-1\} \cup \{n+1-(h^2-1)/2, ..., n\}$.

Supposons G de type C_n et M de type C_m avec $2 \leq m < n$. Alors $I(\Lambda) = \{0, ..., k(k+1)/2-1\} \cup \{n+1-k(k+1)/2, ..., n\}$.

Supposons G de type (D_n, nr) et M de type D_m avec $4 \leq m < n$. Alors $I(\Lambda) = \{0, ..., k^2/2-1\} \cup \{n+1-k^2/2, ..., n\}$.

Supposons G de type (D_n, ram) et M est de type D_m, avec $9 \leq m < n$. Alors $I(\Lambda) = \{0, ..., (k^2-3)/2\} \cup \{n-(k^2-1)/2, ..., n-2, (n-1, n)\}$.

Supposons G de type (E_6, nr) et M de type D_4. Alors $I(\Lambda) = \{0, 1, 4, 6\}$.

Supposons G de type (E_6, ram) et M de type A_5. Alors $I(\Lambda) = \{0, 2, (3, 5)\}$.

Supposons G de type E_7. Si M est de type E_6, $I(\Lambda) = \{0, 1, 2, 4, 6, 7\}$. Si M est de type D_4, $I(\Lambda) = \{0, 3, 5, 7\}$.

Supposons G de type E_8. Si M est soit de type E_7, $I(\Lambda) = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8\}$. Si M est de type E_6, $I(\Lambda) = \{0, 1, 3, 5, 6, 8\}$. Si M est de type D_4, $I(\Lambda) = \{0, 2, 5, 7\}$.

Supposons G de type F_4 et M est de type C_2. Alors $I(\Lambda) = \{0, 2\}$.

Comme on l'a déjà dit, $\Lambda = \emptyset$ si M est un tore. Si $M = G$, Λ est déterminé par s_M et les s_M possibles sont décrits dans [48] paragraphe 9. Il résulte de ces descriptions que

(6) l'ensemble Λ est conservé par l'action de $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$.

2.3 F^{nr}-Levi et conjugaison stable

2.3.1 Bons éléments

Nous reprenons la définition des bons éléments de [17], en nous limitant au cas de profondeur 0. Pour tout sous-tore T de G (pas forcément maximal), on note $\Sigma(T)$ l'ensemble des racines de T dans $\mathfrak{g}$.

Soit $X \in \mathfrak{g}(F)$. Supposons X semi-simple et fixons un sous-tore maximal T de G défini sur F tel que $X \in \mathfrak{t}(F)$. Considérons la condition suivante : pour toute racine $\beta \in \Sigma(T)$, on a $val_F(\beta(X)) = 0$ ou $\beta(X) = 0$. Que cette condition soit vérifiée ne dépend pas du choix de T. On dit que X est un bon élément si et seulement si elle l'est.

Soit X un bon élément, posons $H = G_X$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) soient $Y, Y' \in \mathfrak{h}_{tn}(F)$; alors l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $g(X+Y) = X+Y'$ coïncide avec celui des $h \in H(F)$ tels que $hYh^{-1} = Y'$; cf. [17] 2.1.5(5).

Dans les deux assertions suivantes, les propriétés des éléments Y sont relatives au groupe ambiant H, celles de $X+Y$ sont relatives au groupe ambiant G :

(2) pour $Y \in \mathfrak{h}_{tn}(F)$, on a $Z_H(Y) = Z_G(X+Y)$; Y est semi-simple, resp. régulier, si et seulement si il en est de même de $X+Y$; si $A_H = A_G$, Y est semi-simple régulier elliptique si et seulement s'il en est de même de $X+Y$;

(3) soit $Y \in \mathfrak{h}_{tn}(F)$ un élément semi-simple régulier ; alors $d^G(X+Y) = d^H(Y)$;

(4) soient $Y, Y' \in \mathfrak{h}_{tn}(F)$; on suppose que $X+Y$ et $X+Y'$ sont semi-simples ; alors Y et Y' sont stablement conjugués si et seulement $X+Y$ et $X+Y'$ sont stablement conjugués.

La propriété (2) résulte immédiatement de (1) et la propriété (4) aussi, en étendant le corps de base. La propriété (3) résulte d'un calcul facile. La propriété suivante est bien connue, on en donne une preuve faute d'avoir trouvé une référence :

(5) soit $\omega \subset \mathfrak{g}(F)$ un sous-ensemble compact ; alors l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $g\omega g^{-1} \cap (X+\mathfrak{h}_{tn}(F)) \neq \emptyset$ a une projection compacte dans $H(F)\backslash G(F)$.

Preuve. Pour tout sous-ensemble E de $\mathfrak{g}(F)$, notons $\Omega(E)$ l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $g\omega g^{-1} \cap E \neq \emptyset$. On doit prouver que la projection de $\Omega(X+\mathfrak{h}_{tn}(F))$ dans $H(F)\backslash G(F)$ est compacte.

Soit $Y \in \mathfrak{g}(F)$ un élément semi-simple. D'après [15] lemme 19, on peut fixer un voisinage V_Y de Y dans $\mathfrak{g}_Y(F)$, qui est ouvert et compact et qui vérifie la condition : l'image de $\Omega(V_Y)$ dans $G_Y(F)\backslash G(F)$ est relativement compacte. Notons $\mathfrak{h}_{tn,ss}(F)$ l 'ensemble des éléments semi-simples de $\mathfrak{h}_{tn}(F)$. Pour $Y \in X+\mathfrak{h}_{tn,ss}(F)$, on a $G_Y = H_Y \subset H$ d'après (2) donc l'image de $\Omega(V_Y)$ dans $H(F)\backslash G(F)$ est relativement compacte. Soit W un voisinage de 1 dans $H(F)$. L'ensemble $\{wZw^{-1}; w \in W, Z \in V_Y\}$ contient un voisinage de Y dans $\mathfrak{h}(F)$. Fixons un voisinage ouvert U_Y de Y dans $\mathfrak{h}(F)$ qui est contenu dans l'ensemble précédent. L'image de $\Omega(U_Y)$ dans $H(F)\backslash G(F)$ est contenue dans celle de $\Omega(V_Y)$, donc est relativement compacte.

L'ensemble $\mathfrak{h}_{tn,ss}(F)$ est compact modulo conjugaison par $H(F)$: il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison par $H(F)$ de sous-tores maximaux de H définis sur F et, pour tout tel sous-tore T, $\mathfrak{t}(F) \cap \mathfrak{h}_{tn}(F)$ est compact. Il en est de même de $X+\mathfrak{h}_{tn,ss}(F)$. Fixons donc un ensemble compact $C \subset X+\mathfrak{h}_{tn,ss}(F)$ tel que tout élément de $X+\mathfrak{h}_{tn,ss}(F)$ soit conjugué à un élément de C par un élément de $H(F)$. Puisque C est compact, on peut fixer une famille finie $\mathcal{Y} \subset C$ telle qu'en posant $U = \cup_{Y\in\mathcal{Y}} U_Y$, on ait $C \subset U$. Montrons que

(6) tout élément de $X+\mathfrak{h}_{tn}(F)$ est conjugué à un élément de U par un élément de $H(F)$.

En effet, soit $Z \in X+\mathfrak{h}_{tn}(F)$, décomposons Z en somme de sa partie semi-simple Z_s et de sa partie nilpotente Z_n. On a $Z_s \in X+\mathfrak{h}_{tn,ss}(F)$. A conjugaison près par $H(F)$, on peut supposer $Z_s \in C$, donc $Z_s \in V$. La classe de conjugaison de Z_n par $H_{Z_s}(F)$ contient un point arbitrairement proche de Z_s. Puisque U est ouvert dans $\mathfrak{h}(F)$, cette classe contient un élément de U. D'où (6).

D'après (6), on a $\Omega(X+\mathfrak{h}_{tn}(F)) \subset H(F)\Omega(U) = \cup_{Y\in\mathcal{Y}} H(F)\Omega(U_Y)$. L'image de $\Omega(X+\mathfrak{h}_{tn}(F))$ dans $H(F)\backslash G(F)$ est donc contenue dans la réunion sur $Y \in \mathcal{Y}$ des images de $\Omega(U_Y)$. Ce dernier ensemble est réunion finie d'ensembles relativement compacts, donc l'image de $\Omega(X+\mathfrak{h}_{tn}(F))$ dans $H(F)\backslash G(F)$ est relativement compacte.

Il reste à prouver qu'elle est fermée. Soit $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\Omega(X+\mathfrak{h}_{tn}(F))$ telle que les projections des g_i dans $H(F)\backslash G(F)$ aient une limite dans ce quotient. Puisque l'application $G(F) \to H(F)\backslash G(F)$ est ouverte, on peut fixer des décompositions $g_i = h_i z_i$ de sorte que $h_i \in H(F)$ et la suite $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Notons z sa limite. Il suffit de prouver que z appartient à $\Omega(X+\mathfrak{h}_{tn}(F))$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, fixons $Z_i \in \omega$ tel que $g_i Z_i g_i^{-1} \in X+\mathfrak{h}_{tn}(F)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $Z \in \omega$. La suite $(z_i Z_i z_i^{-1})_{i\in\mathbb{N}}$ converge alors vers zZz^{-1}. Puisque les éléments de cette suite appartiennent à l'ensemble fermé $X+\mathfrak{h}_{tn}(F)$, sa limite zZz^{-1} appartient aussi à cet ensemble, donc $z \in \Omega(X+\mathfrak{h}_{tn}(F))$. Cela achève de prouver (5).

2.3.2 Eléments de réduction régulière

Soient $H \in \mathcal{L}_F^{nr}$ et $X \in \mathfrak{a}_H^{nr}(F)$. Disons que X est de réduction régulière si et seulement si $val_F(\beta(X)) = 0$ pour tout $\beta \in \Sigma(A_H^{nr})$. De tels éléments existent.

Lemme. *Soit $H \in \mathcal{L}_F^{nr}$.*

(i) Soit $X \in \mathfrak{a}_H^{nr}(F)$ un élément de réduction régulière. Alors X est un bon élément et $G_X = H$.

(ii) Soient $X \in \mathfrak{a}_H^{nr}(F)$ un élément de réduction régulière et F' une extension finie de F. Alors X est encore un élément de réduction régulière quand on remplace le corps de base F par F'.

(iii) Supposons que H soit un F-Levi. Soit $X \in \mathfrak{a}_H(F)$, supposons que, pour tout $\beta \in \Sigma(A_H)$, on ait $val_F(\beta(X)) = 0$. Alors X est un élément de réduction régulière.

Preuve. Soit X comme en (i). Fixons un sous-tore maximal T de H défini sur F. On a les inclusions $A_H^{nr} \subset Z(H)^0 \subset T$. Pour $\beta \in \Sigma(T)$, β peut intervenir dans $\mathfrak{h}$, alors β est nulle sur $Z(H)^0$ et $\beta(X) = 0$. Sinon, puisque H est le commutant de A_H^{nr}, la restriction de β à A_H^{nr} n'est pas triviale et est donc un élément de $\Sigma(A_H^{nr})$. Alors $val_F(\beta(X)) = 0$. Cela démontre que X est un bon élément et que la composante neutre de son commutant est H.

Le même argument vaut pour (ii) et (iii) : pour (ii), toute racine $\beta \in \Sigma(A_{H,F'}^{nr})$ se restreint en une racine de A_H^{nr} ; pour (iii), toute racine $\beta \in \Sigma(A_H^{nr})$ se restreint en une racine de A_H. $\square$

2.3.3 Description de l'ensemble $Imm^G(H_{ad})$

Lemme. *Soit $H \in \mathcal{L}_F^{nr}$. Soit $X \in \mathfrak{a}_H^{nr}(F)$ un élément entier et de réduction régulière et soit $Z \in \mathfrak{h}_{tn}(F)$. Alors l'ensemble des points $x \in Imm(G_{AD})$ tels que $X + Z \in \mathfrak{k}_x$ est égal à celui des $x \in Imm^G(H_{ad})$ tels que $Z \in \mathfrak{k}_{p_H(x)}^H$. En particulier, $Imm^G(H_{ad})$ est l'ensemble des $x \in Imm(G_{AD})$ tels que $X \in \mathfrak{k}_x$.*

Preuve. Notons $\mathcal{X}$ l'ensemble des points $x \in Imm(G_{AD})$ tels que $X + Z \in \mathfrak{k}_x$ et $\mathcal{Y}$ celui des $x \in Imm^G(H_{ad})$ tels que $Z \in \mathfrak{k}_{p_H(x)}^H$. Remarquons que $\mathcal{Y}$ n'est pas vide. En effet, puisque $Z \in \mathfrak{h}_{tn}(F)$, on peut fixer un point $y \in Imm(H_{AD})$ tel que $Z \in \mathfrak{k}_y^{H,+}$. Soit $x \in Imm^G(H_{ad})$ tel que $p_H(x) = y$. Alors $x \in \mathcal{Y}$.

Supposons d'abord que G soit déployé et que H soit un F-Levi. Soit $x \in \mathcal{Y}$. L'élément X étant central dans $\mathfrak{h}$ et entier est contenu dans $\mathfrak{k}_z^H$ pour tout $z \in Imm(H_{AD})$. Donc $X \in \mathfrak{k}_{p_H(x)}^H$ puis $X + Z \in \mathfrak{k}_{p_H(x)}^H$. D'après 2.1.5(1), on a $X + Z \in \mathfrak{k}_x$, c'est-à-dire que x appartient à $\mathcal{X}$. Inversement, soit $x \in \mathcal{X}$. On va montrer que $x \in Imm^G(H_{ad})$. Fixons un point $y \in \mathcal{Y}$. Comme on vient de le voir, on a $y \in \mathcal{X}$. Traçons la géodésique $[x, y]$ reliant x à y. Il est bien connu que $\mathfrak{k}_x \cap \mathfrak{k}_y \subset \mathfrak{k}_z$ pour tout $z \in [x, y]$. En particulier $X + Z \in \mathfrak{k}_z$. Notons u le point le plus proche de x dans l'ensemble fermé $[x, y] \cap Imm^G(H_{ad})$. Si $u = x$, $x \in Imm^G(H_{ad})$ comme on veut le prouver. Supposons $u \neq x$. Notons $\mathcal{F}$ la facette de $Imm(G_{AD})$ contenant u. Il existe une unique facette $\mathcal{F}'$ telle que tout point de $[x, u[$ assez proche de u appartienne à $\mathcal{F}'$. Puisque $u \in Imm^G(H_{ad})$, on a $X \in \mathfrak{k}_u = \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ (car, comme ci-dessus, X appartient à $\mathfrak{k}_{p_H(u)}^H$). On a aussi $X + Z \in \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ donc $Z \in \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$. Notons $X_{\mathcal{F}}$ et $Z_{\mathcal{F}}$ les réductions de X et Z dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. Utilisons les définitions de 2.1.6 où l'on remplace les indices u par $\mathcal{F}$. Ainsi, on note $H_{\mathcal{F}}$ le sous-groupe de $G_{\mathcal{F}}$ qui est l'image naturelle de $K_{\mathcal{F}}^{0,nr} \cap H(F^{nr})$. C'est un Levi de $G_{\mathcal{F}}$. On a

(1) $X_{\mathcal{F}}$ est semi-simple et son commutant dans $G_{\mathcal{F}}$ est $H_{\mathcal{F}}$.

On a $Z(H)^0 = A_H$ puisque G est déployé et que H est un F-Levi. Donc X appartient à $\mathfrak{a}_H(F) \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ et la réduction $X_{\mathcal{F}}$ appartient à $\mathfrak{a}_{H,\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. A fortiori, $X_{\mathcal{F}}$ est semi-simple. Compte tenu de 2.1.6(2), il reste à prouver que le commutant de $A_{H,\mathcal{F}}$ dans $G_{\mathcal{F}}$ est égal au commutant de $X_{\mathcal{F}}$. Puisque nos groupes sont déployés, il suffit de montrer qu'aucune racine de $A_{H,\mathcal{F}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ n'est nulle en $X_{\mathcal{F}}$. Une telle racine β provient d'une racine β^G de A_H dans $\mathfrak{g}$. Puisque X est de réduction régulière, on a $\beta^G(X) \in \mathfrak{o}_F^\times$. Le terme $\beta(X_{\mathcal{F}})$ en est la réduction dans $\mathbb{F}_q^\times$ et n'est donc pas nulle. Cela prouve (1).

La facette $\mathcal{F}$ est contenue dans l'adhérence de $\mathcal{F}'$. Cela entraîne qu'il existe un sous-groupe parabolique $P_{\mathcal{F}'}$ de $G_{\mathcal{F}}$ de sorte que la réduction de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}'} \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ soit égale à $\mathfrak{p}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)$. Puisque $X + Z \in \mathfrak{k}_{\mathcal{F}'} \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$, $X_{\mathcal{F}} + Z_{\mathcal{F}}$ appartient à $\mathfrak{p}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)$. Les éléments $X_{\mathcal{F}}$ et $Z_{\mathcal{F}}$ commutent. Le premier est semi-simple d'après (1), le second est nilpotent puisque $Z \in \mathfrak{h}_{tn}(F) \subset \mathfrak{g}_{tn}(F)$. Donc $X_{\mathcal{F}}$ est la composante semi-simple de $X_{\mathcal{F}} + Z_{\mathcal{F}}$. Puisque $X_{\mathcal{F}} + Z_{\mathcal{F}}$ appartient à $\mathfrak{p}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)$, sa composante semi-simple $X_{\mathcal{F}}$ appartient aussi à $\mathfrak{p}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)$. Il existe donc un sous-tore maximal $T_{\mathcal{F}}$ de $P_{\mathcal{F}'}$ défini sur $\mathbb{F}_q$ tel que $X_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{t}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. On a $T_{\mathcal{F}} \subset H_{\mathcal{F}}$ d'après (1). Donc $H_{\mathcal{F}} \cap P_{\mathcal{F}'}$ contient un sous-tore maximal de $G_{\mathcal{F}}$. Cela entraîne que $H_{\mathcal{F}} \cap P_{\mathcal{F}'}$ est un sous-groupe parabolique de $H_{\mathcal{F}}$. Etant défini sur $\mathbb{F}_q$, il contient un sous-tore déployé maximal $S_{\mathcal{F}}$. On relève $S_{\mathcal{F}}$ en un sous-tore déployé maximal S de H. Puisque $P_{\mathcal{F}'}$ contient $S_{\mathcal{F}}$, on sait que $\mathcal{F}'$ est contenue dans $App(S)$. Mais $App(S) \subset Imm^G(H_{ad})$, donc $\mathcal{F}' \subset Imm^G(H_{ad})$. Cela contredit la définition de u. On a ainsi prouvé que $x \in Imm^G(H_{ad})$. On a $X + Z \in \mathfrak{k}_x$ donc $X + Z \in \mathfrak{k}^H_{p_H(x)}$ d'après 2.1.5(1). On a déjà dit que $X \in \mathfrak{k}^H_{p_H(x)}$, donc aussi $Z \in \mathfrak{k}^H_{p_H(x)}$. Cela prouve que $x \in \mathcal{Y}$.

Revenons au cas général où G et H ne sont pas supposés déployés. On fixe une extension finie F' de F galoisienne et modérément ramifiée, de sorte que G et H soient déployés sur F'. D'après le lemme 2.3.2, les hypothèses restent vérifiées si l'on remplace le corps de base F par F'. On applique ce que l'on vient de démontrer : l'ensemble des points $x \in Imm_{F'}(G_{AD})$ tels que $X + Z \in \mathfrak{k}_{x,F'}$ est égal à celui des $x \in Imm^G_{F'}(H_{ad})$ tels que $Z \in \mathfrak{k}^H_{p_H(x),F'}$. On prend les invariants par $\Gamma_{F'/F}$. Alors, grâce à 2.1.5(3), l'ensemble des points $x \in Imm(G_{AD})$ tels que $X+Z \in \mathfrak{k}_{x,F'}$ est égal à celui des $x \in Imm^G(H_{ad})$ tels que $Z \in \mathfrak{k}^H_{p_H(x),F'}$. Mais, pour $x \in Imm(G_{AD})$, $\mathfrak{k}_x = \mathfrak{g}(F) \cap \mathfrak{k}_{x,F'}$ et $\mathfrak{k}^H_{p_H(x)} = \mathfrak{h}(F) \cap \mathfrak{k}^H_{p_H(x),F'}$. Les conditions $X + Z \in \mathfrak{k}_{x,F'}$ et $Z \in \mathfrak{k}^H_{p_H(x),F'}$ équivalent donc à $X + Z \in \mathfrak{k}_x$ et $Z \in \mathfrak{k}^H_{p_H(x)}$. Cela démontre l'égalité $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ qui est la première assertion de l'énoncé. La seconde est le cas particulier $Z = 0$. $\square$

2.3.4 Classes de conjugaison stable dans $\mathcal{L}_F^{nr}$

Soient $H, H' \in \mathcal{L}_F^{nr}$. Disons que H et H' sont stablement conjugués si et seulement s'il existe $g \in G(\bar{F})$ tel que $H' = g^{-1}Hg$ et $g\sigma_G(g)^{-1} \in H(\bar{F})$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Fixons H et un élément $X_H \in \mathfrak{a}_H^{nr}(F)$ entier et de réduction régulière. Alors $H = Z_G(X)^0$ d'après le (i) du lemme 2.3.2. On définit la classe de conjugaison stable de X_H de la façon habituelle : $X \in \mathfrak{g}(F)$ est stablement conjugué à X_H si et seulement s'il existe $g \in G$ tel que $X = g^{-1}X_H g$ et $g\sigma_G(g)^{-1} \in H$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Notons $ker^1(H, G)$ le noyau de l'application naturelle $H^1(F, H) \to H^1(F, G)$.

Remarque. Les ensembles $H^1(F, H)$ et $H^1(F, G)$ ne sont pas naturellement des groupes. Le noyau est pris au sens des ensembles pointés. Toutefois, on peut bel et bien munir ces ensembles de structures de groupes, par exemple en les identifiant aux duaux de Pontryagin de $\pi_0(Z(\hat{H})^{\Gamma_F})$ et $\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})$. L'application $H^1(F, H) \to H^1(F, G)$ est alors un homomorphisme de groupes et $ker^1(H, G)$ est un sous-groupe de $H^1(F, H)$.

Notons $Cl_{st}(X_H)$ la classe de conjugaison stable de X_H et $Cl_{st}(X_H)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $Cl_{st}(X_H)$. Soit $X \in Cl_{st}(X_H)$. On choisit g comme ci-dessus. L'application $\sigma \mapsto g\sigma_G(g)^{-1}$ est un cocycle à valeurs dans H dont la classe ne dépend pas du choix de g. L'élément de $H^1(F,H)$ qu'il définit appartient évidemment à $ker^1(H,G)$. On obtient une application de $Cl_{st}(X_H)$ dans $ker^1(H,G)$. Elle se quotiente en une bijection de l'ensemble $Cl_{st}(X_H)/conj$ sur $ker^1(H,G)$. Notons $Cl_{st}(H)$ la classe de conjugaison stable de H et $Cl_{st}(H)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $Cl_{st}(H)$.

Lemme. *(i) L'application $X \mapsto G_X$ est une application surjective de $Cl_{st}(X_H)$ sur $Cl_{st}(H)$ qui se quotiente en une surjection de $Cl_{st}(X_H)/conj$ sur $Cl_{st}(H)/conj$.*

(ii) Pour $X \in Cl_{st}(X_H)$, X est un élément entier de réduction régulière de $\mathfrak{a}^{nr}_{G_X}(F)$.

(iii) Pour $X \in Cl_{st}(X_H)$, resp. $H' \in Cl_{st}(H)$, il existe un élément $g \in G(F^{nr})$ tel que $X = g^{-1}X_Hg$, resp. $H' = g^{-1}Hg$, et $gFr(g)^{-1} \in H(F^{nr})$. Pour un tel g, l'application $Ad(g)^{-1}$ se restreint en un isomorphisme défini sur F de $Z(H)$ sur $Z(G_X)$, resp. $Z(H')$.

(iv) Le groupe $ker^1(H,G)$ est l'image naturelle de $H^1(F,H_{sc})$ dans $H^1(F,H)$.

Preuve. La démonstration de (iv) est standard. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(F,H_{sc}) & \to & H^1(F,G_{SC}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(F,H) & \to & H^1(F,G) \end{array}$$

est commutatif. Puisque G_{SC} est simplement connexe, on a $H^1(F,G_{SC}) = \{0\}$. Donc $H^1(F,H_{sc})$ s'envoie dans $ker^1(H,G)$. Inversement, soit u un cocycle représentant un élément de $ker^1(H,G)$. Par hypothèse, il existe $g \in G$ tel que $u(\sigma) = g\sigma_G(g)^{-1}$ pour tout σ. Notons $\pi : G_{SC} \to G$ l'homomorphisme naturel. On peut écrire $g = z\pi(g_{sc})$ avec $z \in Z(G)$ et $g_{sc} \in G_{SC}$. Puisque $Z(G) \subset H$, on peut remplacer u par le cocycle $\sigma \mapsto u'(\sigma) = z^{-1}u(\sigma)\sigma_G(z)$. Définissons le cocycle u'_{sc} à valeurs dans G_{SC} par $u'_{sc}(\sigma) = g_{sc}\sigma_G(g_{sc})^{-1}$. Alors $u'(\sigma) = \pi(u'_{sc}(\sigma))$. Cela entraîne que u'_{sc} prend ses valeurs dans H_{sc} et u' définit un élément de $H^1(F,H_{sc})$. L'image de u dans $H^1(F,H)$ est l'image de cet élément.

Démontrons (iii). Soit $X \in Cl_{st}(X_H)$, resp. $H' \in Cl_{st}(H)$. Fixons un élément $g \in G$ tel que $X = g^{-1}X_Hg$, resp. $H' = g^{-1}Hg$, et $g\sigma_G(g)^{-1} \in H$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Alors le cocycle $\sigma \mapsto g\sigma_G(g)^{-1}$ définit un élément de $ker^1(H,G)$. On sait qu'il existe une extension finie F' de F, non ramifiée, telle que l'application de restriction $H^1(F,H) \to H^1(F',H)$ soit nulle. Fixons une telle extension. Le cocycle précédent devient trivial dans $H^1(F',H)$ donc on peut fixer $h \in H$ tel que $hg\sigma_G(hg)^{-1} = 1$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{F'}$ ou encore $hg \in G(F')$. Alors l'élément hg vérifie la condition de (iii). Pour unifier la notation, on pose $H' = G_X$ quand la donnée de départ est un élément $X \in Cl_{st}(X_H)$. L'application $Ad(g)^{-1}$ se restreint en un isomorphisme $\varphi : Z(H) \to Z(H')$ qui est évidemment défini sur F^{nr}. Pour $z \in Z(H)$, on a $Fr_G(\varphi(z)) = \varphi \circ Ad(gFr_G(g)^{-1})(Fr_G(z))$. Mais $gFr_G(g)^{-1} \in H(F^{nr})$ donc $Ad(gFr_G(g)^{-1})$ est l'identité sur $Z(H)$ et on obtient $Fr_G(\varphi(z)) = \varphi(Fr_G(z))$. Autrement dit φ est défini sur F. Cela prouve (iii).

L'assertion (ii) est évidente, puisque les couples (H,X_H) et (G_X,X) sont conjugués par un élément de $G(F^{nr})$ d'après (iii).

Soit $X \in Cl_{st}(X_H)$. Appliquons (iii) et fixons $g \in G(F^{nr})$ tel que $X = g^{-1}X_Hg$ et $gFr_G(g)^{-1} \in H(F^{nr})$. Posons $H' = G_X = g^{-1}Hg$. Puisque H est un F^{nr}-Levi de G et que $g \in G(F^{nr})$, H' est encore un F^{nr}-Levi de G. Il est stablement conjugué à H.

L'application $X \mapsto G_X$ est donc une application de $Cl_{st}(X_H)$ dans $Cl_{st}(H)$. Montrons qu'elle est surjective. Soit $H' \in Cl_{st}(H)$. On fixe $g \in G(F^{nr})$ tel que $H' = g^{-1}Hg$ et $gFr_G(g)^{-1} \in H(F^{nr})$. On pose $X = g^{-1}X_Hg$. Il est clair que X est stablement conjugué à X_H et que $G_X = H'$. Cela démontre (i). $\square$

L'application de $Cl_{st}(X_H)/conj$ sur $Cl_{st}(H)/conj$ n'est pas injective en général car un élément de $(H\backslash Norm_G(H))^{\Gamma_F}$ n'est pas forcément représenté par un élément de $Norm_{G(F)}(H)$. Pour un tel élément que l'on relève en un élément $n \in Norm_G(H)$, l'élément $X = n^{-1}X_Hn$ est stablement conjugué à X_H mais pas conjugué par un élément de $G(F)$. Pourtant $G_X = H$.

Notons $\mathcal{L}_{ell}^{nr}$ le sous-ensemble des $H \in \mathcal{L}_F^{nr}$ tels que $A_H = A_G$. On a

(1) pour $H \in \mathcal{L}_{ell}^{nr}$, $Cl_{st}(H)$ est contenu dans $\mathcal{L}_{ell}^{nr}$.

En effet, d'après le (iii) du lemme ci-dessus, les groupes $Z(H')^0$ et $Z(H)^0$ sont isomorphes sur F. L'égalité $A_G = A_H$ entraîne donc $A_G = A_{H'}$.

2.3.5 Passage au groupe G^* pour l'ensemble $\mathcal{L}_F^{nr}$

On reprend les notations de 2.1.3. Soit $H \in \mathcal{L}_F^{nr}$. Le groupe H est un F^{nr}-Levi de G donc $\psi(H)$ est un F^{nr}-Levi de G^*. Il est conjugué par un élément de $G^*(F^{nr})$ à un F^{nr}-Levi standard M^* de G^*. On peut fixer $x \in G^*(F^{nr})$ de sorte que $Ad(x)\circ\psi(H) = M^*$. On pose $\psi_x = Ad(x) \circ \psi$, dont le cocycle associé u_x est défini par $u_x(\sigma) = xu_G(\sigma)\sigma_{G^*}(x)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. On a

$$\sigma_{G^*}(M) = \sigma_{G^*}(\psi_x(H)) = u_x(\sigma)^{-1}\psi_x(\sigma_G(H))u_x(\sigma) = u_x(\sigma)^{-1}\psi_x(H)u_x(\sigma),$$

puisque H est défini sur F. Donc

$$(1) \qquad \sigma_{G^*}(M^*) = u_x(\sigma)^{-1}M^*u_x(\sigma).$$

Soit s_H un sommet de $Imm(H_{AD})$, supposons que $\mathbf{FC}^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}) \neq \emptyset$. Puisque $\psi_x : H \to M^*$ est un isomorphisme défini sur F^{nr}, il s'en déduit un isomorphisme noté $\psi_x^{Imm} : Imm_{F^{nr}}(H_{AD}) \to Imm_{F^{nr}}(M^*_{AD})$. Notons s_{M^*} l'image de s_H. On a $M^*_{SC,s_{M^*}} \simeq H_{SC,s_H}$ et l'hypothèse implique que $\mathbf{FC}^{M^*_{s_{M^*}}}(\mathfrak{m}^*_{SC,s_{M^*}}) \neq \emptyset$. Donc M^* vérifie les conclusions de la proposition 2.2.13. Montrons que

(2) M^* est défini sur F et est uniquement déterminé.

Soit $\sigma \in \Gamma_F$. Posons $g = u_x(\sigma)^{-1}$. C'est un élément de $G^*_{AD}(F^{nr})$ tel que $g^{-1}\sigma_{G^*}(M^*)g = M^*$ d'après (1). Notons P^* le sous-groupe parabolique standard de G^* de composante de Levi M^*. Alors $g^{-1}\sigma_{G^*}(P^*)g$ est un sous-groupe parabolique défini sur F^{nr} et de composante de Levi M^* d'après (1). D'après le (ii) de la proposition 2.2.13, il est conjugué à P^* par un élément de W^{I_F}. Tout élément de W^{I_F} est représenté par un élément de $G^*(F^{nr})$. Il en résulte que $\sigma_{G^*}(P^*)$ est conjugué à P^* par un élément de $G^*_{AD}(F^{nr})$. Mais P^* et $\sigma_{G^*}(P^*)$ sont standard. Leur conjugaison entraîne qu'ils sont égaux. Donc $\sigma_{G^*}(P^*) = P^*$ puis $\sigma_{G^*}(M^*) = M^*$. Donc M^* est défini sur F. La définition de M^* ne dépend que du choix de l'élément x. Choisissons un autre élément $\underline{x} \in G^*(F^{nr})$ de sorte que $Ad(\underline{x})\circ\psi(H)$ soit encore un Levi standard, que l'on note $\underline{M}^*$. Posons $y = \underline{x}x^{-1}$. Alors $y \in G^*(F^{nr})$ et $yM^*y^{-1} = \underline{M}^*$. Les paires $(B^* \cap M^*, T^*)$ et $(y^{-1}(B^* \cap \underline{M}^*)y, y^{-1}T^*y)$ sont deux paires de Borel de M^* définies sur F^{nr}. Quitte à multiplier y à droite par un élément de $M^*(F^{nr})$, on peut supposer qu'elles sont égales. Alors y normalise T^* et définit un élément $w \in W^{I_F}$ tel que $w(M^*) = \underline{M}^*$. Le (i) de la proposition 2.2.13 implique que $M^* = \underline{M}^*$. Cela prouve que M^* est uniquement défini, d'où (2).

2.3.6 Passage à G^*, le cas stable

Soit $H \in \mathcal{L}_F^{nr}$. On lui associe comme en 2.3.5 un Levi standard M^* de G^* défini sur F^{nr}. Supposons que M^* soit défini sur F. Fixons des alcôves $C^{nr,H}$, resp. C^{nr,M^*}, de $Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$, resp. de $Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$, conservées par Γ_F^{nr}. L'isomorphisme $\psi_x : H \to M^*$ est défini grâce au choix d'un élément $x \in G^*(F^{nr})$ que l'on peut, si l'on veut, multiplier à gauche par un élément de $M^*(F^{nr})$. On peut donc supposer que l'isomorphisme d'immeubles ψ_x^{Imm} envoie $C^{nr,H}$ sur C^{nr,M^*}. Fixons un sommet $s_H \in S(\bar{C}^{nr,H})$ et posons $s_{M^*} = \psi_x^{Imm}(s_H)$. On a $s_{M^*} \in S(\bar{C}^{nr,M^*})$.

Lemme. *(i) Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $s_H \in Imm(H_{AD})$ et $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$;

(b) M^* est défini sur F, $s_{M^*} \in Imm(M^*_{AD})$ et $FC^{st}(\mathfrak{m}^*_{SC,s_{M^*}}(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$.

Si elles sont vérifiées, les espaces $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q))$ et $FC^{st}(\mathfrak{m}^*_{SC,s_{M^*}}(\mathbb{F}_q))$ sont isomorphes.

(ii) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)) \neq \{0\}$;

(b) M^* est défini sur F et $FC^{st}(\mathfrak{m}^*_{SC}(F)) \neq \{0\}$.

Si elles sont vérifiées, les espaces $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ et $FC^{st}(\mathfrak{m}^*_{SC}(F))$ sont isomorphes.

(iii) Supposons G absolument quasi-simple. Si l'une des propriétés ci-dessus est vérifiée, M^*_{SC} est lui aussi absolument quasi-simple.

Remarque. On peut supposer que M^* est défini sur F : c'est une hypothèse si (i)(b) ou (ii)(b) est vérifiée ; cela résulte de 2.3.5 (2) si (i)(a) ou (ii)(a) l'est.

Preuve. En vertu du lemme 2.2.8, l'assertion (ii) résulte de (i) appliquée à tous les sommets $s_H \in S(\bar{C}^{nr,H})$. L'assertion (iii) résulte de 2.2.14(1).

Démontrons (i). Si G^* est simplement connexe et absolument quasi-simple, l'assertion resulte de [48] 9(3). Remarquons que l'on a de plus : s_H, resp. s_{M^*} est fixé par $Aut(\mathcal{D}_a^{nr,H})$, resp. $Aut(\mathcal{D}_a^{nr,M^*})$, cf. [48] 9(4). On va se ramener à ce cas.

On ne perd rien à supposer que G et G^* sont simplement connexes. On décompose G^* en produit de groupes $Res_{F'/F}(G'^*)$, où F' est une extension finie modérément ramifiée de F et G'^* est un groupe quasi-déployé sur F'. Alors G se décompose conformément en produit de groupes $Res_{F'/F}(G')$, où G' est une forme intérieure de G'^*. Le groupe H, resp. M^*, se décompose lui-aussi en produit de groupes $Res_{F'/F}(H')$, resp. $Res_{F'/F}(M'^*)$. On voit qu'il suffit de démontrer l'énoncé pour chacun des facteurs. On peut donc supposer $G^* = Res_{F'/F}(G'^*)$.

Si $F' = F$, G^* est absolument quasi-simple et on a vu ci-dessus que le lemme était vérifié.

Supposons F'/F totalement ramifié. On a alors $Imm_{F^{nr}}(H_{AD}) = Imm_{F'^{nr}}(H'_{AD})$ et $Imm_{F^{nr}}(M^*_{AD}) = Imm_{F'^{nr}}(M'^*_{AD})$ et ces identifications sont équivariantes pour les actions de $\Gamma_F^{nr} = \Gamma_{F'}^{nr}$. L'énoncé se déduit alors du même énoncé (déjà démontré) pour les groupes H' et M'^*.

En général, soit E la plus grande extension non ramifiée contenue dans F'. Posons $d = [E : F]$. Posons $G''^* = Res_{F'/E}(G'^*)$, $G'' = Res_{F'/E}(G')$, $H'' = Res_{F'/E}(H')$, $M''^* = Res_{F'/E}(M'^*)$. Comme en 2.2.9, on identifie $Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$ à $Imm_{F^{nr}}(H''_{AD})^d$, l'action de Fr_H étant

$$(x_1, ..., x_d) \mapsto (Fr_{H''}^d(x_d), x_1, ..., x_{d-1}).$$

La chambre $C^{nr,H}$ s'identifie à $(C^{nr,H''})^d$ et le sommet s_H à un d-uple de sommets $(s_{H,1},...,s_{H,d})$. La condition $s_H \in Imm(H_{AD})$ équivaut à $s_{H,1} = ... = s_{H,d}$ et $s_{H,1} \in Imm_E(H''_{AD})$. Si ces conditions sont vérifiées, on a $\mathfrak{h}_{SC,s_H} = Res_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q}(\mathfrak{h}''_{SC,s_{H,1}})$. En particulier $\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q) = \mathfrak{h}''_{SC,s_{H,1}}(\mathbb{F}_{q^d})$. De mêmes propriétés valent pour le groupe M^*. L'isomorphisme ψ_x^{Imm} se décompose en produit $\prod_{i=1,...,d} \psi_i^{Imm}$, où ψ_i^{Imm} est un isomorphisme de $Imm_E(H''_{AD})$ sur $Imm_E(M''^*_{AD})$ qui envoie $C^{nr,H''}$ sur C^{nr,M''^*}. On a $\psi_i^{Imm}(s_{H,i}) = s_{M^*,i}$ pour tout i. L'action des Frobenius n'établit pas de relation entre les ψ_i^{Imm} car ψ_x^{Imm} n'est pas défini sur F. Toutefois, notons $\psi_{i,\mathcal{D}_a^{nr,H''}}$ la bijection de $\mathcal{D}_a^{nr,H''}$ sur $\mathcal{D}_a^{nr,M''^*}$ déduite de ψ_i^{Imm}. On a alors $\psi_{i,\mathcal{D}_a^{nr,H''}} = \delta_i \circ \psi_{1,\mathcal{D}_a^{nr,H''}}$, où $\delta_i \in Aut(\mathcal{D}_a^{nr,M''^*})$. Supposons (i)(a) vérifiée. Alors, pour tout i, on a $s_{H,i} = s_{H,1} \in Imm_E(H''_{AD})$ et $FC^{st}(\mathfrak{h}''_{SC,s_{H,i}}(\mathbb{F}_{q^d})) \neq \{0\}$. Appliquons l'énoncé déjà démontré pour H'' et M''^* sur E. On en déduit que, pour tout i, $s_{M^*,i} \in Imm_E(M''^*_{AD})$ et $FC^{st}(\mathfrak{m}''^*_{SC,s_{M^*,i}}(\mathbb{F}_{q^d})) \neq \{0\}$. En identifiant $s_{M^*,i}$, resp $s_{H,i}$, à un sommet du diagramme $\mathcal{D}_a^{nr,M''^*}$, resp. $\mathcal{D}_a^{nr,H''}$, on a aussi $s_{M^*,i} = \psi_{i,\mathcal{D}_a^{nr,H''}}(s_{H,i}) = \delta_i \circ \psi_{1,\mathcal{D}_a^{nr,H''}}(s_{H,1}) = \delta_i(s_{M^*,1})$. Mais, comme on l'a rappelé ci-dessus, les sommets qui peuvent intervenir sont fixes par l'action de $Aut(\mathcal{D}_a^{nr,M''^*})$. Donc $s_{M^*,i} = s_{M^*,1}$. Jointe à la relation $s_{M^*,1} \in Imm_E(M''^*_{AD})$, cette égalité entraîne que $s_{M^*} \in Imm(M^*_{AD})$. On a alors $\mathfrak{m}^*_{SC,s_{M^*}}(\mathbb{F}_q) = \mathfrak{m}''^*_{SC,s_{M^*,1}}(\mathbb{F}_{q^d})$ et la relation $FC^{st}(\mathfrak{m}''^*_{SC,s_{M^*,1}}(\mathbb{F}_{q^d})) \neq \{0\}$ entraîne $FC^{st}(\mathfrak{m}^*_{SC,s_{M^*}}(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$. Cela démontre (i)(b). De plus, $FC^{st}(\mathfrak{m}^*_{SC,s_{M^*}}(\mathbb{F}_q)) = FC^{st}(\mathfrak{m}''^*_{SC,s_{M^*,1}}(\mathbb{F}_{q^d})) \simeq FC^{st}(\mathfrak{h}''_{SC,s_{H,1}}(\mathbb{F}_{q^d})) = FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q))$. On démontre de la même façon que (i)(b) implique (i)(a). $\square$

2.3.7 L'ensemble $\mathcal{L}^{*,st}_{F,sd}$

On note $\mathcal{L}^{*,st}_{F,sd}$ l'ensemble des F-Levi standard M^* de G^* tels que $FC^{st}(\mathfrak{m}^*_{SC}(F)) \neq \{0\}$ (l'indice sd de la notation indique "standard"). Remarquons que tout élément de $\mathcal{L}^{*,st}_{F,sd}$ vérifie la proposition 2.2.13. Pour $M^* \in \mathcal{L}^{*,st}_{F,sd}$, notons $W^{I_F}(M^*) = W^{M^*,I_F} \backslash Norm_{W^{I_F}}(M^*)$. Le groupe $W^{I_F}(M^*)$ agit sur lui-même par Fr-conjugaison : l'action d'un élément w est $w' \mapsto Fr(w)w'w^{-1}$. Pour $w \in W^{I_F}(M^*)$, on note $Cl_{Fr}(w)$ la classe de Fr-conjugaison de w.

Soit $w \in W^{I_F}(M^*)$. Cet élément w agit sur $X_*(Z(M^*)^0)^{I_F}$. Notons $X_*(Z(M^*)^0)^{I_F,w^{-1}\circ Fr}$ le sous-espace des points fixes de $w^{-1} \circ Fr$ dans $X_*(Z(M^*)^0)^{I_F}$. Notons A_w le sous-tore de $Z(M^*)^0$ dont le groupe de cocaractères est $X_*(Z(M^*)^0)^{I_F,w^{-1}\circ Fr}$. Notons M^*_w le commutant de A_w dans G^*. Le groupe A_w est un tore déployé sur F^{nr} et M^*_w est un F^{nr}-Levi de G^* contenant M^*. Disons que w est G-admissible, resp. Fr-régulier, si et seulement si $\psi^{-1}(M^*_w)$ est conjugué à un F-Levi de G, resp. $M^*_w = G$. Un élément Fr-régulier est évidemment G-admissible. On note $W^{I_F}(M^*)_{G-adm}$, resp. $W^{I_F}(M^*)_{Fr-reg}$, l'ensemble des éléments G-admissibles, resp. Fr-réguliers.

Lemme. *Soit $w \in W^{I_F}(M^*)$.*

(i) Soit $w' \in Cl_{Fr}(w)$. Alors w est G-admissible, resp. Fr-régulier, si et seulement s'il en est de même de w'.

(ii) L'élément w est G-admissible si et seulement s'il existe un F-Levi standard L^* de G^* tel que $M^* \subset L^*$, $M^*_{min} \subset L^*$ et $W^{L^*,I_F}(M^*)_{Fr-reg} \cap Cl_{Fr}(w) \neq \emptyset$.

Preuve. Soit $u \in W^{I_F}(M^*)$, posons $w' = Fr(u)wu^{-1}$. On vérifie que $X_*(Z(M^*)^0)^{I_F,w'^{-1}\circ Fr}$ est l'image naturelle de $X_*(Z(M^*)^0)^{I_F,w^{-1}\circ Fr}$ par l'action de u. Donc $M^*_{w'} = uM^*_w u^{-1}$ (ici

et dans la suite, on s'autorise à identifier u à un relèvement dans $G^*(F^{nr})$ qui conserve T^* et M^*). L'assertion (i) en résulte immédiatement.

Grâce à (i), les deux propriétés de w dont (ii) affirme l'équivalence sont invariantes par Fr-conjugaison. On s'autorise donc à remplacer w par un élément Fr-conjugué. Fixons un élément $X \in X_*(Z(M^*)^0)^{I_F, w^{-1}\circ Fr}$ qui est régulier en ce sens que $\alpha(X) \neq 0$ pour toute racine $\alpha \in \Sigma(A_w)$. Notons P_w^* le sous-groupe parabolique de G^* engendré par M_w^* et les sous-espaces radiciels associés aux racines $\alpha \in \Sigma(A_w)$ telles que $\alpha(X) > 0$. La paire parabolique (P_w^*, M_w^*) est définie sur F^{nr} et M_w^* contient T^*. Il existe donc une paire parabolique standard (Q^*, L^*) de G^* et un élément $u \in W^{I_F}$ tels que $(uP_w^*u^{-1}, uM_w^*u^{-1}) = (Q^*, L^*)$. Le groupe uM^*u^{-1} est un F^{nr}-Levi de L^* qui contient T^*. Quitte à multiplier u à gauche par un élément de W^{L^*, I_F}, on peut donc supposer que uM^*u^{-1} est standard. D'après la proposition 2.2.13, on a alors $uM^*u^{-1} = M^*$ et u définit un élément de $W^{I_F}(M^*)$. Posons $w' = Fr(u)wu^{-1}$ et recommençons la construction en remplaçant w par w' et X par $X' = u(X) \in X_*(Z(M^*)^0)^{I_F, w'^{-1}\circ Fr}$. On voit que la paire (P_w^*, M_w^*) est remplacée par $(uP_w^*u^{-1}, uM_w^*u^{-1})$, c'est-à-dire (Q^*, L^*). Quitte à effectuer ces remplacements, on peut donc aussi bien supposer que $(P_w^*, M_w^*) = (Q^*, L^*)$. Relevons Fr en un élément de Γ_F. Par construction, la paire $(P_w^*, M_w^*) = (Q^*, L^*)$ est conservée par $w^{-1}\circ Fr$. Puisqu'elle est standard, un raisonnement habituel entraîne qu'elle est conservée par Fr et par w. Cela entraîne que (Q^*, L^*) est définie sur F, autrement dit que L^* est un F-Levi, et que $w \in W^{L^*, I_F}(M^*)$. L'égalité $M_w^* = L^*$ et la définition de M_w^* entraînent alors que $w \in W^{L^*, I_F}(M^*)_{Fr-reg}$. Supposons que w soit G-admissible. Alors $M_w^* = L^*$ se transfère en un F-Levi de G. D'après 2.1.3(2), cela implique $M_{min}^* \subset L^*$. La conclusion de (ii) est donc vérifiée.

Inversement, supposons que w vérifie la conclusion de (ii). En remplaçant w par un élément Fr-conjugué. on peut supposer que $w \in W^{L^*, I_F}(M^*)_{Fr-reg}$. Alors $M_w^* = L^*$. Puisque $M_{min}^* \subset L^*$, $\psi^{-1}(L^*)$ est un Levi standard de G (pour la paire (P_{min}, M_{min}), cf. 2.1.3) défini sur F, donc un F-Levi de G. Cela prouve que w est G-admissible. $\square$

On note $W^{I_F}(M^*)_{G-adm}/Fr-conj$, resp. $W^{I_F}(M^*)_{Fr-reg}/Fr-conj$, l'ensemble des classes de Fr-conjugaison dans $W^{I_F}(M^*)_{G-adm}$, resp. $W^{I_F}(M^*)_{Fr-reg}$.

2.3.8 Les ensembles $\mathcal{L}_F^{nr,st}$ et $\mathcal{L}_{ell}^{nr,st}$

On a défini les ensembles $\mathcal{L}_F^{nr}$, $\mathcal{L}_F^{nr,st}$ et $\mathcal{L}_{ell}^{nr}$, cf. 2.2.14 et 2.3.4. On note $\mathcal{L}_{ell}^{nr,st} = \mathcal{L}_{ell}^{nr} \cap \mathcal{L}_F^{nr,st}$. Rappelons la propriété générale suivante. Soient G_1 et G_2 deux groupes réductifs connexes définis sur F. Deux torseurs intérieurs $\Psi, \Psi' : G_1 \to G_2$ sont dits dans la même classe modulo automorphismes intérieurs si et seulement s'il existe $g_2 \in G_2$ tel que $\Psi' = Ad(g_2) \circ \Psi$. Soit $\Psi : G_1 \to G_2$ un torseur intérieur. Il se déduit de Ψ un isomorphisme $I_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}_1(F)) \to I_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}_2(F))$ qui ne dépend que de la classe de Ψ modulo automorphismes intérieurs. Cet isomorphisme se restreint en un isomorphisme $FC^{st}(\mathfrak{g}_1(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{g}_2(F))$ (c'est une conséquence de la proposition 12 de [44]).

Soit $H \in \mathcal{L}_F^{nr,st}$ et soit $H' \in \mathcal{L}_F^{nr}$ un élément stablement conjugué à H. Fixons $g \in G(F^{nr})$ tel que $H' = g^{-1}Hg$ et $gFr(g)^{-1} \in H(F^{nr})$. L'automorphisme $Ad(g)^{-1}$ se restreint en un torseur intérieur de H sur H'. Il s'en déduit un isomorphisme $\iota_g : FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F))$. A fortiori, ce dernier espace est non nul et H' appartient à $\mathcal{L}_F^{nr,st}$. Donc l'ensemble $\mathcal{L}_F^{nr,st}$ est conservé par la conjugaison stable. D'après 2.3.4(1), il en est de même de $\mathcal{L}_{ell}^{nr,st}$.

Soit $H \in \mathcal{L}_F^{nr,st}$. On a associé à H un F-Levi M^* de G^* et un isomorphisme $\psi_x : H \to M^*$ défini sur F^{nr}. Le lemme 2.3.6 montre que M^* appartient à $\mathcal{L}_{F,sd}^{*,st}$. Posons

$n = Fr_{G^*}(x)u(Fr)^{-1}x^{-1} \in G^*_{AD}(F^{nr})$. On a l'égalité

(1) $Fr_{G^*}(\psi_x(h)) = n\psi_x(Fr_G(h))n^{-1}$ pour tout $h \in H(F^{nr})$.

Il en résulte que $n \in Norm_{G^*_{AD}(F^{nr})}(M^*)$. Les paires de Borel $(n(B^* \cap M^*)n^{-1}, nT^*n^{-1})$ et $(B^* \cap M^*, T^*)$ sont toutes deux des paires de Borel de M^* définies sur F^{nr}. Elles sont conjuguées par un élément de $M^*(F^{nr})$. On peut donc fixer $m \in M^*(F^{nr})$ de sorte que $mn \in Norm_{G^*_{AD}(F^{nr})}(T^*)$. Alors mn définit un élément de W^{I_F}, plus précisément de $Norm_{W^{I_F}}(M^*)$. Notons w son image dans $W^{I_F}(M^*)$. Montrons que

(2) l'élément w est G-admissible et sa classe de Fr-conjugaison est uniquement déterminée ; si $H \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}$, w est Fr-régulier.

L'homomorphisme ψ_x se restreint en un isomorphisme de $Z(H)^0$ sur $Z(M^*)^0$ qui est défini sur F^{nr}. Il s'en déduit un isomorphisme de $X_*(Z(H)^0)^{I_F}$ sur $X_*(Z(M^*)^0)^{I_F}$. D'après (1) et la définition de w, cet isomorphisme entrelace l'action de Fr_G sur l'espace de départ avec celle de $w^{-1} \circ Fr_{G^*}$ sur celui d'arrivée. A fortiori, il se restreint en un isomorphisme de $X_*(Z(H)^0)^{\Gamma_F}$ sur $X_*(Z(M^*)^0)^{I_F, w^{-1}\circ Fr_{G^*}}$. On a défini le groupe M^*_w en 2.3.7. Notons L_H le commutant de A_H dans G. C'est un F-Levi de G et la propriété précédente entraîne que $\psi_x(L_H) = M^*_w$. Donc M^*_w se tranfère en un F-Levi de G, c'est-à-dire que w est G-admissible. Si $H \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}$, on a $L_H = G$ et $M^*_w = G^*$ donc w est Fr-régulier. L'élément w dépend uniquement du choix de x. On ne peut changer x qu'en le multipliant à gauche par un élément de $Norm_{G^*(F^{nr})}(M^*)$. On voit qu'une telle multiplication remplace w par un élément qui lui est Fr-conjugué. Cela prouve (2).

A un élément $H \in \mathcal{L}^{nr,st}_F$, on vient d'associer un couple $(M^*, Cl_{Fr}(w))$, où $M^* \in \mathcal{L}^{*,st}_{F,sd}$ et $Cl_{Fr}(w) \in W^{I_F}(M^*)_{G-adm}/Fr-conj$.

Proposition. *Cette application se quotiente en une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison stable dans l'ensemble $\mathcal{L}^{nr,st}_F$, resp. $\mathcal{L}^{nr,st}_{ell}$, et l'ensemble des couples $(M^*, Cl_{Fr}(w))$ formés d'un élément $M^* \in \mathcal{L}^{*,st}_{F,sd}$ et d'une classe $Cl_{Fr}(w) \in W^{I_F}(M^*)_{G-adm}/Fr-conj$, resp. $Cl_{Fr}(w) \in W^{I_F}(M^*)_{Fr-reg}/Fr-conj$.*

Preuve. Conservons notre élément H et les notations afférentes. Soit $H' \in \mathcal{L}^{nr,st}_F$ un élément stablement conjugué à H. On peut donc fixer $g \in G(F^{nr})$ tel que $H' = g^{-1}Hg$ et $gFr_G(g)^{-1} \in H(F^{nr})$. Posons $x' = x\psi(g)$. Alors $Ad(x') \circ \psi(H') = M^*$. Notre application associe donc à H' le même groupe M^*. L'analogue de n pour H' est $n' = Fr_{G^*}(x')u(Fr)^{-1}x'^{-1} = Fr_{G^*}(x)Fr_{G^*} \circ \psi(g)u(Fr)^{-1}\psi(g)^{-1}x^{-1} = Fr_{G^*}(x)u(Fr)^{-1}\psi \circ Fr_G(g)\psi(g)^{-1}x^{-1} = Fr_{G^*}(x)u(Fr)^{-1}x^{-1}y = ny$, où $y = x\psi(Fr_G(g)g^{-1})x^{-1}$. Puisque $Fr_G(g)g^{-1} \in H(F^{nr})$, on a $y \in M^*(F^{nr})$. Donc l'élément de $W^{I_F}(M^*)$ déduit de n' est le même que celui déduit de n. Notre application envoie donc H' et H sur le même couple $(M^*, Cl_{Fr}(w))$.

Inversement, soit $H' \in \mathcal{L}^{nr,st}_F$. Supposons que notre application envoie H' sur le couple $(M^*, Cl_{Fr}(w))$ associé à H. Fixons $x' \in G^*(F^{nr})$ tel que $Ad(x') \circ \psi(H') = M^*$, posons $n' = Fr_{G^*}(x')u(Fr)^{-1}x'^{-1}$ et notons w' son image dans $W^{I_F}(M^*)$. L'hypothèse signifie que l'on peut fixer $v \in W^{I_F}(M^*)$ tel que $w' = Fr_{G^*}(v)wv^{-1}$. Puisque G^* est quasi-déployé, l'application $Norm_{G^*(F^{nr})}(M^*) \to W^{I_F}(M^*)$ est surjective. Relevons v en un élément $y \in Norm_{G^*(F^{nr})}(M^*)$. L'égalité $w' = Fr_{G^*}(v)wv^{-1}$ est équivalente à $n' \in Fr_{G^*}(y)ny^{-1}M^*_{ad}(F^{nr})$, ou encore $Fr_{G^*}(x')u(Fr)^{-1}x'^{-1} \in Fr_{G^*}(yx)u(Fr)^{-1}(yx)^{-1}M^*_{ad}(F^{nr})$. Posons $x'' = y^{-1}x'$. On a encore $Ad(x'')\circ\psi(H') = M^*$ et maintenant $Fr_{G^*}(x'')u(Fr)^{-1}x''^{-1} \in Fr_{G^*}(x)u(Fr)^{-1}x^{-1}M^*_{ad}(F^{nr})$. Posons $g = \psi^{-1}(x^{-1}x'')$. On a $g \in G(F^{nr})$, $H' = g^{-1}Hg$ et on voit que l'égalité précédente entraîne $gFr_G(g)^{-1} \in H$. Puisque c'est un élément de $G(F^{nr})$, cela équivaut à $gFr_G(g)^{-1} \in H(F^{nr})$. Donc H' est stablement conjugué à H. Cela démontre que notre application se quotiente en une application injective de

l'ensemble des classes de conjugaison stable dans l'ensemble $\mathcal{L}_F^{nr,st}$ dans l'ensemble des couples $(M^*, Cl_{Fr}(w))$ indiqués.

Il reste à prouver que notre application est surjective. Fixons $M^* \in \mathcal{L}_{F,sd}^{*,st}$ et un élément $w \in W^{I_F}(M^*)_{G-adm}$. D'après le lemme 2.3.7, quitte à remplacer w par un élément Fr-conjugué, on peut fixer un F-Levi standard L^* de G^* contenant M^*_{min} et M^* de sorte que $w \in W^{L^*,I_F}(M^*)_{Fr-reg}$. On relève w en un élément $\dot{w} \in W^{L^*,I_F}$. Notons $\sigma \mapsto \sigma_{T^*}$ l'action galoisienne sur T^*. On peut munir le tore T^* d'une nouvelle structure galoisienne notée $\sigma \mapsto \sigma_{\dot{w}}$ définie de la façon suivante. Il existe un unique cocycle $\mathbf{w} : \Gamma_F^{nr} \to W^{L^*,I_F}$ tel que $\mathbf{w}(Fr) = \dot{w}^{-1}$. On l'identifie par inflation à un cocycle défini sur Γ_F. Alors, pour $\sigma \in \Gamma_F$, on pose $\sigma_{\dot{w}} = \mathbf{w}(\sigma) \circ \sigma_{T^*}$. Notons $T^*_{\dot{w}}$ le tore ainsi défini. L'identité $j : T^*_{\dot{w}} \to T^*$ est un plongement de T^* dans L^* tel que $\sigma(j) := \sigma_{T^*} \circ j \circ \sigma_{\dot{w}}^{-1}$ est conjugué à j pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. D'après [19] corollaire 2.2, il existe un élément $y \in L^*$ tel que $Ad(y)^{-1} \circ j$ soit un plongement de $T^*_{\dot{w}}$ dans L^* défini sur F. On peut supposer $y = \pi(y_{sc})$ avec $y_{sc} \in L^*_{SC}(\bar{F})$, où $\pi : L^*_{SC} \to L^*$ est l'homomorphisme naturel. Fixons une extension finie non ramifiée de F telle que $\mathbf{w}$ soit trivial sur $\Gamma_{F'}$. Par construction de $T^*_{\dot{w}}$, j est équivariant pour les actions de $\Gamma_{F'}$. Cela entraîne que $y_{sc}\sigma_{G^*}(y_{sc})^{-1} \in T^*_{sc}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{F'}$ (ici T^*_{sc} est l'image réciproque de T^* dans L^*_{SC}). Mais T^*_{sc} est un tore induit donc tout cocycle de $\Gamma_{F'}$ dans T^*_{sc} est cohomologue au cocycle trivial. Quitte à multiplier y_{sc} à gauche par un élément de T^*_{sc}, on peut donc supposer $y_{sc}\sigma_{G^*}(y_{sc})^{-1} = 1$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{F'}$. Alors $y_{sc} \in L^*_{SC}(F')$ et aussi $y \in L^*(F')$ a fortiori $y \in L^*(F^{nr})$. Dire que $Ad(y)^{-1} \circ j$ est un plongement de $T^*_{\dot{w}}$ dans L^* défini sur F équivaut à dire que $yFr_{G^*}(y)^{-1}$ est un élément de $Norm_{L^*(F^{nr})}(T^*)$ dont l'image dans W^{L^*,I_F} est $\dot{w}^{-1}$. Posons $H^* = y^{-1}M^*y$. Ce groupe est un F^{nr}-Levi de L^* défini sur F. De l'application $Ad(y)$ se déduit un isomorphisme de $X_*(Z(H^*)^0)^{I_F}$ sur $X_*(Z(M^*)^0)^{I_F}$ qui entrelace les actions Fr_{G^*} et $w^{-1} \circ Fr_{G^*}$. Parce que w est Fr-régulier dans L^*, on a donc $X_*(Z(H^*)^0)^{\Gamma_F} = X_*(Z(L^*)^0)^{\Gamma_F}$. Fixons un sous-tore elliptique maximal T_1^* de H^* défini sur F. L'égalité précédente implique que T_1^* est aussi un sous-tore elliptique maximal de L^*. Un tel tore se tranfère à toute forme intérieure. On pose $L = \psi^{-1}(L^*)$. C'est un F-Levi standard de G et c'est une forme intérieure de L^*. On peut donc fixer un sous-tore elliptique maximal T_1 de L défini sur F et un élément $z \in L^*$ de sorte qu'en posant $\psi_z = Ad(z) \circ \psi$, l'isomorphisme ψ_z se restreigne en un isomorphisme défini sur F de T_1 sur T_1^*. Cela entraîne que $zu(\sigma)\sigma_{G^*}(z)^{-1} \in T^*_{1,ad}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. En conséquence, on a

(3) pour toute extension algébrique F'' de F et pour tout sous-groupe algébrique R^* de G^* défini sur F'' et contenant T_1^*, le sous-groupe $R := \psi_z^{-1}(R^*)$ de G est défini sur F'' et ψ_z se restreint en un isomorphisme défini sur F'' de $Z(R)^0$ sur $Z(R^*)^0$.

Posons $H = \psi_z^{-1}(H^*)$. D'après (3), H est défini sur F et ψ_z se restreint en un isomorphisme défini sur F de $Z(H)^0$ sur $Z(H^*)^0$. Donc aussi de A_H^{nr} sur $A_{H^*}^{nr}$. Puisque H^* est le commutant de $A_{H^*}^{nr}$, H est le commutant de A_H^{nr}. Le commutant d'un tore déployé sur F^{nr} est un F^{nr}-Levi donc H est un F^{nr}-Levi de L défini sur F. L'égalité $X_*(Z(H^*)^0)^{\Gamma_F} = X_*(Z(L^*)^0)^{\Gamma_F}$ se transfère par ψ_z^{-1} en l'égalité $X_*(Z(H)^0)^{\Gamma_F} = X_*(Z(L)^0)^{\Gamma_F}$. Dans le cas où w est Fr-régulier, on a $L^* = G^*$, $L = G$ et l'égalité précédente signifie que H appartient à $\mathcal{L}_{ell}^{nr}$. Fixons un sous-groupe parabolique P^{L^*} de L^* défini sur F^{nr} et de composante de Levi H^*. D'après (3), $\psi_z^{-1}(P^{L^*})$ est un sous-groupe parabolique de L défini sur F^{nr} et de composante de Levi H. Puisque ψ est défini sur F^{nr}, le couple $(\psi \circ \psi_z^{-1}(P^{L^*}), \psi(H))$ est encore une paire parabolique de L^* définie sur F^{nr}. Par construction, c'est l'image de (P^{L^*}, H^*) par $Ad(z)^{-1}$. Les deux paires paraboliques étant toutes deux définies sur F^{nr} et conjuguées, elles le sont par un élément de $L^*(F^{nr})$. Cela entraîne que $z \in H^*L^*(F^{nr})$. Ecrivons $z = h^*z'$ avec $h^* \in H^*$ et $z' \in L^*(F^{nr})$. On a encore $H^* = \psi_{z'}(H)$. Posons

$x = yz'$. Alors $x \in L^*(F^{nr})$ et on a $Ad(x) \circ \psi(H) = M^*$. Posons $n = Fr_{G^*}(x)u(Fr)^{-1}x^{-1}$. Un calcul simple montre que $n \in Norm_{G^*_{AD}(F^{nr})}(M^*)$ et que l'image dans $W^{I_F}(M^*)$ de n est w. On a ainsi trouvé un antécédent H du couple $(M^*, Cl_{Fr}(w))$ sauf que nous n'avons pas prouvé que $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)) \neq \{0\}$. Mais cela résulte du lemme 2.3.6 compte tenu de l'hypothèse $FC^{st}(\mathfrak{m}^*_{SC}(F)) \neq \{0\}$. $\square$

2.3.9 Sur l'action de certains automorphismes

Soit $H \in \mathcal{L}_F^{nr,st}$. Soit $g \in Norm_{G(F^{nr})}(H)$. Supposons $gFr(g)^{-1} \in H$. L'application $Ad(g)$ se restreint alors en un torseur intérieur de H dans lui-même. Il s'en déduit un automorphisme ι de $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$.

Lemme. *Cet automorphisme ι est l'identité.*

Preuve. Comme dans plusieurs preuves précédentes, on se ramène au cas où G^* est simplement connexe et absolument quasi-simple. Introduisons comme en 2.3.5 le torseur intérieur $\psi_x : G \to G^*$ dont on a supposé que $\psi_x(H) = M^*$. D'après le lemme 2.3.6, M^*_{SC} et H_{SC} sont eux-aussi absolument quasi-simples et on a $FC^{st}(\mathfrak{m}^*_{SC}(F)) \neq \{0\}$. Introduisons la forme quasi-déployée H^* de H et un torseur intérieur $\psi_H : H \to H^*$, dont on peut supposer qu'il est un isomorphisme sur F^{nr}. Il s'en déduit un isomorphisme $\iota_{\psi_H} : FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{h}^*_{SC}(F))$. Posons $\iota^* = \iota_{\psi_H} \circ \iota \circ \iota_{\psi_H}^{-1}$. Il s'agit de voir que ι^* est l'identité. Posons $\delta^* = \psi_H \circ Ad(g) \circ \psi_H^{-1}$. C'est un torseur intérieur de H^* dans lui-même et ι^* est déduit de δ^*. Fixons une paire de Borel épinglée de H^* conservée par l'action galoisienne. On peut écrire $\delta^* = Ad(h^*) \circ \theta^*$ où $h^* \in H^*$ et θ^* conserve la paire de Borel épinglée. Alors θ^* est un automorphisme de H^* défini sur F. L'isomorphisme ι^* est aussi celui défini par θ^*. D'après [48] 9(5), ce dernier agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{h}^*_{SC}(F))$ sauf dans le cas où H^*_{SC} est de type (A_{n-1}, ram), cf. 2.2.14 pour cette notation. Il suffit donc de vérifier que, dans le cas où H^*_{SC} est de ce type, on a $\theta^* = 1$, autrement dit δ^* est un automorphisme intérieur. Le composé $\psi_x \circ \psi_H^{-1}$ est un isomorphisme de H^* sur M^* défini sur F^{nr}. Donc M^*_{SC} est aussi du type (A_{n-1}, ram). Posons $\delta^{M^*} = \psi_x \circ \psi_H^{-1} \circ \delta^* \circ \psi_H \circ \psi_x^{-1}$. Il suffit encore de montrer que δ^{M^*} est un automorphisme intérieur. On a $\delta^{M^*} = \psi_x \circ Ad(g) \circ \psi_x^{-1} = Ad(g^*)$, où $g^* = \psi_x(g)$. L'élément g^* appartient à $G^*(F^{nr})$ et normalise M^*. Quitte à le multiplier par un élément de $M^*(F^{nr})$, on peut supposer qu'il normalise T^*. Il lui est associé un élément de $W^{I_F}(M^*)$. Il s'agit de prouver que l'action sur M^* d'un tel élément est intérieure. En utilisant les descriptions de 2.2.14, on voit que les deux conditions $FC^{st}(\mathfrak{m}^*_{SC}(F)) \neq \{0\}$ et M^* est de type (A_{n-1}, ram) ne peuvent se produire que dans les deux cas suivants :

(1) G^* est de type (A_{m-1}, ram) avec $m \geq n$ et $m \equiv n \ mod\ 2\mathbb{Z}$;

(2) G^* est de type (E_6, ram) ; dans ce cas M^* est de type A_5.

Dans le cas (1), on voit que le groupe $W^{I_F}(M^*)$ est engendré par les symétries élémentaires associées aux sous-groupes de Levi standard L^* définis sur F^{nr}, contenant strictement M^* et minimaux parmi ceux vérifiant ces conditions. Pour un tel groupe, on a soit $L^*_{SC} = Res_{E/F}SL(2) \times M^*_{SC}$, où E est l'extension quadratique ramifiée de F telle que Γ_E agisse trivialement sur $\mathcal{D}$, soit L^*_{SC} est de type A_{n+1}. Dans le premier cas, la symétrie élémentaire est celle du premier facteur, elle agit trivialement sur M^*. Dans le deuxième cas, la symétrie élémentaire est le produit des éléments de plus grande longueur des groupes de Weyl de L^* et M^*. On voit que cet élément fixe les points du diagramme de Dynkin de M^*, donc agit sur M^* par automorphisme intérieur. Dans le cas (2), M^* est un F^{nr}-Levi propre maximal et $W^{I_F}(M^*)$ est réduit à deux éléments. L'élément non

trivial est l'image dans $W^{I_F}(M^*)$ du produit des éléments de plus grande longueur des groupes de Weyl de G^* et M^*. En utilisant la description de [6] de ces éléments, on voit que cette symétrie fixe encore les points du diagramme de Dynkin de M^*, donc agit sur M^* par automorphisme intérieur. Cela achève la démonstration. $\square$

Soient $H, H' \in \mathcal{L}_F^{nr,st}$, supposons que ces groupes sont stablement conjugués. Fixons $g \in G(F^{nr})$ tel que $H' = g^{-1}Hg$ et $gFr(g)^{-1} \in H(F^{nr})$. Comme on l'a dit en 2.3.8, de l'automorphisme $Ad(g)^{-1}$ se déduit un isomorphisme $\iota_g : FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F))$. Il est indépendant du choix de g. En effet, on ne peut modifier g qu'en le multipliant à gauche par un élément $n \in Norm_{G(F^{nr})}(H)$ tel que $nFr(n)^{-1} \in H(F^{nr})$. On a alors $\iota_{ng} = \iota_g \iota_n$. Or le lemme précédent dit que ι_n est l'identité. On note simplement $\iota_{H',H}$ cet isomorphisme ι_g pour un choix quelconque de g.

2.3.10 Le groupe H_{s_H}

On suppose dans ce paragraphe que G est adjoint, simple et quasi-déployé sur F. Cette dernière hypothèse permet d'identifier G à G^*. On utilise les constructions de 2.1.9. Soient $H \in \mathcal{L}_F^{nr,st}$ et $x \in Imm^G(H_{ad})$. Posons $s_H = p_H(x)$ et supposons que s_H appartient à $S^{st}(H_{AD})$, c'est-à-dire que s_H est un sommet de $Imm(H_{AD})$ et $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$. Puisque $G = G^*$, la construction de 2.3.5 associe au couple (H, s_H) un couple (M, s_M), où M est un F-Levi standard de G et $s_M \in S^{st}(M_{AD})$. Ces deux couples sont conjugués par un élément de $G(F^{nr})$. On introduit le sous-ensemble $\Lambda \subset \Delta_a^{nr}$ associé en 2.2.16 au couple (M, s_M). Ainsi que tout élément de $Imm(G)$, x est conjugué par un élément de $G(F)$ à un élément de $\bar{C}$.

Lemme. *(i) Soit $x' \in \bar{C}$ un élément conjugué à x par un élément de $G(F)$. Alors $\Lambda \subset \Lambda(x')$.*

(ii) Supposons $x \in \bar{C}$. Alors il existe $k \in K_x^{0,nr}$ tel que $Ad(k)$ transporte (H, s_H) sur (M_Λ, s_Λ). En notant $\bar{k}$ la réduction de k dans G_x, on a $Ad(\bar{k})(H_{s_H}) = M_{\Lambda,s_\Lambda}$.

Preuve. On a dit que les deux couples (H, s_H) et (M, s_M) étaient conjugués par un élément de $G(F^{nr})$. Ils sont en fait conjugués par un élément de $G_{SC}(F^{nr})$: il suffit d'appliquer la construction de 2.3.5 au groupe G_{SC} et aux F^{nr}-Levi H_{sc} et M_{sc}. Fixons $g \in G_{SC}(F^{nr})$ tel que $Ad(g)$ transporte (H, s_H) en (M, s_M). Fixons une extension finie non ramifiée F' de F telle que $g \in G_{SC}(F')$. On a alors $gx \in Imm_{F'}^G(M_{ad})$ et $p_M(gx) = s_M$. D'après la proposition 2.2.16, on peut fixer $g' \in G_{SC}(F')$ tel que $Ad(g')$ transporte (M, s_M) en (M_Λ, s_Λ), que $g'gx \in \bar{C}^{nr}$ et que $\Lambda \subset \Lambda(g'gx)$. Les deux points $g'gx$ et x' sont conjugués par un élément de $G(F^{nr})$ et appartiennent tous deux à $\bar{C}^{nr}$. D'après 2.1.9(6), ils sont conjugués par un élément de $\mathbf{\Omega}^{nr}$. L'ensemble $\Lambda(x')$ est l'image de $\Lambda(g'gx)$ par l'action d'un tel élément. D'après 2.2.16(6), Λ est conservé par cette action. Puisque $\Lambda \subset \Lambda(g'gx)$, on a donc $\Lambda \subset \Lambda(x')$, ce qui prouve (i).

Supposons $x \in \bar{C}$. Reprenons la construction précédente et posons $k_{sc} = g'g$. On a $k_{sc} \in G_{SC}(F')$ et $k_{sc}x \in \bar{C}^{nr}$. Deux éléments de $\bar{C}^{nr}$ ne sont conjugués par un élément de $G_{SC}(F^{nr})$ que s'ils sont égaux. Donc $k_{sc}x = x$, d'où $k_{sc} \in K_{SC,x}^{\dagger,nr} = K_{SC,x}^{0,nr}$. Notons k l'image de k_{sc} dans $G(F^{nr})$. Alors $k \in K_x^{0,nr}$. Par construction de g' et g, $Ad(k)$ transporte (H, s_H) sur (M_Λ, s_Λ). Puisque k fixe x, l'égalité $p_H(x) = s_H$ entraîne $p_{M_\Lambda}(x) = s_\Lambda$ et $Ad(\bar{k})$ transporte $H_x = H_{s_H}$ sur $M_{\Lambda,x} = M_{\Lambda,s_\Lambda}$. Cela prouve (ii). $\square$

2.4 Stabilité et espace $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$

2.4.1 L'espace $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$

Posons

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{s\in S(G)} C_{nil,cusp}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)).$$

Comme on l'a dit en 2.2.6, l'espace $C(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ s'identifie à un sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. L'espace $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ est lui-aussi un sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ (la somme reste directe dans cet espace, cf. [47] paragraphe 8). Notons $\mathcal{L}_F$ l'ensemble des F-Levi de G. Posons

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{M\in\mathcal{L}_F} \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{m}(F)).$$

Le groupe $G(F)$ agit naturellement sur ces espaces par conjugaison, on note $\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ et $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$ leurs quotients de coinvariants.

On définit un homomorphisme antilinéaire $D^G : \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*$ par la formule suivante, pour $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$:

$$D_\varphi^G(f) = \int_{A_G(F)\backslash G(F)} \int_{\mathfrak{g}(F)} f(g^{-1}Xg)\bar{\varphi}(X)\, dX\, dg.$$

On étend cette définition en un homomorphisme antilinéaire $D^G : \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*$ de la façon suivante. Pour $M \in \mathcal{L}_F$, on dispose de l'homomorphisme d'induction Ind_M^G : $I(\mathfrak{m}(F))^* \to I(\mathfrak{g}(F))^*$. Pour $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{m}(F))$, on pose $D_\varphi^G = Ind_M^G(D_\varphi^M)$. Cet homomorphisme D^G se quotiente en un homomorphisme antilinéaire $D^G : \mathcal{D}(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*$. On a

(1) cet homomorphisme $D^G : \mathcal{D}(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*$ est injectif.

Cf. [46] proposition 5.5. On note $\hat{D}^G$ le composé de D^G et de la transformation de Fourier dans $I(\mathfrak{g}(F))^*$.

Notons $I^{inst}(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace de $I(\mathfrak{g}(F))$ formé des éléments dont toutes les intégrales orbitales stables régulières sont nulles. On a $SI(\mathfrak{g}(F)) = I(\mathfrak{g}(F))/I^{inst}(\mathfrak{g}(F))$. Le dual $SI(\mathfrak{g}(F))^*$ est l'espace des distributions stables. Il s'identifie au sous-espace des éléments de $I(\mathfrak{g}(F))^*$ qui annulent $I^{inst}(\mathfrak{g}(F))$. Rappelons que $I^{inst}(\mathfrak{g}(F))$ est invariant par transformation de Fourier et qu'il en est donc de même de $SI(\mathfrak{g}(F))^*$. Notons $\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$ le sous-ensemble des $d \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$ tels que $D^G(d) \in SI(\mathfrak{g}(F))^*$.

On note $\mathcal{H}$ le sous-espace des $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ telles que le support de $\hat{f}$ soit contenu dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. On note $res_{\mathcal{H}}$ l'homomorphisme de restriction $I(\mathfrak{g}(F))^* \to \mathcal{H}^*$. Notons $S\mathcal{H}^*$ l'image de $SI(\mathfrak{g}(F))^*$ par $res_{\mathcal{H}}$. Pour tout sommet $s \in Imm(G_{AD})$, fixons une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre d'Iwahori $\mathfrak{i}_s \subset \mathfrak{k}_s$. Posons

$$\mathcal{H}^0 = \sum_{s\in S(G)} C(\mathfrak{k}_s/\mathfrak{i}_s).$$

On a $\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}$ et on note $res_{\mathcal{H}^0,\mathcal{H}} : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^{0,*}$ l'homomorphisme de restriction. On note $I(\mathfrak{g}(F))^*_{ent}$ l'espace des distributions à support dans $\mathfrak{g}_{ent}(F)$.

Lemme. *(i) La restriction à l'espace $res_{\mathcal{H}}(I(\mathfrak{g}(F))^*_{ent})$ de l'homomorphisme $res_{\mathcal{H}^0,\mathcal{H}}$ est injective.*

(ii) Les homomorphismes $res_{\mathcal{H}} \circ \hat{D}^G$ et $res_{\mathcal{H}^0,\mathcal{H}} \circ res_{\mathcal{H}} \circ \hat{D}^G$ sont injectifs.

(iii)Soit $d \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$. Alors $res_{\mathcal{H}} \circ \hat{D}^G(d) \in S\mathcal{H}^*$ si et seulement si $d \in \mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

Preuve. Le (i) est l'une des assertions du théorème 2.1.5 de [8] telle que nous l'avons reformulée en [47] proposition 7.

Notons $I(\mathfrak{g}(F))^*_{tn}$ l'espace des distributions à support dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ et $res_{tn} : I(\mathfrak{g}(F))^* \to I(\mathfrak{g}(F))^*_{tn}$ l'endomorphisme de restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. Par transformation de Fourier, l'injectivité de $res_{\mathcal{H}} \circ \hat{D}^G$ équivaut à celle de $res_{tn} \circ D^G$. Or par définition, l'image de D^G est formée de distributions à support dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. Donc res_{tn} est l'identité sur l'image de D^G. Puisque D^G est injectif, il en est de même de $res_{tn} \circ D^G$.

Par construction, l'image de $\hat{D}^G$ est contenue dans $I(\mathfrak{g}(F))^*_{ent}$. D'après (i), $res_{\mathcal{H}^0,\mathcal{H}}$ est injective sur l'image de $res_{\mathcal{H}} \circ \hat{D}^G$ et la deuxième assertion de (ii) résulte de la première.

Pour (iii), le sens "si" est évident. Soit $d \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$. Supposons $res_{\mathcal{H}} \circ \hat{D}^G(d) \in S\mathcal{H}^*$. Fixons $S \in SI(\mathfrak{g}(F))^*$ tel que $res_{\mathcal{H}} \circ \hat{D}^G(d) = res_{\mathcal{H}}(S^-)$ (rappelons que, pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on note f^- la fonction $X \mapsto f(-X)$; alors S^- est la distribution telle que $S^-(f) = S(f^-)$ pour tout f). Alors $D^G(d)$ coïncide avec $\hat{S}$ sur $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. Soit $f \in I^{inst}(\mathfrak{g}(F))$. Puisque $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ est un sous-ensemble ouvert et fermé de $\mathfrak{g}(F)$ invariant par conjugaison stable, on peut écrire $f = f_{tn} + f'$, où f_{tn} est à support dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$, le support de f' ne coupe pas $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ et $f_{tn}, f' \in I^{inst}(\mathfrak{g}(F))$. Par construction, le support de $D^G(d)$ est contenu dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. Donc $D^G(d)(f) = D^G(d)(f_{tn}) = \hat{S}(f_{tn})$ et $\hat{S}(f_{tn}) = 0$ puisque $\hat{S}$ est stable. Donc $D^G(d)(f) = 0$, ce qui entraine que $D^G(d)$ est stable. □

2.4.2 Réduction aux éléments elliptiques

Posons $I^{inst}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = I_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \cap I^{inst}(\mathfrak{g}(F))$. Disons qu'une distribution $J \in I(\mathfrak{g}(F))^*$ est stable sur les elliptiques si elle annule $I^{inst}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$.

Proposition. *Soit $d \in \mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. Alors $D^G(d)$ est stable si et seulement si $D^G(d)$ est stable sur les elliptiques.*

Sous notre hypothèse $(Hyp)_2(p)$, l'exponentielle est une bijection de $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ sur le sous-ensemble des éléments topologiquement unipotents de $G(F)$. Alors la proposition résulte de la proposition 8.3 de [46] descendue à l'algèbre de Lie par l'exponentielle. □

2.4.3 Décomposition selon les Levi

Pour tout $M \in \mathcal{L}_F$, le normalisateur $Norm_{G(F)}(M)$ agit naturellement dans $\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{m}(F))$. On note $\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{m}(F))^{Norm_{G(F)}(M)}$ le sous-espace des invariants. Fixons un ensemble de représentants $\underline{\mathcal{L}}_F$ des classes de conjugaison de F-Levi. Posons

$$(1) \qquad \underline{\mathcal{D}}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{M \in \underline{\mathcal{L}}_F} \mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{m}(F))^{Norm_{G(F)}(M)}.$$

Alors l'application naturelle $\underline{\mathcal{D}}(\mathfrak{g}(F)) \to \mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$ est un isomorphisme.

Lemme. *Soit $d \in \underline{\mathcal{D}}(\mathfrak{g}(F))$, que l'on écrit $d = \oplus_{M \in \underline{\mathcal{L}}} d_M$ conformément à la décomposition (1). Alors $d \in \mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$ si et seulement si $d_M \in \mathcal{D}^{st}(\mathfrak{m}(F))$ pour tout $M \in \underline{\mathcal{L}}$.*

Preuve. Le sens "si" est évident, en tenant compte que, pour tout $M \in \mathcal{L}$, l'induction $Ind_M^G : I(\mathfrak{m}(F))^* \to I(\mathfrak{g}(F))^*$ préserve la stabilité.

Dans l'autre sens, supposons $d \in \mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Notons $\underline{\mathcal{L}}_F(d)$ l'ensemble des $M \in \underline{\mathcal{L}}$ tels que $d_M \neq 0$ et notons $l(d)$ son nombre d'éléments. On raisonne par récurrence sur $l(d)$. Si $l(d) = 0$, $d_M = 0$ pour tout M et la conclusion est claire. Supposons $l(d) > 0$ et, parmi les $M \in \underline{\mathcal{L}}_F(d)$, fixons un élément maximal L. Pour tout $M \in \mathcal{L}_F$, notons $Res_M^G : I(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{m}(F))$ l'application "terme constant". Soit $f_L \in I_{cusp}(\mathfrak{l}(F))^{Norm_{G(F)}(L)}$. Parce que L est

maximal parmi les éléments de $\underline{\mathcal{L}}_F(d)$, la filtration habituelle de $I(\mathfrak{g}(F))$, cf. [34] I.4.2, montre qu'il existe $f \in I(\mathfrak{g}(F))$ tel que $Res_M^G(f) = 0$ pour tout $M \in \underline{\mathcal{L}}_F(d)$, $M \neq L$, et $Res_L^G(f) = f_L$. Supposons de plus $f_L \in I_{cusp}^{inst}(\mathfrak{l}(F))^{Norm_{G(F)}(L)}$. Alors on peut supposer $f \in I^{inst}(\mathfrak{g}(F))$, cf. [34] I.4.6. Puisque $d \in \mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$, on a $D^G(d)(f) = 0$. C'est-à-dire $\sum_{M \in \underline{\mathcal{L}}_F(d)} D^M(d_M) \circ Res_M^G(f) = 0$. Cette expression se réduit à $D^L(d_L)(f_L) = 0$. On a supposé $f_L \in I_{cusp}^{inst}(\mathfrak{l}(F))^{Norm_{G(F)}(L)}$ mais, puisque d^L est supposée invariante par $Norm_{G(F)}(L)$, le résultat s'étend immédiatement à toute $f_L \in I_{cusp}^{inst}(\mathfrak{l}(F))$. Donc $D^L(d_L)$ est stable sur les elliptiques. Par la proposition 2.4.2, $D^L(d_L)$ est stable. Posons $d' = \oplus_{M \in \underline{\mathcal{L}}_F(d), M \neq L} d_M$. Puisque $D^G(d') = D^G(d) - D^G(d_L)$, $D^G(d')$ est encore stable. On a $l(d') = l(d) - 1$ et on applique l'hypothèse de récurrence à d' : $D^M(d_M)$ est stable pour tout $M \in \underline{\mathcal{L}}_F(d)$ tel que $M \neq L$. Joint au résultat déjà démontré pour $M = L$, c'est la conclusion du lemme. □

2.4.4 Une première description de l'espace $\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$

Notons $\mathcal{L}_{ell}^{nr,\star}$ l'ensemble des couples (H, s_H) tels que $H \in \mathcal{L}_{ell}^{nr}$, s_H est un sommet de $Imm(H_{AD})$ et $FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$.

Soit $(H, s_H) \in \mathcal{L}_{ell}^{nr,\star}$. Posons $s = p_H^{-1}(s_H)$. C'est un sommet de $Imm^G(H_{ad})$, cf. 2.1.5(6). D'après 2.1.6, il se déduit de H un $\bar{\mathbb{F}}_q$-Levi H_s de G_s qui est isomorphe à H_{s_H}. Puisque s_H reste un sommet dans $Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$, le plus grand tore central de H_s est $A_{H,s}^{nr}$. Puisque H est défini sur F, H_s est défini sur $\mathbb{F}_q$. Puisque $FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$, on a $\mathfrak{h}_{SC,s_H} = \mathfrak{h}_{s_H,SC} = \mathfrak{h}_{s,SC}$ et $\mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}^{H_s}(\mathfrak{h}_{s,SC}) \neq \emptyset$. Il en résulte que les sous-groupes paraboliques de G_s de composante de Levi H_s sont tous conjugués dans G_s, cf. 2.2.3(1). Alors, le fait que H_s soit défini sur $\mathbb{F}_q$ implique qu'il existe un $\mathbb{F}_q$-Levi $\bar{M}$ de G_s et un élément $g \in G_s$ tel que $H_s = g^{-1}\bar{M}g$. Posons $n = Fr(g)g^{-1}$. Alors $n \in Norm_{G_s}(\bar{M})$. Notons w son image dans $W(\bar{M})$. Parce que H appartient à $\mathcal{L}_{ell}^{nr}$, le plus grand sous-tore de $A_{H,s}^{nr}$ déployé sur $\mathbb{F}_q$ est central dans G_s. Cela entraîne que $w \in W(\bar{M})_{Fr-reg}$. On est alors dans la situation de 2.2.5. Fixons un élément $X_H \in A_H^{nr}(F)$ entier et de réduction régulière. Notons $X_{H,s}$ sa réduction dans $A_{H,s}^{nr}(\mathbb{F}_q)$. Il est régulier, c'est-à-dire que son commutant dans G_s est H_s. Alors, pour $\varphi \in FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q))$, on construit comme en 2.2.5 les fonctions $\varphi_{X_{H,s}}$ (que l'on notera simplement φ_{X_H}) et $\mathcal{Q}_\varphi$ sur $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$. Ce sont des fonctions cuspidales. L'application $\varphi \mapsto \mathcal{Q}_\varphi$ est injective.

Ainsi, au couple $(H, s_H) \in \mathcal{L}_{ell}^{nr,\star}$, on a associé $s \in S(G)$ et une application linéaire injective $\varphi \mapsto \mathcal{Q}_\varphi$ de $FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q))$ dans $C_{nil,cusp}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) \subset \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. Posons

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{cusp}^\star(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{(H,s_H) \in \mathcal{L}_{ell}^{nr,\star}} FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)).$$

Des applications linéaires définies ci-dessus se déduit une application linéaire

$$\mathbf{j} : \boldsymbol{\mathcal{K}}_{cusp}^\star(\mathfrak{g}(F)) \to \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)).$$

Cette application n'est pas injective mais vérifie la propriété suivante :

(1) soient $(H, s_H), (H', s_{H'}) \in \mathcal{L}_{ell}^{nr,\star}$, $\varphi \in FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q))$ et $\varphi' \in FC^{H'_{s_{H'}}}(\mathfrak{h}'_{SC,s_{H'}}(\mathbb{F}_q))$; supposons $\mathbf{j}(\varphi) = \mathbf{j}(\varphi')$; alors il existe $g \in G(F)$ tel que $Ad(g)(H) = H'$ et que l'isomorphisme $Ad(g)$ de H sur H' transporte s_H et φ en $s_{H'}$ et φ'.

Preuve. L'égalité $\mathbf{j}(\varphi) = \mathbf{j}(\varphi')$ implique que le sommet s de la construction précédente est le même pour les deux couples (H, s_H) et $(H', s_{H'})$. En utilisant 2.2.5, elle implique aussi qu'il existe $x \in G_s(\mathbb{F}_q)$ tel que $Ad(x)(H_s) = H'_s$ et que l'isomorphisme $Ad(x)$ de H_s sur H'_s transporte φ sur φ'. Fixons un sous-tore S de H maximalement déployé sur F

tel que s_H appartienne à l'appartement de $Imm(H_{AD})$ associé à S et fixons un sous-tore T de H, défini sur F, maximalement déployé sur F^{nr} et contenant S. Il s'en déduit des sous-tores $S_s \subset T_s$ de H_s définis sur $\mathbb{F}_q$. Le tore S_s est un sous-tore déployé sur $\mathbb{F}_q$ maximal de H_s et T_s est le commutant de S_s dans H_s. On fixe des sous-tores $S' \subset T'$ de H' vérifiant des propriétés analogues. Puisque $Ad(x)(H_s) = H'_s$, on peut multiplier x à gauche par un élément de $H'_s(\mathbb{F}_q)$ de sorte que $Ad(x)(S_s) = S'_s$. Alors $Ad(x)$ envoie le commutant T_s de S_s dans H_s sur le commutant T'_s de S'_s dans H'_s. En appliquant le lemme 2.2.2 de [10], on peut relever x en un élément $g \in K_s^0$ tel que $Ad(g)(T) = T'$. On a $A_H^{nr} \subset T$ et $A_{H'}^{nr} \subset T'$. Puisque $Ad(x)(H_s) = H'_s$, on a aussi $Ad(x)(A_{H,s}^{nr}) = A_{H',s}^{nr}$. Cette égalité se relève en $Ad(g)(A_H^{nr}) = A_{H'}^{nr}$. Puisque H, resp. H', est le commutant de A_H^{nr}, resp. $A_{H'}^{nr}$, on a aussi $Ad(g)(H) = H'$. L'isomorphisme $Ad(g)$ transporte l'image s_H de s dans $Imm(H_{AD})$ en l'image de gs dans $Imm(H'_{AD})$. Puisque $g \in K_s^0$, on a $gs = s$ et cette image est $s_{H'}$. Enfin, parce que $Ad(x)$ transporte φ sur φ', $Ad(g)$ a la même propriété. Cela prouve (1).

Inversement, soit $s \in S(G)$ et considérons un $\mathbb{F}_q$-Levi $\bar{M}$ de G_s tel que $FC^{\bar{M}}(\bar{\mathfrak{m}}_{SC}(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$ et un élément $w \in W(\bar{M})_{Fr-reg}$. On peut fixer un tore $T \in \mathcal{T}_{max}^{nr}$ défini sur F tel que $s \in App_{F^{nr}}(T)$ et que la réduction T_s de T dans G_s soit un sous-tore maximal et maximalement déployé de ce groupe contenu dans $\bar{M}$. On peut relever w en un élément de $Norm_{G_s}(\bar{M}) \cap Norm_{G_s}(T_s)$. Fixons $g_w \in G_s$ tel que $g_w Fr(g_w)^{-1} \in Norm_{G_s}(T_s)$ et se projette sur w^{-1}. Posons $T'_s = g_w^{-1} T_s g_w$. D'après [10] lemmes 2.2.2 et 2.3.1, on peut relever T'_s en un sous-tore $T' \in \mathcal{T}_{max}^{nr}$ défini sur F et g_w en un élément $k \in K_s^{0,nr}$ de sorte que $k^{-1}Tk = T'$. On a encore $s \in App_{F^{nr}}(T')$. Posons $\bar{M}_w = g_w^{-1}\bar{M}g_w$. C'est un $\bar{\mathbb{F}}_q$-Levi de G_s défini sur $\mathbb{F}_q$. Le tore $Z(\bar{M}_w)^0$ se relève naturellement en un sous-tore T'_w de T' qui est défini sur F. Notons H le commutant de T'_w. C'est un F^{nr}-Levi de G qui est défini sur F. On a $T' \subset H$. Puisque $s \in App_{F^{nr}}(T')$, s appartient à $Imm_{F^{nr}}^G(H_{ad})$ et même à $Imm^G(H_{ad})$ puisque $s \in S(G)$ est fixé par l'action galoisienne. Notons s_H son image dans $Imm(H_{AD})$. D'après 2.1.6(1), s_H est un sommet de $Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$ et on a $H_{s_H} \simeq H_s = \bar{M}_w$. Puisque s est un sommet de $Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$, on a $\mathfrak{h}_{SC,s_H} = \mathfrak{h}_{s_H,SC} = \bar{\mathfrak{m}}_{w,SC}$. D'après la construction de Lusztig, cf. 2.2.5, l'hypothèse $FC^{\bar{M}}(\bar{\mathfrak{m}}_{SC}(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$ implique $FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$. On a

(2) le plus grand sous-tore de A_H^{nr} déployé sur F est central dans G.

Ce sous-tore se réduit en le plus grand sous-tore de $Z(\bar{M}_w)^0$ déployé sur $\mathbb{F}_q$. A cause de l'hypothèse que w est Fr-régulier, ce sous-tore est central dans G_s. Puisque s est un sommet de $Imm(G_{AD})$, le plus grand sous-tore central dans G_s qui est déployé sur $\mathbb{F}_q$ est la réduction de A_G. L'assertion (2) en résulte.

Alors le couple (H, s_H) appartient à $\mathcal{L}_{ell}^{nr,\star}$. L'homomorphisme $\varphi \mapsto \mathcal{Q}_\varphi$ est une injection de $FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q) = FC^{\bar{M}_w}(\bar{\mathfrak{m}}_{w,SC}(\mathbb{F}_q))$ dans $C_{nil,cusp}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$. Notons $C(s, \bar{M}, w)$ son image. Ainsi, à $\varphi \in C(s, \bar{M}, w)$, on peut associer son image inverse $\varphi^H \in FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q) \subset \boldsymbol{\mathcal{K}}_{cusp}^\star(\mathfrak{g}(F))$. Puisque $C_{nil,cusp}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est somme directe des espaces $C(s, \bar{M}, w)$ quand $(\bar{M}, w)$ décrit un certain ensemble, cf. 2.2.5, on déduit de cette construction une application linéaire

$$\mathbf{j}' : \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \to \boldsymbol{\mathcal{K}}_{cusp}^\star(\mathfrak{g}(F)).$$

Elle dépend de plusieurs choix et n'est pas un inverse de j (et de fait les espaces $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ et $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{cusp}^\star(\mathfrak{g}(F))$ ne sont pas isomorphes). Toutefois, il résulte des constructions que

(3) $\mathbf{j} \circ \mathbf{j}'$ est l'identité de $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$.

Le groupe $G(F)$ agit naturellement par conjugaison sur $\boldsymbol{\mathcal{K}}^\star_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ et $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. On note $\mathcal{K}^\star_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ le quotient des coinvariants de $\boldsymbol{\mathcal{K}}^\star_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ et $\pi : \boldsymbol{\mathcal{K}}^\star_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \to \mathcal{K}^\star_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ la projection. Par construction, $\mathbf{j}$ est équivariante pour ces actions. On en déduit une application linéaire quotient

$$j : \mathcal{K}^\star_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \to \mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)).$$

En notant simplement id l'identité de $\boldsymbol{\mathcal{K}}^\star_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$, montrons que

(4) l'image de $\mathbf{j}' \circ \mathbf{j} - id$ est contenue dans $Ker(\pi)$.

Soient $(H, s_H) \in \mathcal{L}^{nr,\star}_{ell}$ et $\varphi \in FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q))$. En introduisant les termes $\bar{M}$ et w de la construction de $\mathbf{j}(\varphi)$, on a $\mathbf{j}(\varphi) \in C(s, \bar{M}, w)$. La construction de son image par $\mathbf{j}'$ utilise le même sommet s mais peut utiliser un autre Levi $\bar{M}'$ et un autre élément w' tels que $C(s, \bar{M}, w) = C(s, \bar{M}', s')$. En tout cas, il existe un couple $(H', s_{H'}) \in \mathcal{L}^{nr,\star}_{ell}$ et un élément $\varphi' \in FC^{H'_{s_{H'}}}(\mathfrak{h}'_{SC,s_{H'}}(\mathbb{F}_q))$ de sorte que $\mathbf{j}' \circ \mathbf{j}(\varphi) = \varphi'$. D'après (3), on a $\mathbf{j}(\varphi) = \mathbf{j}(\varphi')$. Alors (1) nous dit que $\varphi' - \varphi \in Ker(\pi)$, c'est-à-dire $(\mathbf{j}' \circ \mathbf{j} - id)(\varphi) \in Ker(\pi)$. Cela prouve (4).

Soient $\phi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ et $g \in G(F)$. D'après (3), on a $\mathbf{j}'(g(\phi)) = \mathbf{j}'(g(\mathbf{j} \circ \mathbf{j}'(\phi)))$. Parce que $\mathbf{j}$ est équivariante, on a aussi $\mathbf{j}'(g(\phi)) = \mathbf{j}' \circ \mathbf{j}(g(\mathbf{j}'(\phi)))$. En appliquant (4), on obtient $\mathbf{j}'(g(\phi)) \in Ker(\pi) + g(\mathbf{j}'(\phi))$. Mais $g(\mathbf{j}'(\phi)) - \mathbf{j}'(\phi)$ appartient à $Ker(\pi)$ par définition de cet espace, d'où $\mathbf{j}'(g(\phi)) - \mathbf{j}'(\phi) \in Ker(\pi)$. Cela entraîne que l'application $\pi \circ \mathbf{j}'$ se quotiente en une application linéaire $j' : \mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \to \mathcal{K}^\star_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. Les assertions (3) et (4) entraînent que $j \circ j'$, resp. $j' \circ j$ sont les identités de $\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$, resp. $\mathcal{K}^\star_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. C'est-à-dire que

(5) les applications j et j' sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

2.4.5 Un calcul de mesures

Le groupe $G(F)$ agit naturellement par conjugaison dans $\mathfrak{g}_{SC}(F)$. Le sous-groupe $A_G(F)$ agit trivialement. Notons $\pi : G_{SC} \to G$ l'homomorphisme naturel. Le quotient $A_G(F)\pi(G_{SC}(F))\backslash G(F)$ est compact. On le munit de la mesure telle que, pour $f \in C_c^\infty(A_G(F)\backslash G(F))$, on ait l'égalité

$$(1) \qquad \int_{A_G(F)\pi(G_{SC}(F))\backslash G(F)} \int_{G_{SC}(F)} f(\pi(g_{sc})x)\, dg_{sc}\, dx = \int_{A_G(F)\backslash G(F)} f(g)\, dg.$$

On pose $m(G) = mes(A_G(F)\pi(G_{SC}(F))\backslash G(F))$.

Un groupe complexe diagonalisable est par définition un sous-groupe algébrique d'un tore complexe. Pour tout tel groupe complexe diagonalisable Y, notons $X^*(Y)$ le groupe des homomorphismes algébriques de Y dans $\mathbb{C}^\times$. De l'injection $A_G \to G$ se déduit un homomorphisme $Z(\hat{G}) \to \hat{A}_G$, puis un homomorphisme $b : X^*(\hat{A}_G) \to X^*(Z(\hat{G})^{I_F})^{\Gamma_F^{nr}}$. Son conoyau est fini, notons $c_0(G)$ le nombre d'éléments de ce conoyau. Notons $A_G(F)_c$, resp. $A_G^{nr}(F)_c$, le plus grand sous-groupe compact de $A_G(F)$, resp. $A_G^{nr}(F)$.

Lemme. *On a l'égalité* $m(G) = c_0(G) mes(A_G^{nr}(F)_c) mes(A_G(F)_c)^{-1}$.

Preuve. Fixons un sommet $s \in Imm(G_{AD})$. Notons f_0 la fonction caractéristique de K_s^0 dans $G(F)$. Définissons $f \in C_c^\infty(A_G(F)\backslash G(F))$ par

$$f(g) = \int_{A_G(F)} f_0(ag)\, da.$$

L'intersection de $A_G(F)$ et de K_s^0 est $A_G(F)_c$. Alors f est la fonction caractéristique de $A_G(F)K_s^0$, multipliée par $mes(A_G(F)_c)$. Appliquons à f la relation (1). Le membre de droite vaut $mes(K_s^0)$. Du côté gauche, l'intégrale en x est à support dans l'image naturelle de K_s^0 dans $A_G(F)\pi(G_{SC}(F))\backslash G(F)$. Pour $x \in K_s^0$, le support de la fonction $g_{sc} \mapsto f(\pi(g_{sc})x)$ est $K_{SC,s}^0$: ce groupe est clairement dans le support et un élément dans le support agit sur $Imm(G_{AD})$ en fixant le sommet s, donc appartient à $K_{SC,s}^0$. Cette fonction est donc la fonction caractéristique de $K_{SC,s}^0$ multipliée par $mes(A_G(F)_c)$ et son intégrale vaut $mes(K_{SC,s}^0)mes(A_G(F)_c)$. On en déduit l'égalité

$$(2) \qquad mes(A_G(F)\pi(G_{SC}(F))\backslash A_G(F)\pi(G_{SC}(F))K_s^0)mes(K_{SC,s}^0)mes(A_G(F)_c) = mes(K_s^0),$$

la première mesure étant prise dans le groupe $A_G(F)\pi(G_{SC}(F))\backslash G(F)$.

Introduisons les homomorphismes de Kottwitz $w_G : G(F) \to X^*(Z(\hat{G})^{I_F})^{\Gamma_F^{nr}}$ et $w_{A_G} : A_G(F) \to X^*(\hat{A}_G)$. Ils sont surjectifs et s'inscrivent dans un diagramme commutatif

$$(3) \qquad \begin{array}{ccc} A_G & \stackrel{w_{A_G}}{\to} & X^*(\hat{A}_G) \\ \downarrow & & \downarrow b \\ G(F) & \stackrel{w_G}{\to} & X^*(Z(\hat{G})^{I_F})^{\Gamma_F^{nr}} \end{array}$$

Montrons que

(4) $\pi(G_{SC}(F))K_s^0 = Ker(w_G)$.

Notons $\hat{F}^{nr}$ le complété de F^{nr}. L'homomorphisme w_G est la restriction à $G(F)$ d'un homomorphisme $\hat{w}_G^{nr} : G(\hat{F}^{nr}) \to X^*(Z(\hat{G})^{I_F})$. Le groupe K_s^0 a un analogue sur le corps de base $\hat{F}^{nr}$ que l'on note $\hat{K}_s^{0,nr}$. D'après [14] lemme 17, on a l'égalité $\pi(G_{SC}(\hat{F}^{nr}))\hat{K}_s^{0,nr} = Ker(\hat{w}_G^{nr})$. Il suffit donc de démontrer que $(\pi(G_{SC}(\hat{F}^{nr}))\hat{K}_s^{0,nr}) \cap G(F) = \pi(G_{SC}(F))K_s^0$. Soient $g_{sc} \in G_{SC}(\hat{F}^{nr})$ et $k \in \hat{K}_s^{0,nr}$, supposons $\pi(g_{sc})k \in G(F)$. Pour $\sigma \in \Gamma_F^{nr}$, on a $\pi(\sigma(g_{sc}))\sigma(k) = \pi(g_{sc})k$, d'où $\pi(g_{sc}^{-1}\sigma(g_{sc})) = k\sigma(k)^{-1}$. L'image réciproque dans $G_{SC}(\hat{F}^{nr})$ de $\hat{K}_s^{0,nr}$ est le groupe analogue $\hat{K}_{SC,s}^{0,nr}$ et $g_{sc}^{-1}\sigma(g_{sc})$ appartient à ce groupe. Alors l'application $\sigma \mapsto g_{sc}^{-1}\sigma(g_{sc})$ est un cocycle à valeurs dans $\hat{K}_{SC,s}^{0,nr}$. Un tel cocycle est un cobord, essentiellement d'après le théorème de Lang. On peut donc fixer $k_{sc} \in \hat{K}_{SC,s}^{0,nr}$ de sorte que $g_{sc}^{-1}\sigma(g_{sc}) = k_{sc}\sigma(k_{sc})^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F^{nr}$. Cela équivaut à $g_{sc}k_{sc} = \sigma(g_{sc}k_{sc})$, ce qui implique $g_{sc}k_{sc} \in G_{SC}(F)$. On a $\pi(g_{sc})k = \pi(g'_{sc})k'$, où $g'_{sc} = g_{sc}k_{sc}$ et $k' = \pi(k_{sc})^{-1}k$. On a $k' \in \hat{K}_s^{0,nr}$. Par hypothèse $\pi(g_{sc})k$ appartient à $G(F)$ et on vient de voir que g'_{sc} appartient à $G_{SC}(F)$. Donc k' appartient à K_s^0. L'égalité $\pi(g_{sc})k = \pi(g'_{sc})k'$ montre que cet élément appartient à $\pi(G_{SC}(F))K_s^0$, ce qui achève la preuve de (4).

On déduit aisément de (4) que le conoyau de l'injection

$$A_G(F)\pi(G_{SC}(F))\backslash A_G(F)\pi(G_{SC}(F))K_s^0 \to A_G(F)\pi(G_{SC}(F))\backslash G(F)$$

a même nombre d'éléments que $X^*(Z(\hat{G})^{I_F})^{\Gamma_F^{nr}}/w_G(A_G(F))$. D'après le diagramme (3), c'est aussi le nombre d'éléments du conoyau de b, c'est-à-dire $c_0(G)$. On en déduit l'égalité

$$(5) \qquad mes(A_G(F)\pi(G_{SC}(F))\backslash A_G(F)\pi(G_{SC}(F))K_s^0) = m(G)c_0(G)^{-1}.$$

L'immeuble du groupe adjoint de A_G^{nr} est réduit à un unique point, notons-le σ. On en déduit des sous-groupes parahoriques dans $A_G^{nr}(F^{nr})$ et dans $A_G^{nr}(F)$ que l'on note simplement $K_\sigma^{0,nr}$ et K_σ^0, un groupe $A_{G,\sigma}^{nr}$ sur $\mathbb{F}_q$ et son algèbre de Lie $\mathfrak{a}_{G,\sigma}^{nr}$. On a l'égalité $K_\sigma^0 = A_G^{nr}(F)_c$. On a aussi $K_\sigma^{0,nr} = A_G^{nr}(F^{nr}) \cap K_s^{0,nr}$ et ce groupe a même projection dans G_s que $Z(G)^0(F^{nr}) \cap K_s^{0,nr}$. On en déduit l'égalité

$$(6) \qquad \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_{SC,s} \oplus \mathfrak{a}_{G,\sigma}^{nr}.$$

Par définition de nos mesures, on a les égalités

$$mes(K_s^0) = |G_s(\mathbb{F}_q)||\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)|^{-1/2},$$

$$mes(K_{SC,s}^0) = |G_{SC,s}(\mathbb{F}_q)||\mathfrak{g}_{SC,s}(\mathbb{F}_q)|^{-1/2}.$$

Fixons une paire de Borel (B_s, T_s) de G_s conservée par l'action galoisienne. On a $|G_s(\mathbb{F}_q)| = |T_s(\mathbb{F}_q)|P_{G_s}(q)$, où P_{G_s} est le polynôme de Poincaré de G_s. Il y a un homomorphisme naturel $\pi_s : G_{SC,s} \to G_s$, notons $T_{SC,s}$ l'image réciproque de T_s. On a de même $|G_{SC,s}(\mathbb{F}_q)| = |T_{SC,s}(\mathbb{F}_q)|P_{G_{SC,s}}(q)$. Les polynômes P_{G_s} et $P_{G_{SC,s}}$ sont égaux. D'après (6), on a

$$X_{*,\mathbb{Q}}(T_s) = X_{*,\mathbb{Q}}(T_{SC,s}) \oplus X_{*,\mathbb{Q}}(A_{G,\sigma}^{nr}).$$

Pour tout tore T défini sur $\mathbb{F}_q$, $|T(\mathbb{F}_q)|$ est égal à la valeur absolue du déterminant de l'action de $1 - qFr$ agissant sur $X_{*,\mathbb{Q}}(T)$, cf. [7] proposition 3.2.2. On en déduit l'égalité $|T_s(\mathbb{F}_q)| = |T_{SC,s}(\mathbb{F}_q)||A_{G,\sigma}^{nr}(\mathbb{F}_q)|$. Toujours d'après (6), on a $|\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)| = |\mathfrak{g}_{SC,s}(\mathbb{F}_q)||\mathfrak{a}_{G,\sigma}^{nr}(\mathbb{F}_q)|$. En mettant ces calculs bout-à-bout, on obtient

$$(7) \qquad mes(K_s^0) = mes(K_{SC,s}^0)|A_{G,\sigma}^{nr}(\mathbb{F}_q)||\mathfrak{a}_{G,\sigma}^{nr}(\mathbb{F}_q)|^{-1/2}$$

$$= mes(K_{SC,s}^0)mes(K_\sigma^0) = mes(K_{SC,s}^0)mes(A_G^{nr}(F)_c).$$

Le lemme résulte de (2), (5) et (7). $\square$

Pour $J \in I(\mathfrak{g}_{SC}(F))^*$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{SC}(F))$, posons

$$inv^G(J)(f) = \int_{A_G(F)\pi(G_{SC}(F))\backslash G(F)} J({}^g f)\, dg,$$

où ${}^g f$ est la fonction $X \mapsto f(g^{-1}Xg)$. Cela définit une application linéaire inv^G de $I(\mathfrak{g}_{SC}(F))^*$ dans lui-même dont l'image est formée de distributions invariantes par l'action de $G(F)$. Remarquons que, pour une distribution J invariante par cette action, on a $inv^G(J) = m(G)J$.

En particulier, pour $\varphi \in \mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$, on a défini une distribution $D_\varphi^{G_{SC}} \in I(\mathfrak{g}_{SC}(F))^*$. On note D_φ^G son image par inv^G.

2.4.6 Description des distributions associées aux éléments de $\mathcal{K}_{cusp}^\star(\mathfrak{g}(F))$

Soient $(H, s_H) \in \mathcal{L}_{ell}^{nr,\star}$ et $\varphi \in FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q))$. En 2.4.4, on a associé à ces données un sommet $s \in Imm(G_{AD})$ et une fonction $\mathcal{Q}_\varphi \in C_{nil,cusp}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$. On en déduit une distribution $D_{\mathcal{Q}_\varphi}^G \in I(\mathfrak{g}(F))^*$. Nous allons décrire cette distribution de sorte que le point s n'apparaisse pas. Fixons un élément $X_H \in A_H^{nr}(F)$ entier et de réduction régulière. La fonction φ peut être considérée comme une fonction sur $\mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC}}$ invariante par translations par $\mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC},+}$. On l'étend en une fonction sur $\mathfrak{h}_{SC}(F)$ par 0 hors de $\mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC}}$. On obtient un élément de $FC(\mathfrak{h}_{SC}(F))$. D'où une distribution $D_\varphi^{H_{SC}} \in I(\mathfrak{h}_{SC}(F))^*$ puis, par le procédé décrit en 2.4.5, une distribution $D_\varphi^H \in I(\mathfrak{h}_{SC}(F))^*$. Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, notons $f_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}}$ la fonction sur $\mathfrak{h}_{SC}(F)$ définie par $Y \mapsto f(X_H + Y)$. On pose

$$D_{X_H,\varphi}^G(f) = \int_{H(F)\backslash G(F)} D_\varphi^H(({}^g f)_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}})\, dg.$$

L'intégrale est à support compact d'après 2.3.1(5). Posons

$$c = q^{-dim(A_H^{nr})/2} mes(K_s^0) mes(K_{s_H}^{H,0})^{-1}.$$

Proposition. *La distribution $D^G_{\mathcal{Q}_\varphi^-}$ est égale à la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ de $c\hat{D}^G_{X_H,\varphi}$.*

Preuve. On reprend la construction de 2.2.5 pour le groupe G_s et $M_w = H_s$. On peut supposer que l'élément X_w est la réduction $\bar{X}_H$ de X_H dans $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$. On a construit les fonctions $\varphi^\natural_{X_w}$ et φ_{X_w} que l'on note $\varphi^\natural_{\bar{X}_H}$ et $\varphi_{\bar{X}_H}$. La fonction $\mathcal{Q}_\varphi$ est la restriction à $\mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)$ de $\hat{\varphi}_{\bar{X}_H}$, cf. 2.2.5(7). A cause de la conjugaison complexe que l'on a introduite dans la définition de l'application D^G, $D^G_{\mathcal{Q}_\varphi^-}$ est égale à la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ de $\hat{D}^G_{\varphi_{\bar{X}_H}}$. Calculons la distribution $D^G_{\varphi_{\bar{X}_H}}$.

Pour plus de précision, notons $\varphi^{\mathfrak{g}}_{\bar{X}_H}$ la fonction sur $\mathfrak{g}(F)$ issue de $\varphi_{\bar{X}_H}$ qui, elle, vit sur $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$. Pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, posons

$$\Lambda(f) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y)\bar{\varphi}^{\mathfrak{g}}_{\bar{X}_H}(Y)\,dY.$$

Par définition,

$$(1) \qquad D^G_{\varphi_{\bar{X}_H}}(f) = \int_{A_G(F)\backslash G(F)} \int_{\mathfrak{g}(F)} f(g^{-1}Yg)\bar{\varphi}^{\mathfrak{g}}_{\bar{X}_H}(Y)\,dY\,dg = \int_{A_G(F)\backslash G(F)} \Lambda({}^g f)\,dg.$$

Notons f_s la fonction sur $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$ telle que, pour $Z \in \mathfrak{k}_s$, on ait $f_s(\bar{Z}) = \int_{\mathfrak{k}_s^+} f(Z+Y)\,dY$, où $\bar{Z}$ est la réduction de Z. Par définition de $\varphi^{\mathfrak{g}}_{\bar{X}_H}$, on a

$$\Lambda(f) = \sum_{Z\in\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)} f_s(Z)\bar{\varphi}_{\bar{X}_H}(Z),$$

$$|H_{s_H}(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{Z\in\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)} \sum_{g\in G_s(\mathbb{F}_q)} f_s(Z)\bar{\varphi}^\natural_{\bar{X}_H}(g^{-1}Zg)$$

$$= |H_{s_H}(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{Z\in\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)} \sum_{g\in G_s(\mathbb{F}_q)} f_s(gZg^{-1})\bar{\varphi}^\natural_{\bar{X}_H}(Z).$$

Par définition de $\varphi^\natural_{\bar{X}_H}$, on obtient

$$\Lambda(f) = |H_{s_H}(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{Z\in\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)} \sum_{g\in G_s(\mathbb{F}_q)} f_s(g(\bar{X}_H + Z)g^{-1})\bar{\varphi}(Z).$$

En utilisant l'égalité $mes(K_s^0) = |G_s(\mathbb{F}_q)|mes(\mathfrak{k}_s^+)$, on voit que, pour tout $Y \in \mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$, on a l'égalité

$$\sum_{g\in G_s(\mathbb{F}_q)} f_s(gYg^{-1}) = mes(\mathfrak{k}_s^+)^{-1} \int_{K_s^0} ({}^k f)_s(Y)\,dk.$$

L'égalité précédente devient

$$\Lambda(f) = |H_{s_H}(\mathbb{F}_q)|^{-1} mes(\mathfrak{k}_s^+)^{-1} \sum_{Z\in\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)} \int_{K_s^0} ({}^k f)_s(\bar{X}_H + Z)\bar{\varphi}(Z)\,dk,$$

ou encore

$$(2) \qquad \Lambda(f) = |H_{s_H}(\mathbb{F}_q)|^{-1} mes(\mathfrak{k}_s^+)^{-1} \sum_{Z\in\mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC}}\backslash\mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC},+}} \int_{K_s^0} ({}^k f)_s(\bar{X}_H + \bar{Z})\bar{\varphi}(\bar{Z})\,dk.$$

Soit $Z \in \mathfrak{k}_{s_H}^H \cap \mathfrak{h}_{tn}(F)$. Posons

$$J_Z(f) = \int_{K_s^+} \int_{\mathfrak{k}_{s_H}^{H,+}} {}^k f(X_H + Z + Y))\, dY\, dk.$$

Pour tout réel r, introduisons la fonction $f[r]$ définie par

$$f[r](X) = mes(\mathfrak{k}_{s,r})^{-1} \int_{\mathfrak{k}_{s,r}} f(X+U)\, dU$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$. Montrons que

(3) on a l'égalité $J_Z(f) = J_Z(f[r])$ pour tout réel $r > 0$.

Pour r assez grand, f est invariante par translations par $\mathfrak{k}_{s,r}$, donc $f[r] = f$ d'où l'égalité ci-dessus. On sait que les sauts de l'application $r \mapsto \mathfrak{k}_{s,r}$ forment un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$. On peut raisonner par récurrence descendante sur ces sauts et il suffit de prouver que $J_Z(f[r]) = J_Z(f[r+])$ pour tout $r > 0$, où on note $f[r+] = f[r+\epsilon]$ pour $\epsilon > 0$ assez petit. Fixons $r > 0$. On peut aussi bien remplacer f par $f[r+]$. On est ramené à prouver que

(4) si f est invariante par translations par $\mathfrak{k}_{s,r+}$, on a $J_Z(f[r]) = J_Z(f)$.

Pour $k \in K_s^0$, on a

$${}^k(f[r])(X) = f[r](k^{-1}Xk) = \int_{\mathfrak{k}_{s,r}} f(k^{-1}Xk + U)\, dU.$$

Par le changement de variables $U \mapsto k^{-1}Uk$, c'est égal à

$$\int_{\mathfrak{k}_{s,r}} f(k^{-1}Xk + k^{-1}Uk)\, dU = \int_{\mathfrak{k}_{s,r}} {}^k f(X+U)\, dU = ({}^k f)[r](X).$$

On en déduit

$$J_Z(f[r]) = mes(\mathfrak{k}_{s,r})^{-1} \int_{K_s^+} \int_{\mathfrak{k}_{s_H}^{H,+}} \int_{\mathfrak{k}_{s,r}} {}^k f(X_H + Z + Y + U)\, dU\, dY\, dk.$$

La propriété suivante se déduit de [17] lemme 2.2.4 :

soit $U \in \mathfrak{k}_{s,r}$; alors il existe $k_U \in K_{s,r}$ et $V_U \in \mathfrak{k}_{s_H,r}^H$ de sorte que $X_H + Z + U = k_U^{-1}(X_H + Z + V_U)k_U$.

On applique cette propriété à l'élément U intervenant dans l'expression ci-dessus de $J_Z(f[r])$. On obtient

$${}^k f(X_H + Z + Y + U) = {}^k f(k_U^{-1}(X_H + Z + V_U)k_U + Y) = {}^{k_U k} f(X_H + Z + V_U + k_U Y k_U^{-1}).$$

Parce que $Y \in \mathfrak{k}_{s_H}^{H,+} \subset \mathfrak{k}_{s,0+}$ et $k_U \in K_{s,r}$, on a $k_U Y k_U^{-1} - Y \in \mathfrak{k}_{s,r+}$. Puisque f et donc aussi ${}^{k_U k} f$, est invariante par translation par $\mathfrak{k}_{s,r+}$, on peut remplacer $k_U Y k_U^{-1}$ par Y dans l'expression ci-dessus :

$${}^k f(X_H + Z + Y + U) = {}^{k_U k} f(X_H + Z + V_U + Y).$$

D'où

$$J_Z(f[r]) = mes(\mathfrak{k}_{s,r})^{-1} \int_{K_s^+} \int_{\mathfrak{k}_{s_H}^{H,+}} \int_{\mathfrak{k}_{s,r}} {}^{k_U k} f(X_H + Z + V_U + Y)\, dU\, dY\, dk$$

$$= mes(\mathfrak{k}_{s,r})^{-1} \int_{\mathfrak{k}_{s,r}} \int_{K_s^+} \int_{\mathfrak{k}_{s_H}^{H,+}} {}^{k_U k} f(X_H + Z + V_U + Y)\, dY\, dk\, dU.$$

Par les changements de variables $Y \mapsto Y - V_U$ et $k \mapsto k_U^{-1} k$, on en déduit

$$J_Z(f[r]) = mes(\mathfrak{k}_{s,r})^{-1} \int_{\mathfrak{k}_{s,r}} \int_{K_s^+} \int_{\mathfrak{k}_{s_H}^{H,+}} {}^{k} f(X_H + Z + Y)\, dY\, dk\, dU$$

$$= mes(\mathfrak{k}_{s,r})^{-1} \int_{\mathfrak{k}_{s,r}} J_Z(f)\, dU = J_Z(f).$$

Cela prouve (4), d'où (3).

Montrons que

$$(5) \qquad f_s(\bar{X}_H + \bar{Z}) = mes(\mathfrak{k}_{s_H}^{H,+})^{-1} J_Z(f).$$

D'après (3), on a

$$J_Z(f) = J_Z(f[0+]) = \int_{K_s^+} \int_{\mathfrak{k}_{s_H}^{H,+}} {}^{k}(f[0+])(X_H + Z + Y))\, dY\, dk.$$

Parce que $X_H + Z \in \mathfrak{k}_s$ et $Y \in \mathfrak{k}_{s_H}^{H,+} \subset \mathfrak{k}_s^+$, et parce que $f[0+]$ est invariante par translations par $\mathfrak{k}_s^+$, on voit que ${}^{k}(f[0+])(X_H + Z + Y)) = f[0+](X_H + Z)$ pour tous $k \in K_s^+$ et $Y \in \mathfrak{k}_{s_H}^{H,+}$. D'où

$$J_Z(f) = mes(K_s^+) mes(\mathfrak{k}_{s_H}^{H,+}) f[0+](X_H + Z).$$

Il résulte des définitions que

$$f[0+](X_H + Z) = mes(\mathfrak{k}_s^+)^{-1} f_s(\bar{X}_H + \bar{Z}) = mes(K_s^+)^{-1} f_s(\bar{X}_H + \bar{Z}).$$

L'assertion (5) en résulte.

Dans le membre de droite de (2), on peut limiter la somme en Z aux éléments de $\mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC}} \cap \mathfrak{h}_{tn}(F)$ puisque φ est à support nilpotent. On applique alors (5) à la fonction ${}^{k}f$. D'où

$$\Lambda(f) = c_1 \sum_{Z \in \mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC}} / \mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC},+}} \int_{K_s^0} J_Z({}^{k}f) \bar{\varphi}(\bar{Z})\, dk$$

$$= c_1 \sum_{Z \in \mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC}} / \mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC},+}} \int_{K_s^0} \int_{K_s^+} \int_{\mathfrak{k}_{s_H}^{H,+}} {}^{k'k} f(X_H + Z + Y) \bar{\varphi}(\bar{Z})\, dY\, dk'\, dk.$$

où

$$c_1 = |H_{s_H}(\mathbb{F}_q)|^{-1} mes(\mathfrak{k}_s^+)^{-1} mes(\mathfrak{k}_{s_H}^{H,+})^{-1} = mes(\mathfrak{k}_s^+)^{-1} mes(K_{s_H}^{H,0})^{-1}.$$

L'intégrale sur K_s^+ est absorbée par celle sur K_s^0, elle est remplacée par la multiplication par $mes(K_s^+) = mes(\mathfrak{k}_s^+)$. On peut remplacer $\bar{\varphi}(\bar{Z})$ par $\bar{\varphi}^{\mathfrak{h}_{SC}}(Z)$, où $\varphi^{\mathfrak{h}_{SC}}$ est la fonction sur $\mathfrak{h}_{SC}(F)$ déduite de φ. On a l'égalité $\mathfrak{k}_{s_H}^{H,+} = \mathfrak{z}(H)_{tn}(F) \oplus \mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC},+}$. On peut remplacer l'intégrale en Y par une double intégrale en $X' \in \mathfrak{z}(H)_{tn}(F)$ et $Z' \in \mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC},+}$. La somme en Z et l'intégrale en Z' se reconstituent en une intégrale sur $\mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC}}$. On peut aussi bien intégrer sur tout $\mathfrak{h}^{SC}(F)$ puisque $\varphi^{\mathfrak{h}_{SC}}(Z)$ est nul si $Z \notin \mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC}}$.On obtient

$$\Lambda(f) = mes(K_{s_H}^{H,0})^{-1} \int_{K_s^0} \int_{\mathfrak{z}(H)_{tn}(F)} \int_{\mathfrak{h}^{SC}(F)} {}^{k} f(X_H + X' + Z) \bar{\varphi}^{\mathfrak{h}_{SC}}(Z)\, dZ\, dX'\, dk.$$

Dans le membre de droite de (1), on applique l'égalité précédente à la fonction ${}^gf$. L'intégrale sur K_s^0 est absorbée par celle sur $A_G(F)\backslash G(F)$ et on obtient

$$D^G_{\varphi_{\bar{X}_H}}(f) = c_2 \int_{A_G(F)\backslash G(F)} \int_{\mathfrak{z}(H)_{tn}(F)} \int_{\mathfrak{h}^{SC}(F)} {}^gf(X_H + X' + Z)\bar{\varphi}^{\mathfrak{h}_{SC}}(Z)\, dZ\, dX'\, dg,$$

où

$$c_2 = mes(K_s^0) mes(K_{s_H}^{H,0})^{-1}.$$

On peut décomposer l'intégrale sur $A_G(F)\backslash G(F)$ en une double intégrale sur $H(F)\backslash G(F)$ et $A_H(F)\backslash H(F)$ (rappelons que $A_H = A_G$ puisque H est elliptique). Parce que $\varphi^{\mathfrak{h}_{SC}}$ est très cuspidale, l'intégrale sur $A_H(F)\backslash H(F)$ est à support compact et il en est manifestement de même de la double intégrale sur $A_H(F)\backslash H(F)$ et $\mathfrak{z}(H)_{tn}(F)$. On peut donc permuter ces deux intégrales. Alors, puisque $\varphi^{\mathfrak{h}_{SC}}$ est à support dans $\mathfrak{h}_{SC,tn}(F)$, la propriété (5) de 2.3.1 montre que la double intégrale sur $H(F)\backslash G(F)$ et $\mathfrak{z}(H)_{tn}(F)$ est à support compact. On les permute, puis on reconstitue les deux intégrales intérieures en une intégrale sur $A_G(F)\backslash G(F)$. On obtient

$$(6) \qquad D^G_{\varphi_{\bar{X}_H}}(f) = c_2 \int_{\mathfrak{z}(H)_{tn}(F)} D^G_{X_H+X',\varphi}(f),$$

où

$$D^G_{X_H+X',\varphi}(f) = \int_{A_G(F)\backslash G(F)} \int_{\mathfrak{h}^{SC}(F)} {}^gf(X_H + X' + Z)\bar{\varphi}^{\mathfrak{h}_{SC}}(Z)\, dZ\, dg.$$

Dans le cas $X' = 0$, on peut récrire

$$D^G_{X_H,\varphi}(f) = \int_{H(F)\backslash G(F)} \int_{A_H(F)\backslash H(F)} \int_{\mathfrak{h}^{SC}(F)} {}^{hg}f(X_H + Z)\bar{\varphi}^{\mathfrak{h}_{SC}}(Z)\, dZ\, dh\, dg,$$

$$= \int_{H(F)\backslash G(F)} D^H_\varphi(({}^gf)_{X_H+\mathfrak{h}_{SC}})\, dg.$$

C'est bien la définition que l'on a donnée au début du paragraphe.

Montrons que :

(7) pour $f \in \mathcal{H}$, $D^G_{X_H+X',\varphi}(f)$ ne dépend pas de $X' \in \mathfrak{z}(H)_{tn}(F)$.

Puisque $\varphi^{\mathfrak{h}_{SC}}$ est à support topologiquement nilpotent, $D^G_{X_H+X',\varphi}$ est une distribution à support entier. D'après le (i) de la proposition 2.4.1, il suffit de prouver que $D^G_{X_H+X',\varphi}(f)$ ne dépend pas de X' quand $f \in \mathcal{H}^0$. On peut donc fixer un sommet $x \in Imm(G_{AD})$ et supposer que f est à support dans $\mathfrak{k}_x$ et est invariante par une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre d'Iwahori de $\mathfrak{k}_x$, a fortiori par $\mathfrak{k}_x^+$. Soit $g \in G(F)$ tel que l'intégrale intérieure dans la définition de $D^G_{X_H+X',\varphi}(f)$ soit non nulle. Alors le support de ${}^gf$ doit contenir un élément de la forme $X_H + Z'$ avec $Z' \in \mathfrak{h}_{tn}(F)$. Le support de ${}^gf$ est contenu dans $\mathfrak{k}_{gx}$. Le lemme 2.3.3 entraîne que gx appartient à $Imm^G(H_{ad})$. Pour un tel point, on a $\mathfrak{z}(H)_{tn}(F) \subset \mathfrak{k}_{gx}^+$. Mais ${}^gf$ est invariante par ce réseau, donc invariante par translation par X'. Cet élément X' disparaît donc de l'intégrale. Cela démontre (7).

En conséquence, la formule (6) entraîne

(8) on a l'égalité $D^G_{\varphi_{\bar{X}_H}}(f) = cD^G_{X_H,\varphi}(f)$ pour tout $f \in \mathcal{H}$,

où

$$c = mes(\mathfrak{z}(H)_{tn}(F)) mes(K_s^0) mes(K_{s_H}^{H,0})^{-1}.$$

Pour tout tore T défini sur F, la définition de nos mesures implique que $mes(\mathfrak{t}_{tn}(F)) = q^{-dim(T^{nr})/2}$, où T^{nr} est le plus grand sous-tore de T déployé sur F^{nr}. Donc c coïncide avec

la définition que l'on a donnée avant l'énoncé. Dire que deux distributions coïncident sur $\mathcal{H}$ revient à dire que leurs transformées de Fourier coïncident sur $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. Puisque $D^G_{Q_{\bar{\varphi}}}$ est précisément la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ de $\hat{D}^G_{\varphi_{\bar{X}_H}}$, (8) entraîne l'égalité de l'énoncé. $\square$

2.4.7 Expression intégrale de $D^G_{X_H,\varphi}$

On note $\mathfrak{g}_{reg}(F)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans l'ensemble $\mathfrak{g}_{reg}(F)$. Il est naturellement muni d'une structure de variété analytique sur F et d'une mesure de sorte que, pour tout sous-tore maximal T de G défini sur F, l'application naturelle $\mathfrak{t}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F) \to \mathfrak{g}_{reg}(F)/conj$ soit localement un isomorphisme analytique et préserve localement les mesures. Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, l'application $X \mapsto I^G(X,f)$ définie sur $\mathfrak{g}_{reg}(F)$ se quotiente en une application définie sur $\mathfrak{g}_{reg}(F)/conj$. La formule suivante est une façon d'énoncer la classique formule de Weyl :

$$(1) \qquad \int_{\mathfrak{g}(F)} f(X)\,dX = \int_{\mathfrak{g}_{reg}(F)/conj} I^G(X,f) d^G(X)^{1/2}\,dX.$$

On note $\mathfrak{g}_{SC,reg}(F)/G-conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans l'ensemble $\mathfrak{g}_{SC,reg}(F)$. Il est lui aussi naturellement muni d'une structure de variété analytique sur F. La projection naturelle $\tau : \mathfrak{g}_{SC,reg}(F)/conj \to \mathfrak{g}_{SC,reg}(F)/G-conj$ est un isomorphisme local à fibres finies. On munit l'ensemble d'arrivée de la mesure telle que τ préserve localement les mesures. Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ et $X \in \mathfrak{g}_{SC,reg}(F)/G-conj$, on pose $I^G(X,f) = \sum_{X' \in \tau^{-1}(X)} I^{G_{SC}}(X',f)$. Soit $X \in \mathfrak{g}_{SC,reg}(F)$, notons T son commutant dans G. Il résulte de la définition de nos mesures que l'injection $T_{sc}(F)\backslash G_{SC}(F) \to T(F)\backslash G(F)$ préserve les mesures. On en déduit la formule à laquelle on s'attend :

$$I^G(X,f) = d^G(X)^{1/2} \int_{T(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}Xg)\,dg.$$

Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{SC}(F))$, la formule (1) appliquée au groupe G_{SC} et les définitions entraînent

$$\int_{\mathfrak{g}_{SC}(F)} f(X)\,dX = \int_{\mathfrak{g}_{SC,reg}/G-conj} I^G(X,f) d^G(X)^{1/2}\,dX.$$

Soit $H \in \mathcal{L}^{nr}_{ell}$ et soit $\varphi \in FC^H(\mathfrak{h}_{SC}(F))$. On a défini la distribution $D^{H_{SC}}_\varphi$. Elle est localement intégrable d'après Harish-Chandra. On note $e^{H_{SC}}_\varphi$ la fonction associée. Puisque, par hypothèse, φ est invariante par conjugaison par $H(F)$, cette fonction $e^{H_{SC}}_\varphi$ est invariante par conjugaison par $H(F)$. Pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_{SC}(F))$, on a l'égalité

$$D^{H_{SC}}_\varphi(f) = \int_{\mathfrak{h}_{SC,reg}(F)/H-conj} I^H(Y,f) e^{H_{SC}}_\varphi(Y) d^H(Y)^{1/2}\,dY.$$

En se rappelant la définition de $D^H_\varphi(f)$, on obtient

$$D^H_\varphi(f) = \int_{\mathfrak{h}_{SC,reg}(F)/H-conj} I^H(Y,f) e^H_\varphi(Y) d^H(Y)^{1/2}\,dY,$$

où $e^H_\varphi(Y) = m(H) e^{H_{SC}}_\varphi(Y)$. Puisque φ est à support dans $\mathfrak{h}_{SC,tn}(F)$, la fonction e^H_φ est à support dans l'image de $\mathfrak{h}_{SC,tn}(F) \cap \mathfrak{h}_{SC,reg}(F)$ dans $\mathfrak{h}_{SC,reg}(F)/H-conj$. Notons cette image $\mathfrak{h}_{SC,reg,tn}(F)/H-conj$.

Lemme. *Pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on a l'égalité*

$$D^G_{X_H,\varphi}(f) = \int_{\mathfrak{h}_{SC,reg}(F)/H-conj} I^G(X_H+Y,f)e^H_\varphi(Y)d^G(X_H+Y)^{1/2}\,dY.$$

Preuve. On a

$$D^G_{X_H,\varphi}(f) = \int_{H(F)\backslash G(F)} D^H_\varphi((^gf)_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}})\,dg$$

d'où

$$(1)\qquad D^G_{X_H,\varphi}(f) = \int_{H(F)\backslash G(F)}\int_{\mathfrak{h}_{SC,reg}(F)/H-conj} I^H(Y,(^gf)_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}})e^H_\varphi(Y)d^H(Y)^{1/2}\,dY\,dg.$$

D'après la propriété de support de e^H_φ et d'après 2.3.1(5), il existe un sous-ensemble compact $\omega \subset H(F)\backslash G(F)$ tel que $I^H(Y,(^gf)_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}}) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{h}_{SC,reg,tn}(F)/H-conj$ et pour tout $g \notin \omega$. La double intégrale ci-dessus est donc absolument convergente et on peut intervertir les intégrations. Pour $Y \in \mathfrak{h}_{SC,reg,tn}(F)/H-conj$, on a

$$\int_{H(F)\backslash G(F)} I^H(Y,(^gf)_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}})\,dg = d^H(Y)^{1/2}\int_{H(F)\backslash G(F)}\int_{H_Y(F)\backslash H(F)} (^gf)(X_H+h^{-1}Yh)\,dh\,dg$$

$$= d^H(Y)^{1/2}\int_{H(F)\backslash G(F)}\int_{H_Y(F)\backslash H(F)} f(g^{-1}h^{-1}(X_H+Y)hg)\,dh\,dg.$$

On a $H_Y = G_{X_H+Y}$. La double intégrale se reconstitue en une intégrale sur $G_{X_H+Y}(F)\backslash G(F)$. On a aussi $d^H(Y)^{1/2} = d^G(X_H+Y)^{1/2}$ d'après 2.3.1(3). On obtient

$$\int_{H(F)\backslash G(F)} I^H(Y,(^gf)_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}})\,dg = I^G(X_H+Y,f).$$

En utilisant encore une fois l'égalité $d^H(Y)^{1/2} = d^G(X_H+Y)^{1/2}$, l'égalité (1) devient celle de l'énoncé. □

2.4.8 Une deuxième description de l'espace $D^G(\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)))$

On a défini l'espace

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}^\star_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{(H,s_H)\in\mathcal{L}^{nr,\star}_{ell}} FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)),$$

et son quotient des coinvariants $\mathcal{K}^\star_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ par l'action de $G(F)$. Posons

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{H\in\mathcal{L}^{nr}_{ell}} FC^H(\mathfrak{h}_{SC}(F)).$$

De nouveau, le groupe $G(F)$ agit naturellement sur cet espace et on note $\mathcal{K}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ le quotient des coinvariants. Il y a un homomorphisme naturel surjectif $\boldsymbol{\mathcal{K}}^\star_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \to \boldsymbol{\mathcal{K}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$: on envoie chaque sous-espace $FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q))$ dans $FC(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ puis on projette sur le sous-espace $FC^H(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ des invariants par $H(F)$. Il est clair que, par passage aux coinvariants par $G(F)$, cet homomorphisme devient un isomorphisme de $\mathcal{K}^\star_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ sur $\mathcal{K}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$.

Pour tout $H \in \mathcal{L}^{nr}_{ell}$, fixons un élément $X_H \in A^{nr}_H(F)$ entier et de réduction régulière. On définit l'application antilinéaire

$$\boldsymbol{k}^G : \boldsymbol{\mathcal{K}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*$$

telle que, pour $H \in \mathcal{L}_{ell}^{nr}$ et $\varphi \in FC^H(\mathfrak{h}_{SC}(F))$, $\boldsymbol{k}^G(\varphi) = D^G_{X_H,\varphi}$. Cette application dépend du choix des X_H. Pour $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{K}}(\mathfrak{g}(F))$, notons $k^G(\varphi)$ la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ de la transformée de Fourier $\hat{\boldsymbol{k}}^G(\varphi)$ de $\boldsymbol{k}^G(\varphi)$. On obtient une application antilinéaire

$$k^G : \boldsymbol{\mathcal{K}}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*.$$

La proposition 2.4.6 et l'isomorphisme 2.4.4(1) entraînent que k^G ne dépend plus des choix et qu'elle se quotiente en un isomorphisme antilinéaire encore noté

(1) $k^G : \mathcal{K}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \simeq D^G(\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)))$.

2.4.9 Un premier résultat d'instabilité

Pour $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$, notons $I(\mathfrak{g}(F))^*[\mathbf{G}']$ l'espace des $d \in I(\mathfrak{g}(F))^*$ tels que d annule $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}'')$ pour tout $\mathbf{G}'' \neq \mathbf{G}'$. Notons $I(\mathfrak{g}(F))^*_{ind}$ la somme sur tous les Levi propres des espaces de distributions induites $Ind_M^G(I(\mathfrak{m}(F))^*)$. C'est aussi le sous-espace des éléments de $I(\mathfrak{g}(F))^*$ qui annulent $I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. On a une suite exacte

$$0 \to I(\mathfrak{g}(F))^*_{ind} \to I(\mathfrak{g}(F))^*[\mathbf{G}'] \to I_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')^* \to 0.$$

L'espace $I(\mathfrak{g}(F))^*[\mathbf{G}']$ est stable par transformation de Fourier. Posons $I(\mathfrak{g}(F))^*[\neq \mathbf{G}] = \sum_{\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}} I(\mathfrak{g}(F))^*[\mathbf{G}']$. Soulignons que les espaces $I(\mathfrak{g}(F))^*[\mathbf{G}']$ ne sont pas en somme directe : leur intersection est l'espace $I(\mathfrak{g}(F))^*_{ind}$.

Pour $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)$, on pose $\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}') = \{d \in \mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)); D^G(d) \in I(\mathfrak{g}(F))^*[\mathbf{G}']\}$. En [46], on a défini des espaces de distributions analogues sur le groupe $G(F)$ au lieu de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}(F)$. Dans le cas des groupes, les assertions qui suivent résultent du théorème 5.10 et de la proposition 7.2 de [46]. Notre hypothèse sur p permet de les descendre à nos distributions à support dans $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. On obtient ainsi les égalités

$$\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)} \mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$$

et $\mathcal{D}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G})$. On note $\mathcal{D}^{inst}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ la somme des $\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F), \mathbf{G}')$ sur les $\mathbf{G}' \in Endo_{ell}\mathbf{G}')$ tels que $\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}$.

On a une inclusion naturelle $Endo_{ell}(G) \subset Endo_{ell}(G_{SC})$. En notant $I^G_{cusp}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ l'espace des invariants par $G(F)$ dans $I_{cusp}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$, on a

$$I^G_{cusp}(\mathfrak{g}_{SC}(F)) = \oplus_{\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G)} I(\mathfrak{g}_{SC}(F), \mathbf{G}').$$

On a défini l'espace $FC^G(\mathfrak{g}_{SC}(F))$. D'après l'égalité précédente, il est égal à la somme des $FC^{G_{SC}}(\mathfrak{g}_{SC}(F), \mathbf{G}')$ où $\mathbf{G}'$ parcourt $Endo_{ell}(G)$. On a l'égalité $FC^{G,st}(\mathfrak{g}_{SC}(F)) = FC^{G_{SC},st}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$, c'est pourquoi on a noté simplement $FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ cet espace. On pose

$$FC^{G,inst}(\mathfrak{g}_{SC}(F)) = \oplus_{\mathbf{G}' \in Endo_{ell}(G), \mathbf{G}' \neq \mathbf{G}} FC^{G_{SC}}(\mathfrak{g}_{SC}(F), \mathbf{G}').$$

Posons

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}^\natural_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{H \in \mathcal{L}_{ell}^{nr}} FC^{H,inst}(\mathfrak{h}_{SC}(F)),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{H \in \mathcal{L}_{ell}^{nr}} FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)).$$

Le groupe $G(F)$ agit naturellement sur ces espaces. On note $\mathcal{K}^\natural_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ et $\mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ les quotients des coinvariants. On a l'égalité

$$\mathcal{K}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \mathcal{K}^\natural_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \oplus \mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F)).$$

Lemme. *Soit $\varphi \in \mathcal{K}^{\natural}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. Alors $k^G(\varphi)$ appartient à $D^G(\mathcal{D}^{inst}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)))$.*

Preuve. On peut fixer $H \in \mathcal{L}^{nr}_{ell}$ et supposer que φ est l'image d'un élément de $FC^{H,inst}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$, que l'on note encore φ. Notons $\mathfrak{h}_{SC,reg}(F)/st-conj$ l'ensemble des classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{h}_{SC,reg}(F)$. Comme en 2.4.7, c'est une variété analytique sur F que l'on peut munir d'une mesure. L'application $proj : \mathfrak{h}_{SC,reg}(F)/H-conj \to \mathfrak{h}_{SC,reg}(F)/st-conj$ est un isomorphisme local qui préserve localement les mesures. Pour toute $f \in C^{\infty}_c(\mathfrak{g}(F))$, la formule du lemme 2.4.7 se récrit

$$(1) \qquad \boldsymbol{k}^G(\varphi)(f) = D^G_{X_H,\varphi}(f) = \int_{\mathfrak{h}_{SC,reg}(F)/st-conj} \Phi(Y) d^G(X_H+Y)^{1/2}\, dY,$$

où

$$\Phi(Y) = \sum_{Y' \in proj^{-1}(Y)} I^G(X_H+Y', f) e^H_{\varphi}(Y').$$

Dans le calcul qui suit, on identifie les éléments des espaces quotients de $\mathfrak{h}_{SC,reg}(F)$ à des représentants dans ces espaces. Supposons $f \in I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. Soit $Y \in \mathfrak{h}_{SC,reg}(F)/st-conj$. Si $Y \notin \mathfrak{h}_{SC,tn}(F)$, $e^H_{\varphi}(Y') = 0$ pour tout $Y' \in proj^{-1}(Y)$. Supposons $Y \in \mathfrak{h}_{SC,tn}(F)$. Puisque f est cuspidale, on a $I^G(X_H+Y', f) = 0$ si X_H+Y' n'est pas elliptique, ou encore si Y' n'est pas elliptique, ou encore si Y n'est pas elliptique. Supposons Y elliptique. Les éléments X_H+Y' pour $Y' \in proj^{-1}(Y)$ sont stablement conjugués, cf. 2.3.1(4). Puisque $f \in I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$, les valeurs $I^G(X_H+Y', f)$ sont constantes. On note $I^G(X_H+Y, f)$ cette valeur constante. On obtient

$$\Phi(Y) = I^G(X_H+Y, f) \sum_{Y' \in proj^{-1}(Y)} e^H_{\varphi}(Y').$$

Mais cette somme est nulle parce que $\varphi \in FC^{H,inst}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$. Donc $\Phi(Y) = 0$. Alors (1) entraîne que $\mathbf{k}^G(\varphi)(f) = 0$. Puisque cela est vrai pour toute $f \in I^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$, on a $\mathbf{k}^G(\varphi) \in I(\mathfrak{g}(F))^*[\neq \mathbf{G}]$. La transformation de Fourier préserve $I(\mathfrak{g}(F))^*[\neq \mathbf{G}]$. Il en est de même de la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$. Donc $k^G(\varphi)$ appartient à $I(\mathfrak{g}(F))^*[\neq \mathbf{G}]$. Cet élément appartenant à $D^G(\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)))$, il résulte des définitions qu'il appartient à $D^G(\mathcal{D}^{inst}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)))$. $\square$

2.4.10 Les espaces $\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ et $\mathcal{K}^{\flat}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$

Notons $\mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/conj$, resp. $\mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/st-conj$, les ensembles de classes d'équivalence dans $\mathcal{L}^{nr,st}_{ell}$ pour la conjugaison par $G(F)$, resp. la conjugaison stable. La première équivalence étant plus fine que la seconde, il y a une application naturelle surjective $\Pi : \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/conj \to \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/st-conj$ et la notion de conjugaison stable a un sens dans l'ensemble $\mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/conj$. On a dit en 2.3.9 que, pour deux éléments stablement conjugués $H, H' \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}$, il y avait un isomorphisme canonique $\iota_{H',H} : FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F))$. Cela entraîne que l'on peut définir un espace $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ pour un élément $H \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/st-conj$. Pour être bourbakiste, l'espace en question est la limite inductive des $FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F))$ sur les $H' \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}$ appartenant à la classe H, les applications de transition étant les isomorphismes canoniques ci-dessus. A fortiori, $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ est défini pour un élément $H \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/conj$.

La définition de l'espace $\mathcal{K}^{\sharp}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ peut se récrire

$$(1) \qquad \mathcal{K}^{\sharp}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{H \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/conj} FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)).$$

En effet, il est clair que l'homomorphisme naturel $\mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \to \mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ se factorise par l'espace de droite de l'égalité ci-dessus. Que cet espace s'envoie injectivement dans l'espace de coinvariants $\mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ résulte du lemme 2.3.9 : l'action de $Norm_{G(F)}(H)$ sur $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ est triviale.

Posons

$$\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{H' \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/st-conj} FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)).$$

Pour $H \in \mathcal{L}^{nr}_F$, posons $W^{nr}(H) = H(F^{nr})\backslash Norm_{G(F^{nr})}(H)$ et $W_F(H) = H(F)\backslash Norm_{G(F)}(H)$. On définit une application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) & \to & \mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \\ & (\phi_{H'})_{H' \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/st-conj} & \mapsto & (\varphi_H)_{H \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/conj} \end{array}$$

par la formule $\varphi_H = |W^{nr}(H)^{\Gamma^{nr}_F}||W_F(H)|^{-1}\phi_{\Pi(H)}$ (Π a été définie au début du paragraphe). L'application τ est injective.

On note $\mathcal{K}^\flat_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ le sous-espace des éléments $(\varphi_H)_{H \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/conj} \in \mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ tels que, pour tout $H' \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/st-conj$, on ait l'égalité $\sum_{H \in \Pi^{-1}(H')} \varphi_H = 0$. Montrons que

(2) $\mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \mathcal{K}^\flat_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \oplus \tau(\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)))$.

Pour $H' \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/st-conj$, notons $\mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F); H')$ la sous-somme de la formule (1) où on se limite aux $H \in \Pi^{-1}(H')$. Par construction, nos espaces sont sommes directes de leurs intersections avec ces sous-espaces $\mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F); H')$ quand H' décrit $\mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/st-conj$. Il suffit de fixer H' et de voir ce qui se passe dans ce sous-espace $\mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F); H')$. On a $\tau(\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))) \cap \mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F); H') = \tau(FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)))$. On pose $\mathcal{K}^\flat_{cusp}(\mathfrak{g}(F); H') = \mathcal{K}^\flat_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \cap \mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F); H')$. Pour tout ensemble Y, notons $\mathbb{C}[Y]$ l'espace vectoriel complexe de base Y. Pour éviter les ambiguïtés, pour $y \in Y$, on note $[y]$ l'élément de base correspondant. On note $\mathbb{C}[Y]_0$ le sous-espace des $\sum_{y \in Y} a_y[y]$ tels que $\sum_{y \in Y} a_y = 0$. L'espace $\mathcal{K}^\sharp_{cusp}(\mathfrak{g}(F); H')$ s'identifie à $FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)) \otimes \mathbb{C}[\Pi^{-1}(H')]$. Introduisons l'élément δ de $\mathbb{C}[\Pi^{-1}(H')]$ défini par

$$\delta = \sum_{H \in \Pi^{-1}(H')} |W^{nr}(H)^{\Gamma^{nr}_F}||W_F(H)|^{-1}[H].$$

On voit que $\mathcal{K}^\flat_{cusp}(\mathfrak{g}(F); H')$ s'identifie à $FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)) \otimes \mathbb{C}[\Pi^{-1}(H')]_0$ tandis que $\tau(FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)))$ s'identifie à $FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)) \otimes \mathbb{C}\delta$. Or les sous-espaces $\mathbb{C}[\Pi^{-1}(H')]_0$ et $\mathbb{C}\delta$ de $\mathbb{C}[\Pi^{-1}(H')]$ sont en somme directe. Cela prouve (2).

Lemme. *(i) Soit $\varphi \in \mathcal{K}^\flat_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. Alors $k^G(\varphi)$ appartient à $D^G(\mathcal{D}^{inst}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)))$.*

(ii) Soit $\phi \in \mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. Alors $k^G \circ \tau(\phi)$ appartient à $D^G(\mathcal{D}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)))$.

Preuve. On peut encore fixer $H' \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/st-conj$ et supposer $\varphi \in \mathcal{K}^\flat_{cusp}(\mathfrak{g}(F); H')$ pour l'assertion (i), $\phi \in FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F))$ pour l'assertion (ii). Identifions les classes de conjugaison ou de conjugaison stable dans $\mathcal{L}^{nr,st}_{ell}$ à des représentants dans cet ensemble. En particulier, on identifie H' à un élément de $\mathcal{L}^{nr,st}_{ell}$. Notons $\sim$ la relation d'équivalence "conjugaison par $G(F)$" dans $\mathcal{L}^{nr,st}_{ell}$. Fixons un élément entier et de réduction régulière $X_{H'} \in \mathfrak{a}^{nr}_{H'}(F)$. La classe de conjugaison stable de $X_{H'}$ est paramétrée par le groupe $ker^1(H', G)$, cf. 2.3.4. Pour $\nu \in ker^1(H', G)$, fixons un élément X_ν paramétré par ν dans cette classe et posons $H_\nu = G_{X_\nu}$. L'application qui, à ν, associe l'unique élément $H \in \mathcal{L}^{nr,st}_{ell}/conj$ tel que $H \sim H_\nu$ est une surjection de $ker^1(H', G)$ sur $\Pi^{-1}(H')$. On en déduit une surjection

$$\beta : \mathbb{C}[ker^1(H', G)] \to \mathbb{C}[\Pi^{-1}(H')].$$

La transformation de Fourier sur $ker^1(H',G)$ fournit un isomorphisme

$$\alpha : \mathbb{C}[ker^1(H',G)^\vee] \to \mathbb{C}[ker^1(H',G)].$$

Précisément, pour $\kappa \in ker^1(H',G)^\vee$, $\alpha([\kappa]) = \sum_{\nu \in ker^1(H',G)} \kappa(\nu)[\nu]$. On calcule

$$(3) \qquad \beta \circ \alpha([\kappa]) = \sum_{H \in \Pi^{-1}(H')} (\sum_{\nu \in ker^1(H',G); H_\nu \sim H} \kappa(\nu))[H].$$

Notons $1^\vee$ l'élément neutre de $ker^1(H',G)^\vee$. On a introduit ci-dessus un élément $\delta \in \mathbb{C}[\Pi^{-1}(H')]$. Montrons que

$$(4) \qquad \beta \circ \alpha([1^\vee]) = \delta.$$

En vertu de (3) et de la définition de δ, il s'agit de prouver que, pour tout $H \in \Pi^{-1}(H')$, on a l'égalité

$$(5) \qquad |\{\nu \in ker^1(H',G); H_\nu \sim H\}| = |W^{nr}(H)^{\Gamma_F^{nr}}||W_F(H)|^{-1}.$$

Pour tout $H'' \in \mathcal{L}_{ell}^{nr,st}$, posons $\mathcal{Y}_{H''} = \{g \in G(F^{nr}); gFr(g)^{-1} \in H''(F^{nr})\}$. L'application qui, à $g \in \mathcal{Y}_{H'}$ associe la classe du cocycle de Γ_F^{nr} dans $H'(F^{nr})$ qui envoie Fr sur $gFr(g)^{-1}$ se quotiente en une bijection de $H'(F^{nr})\backslash\mathcal{Y}_{H'}/G(F)$ sur $ker^1(H',G)$. Notons $\mathcal{Y}_{H'}[H]$ le sous-ensemble des $g \in \mathcal{Y}_{H'}$ tels que $g^{-1}H'g$ soit conjugué à H par un élément de $G(F)$. Le membre de gauche de (5) est égal au nombre d'éléments de l'image de $\mathcal{Y}_{H'}[H]$ dans $H'(F^{nr})\backslash\mathcal{Y}_{H'}/G(F)$. Puisque H est par définition stablement conjugué à H', on peut fixer un élément $g_0 \in \mathcal{Y}_{H'}$ tel que $g_0^{-1}H'g_0 = H$. L'application $g \mapsto g_0 g$ est une bijection de $\mathcal{Y}_H$ sur $\mathcal{Y}_{H'}$ qui se quotiente en une bijection de $H(F^{nr})\backslash\mathcal{Y}_H/G(F)$ sur $H'(F^{nr})\backslash\mathcal{Y}_{H'}/G(F)$. On voit que

$$\mathcal{Y}_{H'}[H] = \mathcal{Y}_{H'} \cap (Norm_{G(F^{nr})}(H')g_0G(F)) = g_0(\mathcal{Y}_H \cap Norm_{G(F^{nr})}(H))G(F).$$

L'image de $\mathcal{Y}_{H'}[H]$ dans $H'(F^{nr})\backslash\mathcal{Y}_{H'}/G(F)$ a donc même nombre d'éléments que celle de $\mathcal{Y}_H \cap Norm_{G(F^{nr})}(H)$ dans $H(F^{nr})\backslash\mathcal{Y}_H/G(F)$. Il y a une surjection naturelle de $\mathcal{Y}_H \cap Norm_{G(F^{nr})}(H)$ sur $W^{nr}(H)^{\Gamma_F^{nr}}$ et on voit que deux éléments de $\mathcal{Y}_H \cap Norm_{G(F^{nr})}(H)$ ont même image dans $H(F^{nr})\backslash\mathcal{Y}_H/G(F)$ si et seulement si leurs images dans $W^{nr}(H)^{\Gamma_F^{nr}}$ ont même image dans $W^{nr}(H)^{\Gamma_F^{nr}}/W_F(H)$. D'où les égalités (5) puis (4).

De β, resp. α, se déduisent une surjection, resp. un isomorphisme

$$b : FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)) \otimes \mathbb{C}[ker^1(H',G)] \to FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)) \otimes \mathbb{C}[\Pi^{-1}(H')] = \mathcal{K}_{cusp}^\sharp(\mathfrak{g}(F); H').$$

$$a : FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)) \otimes \mathbb{C}[ker^1(H',G)^\vee] \to FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)) \otimes \mathbb{C}[ker^1(H',G)].$$

D'après (4) et le calcul de la preuve de (2), on a $b \circ a(FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)) \otimes \mathbb{C}[1^\vee]) = \tau(FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)))$. Notons $\mathbb{C}[ker^1(H',G)^\vee]^\flat$ le sous-espace engendré par les $[\kappa]$ pour $\kappa \neq 1^\vee$. On voit grâce à (3) que $b \circ a(FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)) \otimes \mathbb{C}[ker^1(H',G)^\vee]^\flat)$ est contenu dans $\mathcal{K}_{cusp}^\flat(\mathfrak{g}(F); H')$. Puisque $b \circ a$ est surjectif, (2) implique que ces deux espaces sont égaux. Alors, le lemme est équivalent à l'assertion suivante. Soient $\phi \in FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F))$ et $\kappa \in ker^1(H',G)$. Alors

(6) si $\kappa \neq 1^\vee$, $k^G \circ b \circ a(\phi \otimes [\kappa])$ appartient à $D^G(\mathcal{D}_{cusp}^{inst}(\mathfrak{g}(F)))$; si $\kappa = 1^\vee$, $k^G \circ b \circ a(\phi \otimes [1^\vee])$ appartient à $D^G(\mathcal{D}_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}(F)))$.

Pour $\nu \in ker^1(H',G)$, notons $\varphi_\nu \in FC^{st}(\mathfrak{h}_{\nu,SC}(F))$ l'image de ϕ par l'application canonique $\iota_{H_\nu,H'}$. Introduisons la distribution

$$\Theta_\kappa = \sum_{\nu \in ker^1(H',G)} \kappa(\nu) D^G_{X_\nu,\varphi_\nu}.$$

Il résulte des définitions que $k^G \circ b \circ a(\phi \otimes [\kappa])$ est égal à la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ de la transformée de Fourier de Θ_κ. Soit $f \in I_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$. Le même calcul qu'en 2.4.9 conduit à l'égalité

$$\Theta_\kappa(f) = \sum_{\nu \in ker^1(H',G)} \kappa(\nu) \int_{\mathfrak{h}_{\nu,SC,reg}(F)/st-conj} \Phi_\nu(Y) d^G(X_\nu + Y)^{1/2}\, dY,$$

où

$$\Phi_\nu(Y) = \sum_{Y' \in proj_\nu^{-1}(Y)} I^G(X + Y', f) e_{\varphi_\nu}^{H_\nu}(Y').$$

On a ajouté un indice ν à $proj$ pour plus de précision. Puisque les φ_ν sont stables, les fonctions $e_{\varphi_\nu}^{H_{\nu,SC}}$ sont invariantes par conjugaison stable. Il en est de même des fonctions $e_{\varphi_\nu}^{H_\nu} = m(H_\nu) e_{\varphi_\nu}^{H_{\nu,SC}}$ car $m(H_\nu)$ est indépendant de ν d'après le lemme 2.4.5. On note $e_{\varphi_\nu}^{H_\nu}(Y)$ la valeur de $e_{\varphi_\nu}^{H_\nu}(Y')$ pour $Y' \in proj_\nu^{-1}(Y)$. On obtient

$$\Phi_\nu(Y) = e_{\varphi_\nu}^{H_\nu}(Y) \sum_{Y' \in proj_\nu^{-1}(Y)} I^G(X + Y', f).$$

Puisque f est cuspidale et que $e_{\varphi_\nu}^{H_\nu}$ est à support topologiquement nilpotent, on peut limiter l'intégration à $\mathfrak{h}_{\nu,SC,ell,tn}(F)/st - conj$ avec une définition évidente de cet ensemble. La bijection canonique $\iota_{H_\nu,H'}$ a été définie à l'aide d'un torseur intérieur de H' vers H_ν dont on peut supposer qu'il envoie $X_{H'}$ sur X_ν. On déduit de ce torseur une bijection $\iota'_{H_\nu,H'} : \mathfrak{h}'_{SC,ell}(F)/st - conj \to \mathfrak{h}_{\nu,SC,ell}(F)/st - conj$. Par définition du transfert, on a $e_{\varphi_\nu}^{H_{\nu,SC}}(\iota'_{H_\nu,H'}(Y)) = e_\phi^{H'_{SC}}(Y)$ pour tout $Y \in \mathfrak{h}'_{SC,ell}(F)/st - conj$. Cela entraîne $e_{\varphi_\nu}^{H_\nu}(\iota'_{H_\nu,H'}(Y)) = e_\phi^{H'}(Y)$ d'après le lemme 2.4.5. On obtient donc

$$(7) \qquad \Theta_\kappa(f) = \int_{\mathfrak{h}'_{SC,ell,tn}(F)/st-conj} e_\phi^{H'}(Y) d^G(X_{H'} + Y)^{1/2} I^{G,\kappa}(X_{H'} + Y, f)\, dY,$$

où

$$I^{G,\kappa}(X_{H'} + Y, f) = \sum_{\nu \in ker^1(H',G)} \kappa(\nu) \sum_{Y' \in proj_\nu^{-1}(\iota'_{H_\nu,H'}(Y))} I^G(X_\nu + Y', f).$$

Fixons $Y \in \mathfrak{h}'_{SC,ell,tn}(F)/st-conj$ et un relèvement Y_0 dans $\mathfrak{h}'_{SC,ell}(F) \cap \mathfrak{h}'_{SC,tn}(F)$. Notons T_0 le centralisateur de $X_{H'} + Y_0$ dans G. On sait que l'ensemble $Cl_{st}(X_{H'} + Y_0)/conj$ des classes de conjugaison par $G(F)$ dans la classe de conjugaison stable de $X_{H'} + Y_0$ s'identifie au noyau $ker^1(T_0, G)$ de l'application $H^1(F, T_0) \to H^1(F, G)$. En utilisant 2.3.1(4), on voit que cet ensemble de classes de conjugaison s'identifie aussi à

$$\cup_{\nu \in ker^1(H',G)} proj_\nu^{-1}(\iota'_{H_\nu,H'}(Y))$$

et que la projection naturelle de cet ensemble dans $ker^1(H', G)$ s'identifie à la projection naturelle de $ker^1(T_0, G)$ dans ce groupe. Ces projections sont surjectives. Le caractère κ se relève en un caractère κ_0 de $ker^1(T_0, G)$ et alors $I^{G,\kappa}(X_{H'} + Y, f)$ est égale à la κ_0-intégrale orbitale habituelle $I^{G,\kappa_0}(X_H + Y_0, f)$. Si $\kappa \neq 1^\vee$ et $f \in I_{cusp}^{st}(\mathfrak{g}(F))$, cette κ_0-intégrale orbitale est nulle donc $\Theta_\kappa(f) = 0$ d'après (7). De même, si $\kappa = 1^\vee$ (donc $\kappa_0 = 1$) et $f \in I_{cusp}^{inst}(\mathfrak{g}(F))$, cette κ_0-intégrale orbitale est nulle donc $\Theta_{1^\vee}(f) = 0$. Il en résulte que

Θ_κ appartient à $I(\mathfrak{g}(F))^*[\neq \mathbf{G}]$ si $\kappa \neq 1^\vee$;

$\Theta_{1^\vee}$ appartient à $I(\mathfrak{g}(F))^*[\mathbf{G}]$.

On en déduit (6) comme dans la fin de la preuve de 2.4.9. Cela achève la démonstration.

□

2.4.11 Description de l'espace $\mathcal{D}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$

Notons $k^{G,st}$ l'application $k^G \circ \tau : \mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*$.

Proposition. *L'application $k^{G,st}$ est un isomorphisme antilinéaire de $\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ sur $D^G(\mathcal{D}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)))$.*

Preuve. D'après 2.4.8(1), k^G est un isomorphisme de $\mathcal{K}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))$ sur $D^G(\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)))$. D'après les définitions et 2.4.10(2), on a l'égalité

$$(1) \qquad \mathcal{K}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) = \mathcal{K}^{\natural}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \oplus \mathcal{K}^{\flat}_{cusp}(\mathfrak{g}(F)) \oplus \tau(\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))).$$

On a aussi

$$(2) \qquad D^G(\mathcal{D}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))) = D^G(\mathcal{D}^{inst}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))) \oplus D^G(\mathcal{D}^{st}_{cusp}(\mathfrak{g}(F))).$$

Les lemmes 2.4.9 et 2.4.10 disent que les deux premiers facteurs de (1) s'envoient dans le premier facteur de (2) tandis que le troisième facteur de (1) s'envoie dans le second facteur de (2). Donc k^G se restreint en un isomorphisme du troisième facteur de (1) sur le second facteur de (2). Puisque τ est injective, cela équivaut à l'énoncé. $\square$.

2.4.12 Description des distributions associées aux éléments de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$

Soit L un F-Levi de G, considérons des données (H, s_H) et φ comme en 2.4.6, le groupe ambiant G étant remplacé par L. C'est-à-dire $(H, s_H) \in \mathcal{L}^{L,nr,\star}_{ell}$ et $\varphi \in FC^{H_{s_H}}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q))$. On a associé à ces données un sommet $s \in Imm(L_{AD})$ et une fonction $\mathcal{Q}_\varphi \in C_{nil,cusp}(\mathfrak{l}_s(\mathbb{F}_q))$. On en déduit une distribution $D^L_{\mathcal{Q}_\varphi} \in I(\mathfrak{l}(F))^*$ puis, par induction, une distribution $D^G_{\mathcal{Q}_\varphi} \in I(\mathfrak{g}(F))^*$. Fixons un élément $X_H \in A^{nr}_H(F)$ entier et de réduction régulière. Comme en 2.4.5, on associe à φ une distribution $D^H_\varphi \in I(\mathfrak{h}_{SC}(F))^*$. Pour $f \in C^\infty_c(\mathfrak{g}(F))$, notons $f_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}}$ la fonction sur $\mathfrak{h}_{SC}(F)$ définie par $Y \mapsto f(X_H+Y)$. On pose

$$D^G_{X_H,\varphi}(f) = \int_{H(F)\backslash G(F)} D^H_\varphi((^g f)_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}})\, dg.$$

L'intégrale est à support compact d'après 2.3.1(5). Posons

$$c = q^{-dim(A^{nr}_H)/2} mes(K^L_s) mes(K^H_{s_H})^{-1}.$$

Proposition. *(i) On a l'égalité $D^G_{X_H,\varphi} = Ind^G_L(D^L_{X_H,\varphi})$.*

(ii) La distribution $D^G_{\mathcal{Q}^-_\varphi}$ est égale à la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ de $c\hat{D}^G_{X_H,\varphi}$.

Preuve. Posons $\Theta = Ind^G_L(D^L_{X_H,\varphi})$. Fixons un sous-groupe parabolique P de G de composante de Levi L et défini sur F. Pour $f \in C^\infty_c(\mathfrak{g}(F))$, on note f_{U_P} la fonction sur $\mathfrak{l}(F)$ définie par

$$f_{U_P}(Y) = \int_{\mathfrak{u}_P(F)} f(Y+N)\, dN.$$

Par définition,

$$\Theta(f) = \int_{P(F)\backslash G(F)} D^L_{X_H,\varphi}((^g f)_{U_P})\, dg$$

$$= \int_{P(F)\backslash G(F)} \int_{H(F)\backslash L(F)} D^H_\varphi(f[g,l])\, dl\, dg,$$

où $f[g,l] = ({}^l(({}^g f)_{U_P}))_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}}$. Calculons cette fonction $f[g,l]$. Puisque la distribution D^H_φ est à support dans $\mathfrak{h}_{SC,tn}(F)$, on peut se limiter à la calculer sur cet ensemble. Fixons g, l et $Y \in \mathfrak{h}_{SC,tn}(F)$. Alors

$$f[g,l](Y) = \int_{\mathfrak{u}_P(F)} f(g^{-1}(l^{-1}(X_H+Y)l+N)g)\,dN.$$

Par changement de variables $N \mapsto l^{-1}Nl$, on obtient

$$f[g,l](Y) = \delta_P(l)^{-1}\int_{\mathfrak{u}_P(F)} f(g^{-1}l^{-1}(X_H+Y+N)lg)\,dN.$$

Parce X_H+Y est un élément de $L(F)$ dont le commutant est contenu dans H d'après 2.3.1(1), donc dans L, l'application $u \mapsto u^{-1}(X_H+Y)u-(X_H+Y)$ est un isomorphisme de $U_P(F)$ sur $\mathfrak{u}_P(F)$. Son jacobien est égal à $d^G(X_H+Y)^{1/2}d^L(X_H+Y)^{-1/2}$ qui vaut 1 d'après 2.3.1(3). D'où

$$f[g,l](Y) = \delta_P(l)^{-1}\int_{U_P(F)} f(g^{-1}l^{-1}u^{-1}(X_H+Y)ulg)\,du = \delta_P(l)^{-1}\int_{U_P(F)} ({}^{ulg}f)_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}}(Y)\,du.$$

La propriété 2.3.1(5) entraîne qu'il existe un sous-ensemble compact $\omega \subset U_P(F)$ tel que $({}^{ulg}f)_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}}(Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{h}_{SC,tn}(F)$ si $u \notin \omega$. Il en résulte que

$$D^H_\varphi(f[g,l]) = \delta_P(l)^{-1}\int_{U_P(F)} D^H_\varphi(({}^{ulg}f)_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}})\,du.$$

On a alors

$$\Theta(f) = \int_{P(F)\backslash G(F)}\int_{H(F)\backslash L(F)}\int_{U_P(F)} \delta_P(l)^{-1}D^H_\varphi(({}^{ulg}f)_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}})\,du\,dl\,dg.$$

Cette intégrale est absolument convergente toujours d'après 2.3.1(5). Elle se reconstitue alors en

$$\Theta(f) = \int_{H(F)\backslash G(F)} D^H_\varphi(({}^g f)_{|X_H+\mathfrak{h}_{SC}})\,dg,$$

c'est-à-dire $\Theta(f) = D^G_{X_H,\varphi}(f)$. Cela démontre le (i) de l'énoncé.

On applique à $D^L_{\mathcal{Q}^-_\varphi}$ la proposition 2.4.6 : cette distribution est la restriction à $\mathfrak{l}_{tn}(F)$ de $c\hat{D}^L_{X_H,\varphi}$. Par induction, $D^G_{\mathcal{Q}^-_\varphi}$ est la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ de $c\hat{\Theta}$. Le (ii) de l'énoncé résulte alors de (i). $\square$

2.4.13 L'espace $\mathcal{K}^{st}(\mathfrak{g}(F))$

Notons $\mathcal{L}^{nr,st}_F/conj$, resp. $\mathcal{L}^{nr,st}_F/st-conj$, les ensembles de classes de conjugaison par $G(F)$, resp. de conjugaison stable, dans $\mathcal{L}^{nr,st}_F$. Comme en 2.4.10, il y a une surjection naturelle $\Pi : \mathcal{L}^{nr,st}_F/conj \to \mathcal{L}^{nr,st}_F/st-conj$.

Posons

$$\mathcal{K}^\sharp(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{H\in\mathcal{L}^{nr,st}_F/conj} FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)).$$

Soit $H \in \mathcal{L}^{nr,st}_F$. Fixons un élément $X_H \in \mathfrak{a}^{nr}_H(F)$ entier et de réduction régulière. Pour $\varphi \in FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$, notons $k^G(\varphi)$ la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ de la transformée de Fourier de $D^G_{X_H,\varphi}$. D'après la proposition 2.4.12, cette distribution ne dépend pas du choix de X_H.

Si $H' \in \mathcal{L}_F^{nr,st}$ est conjugué à H par un élément $g \in G(F)$, c'est-à-dire $H' = g^{-1}Hg$, l'application $Ad(g)^{-1}$ induit un isomorphisme de $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ sur $FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F))$ qui n'est autre que l'application canonique $\iota_{H',H}$ et il est clair par simple transport de structure que $k^G_{\iota_{H',H}(\varphi)} = k^G_\varphi$. Autrement dit, l'application k^G définie sur $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ ne dépend que de la classe de conjugaison de H par $G(F)$. En faisant varier cette classe de conjugaison, on obtient une application antilinéaire

$$k^G : \mathcal{K}^\sharp(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*.$$

Posons

$$\mathcal{K}^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{H' \in \mathcal{L}_F^{nr,st}/st-conj} FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)).$$

En imitant la définition de 2.4.10, on définit une application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathcal{K}^{st}(\mathfrak{g}(F)) & \to & \mathcal{K}^\sharp(\mathfrak{g}(F)) \\ & (\phi_{H'})_{H' \in \mathcal{L}^{nr,st}/st-conj} & \mapsto & (\varphi_H)_{H \in \mathcal{L}^{nr,st}/conj} \end{array}$$

par la formule $\varphi_H = |W^{nr}(H)^{\Gamma_F^{nr}}||W_F(H)|^{-1}\phi_{\Pi(H)}$. L'application τ est injective.

On définit $k^{G,st} : \mathcal{K}^{st}(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*$ par $k^{G,st} = k^G \circ \tau$.

Soit $H \in \mathcal{L}_F^{nr,st}/st - conj$ que l'on identifie à un représentant dans $\mathcal{L}_F^{nr,st}$ et soit $\varphi \in FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$. Les classes de conjugaison par $G(F)$ dans la classe de conjugaison stable de X_H sont paramétrées par $ker^1(H,G)$. Pour $\nu \in ker^1(H,G)$, fixons un élément X_ν stablement conjugué à X, dont la classe de conjugaison par $G(F)$ est paramétrée par ν. Posons $H_\nu = G_{X_\nu}$ et $\varphi_\nu = \iota_{H_\nu,H}(\varphi)$. Le même calcul qu'en 2.4.10(5) montre que

(1) $k^{G,st}(\varphi)$ est la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ de la transformée de Fourier de la distribution

$$\sum_{\nu \in ker^1(H,G)} D^G_{X_\nu,\varphi_\nu}.$$

2.4.14 L'espace $\mathcal{K}^{st}(\mathfrak{g}(F))$ et les Levi de G

Soit L un F-Levi de G. Il y a une application naturelle $p_L : \mathcal{L}_{ell}^{L,nr,st}/st - conj \to \mathcal{L}_F^{nr,st}/st - conj$. On prendra garde que la conjugaison stable dans le premier ensemble est relative au groupe ambiant L tandis que celle dans le second ensemble est relative au groupe ambiant G. Il s'en déduit une application linéaire

$$j_L : \mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F)) \to \mathcal{K}^{st}(\mathfrak{g}(F)).$$

Le groupe $Norm_{G(F)}(L)$ agit naturellement dans $\mathcal{L}_{ell}^{L,nr,st}$ et on vérifie que cette action préserve la conjugaison stable pour le groupe ambiant L (pour $n \in Norm_{G(F)}(L)$ et $X, X' \in \mathfrak{l}_{reg}(F)$, X et X' sont stablement conjugués dans L si et seulement si $n(X)$ et $n(X')$ le sont). Il s'en déduit une action sur $\mathcal{L}_{ell}^{L,nr,st}/st - conj$. De plus, pour $n \in Norm_{G(F)}(L)$ et $H \in \mathcal{L}_{ell}^{L,nr,st}$, les groupes H et $H' = nHn^{-1}$ sont stablement conjugués pour le groupe ambiant G et les espaces $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ et $FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F))$ sont canoniquement isomorphes. De l'action de $Norm_{G(F)}(L)$ dans $\mathcal{L}_{ell}^{L,nr,st}$ se déduit donc une action linéaire de ce groupe dans l'espace $\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))$. Notons $\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))/Norm_{G(F)}(L)$ le quotient des coinvariants.

Lemme. *(i) Pour $\varphi \in \mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))$, on a l'égalité $k^{G,st}(j_L(\varphi)) = Ind_L^G(k^{L,st}(\varphi))$.*

(ii) L'application j_L se quotiente en une application injective

$$\bar{j}_L : \mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))/Norm_{G(F)}(L) \to \mathcal{K}^{st}(\mathfrak{g}(F)).$$

Preuve. Pour (i), on peut fixer $H \in \mathcal{L}_{ell}^{L,nr,st}/st-conj$, que l'on identifie à un représentant dans $\mathcal{L}_{ell}^{L,nr,st}$, et supposer $\varphi \in FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$. Utilisons la formule 2.4.13(1) et son analogue dans L. On obtient que $k^{G,st}(j_L(\varphi))$, resp. $Ind_L^G(k^{L,st}(\varphi))$, est la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ de la transformée de Fourier de la distribution $\sum_{\nu \in ker^1(H,G)} D^G_{X_\nu,\varphi_\nu}$, resp. $\sum_{\nu' \in ker^1(H,L)} Ind_L^G(D^L_{X_{\nu'},\varphi_{\nu'}})$. D'après la proposition 2.4.12, cette dernière distribution est égale à $\sum_{\nu' \in ker^1(H,L)} D^G_{X_{\nu'},\varphi_{\nu'}}$. Il y a une application naturelle $ker^1(H,L) \to ker^1(H,G)$. Celle-ci est bijective car, L étant un F-Levi de G, l'application $H^1(F,L) \to H^1(F,G)$ est injective. Pour $\nu' \in ker^1(H,L)$ s'identifiant à un élément $\nu \in H^1(H,G)$, on peut supposer que les éléments $X_{\nu'}$ et X_ν intervenant ci-dessus sont égaux. Alors les deux distributions ci-dessus sont égales, ce qui prouve (i).

Notons ${}^L\mathcal{L}_F^{nr,st}/st-conj$ l'image de l'application p_L définie si-dessus. Pour $H \in {}^L\mathcal{L}_F^{nr,st}/st-conj$, notons $\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))[H]$ la somme des $FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F))$ sur les $H' \in p_L^{-1}(H)$. On a

$$\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F)) = \oplus_{H \in {}^L\mathcal{L}_F^{nr,st}/st-conj} \mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))[H].$$

L'application j_L est la somme directe sur $H \in {}^L\mathcal{L}_F^{nr,st}/st-conj$ de ses restrictions

$$j_L[H] : \mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))[H] \to FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)).$$

L'action de $Norm_{G(F)}(L)$ conserve les sous-espaces $\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))[H]$. Il suffit donc de prouver les analogues de (ii) pour les applications $j_L[H]$, pour $H \in {}^L\mathcal{L}_H^{nr,st}/st-conj$. Fixons un tel H. Pour $H' \in p_L^{-1}(H)$, l'espace $FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F))$ s'identifie canoniquement à $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$. Alors $\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))[H]$ s'identifie à $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)) \otimes \mathbb{C}[p_L^{-1}(H)]$.Définissons une forme linéaire

$$\begin{array}{rccc} \bar{j}_L[H] : & \mathbb{C}[p_L^{-1}(H)] & \to & \mathbb{C} \\ & \sum_{H' \in p_L^{-1}(H)} c_{H'}[H'] & \mapsto & \sum_{H' \in p_L^{-1}(H)} c_{H'}. \end{array}$$

Alors $j_L[H]$ s'identifie au produit tensoriel de l'identité de $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ et de cette forme linéaire $\bar{j}_L[H]$. L'action de $Norm_{G(F)}(L)$ sur $\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))[H]$ est le produit tensoriel de l'identité de $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ et de l'action sur le $\mathbb{C}[p_L^{-1}(H)]$ déduite de l'action par permutations de $Norm_{G(F)}(L)$ sur $p_L^{-1}(H)$. Cela nous ramène à prouver l'analogue de (ii) pour la forme linéaire $\bar{j}_L[H]$. Que celle-ci se quotiente par l'action de $Norm_{G(F)}(L)$ est évident : pour $\sum_{H' \in p_L^{-1}(H)} c_{H'}[H'] \in \mathbb{C}[p_L^{-1}(H)]$, $\sum_{H' \in p_L^{-1}(H)} c_{H'}$ est insensible à toute permutation de $p_L^{-1}(H)$. Puisque $Norm_{G(F)}(L)$ permute la base $p_L^{-1}(H)$ de $\mathbb{C}[p_L^{-1}(H)]$, l'espace des coinvariants $\mathbb{C}[p_L^{-1}(H)]/Norm_{G(F)}(L)$ s'identifie à la somme de droites indexées par les orbites de l'action de $Norm_{G(F)}(L)$ dans $p_L^{-1}(H)$. La deuxième assertion de (ii) résulte alors de

(1) $Norm_{G(F)}(L)$ agit transitivement dans $p_L^{-1}(H)$.

Soit $H', H'' \in p_L^{-1}(H)$, que l'on identifie à des représentants dans $\mathcal{L}_{ell}^{L,nr,st}$. Fixons $g \in G(F^{nr})$ tel que $H'' = g^{-1}H'g$ et $gFr(g)^{-1} \in H'(F^{nr})$. L'application $Ad(g)^{-1}$ se restreint en un isomorphisme Γ_F-équivariant de $Z(H')^0$ sur $Z(H'')^0$, a fortiori de $A_{H'}$ sur $A_{H''}$. Puisque H' et H'' sont elliptiques dans L, ces tores $A_{H'}$ et $A_{H''}$ sont tous deux égaux à A_L. Donc $Ad(g)^{-1}$ conserve A_L et conserve aussi son commutant L. Autrement dit $g \in Norm_{G(F^{nr})}(L)$. Puisque $gFr(g)^{-1} \in H'(F^{nr}) \subset L(F^{nr})$, l'image de g dans $L(F^{nr})\backslash Norm_{G(F^{nr})}(L)$ est fixée par Γ_F^{nr}. Puisque L est un F-Levi de G, l'application naturelle

$$L(F)\backslash Norm_{G(F)}(L) \to (L(F^{nr})\backslash Norm_{G(F^{nr})}(L))^{\Gamma_{F^{nr}}}$$

est surjective. On peut donc fixer $n \in Norm_{G(F)}(L)$ et $l \in L(F^{nr})$ tels que $g = ln$. La relation $gFr(g)^{-1} \in H'(F^{nr})$ entraîne $lFr(l)^{-1} \in H'(F^{nr})$. Posons $H'_0 = l^{-1}H'l$. Alors H'_0 est un élément de $\mathcal{L}_{ell}^{L,nr,st}$ qui est stablement conjugué dans L à H', autrement dit les images de H' et H'_0 dans $\mathcal{L}_{ell}^{L,nr,st}/st-conj$ sont égales. L'égalité $H'' = n^{-1}H'_0n$ montre que l'image de H'' dans $\mathcal{L}_{ell}^{L,nr,st}/st-conj$ se déduit de celle de H par l'action de $n^{-1} \in Norm_{G(F)}(L)$. Cela prouve (1) et le lemme. $\square$

2.4.15 Description de $\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$

Proposition. *L'application $k^{G,st}$ est un isomorphisme antilinéaire de $\mathcal{K}^{st}(\mathfrak{g}(F))$ sur $D^G(\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$.*

Preuve. Fixons un ensemble $\underline{\mathcal{L}}_F$ de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans l'ensemble des F-Levi de G. Des applications $\bar{j}_L$ définies en 2.4.14 se déduit une application linéaire

$$\bar{j} : \oplus_{L\in\underline{\mathcal{L}}_F}\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))/Norm_{G(F)}(L) \to \mathcal{K}^{st}(\mathfrak{g}(F)).$$

On a

(1) $\bar{j}$ est un isomorphisme.

Puisque les applications $\bar{j}_L$ sont injectives pour tout L, il suffit de montrer que $\mathcal{K}^{st}(\mathfrak{g}(F))$ est la somme directe de leurs images. D'après la définition de ces applications, il suffit de prouver que, pour tout $H \in \mathcal{L}_F^{nr,st}$, il existe un et un seul $L \in \underline{\mathcal{L}}_F$ tel que H soit stablement conjugué à un élément de $\mathcal{L}_{ell}^{L,nr,st}$. On note L_H le commutant de A_H dans G. C'est un Levi de G, qui est donc conjugué par un élément de $G(F)$ à un unique $L \in \underline{\mathcal{L}}_F$. Par des calculs déjà faits plusieurs fois, on voit que ce Levi L répond à la question et que c'est le seul. Cela prouve (1).

Fixons $L \in \underline{\mathcal{L}}_F$. On a prouvé en 2.4.11 que l'application $k^{L,st}_{cusp} : \mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F)) \to I(\mathfrak{l}(F))^*$ était un isomorphisme (antilinéaire) de l'espace de départ sur $D^L(\mathcal{D}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F)))$. D'autre part, D^L est injective sur $\mathcal{D}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))$. Notons $h^{L,st}_{cusp} : \mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F)) \to \mathcal{D}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))$ l'isomorphisme (linéaire) tel que $k^{L,st}_{cusp} = D^L \circ h^{L,st}_{cusp}$. Le groupe $Norm_{G(F)}(L)$ agit sur tous les espaces intervenant et l'application $h^{L,st}_{cusp}$ est équivariante (par simple transport de structure). Cette application se quotiente donc en un isomorphisme

$$\bar{h}^{L,st}_{cusp} : \mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))/Norm_{G(F)}(L) \to \mathcal{D}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))/Norm_{G(F)}(L).$$

L'assertion (i) du lemme 2.4.14 signifie que, pour $\varphi \in \mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))/Norm_{G(F)}(L)$, on a l'égalité $k^{G,st}(\bar{j}(\varphi)) = D^G(\bar{h}^{L,st}_{cusp}(\varphi))$.

On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{L\in\underline{\mathcal{L}}}\mathcal{K}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))/Norm_{G(F)}(L) & \stackrel{\bar{j}}{\to} & \mathcal{K}^{st}(\mathfrak{g}(F)) \\ \downarrow \oplus_L \bar{h}^{L,st}_{cusp} & & \downarrow k^{G,st} \\ \oplus_{L\in\underline{\mathcal{L}}}\mathcal{D}^{st}_{cusp}(\mathfrak{l}(F))/Norm_{G(F)}(L) & \stackrel{D^G}{\to} & I(\mathfrak{g}(F))^* \end{array}$$

Les applications horizontales du haut et verticales de gauche sont des isomorphismes et l'application horizontale du bas est injective. D'après le lemme 2.4.3, l'espace sud-ouest est égal à $\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$. La commutativité du diagramme entraîne l'énoncé. $\square$

2.4.16 Dimension de l'espace $\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$

Pour tout $M^* \in \mathcal{L}^{*,st}_{F,sd}$ et tout $Cl_{Fr}(w) \in W^{I_F}(M^*)_{G-adm}/Fr-conj$, fixons un élément $H(M^*, w) \in \mathcal{L}^{nr,st}_F$ dont la classe de conjugaison stable est paramétrée par $(M^*, Cl_{Fr}(w))$, cf. proposition 2.3.8. Alors

$$\mathcal{K}^{st}(\mathfrak{g}(F)) = \oplus_{M^* \in \mathcal{L}^{*,st}_{F,sd}} \oplus_{Cl_{Fr}(w) \in W^{I_F}(M^*)_{G-adm}/Fr-conj} FC^{st}(\mathfrak{h}(M^*, w)_{SC}(F)).$$

D'après le lemme 2.3.6, les espaces $FC^{st}(\mathfrak{h}(M^*, w)_{SC}(F))$ et $FC^{st}(\mathfrak{m}^*_{SC}(F))$ sont isomorphes. On déduit de la proposition 2.4.15 l'égalité

$$dim(\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))) = \sum_{M^* \in \mathcal{L}^{*,st}_{F,sd}} |W^{I_F}(M^*)_{G-adm}/Fr - conj| dim(FC^{st}(\mathfrak{m}^*_{SC}(F))).$$

3 Intégrales orbitales nilpotentes

3.1 Orbites nilpotentes

3.1.1 Rappels sur les représentations de $\mathfrak{sl}(2)$

Dans cette sous-section 3.1, le corps de base k est une extension algébrique de $\mathbb{F}_q$ ou de F. On note $\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{e}\}$ la base habituelle de $\mathfrak{sl}(2, k)$:

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit n un entier, supposons

(1) $1 \leq n \leq p$, $2 \neq p$.

Alors, à isomorphisme près, il existe une unique représentation irréductible ρ_n de $\mathfrak{sl}(2, k)$ dans un k-espace vectoriel $\mathcal{W}_n$ de dimension n. On peut choisir une base $\{w_1, ..., w_n\}$ de $\mathcal{W}_n$ de sorte que $\rho_n(\boldsymbol{h})(w_i) = (2i - n - 1)w_i$ et $\rho_n(\boldsymbol{e})(w_i) = w_{i+1}$ pour tout $i = 1, ..., n$, avec la convention $w_{n+1} = 0$. On a alors $\rho_n(\boldsymbol{f})(w_i) = c_{n,i} w_{i-1}$ avec la convention $w_0 = 0$, où $c_{n,i}$ est un entier premier à p. Les valeurs propres de $\rho_n(\boldsymbol{h})$ sont des entiers premiers à p et la différence entre deux valeurs propres distinctes est encore un entier premier à p. Deux telles bases sont homothétiques, étant déterminés par le vecteur non nul w_1 appartenant à la droite des éléments $w \in \mathcal{W}_n$ tels que $\rho_n(\boldsymbol{h})(w) = (1 - n)w$. On fixe une telle base.

Supposons pour la fin du paragraphe que k soit égal à F ou à F^{nr}. On note $\mathcal{L}_n$ le sous-$\mathfrak{o}_k$-module de $\mathcal{W}_n$ engendré par les éléments de base. Alors $\mathcal{L}_n$ est un sous-$\mathfrak{sl}(2, \mathfrak{o}_k)$-module de W_n. Tout $\mathfrak{o}_k$-réseau de W_n qui est conservé par $\mathfrak{sl}(2, \mathfrak{o}_k)$ est homothétique à $\mathcal{L}_n$.

Soit ρ une représentation de $\mathfrak{sl}(2, k)$ dans un k-espace V. Considérons une chaîne de $\mathfrak{o}_k$-réseaux $L_. = (L_0 \supset L_1 \supset ... \supset L_m = \mathfrak{p}_k L_0)$ de V.

Proposition. *Supposons que toute sous-représentation irréductible de ρ soit de dimension inférieure ou égale à p. Supposons que L_i soit conservé par $\mathfrak{sl}(2, \mathfrak{o}_k)$ pour tout $i = 0, ..., m-1$. Alors il existe un ensemble J, muni d'une décomposition en réunion disjointe $J = \sqcup_{i=0,...m-1} J_i$ et d'une application $d : J \to \{1, ..., p\}$ et il existe un isomorphisme de $\mathfrak{sl}(2, k)$-modules $\phi : V \to \oplus_{j \in J} \mathcal{W}_{d(j)}$ de sorte que, pour tout $i = 0, ..., m-1$, on ait l'égalité*

$$\phi(L_i) = \left(\oplus_{i'=0,...,i-1} \oplus_{j \in J_{i'}} \mathfrak{p}_k \mathcal{L}_{d(j)}\right) \oplus \left(\oplus_{i'=i,...,m-1} \oplus_{j \in J_{i'}} \mathcal{L}_{d(j)}\right).$$

La démonstration est élémentaire, on la laisse au lecteur.

3.1.2 $\mathfrak{sl}(2)$-triplets et orbites nilpotentes

Pour la suite de la sous-section 3.1, on suppose que G est un groupe réductif connexe défini sur k. Comme on l'a dit en 2.1.2, on impose l'hypothèse $(Hyp)_1(p)$.

On appelle orbite nilpotente dans $\mathfrak{g}(k)$ une classe de conjugaison par $G(k)$ dans $\mathfrak{g}_{nil}(k)$. On note $\mathfrak{g}_{nil}(k)/conj$ l'ensemble des orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}(k)$. On appelle $\mathfrak{sl}(2)$-triplet de $\mathfrak{g}(k)$ un triplet (f, h, e) d'éléments de $\mathfrak{g}(k)$ engendrant une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, k)$, les trois éléments s'identifiant aux éléments $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{e}$ de $\mathfrak{sl}(2, k)$. Les éléments f, h et e appartiennent forcément à la sous-algèbre $\mathfrak{g}_{SC}(k)$ de $\mathfrak{g}(k)$. Pour un tel triplet, il existe un unique homomorphisme $\phi : SL(2) \to G_{SC}$ défini sur k tel que $\phi(exp(\lambda \mathbf{e})) = exp(\lambda e)$ et $\phi(exp(\lambda \mathbf{f})) = exp(\lambda f)$ pour tout $\lambda \in k$, cf. [7] paragraphe 5.5. L'application $Ad \circ \phi$ est une représentation de $SL(2)$ dans $\mathfrak{g}_{SC}$. L'hypothèse $(Hyp)_1(p)$ entraîne que cette représentation est semi-simple et que les dimensions de toutes ses composantes irréductibles vérifient l'hypothèse 3.1.1(1).

Notons $x_{*,h}$ l'homomorphisme

$$\lambda \mapsto \phi(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix})$$

de $GL(1)$ dans G_{SC}. C'est un sous-groupe à un paramètre de G_{SC}. On a $h = \partial x_{*,h}(1)$, où $\partial x_{*,h} : \mathfrak{gl}(1) \to \mathfrak{g}_{SC}$ est l'homomorphisme dérivé de $x_{*,h}$. Si k est de caractéristique nulle, les sous-espaces propres de $\mathfrak{g}_{SC}$ pour l'action de $x_{*,h}$ correspondent bijectivement aux sous-espaces propres pour l'action de h. Si k est de caractéristique p, cela serait vrai sous une hypothèse plus forte que $(Hyp)_1(p)$ mais ne l'est pas toujours sous cette hypothèse. Quel que soit k, on a toutefois, cf. [7], proposition 5.5.8 :

(1) le commutant de h dans G est égal au commutant du groupe $x_{*,h}(\bar{k}^\times)$; c'est un k-Levi de G.

Dans le cas où $k \subset F^{nr}$, on a même

(2) le commutant de h dans G est égal au commutant du groupe $x_{*,h}(\mathfrak{o}_{F^{nr}}^\times)$.

Notons $Trip(\mathfrak{g}(k))$ l'ensemble des $\mathfrak{sl}(2)$-triplets dans $\mathfrak{g}(k)$. On sait que l'application $(f, h, e) \mapsto e$ se quotiente en une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison par $G(k)$ dans $Trip(\mathfrak{g}(k))$ et l'ensemble des orbites nilpotentes non nulles dans $\mathfrak{g}(k)$, cf. [7] théorème 5.5.11. Conformément à notre convention, si $k = \bar{k}$ est algébriquement clos, on supprime le k de la notation : on appelle orbite nilpotente dans $\mathfrak{g}(= \mathfrak{g}(\bar{k}))$ une classe de conjugaison par $G(= G(\bar{k}))$ dans $\mathfrak{g}_{nil}(= \mathfrak{g}_{nil}(\bar{k}))$; on note $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ l'ensemble des orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}$ et $Trip(\mathfrak{g})$ l'ensemble des $\mathfrak{sl}(2)$-triplets dans $\mathfrak{g}$.

Supposons k algébriquement clos. Soit $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$, supposons $\mathcal{O} \neq \{0\}$. Fixons un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f, h, e) de $\mathfrak{g}$ tel que $e \in \mathcal{O}$. La classe de conjugaison de $x_{*,h}$ ne dépend pas du choix du $\mathfrak{sl}(2)$-triplet. On note $x_{*,\mathcal{O}}$ cette classe de conjugaison. Fixons une paire de Borel (B, T) de G. D'après Dynkin, il existe un unique élément dans cette classe, notons-le encore $x_{*,\mathcal{O}}$, qui appartient à $X_*(T_{sc})$ et vérifie les relations $< \alpha, x_{*,\mathcal{O}} > \in \{0, 1, 2\}$ pour toute racine simple $\alpha \in \Delta$. L'application $\mathcal{O} \mapsto x_{*,\mathcal{O}}$ est injective. Il est commode d'inclure dans cette description l'orbite nulle en lui associant formellement l'élément $h = 0$ et l'élément associé $x_{*,\{0\}} = 0$. Munissons $X_*(T_{sc})$ d'un produit scalaire invariant par l'action du groupe de Weyl, que l'on peut supposer à valeurs dans $\mathbb{Q}$. La norme $||x_{*,\mathcal{O}}||$ est alors définie et on a ainsi associé à $\mathcal{O}$ un réel positif (strictement positif si $\mathcal{O} \neq \{0\}$).

Levons l'hypothèse que k est algébriquement clos. A une orbite nilpotente $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(k)/conj$ est associée l'unique orbite $\mathcal{O}_{\bar{k}} \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$ telle que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{\bar{k}}$. On pose $x_{*,\mathcal{O}} = x_{*,\mathcal{O}_{\bar{k}}}$. Evidemment, l'application $\mathcal{O} \mapsto x_{*,\mathcal{O}}$ n'est plus injective en général.

3.1.3 Orbites engendrées

Soit H un sous-groupe réductif connexe de G. Fixons des sous-tores maximaux T de G et T_H de H et munissons $X_*(T)$ d'un produit scalaire invariant par l'action du groupe de Weyl W de G. On en déduit un tel produit scalaire sur $X_*(T_H)$. En effet, à conjugaison près, on peut supposer $T_H \subset T$ et le produit cherché est la restriction de celui sur $X_*(T)$. Cela ne dépend pas du choix de la conjugaison.

Soit $\mathcal{O} \in \mathfrak{h}_{nil}/conj$. Il s'en déduit une orbite $\mathcal{O}^G \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$: c'est l'unique orbite pour l'action de G qui contient $\mathcal{O}$. Fixons un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f, h, e) de $\mathfrak{h}$ tel que $e \in \mathcal{O}$. C'est aussi un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet dans $\mathfrak{g}$ tel que $e \in \mathcal{O}^G$. On en déduit que $x_{*,\mathcal{O}^G}$ est la G-orbite de sous-groupes à un paramètre engendrée par la H-orbite $x_{*,\mathcal{O}}$. A fortiori,

(1) $||x_{*,\mathcal{O}^G}|| = ||x_{*,\mathcal{O}}||$.

L'ensemble $\mathfrak{h}_{nil}/conj$ est muni de l'ordre usuel : $\mathcal{O} \leq \mathcal{O}'$ si $\mathcal{O}$ est incluse dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}'$. Il en est de même de $\mathfrak{g}_{nil}/conj$. L'application $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}^G$ n'est pas injective en général. On a toutefois le lemme suivant.

Lemme. *L'application $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}^G$ est strictement croissante.*

Preuve. Si $\mathcal{O}$ est contenue dans l'adhérence de $\mathcal{O}'$, il est clair que $\mathcal{O}^G$ est contenue dans l'adhérence de $\mathcal{O}'^G$. On doit prouver que si, de plus $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}'$ alors $\mathcal{O}^G \neq \mathcal{O}'^G$. Comme ci-dessus, on fixe un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f, h, e) de $\mathfrak{h}$ tel que $e \in \mathcal{O}$. On pose $\mathfrak{z}_\mathfrak{h}(f) = \{X \in \mathfrak{h}; [f, X] = 0\}$ et on définit de même $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(f)$. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} H \times \mathfrak{z}_\mathfrak{h}(f) & \to & \mathfrak{h} \\ (h, X) & \mapsto & h(e + X)h^{-1}. \end{array}$$

D'après [38] paragraphe 7.4, son image contient un voisinage de e. Il existe donc un élément $X \in \mathfrak{z}_\mathfrak{h}(f)$ tel que $e + X \in \mathcal{O}'$. On a $\mathfrak{z}_\mathfrak{h}(f) \subseteq \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(f)$. Supposons $\mathcal{O}'^G = \mathcal{O}^G$. Alors $e + X \in \mathcal{O}^G$. Or l'ensemble des $Y \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(f)$ tels que $e + Y \in \mathcal{O}^G$ est réduit à $\{0\}$, cf. [43] V.7(9). Donc $X = 0$ et $e \in \mathcal{O}'$. Cela contredit l'hypothèse $\mathcal{O}' \neq \mathcal{O}$. $\square$

Remarque. Slodowy énonce ses résultats en imposant à p une hypothèse plus forte que la nôtre, parce qu'il énonce le théorème de Jacobson-Morozov sous cette hypothèse plus forte. En fait, d'après [7], théorème 5.5.11, notre hypothèse $(Hyp)_1(p)$ suffit.

3.1.4 Les groupes $A(N)$ et $\bar{A}(N)$

Pour $N \in \mathfrak{g}_{nil}$, on pose $A(N) = Z_G(N)/Z_G(N)^0$. Fixons un triplet $(f, h, N) \in Trip(\mathfrak{g})$ dont le troisième terme soit notre nilpotent N. Notons $Z_G(f, h, N)$ le commutant commun de f, g et N. Il est connu que $Z_G(f, h, N)$ est une composante de Levi de $Z_G(N)$, c'est-à-dire que $Z_G(f, h, N)$ est réductif (en général non connexe) et que $Z_G(N)$ est produit semi-direct de $Z_G(f, h, N)$ et du radical unipotent de $Z_G(N)$. De même, $Z_G(f, h, N)^0$ est une composante de Levi de $Z_G(N)^0$. On a l'égalité $A(N) = Z(f, h, N)/Z(f, h, N)^0$.

Lusztig a défini un quotient $\bar{A}(N)$ de $A(N)$ (Lusztig donne la définition en [23] 13.1 en supposant que l'orbite de N est spéciale ; la définition se généralise à toute orbite nilpotente, cf. [40] paragraphe 5). On note $A^1(N)$ le noyau de l'homomorphisme naturel $A(N) \to \bar{A}(N)$. Il contient l'image de $Z(G)$ dans $A(N)$.

3.1.5 Partitions

Pour un ensemble fini Y et pour $\eta \in \{\pm 1\}$, on note $\{\pm 1\}^Y_\eta$ le sous-ensemble des éléments $(\epsilon_y)_{y \in Y} \in \{\pm 1\}^Y$ tels que $\prod_{y \in Y} \epsilon_y = \eta$.

On appelle partition une classe d'équivalence de suites finies décroissantes d'entiers positifs ou nuls $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...)$, deux telles suites étant équivalentes si et seulement si elles ne diffèrent que par des termes nuls. Pour une telle partition λ, on utilise les notations suivantes :

$S(\lambda) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j$;

pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n(\lambda) = \sum_{j;1\leq j\leq n} \lambda_j$;

pour $i \in \mathbb{N}_{>0}$, $mult_\lambda(i) = |\{j \geq 1; \lambda_j = i\}$ et $mult_\lambda(\geq i) = \sum_{i'\in\mathbb{N}, i'\geq i} mult_\lambda(i')$;

pour un sous-ensemble E de $\mathbb{N}_{>0}$, $mult_\lambda(E) = |\{j \geq 1; \lambda_j \in E\}$;

$l(\lambda) = mult_\lambda(\geq 1)$, autrement dit $l(\lambda)$ est le nombre d'indices $j \geq 1$ tels que $\lambda_j \neq 0$;

$Jord(\lambda) = \{i \in \mathbb{N}_{>0}; mult_\lambda(i) \geq 1\}$.

En notant $i_1 > ... > i_r$ les éléments de $Jord(\lambda)$, on notera aussi la partition $\lambda = (i_1^{mult_\lambda(i_1)}, ..., i_r^{mult_\lambda(i_r)})$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(N)$ l'ensemble des partitions λ telles que $S(\lambda) = N$. Pour $\lambda' \in \mathcal{P}(N')$ et $\lambda'' \in \mathcal{P}(N'')$, on définit leur réunion $\lambda = \lambda' \cup \lambda'' \in \mathcal{P}(N' + N'')$: c'est l'unique partition telle que $mult_\lambda(i) = mult_{\lambda'}(i) + mult_{\lambda''}(i)$ pour tout $i \geq 1$. On définit la somme $\lambda = \lambda' + \lambda'' \in \mathcal{P}(N' + N'')$ par $\lambda_j = \lambda'_j + \lambda''_j$ pour tout $j \geq 1$. On introduit sur $\mathcal{P}(N)$ l'ordre usuel : $\lambda' \leq \lambda''$ si et seulement si $S_n(\lambda') \leq S_n(\lambda'')$ pour tout entier $n \geq 0$.

On note $\mathcal{P}_2(N)$ l'ensemble des couples de partitions (λ', λ'') tels que $S(\lambda') + S(\lambda'') = N$.

On note $\mathcal{P}^{symp}(N)$, resp. $\mathcal{P}^{orth}(N)$, l'ensemble des $\lambda \in \mathcal{P}(N)$ telles que $mult_\lambda(i)$ est pair pour tout $i \geq 1$ impair, resp. pair. Evidemment $\mathcal{P}^{symp}(N) = \emptyset$ si N est impair. Pour $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(N)$, resp. $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(N)$, on note $Jord_{bp}(\lambda) = \{i \in Jord(\lambda); i \text{ est pair}\}$, resp. $Jord_{bp}(\lambda) = \{i \in Jord(\lambda); i \text{ est impair}\}$. Notons $\xi(\lambda)$ l'élément $(\xi(\lambda)_i)_{i\in Jord_{bp}(\lambda)} \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$ tel que $\xi(\lambda)_i = (-1)^{mult_\lambda(i)}$. Pour $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(N)$, on a $\xi(\lambda) \in \{\pm 1\}_\eta^{Jord_{bp}(\lambda)}$, où $\eta = (-1)^N$.

3.1.6 Paramétrage des orbites nilpotentes

Pour ce paragraphe, on suppose que G est adjoint et simple.

Si G est de type exceptionnel, le paramétrage des orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}$ se trouve dans différentes tables. Nous prenons comme référence [7], pages 401-407, dont nous utiliserons les notations. Pour un élément $N \in \mathfrak{g}_{nil}$, ces tables décrivent le groupe $A(N)$. Il est toujours isomorphe à un groupe de permutations $\mathfrak{S}_m$ pour un entier $m \in \{1, ..., 5\}$. Le groupe $\bar{A}(N)$ est décrit en [40] paragraphe 9. On a toujours $\bar{A}(N) = A(N)$ ou $\bar{A}(N) = \{1\}$, sauf dans le cas où G est de type E_8 et l'orbite de N est de type $E_8(b_6)$. Dans ce dernier cas, on a $A(N) = \mathfrak{S}_3$ et $\bar{A}(N) = \mathfrak{S}_2$.

Si G est classique, $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ est paramétré par un ensemble de partitions (avec une petite entorse dans le cas d'un groupe de type D_n, cf. ci-dessous). Pour une partition λ dans cet ensemble, on note $A(\lambda)$ le groupe $A(N)$ pour un élément $N \in \mathfrak{g}_{nil}$ paramétré par λ.

Si G est de type A_{n-1}, $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ est paramétré par $\mathcal{P}(n)$. On a $A(\lambda) = \bar{A}(\lambda) = \{1\}$ pour tout $\lambda \in \mathcal{P}(n)$.

Si G est de type B_n, $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ est paramétré par $\mathcal{P}^{orth}(2n+1)$. Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n+1)$. On a $A(\lambda) = \{\pm 1\}_1^{Jord_{bp}(\lambda)}$. Notons $i_1 > i_2 > ... > i_t$ les éléments de $Jord_{bp}(\lambda)$. On définit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(r_j)_{j=0,...,k}$ telle que $0 \leq r_j \leq t$ de la façon suivante. On pose $r_0 = 0$. Supposons défini r_j. Si $r_j = t$, on s'arrête et on pose $k = j$. Si $r_j < t$, il existe forcément un entier $m \in \{r_j + 1, ..., t\}$ tel que $mult_\lambda(\geq i_m)$ soit impair : l'entier $m = t$ vérifie cette condition. On note r_{j+1} le plus petit tel entier. Cela

définit notre suite $(r_j)_{j=0,...,k}$. A tout $j = 1, ..., k$, on associe l'intervalle $\Delta_j \subset Jord_{bp}(\lambda)$ formé des i_m pour $r_{j-1} < m \leq r_j$. Remarquons que $\sum_{i\in\Delta_j} mult_\lambda(i)$ est impair pour $j = 1$ et est pair pour $j \geq 2$. On note $Int(\lambda) = \{\Delta_j; j = 1, ..., k\}$ l'ensemble de ces intervalles. Cet ensemble est naturellement ordonné : $\Delta_1 > \Delta_2 > ... > \Delta_k$ (les entiers appartenant à Δ_1 sont strictement supérieurs aux entiers appartenant à Δ_2 etc...). On a $\bar{A}(\lambda) = \{\pm 1\}_1^{Int(\lambda)}$. L'homomorphisme $A(\lambda) \to \bar{A}(\lambda)$ envoie $(\epsilon_i)_{i\in Jord_{bp}(\lambda)}$ sur $(\eta_\Delta)_{\Delta\in Int(\lambda)}$ où $\eta_\Delta = \prod_{i\in\Delta} \epsilon_i$.

Si G est de type C_n, $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ est paramétré par $\mathcal{P}^{symp}(2n)$. Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2n)$. On a $A(\lambda) = \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1, \xi(\lambda)\}$. Remarquons que l'élément $\xi(\lambda)$ peut être égal à 1. Notons $i_1 > i_2 > ... > i_t$ les éléments de $Jord_{bp}(\lambda)$. On définit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(r_j)_{j=0,...,k}$ telle que $0 \leq r_j \leq t$ de la façon suivante. On pose $r_0 = 0$. Supposons défini r_j. Si $r_j = t$, on s'arrête et on pose $k = j$. Si $r_j < t$, supposons qu'il existe $m \in \{r_j + 1, ..., t\}$ tel que $mult_\lambda(\geq i_m)$ soit pair. Dans ce cas on note r_{j+1} le plus petit tel entier. Supposons qu'il n'existe pas de tel entier. Alors la suite s'arrête, on pose $k = j$. La suite $(r_j)_{j=0,...,k}$ étant définie, on définit l'ensemble d'intervalles $Int(\lambda)$ comme dans le cas B_n. Remarquons que, cette fois, $\sum_{i\in\Delta_j} mult_\lambda(i)$ est pair pour tout j. On a $\bar{A}(\lambda) = \{\pm 1\}^{Int(\lambda)}$. L'homomorphisme $A(\lambda) \to \bar{A}(\lambda)$ se construit de la façon suivante. On définit comme dans le cas B_n un homomorphisme de $\{\pm 1\}^{Int(\lambda)}$ dans $\bar{A}(\lambda)$. On vérifie que son noyau contient $\xi(\lambda)$. L'homomorphisme se quotiente donc en un homomorphisme $A(\lambda) \to \bar{A}(\lambda)$ qui est l'homomorphisme cherché.

Si G est de type D_n, il y a une application surjective de $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ sur $\mathcal{P}^{orth}(2n)$. Les fibres ont un élément sauf au-dessus d'une partition dont tous les termes sont pairs. Dans ce cas, la fibre a deux éléments. Pour un élément N d'une fibre exceptionnelle, on a $A(N) = \bar{A}(N) = \{1\}$. Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n)$ possédant au moins un terme impair. Alors $A(\lambda) = \{\pm 1\}_1^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1, \xi(\lambda)\}$. Remarquons que l'élément $\xi(\lambda)$ peut être égal à 1. On définit l'ensemble d'intervalles $Int(\lambda)$ de la même façon que dans le cas C_n. On a $\bar{A}(\lambda) = \{\pm 1\}_1^{Int(\lambda)}$. L'homomorphisme $A(\lambda) \to \bar{A}(\lambda)$ se construit comme dans le cas C_n.

3.1.7 Action galoisienne

On suppose que $k = F$ ou $k = \mathbb{F}_q$, que G_{AD} est simple et que G est quasi-déployé (c'est automatique si $k = \mathbb{F}_q$). Le groupe Γ_k agit sur $\mathfrak{g}_{nil}/conj$. Toute orbite nilpotente conservée par l'action galoisienne contient un point de $\mathfrak{g}(k)$ (cf. [19] théorème 4.2 si $k = F$; si $k = \mathbb{F}_q$, l'assertion est vérifiée pour toute orbite nilpotente ou pas, cela résulte du théorème de Lang). Autrement dit, l'application naturelle $\mathfrak{g}_{nil}(k)/conj \to (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_k}$ est surjective. Montrons que

(1) si G est déployé sur k ou si G n'est pas de type D_n, toute orbite nilpotente dans $\mathfrak{g}$ est conservée par l'action galoisienne.

Fixons une paire de Borel (B, T) définie sur k. Pour $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$, on identifie $x_{*,\mathcal{O}}$ à l'unique élément de cette classe appartenant à $X_*(T_{sc})$ et vérifiant les conditions de Dynkin. Pour $\sigma \in \Gamma_k$, on a évidemment $x_{*,\sigma(\mathcal{O})} = \sigma(x_{*,\mathcal{O}})$. Puisque $x_{*,\mathcal{O}}$ détermine $\mathcal{O}$, il suffit de prouver que, sous nos hypothèses, $x_{*,\mathcal{O}}$ est fixé par l'action galoisienne. Si G est déployé, cette action est triviale sur $X_*(T_{sc})$ et le résultat est clair. Si G n'est pas déployé et n'est pas de type D_n, il ne peut être que de type A_{n-1} ou E_6. Si G est de type E_6, Γ_k agit sur $X_*(T_{sc})$ par un homomorphisme surjectif $\Gamma_k \to Aut(\mathcal{D}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'inspection de la table [7] p. 402 montre que, pour toute orbite $\mathcal{O}$, $x_{*,\mathcal{O}}$ est fixé par $Aut(\mathcal{D})$. Dans le cas où G est de type A_{n-1}, il est plus simple de faire appel à la description élémentaire des orbites nilpotentes par l'algèbre linéaire, qui conduit à la conclusion. D'où (1).

Supposons G de type D_n avec $n \geq 4$ et fixons comme ci-dessus une paire de Borel (B, T) définie sur k. Le groupe d'automorphismes $Aut(\mathcal{D})$ contient toujours l'élément θ qui échange les racines α_{n-1} et α_n et fixe α_i pour $i = 1, ..., n-2$. Si $n \geq 5$, ce groupe est réduit à $\{1, \theta\}$. Supposons $n = 4$. Alors ce groupe d'automorphismes contient l'élément θ_3 qui fixe α_2 et envoie $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ respectivement sur $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_1$. Le groupe est engendré par θ et θ_3 et est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. Supposons que Γ_k agisse par un homomorphisme surjectif $\Gamma_k \to \{1, \theta\}$. On vérifie qu'une orbite nilpotente paramétrée par une partition $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n)$ possédant au moins un terme impair est conservée par cette action. Par contre, les deux orbites paramétrées par une partition λ dont les termes sont tous pairs sont échangés par θ. Supposons maintenant que $n = 4$ et que Γ_k agisse par un homomorphisme $\Gamma_k \to Aut(\mathcal{D})$ dont l'image contient un élément d'ordre 3. En calculant les termes $x_{*,\mathcal{O}}$, l'argument de la preuve de (1) montre que les orbites conservées par l'action galoisienne sont celles paramétrées par les partitions

$$(2) \qquad (71), (53), (3^2 1^2), (32^2 1), (2^2 1^4), (1^8).$$

3.2 Orbites nilpotentes et groupe G

3.2.1 Orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}$

Dans la sous-section 3.2, on suppose que G est défini et quasi-déployé sur F, qu'il est adjoint et absolument simple. On impose comme toujours la condition $(Hyp)_1(p)$.

On effectue les constructions de 2.1.10, on introduit en particulier le groupe $\mathbf{G}$. Il est défini sur $\mathbb{F}_q$ et est muni d'une action algébrique de I_F qui se quotiente en une action de I_F^{mod}. Les groupes Γ_F et I_F agissent sur $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ et on définit les sous-ensembles d'invariants $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$ et $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}$. On se gardera de croire qu'une orbite $\boldsymbol{\mathcal{O}} \in (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}$ contient toujours un élément fixé par I_F. Par contre, on a

(1) pour $\boldsymbol{\mathcal{O}} \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$, $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ est conservée par I_F si et seulement si la classe de sous-groupe à un paramètre $x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}}$ contient un élément fixé par I_F.

Si $x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}}$ contient un élément fixé par I_F, cette classe est conservée par I_F. Puisque $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ est déterminée par $x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}}$, $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ est elle-aussi conservée par I_F. Inversement, supposons $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ conservée par I_F. Identifions $x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}}$ à son unique représentant dans $X_*(\mathbf{T}_{sc})$ qui vérifie les conditions de Dynkin $< \alpha, x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}} > \in \{0, 1, 2\}$ pour tout $\alpha \in \Delta$. La classe de conjugaison de $x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}}$ est conservée par I_F. Pour $\sigma \in I_F$, $\sigma(x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}})$ est donc conjugué à $x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}}$. Puisque Δ est conservé par I_F, $\sigma(x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}})$ vérifie aussi les conditions de Dynkin. Les deux éléments $x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}}$ et $\sigma(x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}})$ sont deux éléments de la chambre positive fermée qui sont conjugués. Ils sont donc égaux. Donc $x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}}$ est fixé par I_F. Cela prouve (1).

L'interprétation en termes d'éléments $x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}}$ permet d'appliquer les mêmes arguments qu'en 3.1.7. On obtient

(2) si G est déployé sur F ou si G n'est pas de type D_n, toute orbite nilpotente dans $\mathfrak{g}$ est conservée par l'action de Γ_F ;

(3) supposons que G est de type D_n et que Γ_F, resp. I_F, agit sur $\mathcal{D}$ par un homomorphisme surjectif $\Gamma_F \to \{1, \theta\}$, resp. $I_F \to \{1, \theta\}$; alors $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$, resp. $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}$, est formé des orbites paramétrées par une partition $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n)$ possédant au moins un terme impair ;

(4) supposons que G est de type D_4 et que Γ_F, resp. I_F, agit sur $\mathcal{D}$ par un homomorphisme $\Gamma_F \to Aut(\mathcal{D})$, resp. $I_F \to Aut(\mathcal{D})$ dont l'image contient un élément d'ordre 3 ; alors $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$, resp. $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}$, est l'ensemble décrit en 3.1.7(2).

3.2.2 L'application $\iota_{\mathcal{F},nil}$

L'hypothèse que G est adjoint implique que l'application $a_T : \mathbb{T}^{nr} \to App_{F^{nr}}(T^{nr})$ est injective. On a défini une application $j_T : \mathbb{T}^{nr} \to \mathbf{T}$. On note $\mathbf{j}_T : a_T(\mathbb{T}^{nr}) \to \mathbf{T}$ l'application $j_T \circ a_T^{-1}$.

Soit $\mathcal{F}$ une facette de l'appartement $App_{F^{nr}}(T^{nr})$. On a défini l'homomorphisme injectif $\iota_{\mathcal{F}} : \mathfrak{g}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{g}$, cf. 2.1.11. Il s'en déduit une application $\iota_{\mathcal{F},nil} : \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}/conj \to \mathfrak{g}_{nil}/conj$. Fixons un élément $x \in a_T(\mathbb{T}^{nr}) \cap \mathcal{F}$. L'image de $\iota_{\mathcal{F}}$ est l'ensemble des points fixes de $Ad(\mathbf{j}_T(x)) \circ \gamma$ dans $\mathfrak{g}$ (γ est l'élément de I_F^{mod} fixé en 2.1.10). On en déduit que $\iota_{\mathcal{F},nil}$ prend ses valeurs dans $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}$. Soit $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}/conj$, posons $\boldsymbol{\mathcal{O}} = \iota_{\mathcal{F},nil}(\mathcal{O})$. Notons $W_{\mathcal{F}}$ le groupe de Weyl de $G_{\mathcal{F}}$, qui s'identifie par $\iota_{\mathcal{F}}$ à un sous-groupe de W. Puisque $X_*(T_{\mathcal{F}}) \simeq X_*(T^{nr}) \simeq X_*(\mathbf{T}^{nr}) \subseteq X_*(\mathbf{T})$, l'élément $x_{*,\mathcal{O}}$ peut être identifié à une classe de conjugaison par $W_{\mathcal{F}}$ dans $X_*(\mathbf{T}^{nr})$. L'élément $x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}}$ peut être identifié à une classe de conjugaison par W dans $X_*(\mathbf{T})$. En appliquant ce que l'on a dit en 3.1.3, $x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}}$ est la classe de conjugaison par W engendrée par $x_{*,\mathcal{O}}$.

Notons T_F le plus grand sous-tore de T déployé sur F. Soit $\mathcal{F}$ une facette de l'appartement $App(T_F) \subset Imm(G)$. Notons $\mathcal{F}^{nr}$ l'unique facette de l'appartement $App_{F^{nr}}(T^{nr})$ qui contient $\mathcal{F}$. On vient de définir l'application $\iota_{\mathcal{F}^{nr},nil} : \mathfrak{g}_{\mathcal{F}^{nr},nil}/conj \to (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}$. Le groupe $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ agit sur les ensembles de départ et d'arrivée. D'après 2.1.11(3), $\iota_{\mathcal{F}^{nr},nil}$ est équivariante pour ces actions. Puisque $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}} = \mathfrak{g}_{\mathcal{F}^{nr}}$, il y a une application naturelle $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj \to \mathfrak{g}_{\mathcal{F}^{nr},nil}/conj$. Notons $\iota_{\mathcal{F},nil}$ l'application composée. L'équivariance ci-dessus implique que $\iota_{\mathcal{F},nil}$ envoie $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj$ dans $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$.

3.2.3 Description de $\iota_{\mathcal{F},nil}$ dans le cas ramifié

Dans ce paragraphe, on suppose que G n'est pas déployé sur F^{nr}. On considère un sommet $s \in S(\bar{C}^{nr})$ et on se propose de décrire l'application $\iota_{s,nil}$. On reprend les notations (A_{n-1}, ram) etc... introduites en 2.2.14.

Supposons d'abord que G est de type (A_{n-1}, ram). L'ensemble $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ est en bijection avec $\mathcal{P}(n)$. Tout élément est conservé par I_F. Si n est impair, le groupe $G_{s,SC}$ est produit de deux groupes de type $C_{n'}$ et $B_{n''}$ avec $2(n'+n'')+1 = n$. L'ensemble $\mathfrak{g}_{s,nil}/conj$ est en bijection avec $\mathcal{P}^{symp}(2n') \times \mathcal{P}^{orth}(2n''+1)$. L'application $\iota_{s,nil}$ est la réunion des deux partitions. Si n est pair, le groupe $G_{s,SC}$ est produit de deux groupes de type $C_{n'}$ et $D_{n''}$ avec $2(n'+n'') = n$. L'ensemble $\mathfrak{g}_{s,nil}/conj$ s'envoie surjectivement sur $\mathcal{P}^{symp}(2n') \times \mathcal{P}^{orth}(2n'')$. L'application $\iota_{s,nil}$ est composée de cette surjection et de la réunion des partitions.

Supposons maintenant que G est de type (D_n, ram). L'ensemble $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ s'envoie surjectivement sur $\mathcal{P}^{orth}(2n)$ et $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}$ est l'image réciproque du sous-ensemble des partitions $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n)$ ayant au moins un terme impair. En fait, $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}$ est en bijection avec cet ensemble de partitions. Le groupe $G_{s,SC}$ est produit de deux groupes de type $B_{n'}$ et $B_{n''}$ avec $n'+n'' = n-1$. L'ensemble $\mathfrak{g}_{s,nil}/conj$ est en bijection avec $\mathcal{P}^{orth}(2n'+1) \times \mathcal{P}^{orth}(2n''+1)$. L'application $\iota_{s,nil}$ est la réunion des deux partitions.

Les deux derniers cas sont $(D_4, 3-ram)$ et (E_6, ram). La description est moins élémentaire. On munit $X_*(T)$ du produit scalaire habituel pour lequel le carré de la norme d'une coracine vaut 2 (ces coracines sont de même norme dans les deux cas). Il s'en déduit des produits scalaires sur $X_*(T_s)$ et $X_*(\mathbf{T})$. Pour une orbite nilpotente $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{g}_s$, resp. $\mathfrak{g}$, la norme $||x_{*,\mathcal{O}}||$ est donc définie. D'après 3.1.3(1), l'application $\iota_{s,nil}$ conserve cette norme. Il s'avère que, dans les deux cas, pour $\boldsymbol{\mathcal{O}} \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$, la norme de $x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}}$ suffit à déterminer $\boldsymbol{\mathcal{O}}$. Le calcul des éléments $x_{*,\mathcal{O}}$ et de leurs normes suffit donc à déterminer

la correspondance.

Supposons que G est de type $(D_4, 3-ram)$. Pour $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$, on calcule $x_{*,\mathcal{O}}$ sous la forme de Dynkin. L'orbite $\mathcal{O}$ est conservée par I_F si et seulement si $x_{*,\mathcal{O}}$ est fixé par θ_3, cf. 3.1.7. Dans le tableau suivant, la première colonne décrit les éléments de $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}$ en termes de partitions. La deuxième colonne décrit les valeurs du carré de la norme des $x_{*,\mathcal{O}}$. Les trois colonnes suivantes décrivent les éléments de $\mathfrak{g}_{s,nil}/conj$ pour les trois sommets possibles. Ces sommets sont indiqués à la première ligne par l'élément de Δ_a^{nr} auquel ils correspondent et, à la deuxième ligne, par le type du groupe $G_{s,SC}$. Selon l'usage, la différence entre $\tilde{A}_1$ et A_1 signifie que la racine de la composante $\tilde{A}_1$ est courte tandis que celle de la composante A_1 est longue (les racines d'une composante A_2 sont courtes mais il n'y a pas d'ambiguïté possible). Les orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}_{s,nil}/conj$ sont placées sur la ligne de leur image dans $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ par $\iota_{s,nil}$. Dans les deux dernières colonnes, les composantes de $G_{s,SC}$ sont classiques et les orbites nilpotentes sont paramétrées par des partitions, plus exactement par des paires de partitions en ce qui concerne la quatrième colonne. Pour la troisième colonne, le groupe $G_{s,SC}$ est de type G_2 et on utilise pour ses orbites les notations de [7] p. 427.

$\mathcal{O}$	$\|\|x_{*,\mathcal{O}}\|\|^2$	β_0	β_{134}	β_2
		G_2	$\tilde{A}_1 \times A_1$	A_2
71	56	G_2		
53	24			3
$3^2 1^2$	8	$G_2(a_1)$	$(2,2)$	
$32^2 1$	6	$\tilde{A}_1$	$(2,1^2)$	21
$2^2 1^4$	2	A_1	$(1^2,2)$	
1^8	0	1	$(1^2,1^2)$	1^3

Supposons que G est de type (E_6, ram). On obtient alors le tableau suivant, qui s'explique comme le précédent. Remarquons qu'il s'avère que tout élément de $\mathfrak{g}_{nil}/conj$

est fixé par I_F.

$\mathcal{O}$	$\|\|x_{*,\mathcal{O}}\|\|^2$	β_0	β_{16}	β_{35}	β_4	β_2
		F_4	$A_1 \times B_3$	$\tilde{A}_2 \times A_2$	$A_3 \times A_1$	C_4
E_6	312	F_4				
$E_6(a_1)$	168					8
D_5	120	$F_4(a_1)$				
$E_6(a_3)$	72	$F_4(a_2)$				62
A_5	70	C_3				61^2
$D_5(a_1)$	60		$(2,7)$			
D_4	56	B_3	$(1^2,7)$			
A_4+A_1	42				$(4,2)$	
A_4	40				$(4,1^2)$	4^2
$D_4(a_1)$	24	$F_4(a_3)$	$(2,51^2)$	$(3,3)$		42^2
A_3+A_1	22	$C_3(a_1)$				421^2
A_3	20	B_2	$(1^2,51^2)$			41^4
$2A_2+A_1$	18	$\tilde{A}_2+A_1$		$(3,21)$	$(31,2)$	3^22
$2A_2$	16	$\tilde{A}_2$		$(3,1^3)$	$(31,1^2)$	3^21^2
A_2+2A_1	12	$A_2+\tilde{A}_1$	$(2,3^21)$	$(21,3)$		
A_2+A_1	10		$(2,32^2)$		$(2^2,2)$	
A_2	8	A_2	$(2,31^4),(1^2,3^21)$	$(1^3,3)$	$(2^2,1^2)$	2^4
$3A_1$	6	$A_1+\tilde{A}_1$	$(2,2^21^3),(1^2,32^2)$	$(21,21)$	$(21^2,2)$	2^31^2
$2A_1$	4	$\tilde{A}_1$	$(2,1^7),(1^2,31^4)$	$(21,1^3)$	$(21^2,1^2)$	2^21^4
A_1	2	A_1	$(1^2,2^21^3)$	$(1^3,21)$	$(1^4,2)$	21^6
1	0	1	$(1^2,1^7)$	$(1^3,1^3)$	$(1^4,1^2)$	1^8

3.2.4 Les ensembles $A^+(N)$, $\tilde{A}(N)$, $\bar{A}^+(N)$ et $\tilde{\bar{A}}(N)$

On note F^G l'extension de F^{nr} telle que Γ_{F^G} soit le noyau de l'action de $\Gamma_{F^{nr}}$ sur $\mathcal{D}$. On pose $e^G = [F^G : F^{nr}]$. On a introduit un générateur γ de I_F^{mod}, cf. 2.1.10. Son image dans $\Gamma_{F^G/F^{nr}}$ est un générateur de ce groupe fini. Pour ne pas compliquer les notations, on note encore γ cette image.

Le groupe $\Gamma_{F^G/F^{nr}}$ agit par automorphismes algébriques sur $\mathbf{G}$, on peut définir le groupe $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G} \rtimes \Gamma_{F^G/F^{nr}}$, non connexe si $F^G \neq F^{nr}$. On note $\tilde{\mathbf{G}}$ le sous-ensemble $\mathbf{G}\gamma$ de $\mathbf{G}^+$.

Soit $N \in \mathfrak{g}_{nil}$. Le groupe $Z_{\mathbf{G}^+}(N)$ coupe toute composante connexe de $\mathbf{G}^+$ si et seulement si l'orbite de N est conservée par I_F. On suppose qu'il en est ainsi. Remarquons que la structure de $Z_{\mathbf{G}^+}(N)$ ne change pas si l'on remplace N par un élément conjugué à N par un élément de $\mathbf{G}$: cet élément conjugue aussi les commutants. Les groupes $Z_{\mathbf{G}}(N)$ et $Z_{\mathbf{G}}(N)^0$ sont des sous-groupes distingués de $Z_{\mathbf{G}^+}(N)$. On pose $A^+(N) = Z_{\mathbf{G}^+}(N)/Z_{\mathbf{G}}(N)^0$. On pose $Z_{\tilde{\mathbf{G}}}(N) = \tilde{\mathbf{G}} \cap Z_{\mathbf{G}^+}(N)$ et $\tilde{A}(N) = Z_{\tilde{\mathbf{G}}}(N)/Z_{\mathbf{G}}(N)^0$. On a une suite exacte

$$(1) \qquad 1 \to A(N) \to A^+(N) \to \Gamma_{F^G/F^{nr}} \to 1$$

Dans le cas où N lui-même est fixé par I_F, le sous-groupe $\Gamma_{F^G/F^{nr}}$ de $\mathbf{G}^+$ est contenu dans $A^+(N)$ et de la suite exacte ci-dessus se déduit un isomorphisme

$$(2) \qquad A^+(N) \simeq A(N) \rtimes \Gamma_{F^G/F^{nr}}.$$

Le groupe $\Gamma_F^{nr} \simeq \Gamma_{\mathbb{F}_q}$ agit sur $\mathbf{G}$ et sur $\Gamma_{F^G/F^{nr}}$. Il en résulte une action sur $\mathbf{G}^+$. Supposons comme ci-dessus que l'orbite de N soit conservée par l'action de I_F et que N soit fixé par l'action de Γ_F^{nr}. Alors l'action de Γ_F^{nr} sur $\mathbf{G}^+$ conserve le sous-groupe $Z_{\mathbf{G}^+}(N)$ et cette action se descend en une action sur $A^+(N)$.

Remarque. L'action sur I_F^{mod} de l'élément de Frobenius $Fr \in \Gamma_F^{nr}$ est l'élévation à la puissance q. Si G n'est pas du type $(D_4, 3-ram)$, on a $e_G = 1$ ou 2 et cette action se quotiente en l'action triviale sur $\Gamma_{F^G/F^{nr}}$. Alors l'action de Γ_F^{nr} sur $A^+(N)$ conserve le sous-ensemble $\tilde{A}(N)$. Il en est de même si G est de type $(D_4, 3-ram)$ et que $q \equiv 1 \, mod \, 3\mathbb{Z}$. Par contre, si G est de type $(D_4, 3-ram)$ et que $q \equiv 2 \, mod \, 3\mathbb{Z}$, le sous-ensemble $\tilde{A}(N)$ n'est pas conservé par l'action de Γ_F^{nr}.

Lemme. *Soit $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$, supposons $\mathcal{O}$ conservée par Γ_F.*

(i) Supposons que G est déployé sur F^{nr}. On a $A^+(N) = A(N)$. Il existe $N \in \mathcal{O}$ qui est fixé par Γ_F et tel que l'action de Γ_F^{nr} sur $A(N)$ soit triviale.

(ii) Supposons que G soit des types (A_{n-1}, ram), $(D_4, 3-ram)$ ou (E_6, ram). Si $A(N) = \{1\}$, il existe $N \in \mathcal{O}$ qui est fixé par Γ_F^{nr} et on a $A^+(N) \simeq \Gamma_{F^G/F^{nr}}$. Si $A(N) \neq \{1\}$, il existe $N \in \mathcal{O}$ qui est fixé par Γ_F, pour lequel le produit semi-direct (2) est direct et l'action de Γ_F^{nr} sur $A(N)$ est triviale.

(iii) Supposons que G soit de type (D_n, ram). Alors il existe $N \in \mathcal{O}$ qui est fixé par Γ_F^{nr}. Pour un tel N, l'action de Γ_F^{nr} sur $A^+(N)$ est triviale. Les groupes $A(N)$ et $A^+(N)$ sont des produits de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on a non canoniquement $A^+(N) \simeq A(N) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Preuve. Supposons que G soit déployé sur F^{nr}. On a $F^G = F^{nr}$ et $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}$, d'où $A^+(N) = A(N)$ pour tout $N \in \mathcal{O}$. Il est connu que, $\mathcal{O}$ étant conservé par $\Gamma_F^{nr} = \Gamma_{\mathbb{F}_q}$, il existe un élément $N \in \mathcal{O}$ qui est fixé par l'action de ce groupe et tel que l'action sur $A(N)$ est triviale, cf. [41] proposition 2.4. Cela prouve (i).

Supposons que G soit des types (A_{n-1}, ram), $(D_4, 3-ram)$ ou (E_6, ram). Si $A(N) = \{1\}$, on a évidemment $A^+(N) \simeq \Gamma_{F^G/F^{nr}}$ pour tout $N \in \mathcal{O}$. Puisque $\mathcal{O}$ est fixée par $\Gamma_{F^{nr}}$, cette orbite contient un élément N fixé par ce groupe. On traite maintenant les $\mathcal{O}$ tels que $A(N) \neq \{1\}$ pour $N \in \mathcal{O}$. Cela exclut le cas où G est de type (A_{n-1}, ram).

Supposons que G soit de type $(D_4, 3-ram)$. Il existe une unique orbite $\mathcal{O}$ pour laquelle $A(N) \neq \{1\}$ pour $N \in \mathcal{O}$: elle est paramétrée par la partition $(3^2 1^2)$. On a vu en 3.2.3 que l'orbite provenait par $\iota_{s_0,nil}$ d'une unique orbite de $\mathfrak{g}_{s_0,nil}$. On a identifié $\mathbf{G}$ à G_{s_0,F^G} et ι_{s_0} est le plongement naturel $G_{s_0} \to G_{s_0,F^G}$. Le groupe G_{s_0} est la composante neutre du groupe des points fixes par I_F dans $\mathbf{G}$. L'intersection $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}_{s_0}$ est une orbite pour le groupe G_{s_0} et est conservée par Γ_F^{nr}. Comme ci-dessus, elle contient un élément N fixé par ce groupe. L'élément N est aussi fixé par I_F, donc par tout le groupe Γ_F. On a $A(N) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et l'action de Γ_F^{nr} sur ce groupe est forcément triviale. D'après (2), $A^+(N)$ est un produit semi-direct $A(N) \rtimes \Gamma_{F^G/F^{nr}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Un tel produit semi-direct est forcément le produit direct des deux groupes, d'où l'assertion (ii) dans ce cas.

Supposons que G soit de type (E_6, ram). Il existe seulement trois orbites $\mathcal{O}$ pour lesquelles $A(N) \neq \{1\}$ pour $N \in \mathcal{O}$: ce sont les orbites A_2 et $E_6(a_3)$ pour lesquelles $A(N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $N \in \mathcal{O}$ et $D_4(a_1)$ pour laquelle $A(N) = \mathfrak{S}_3$. On a vu en 3.2.3 que chacune de ces orbites provenait par $\iota_{s_0,nil}$ d'une unique orbite de $\mathfrak{g}_{s_0,nil}$. Dans le cas des orbites A_2 et $E_6(a_3)$, le même raisonnement que dans le cas $(D_4, 3-ram)$ conclut. Considérons le cas de l'orbite $D_4(a_1)$. Elle provient par $\iota_{s_0,nil}$ de l'orbite $\mathcal{O}_0$ de type $F_4(a_3)$ de $\mathfrak{g}_{s_0}$. Comme toujours, on affecte d'un exposant G_{s_0} les objets relatifs à ce groupe. Par le même argument que dans le cas où G est déployé sur F^{nr}, on peut fixer $N \in \mathcal{O}_0$ qui est fixé par Γ_F^{nr} et tel que ce groupe agisse trivialement sur $A^{G_{s_0}}(N)$. L'action de I_F

sur ces objets est triviale puisqu'ils vivent dans G_{s_0}. Fixons un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f,h,N) de $\mathfrak{g}_{s_0}$. Le groupe G_{s_0} est de type F_4 donc adjoint et on a $A^{G_{s_0}}(N) = Z_{G_{s_0}}(N)/Z_{G_{s_0}}(N)^0 = Z_{G_{s_0}}(f,h,N)/Z_{G_{s_0}}(f,h,N)^0$. On a aussi $A(N) = Z_{\mathbf{G}}(f,h,N)/Z_{\mathbf{G}}(f,h,N)^0$. De l'injection $Z_{G_{s_0}}(f,h,N) \to Z_{\mathbf{G}}(f,h,N)$ se déduit un homomorphisme $A^{G_{s_0}}(N) \to A(N)$, dont le noyau est $(Z_{\mathbf{G}}(f,h,N)^0) \cap G_{s_0})/Z_{G_{s_0}}(f,h,N)^0$. D'après [7] pages 401-402, $A^{G_{s_0}}(N)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ et $Z_{\mathbf{G}}(f,h,N)^0$ est commutatif. Il en résulte que le noyau de l'homomorphisme $A^{G_{s_0}}(N) \to A(N)$ est un sous-groupe commutatif de $A^{G_{s_0}}(N)$. Or un sous-groupe commutatif de $\mathfrak{S}_4$ a au plus 4 éléments. Il en résulte que l'homomorphisme $A^{G_{s_0}}(N) \to A(N)$ est surjectif. Puisque l'action de Γ_F^{nr} sur $A^{G_{s_0}}(N)$ est triviale, il en est de même de l'action de ce groupe sur $A(N)$. Alors N vérifie les conclusions du (ii) de l'énoncé.

Supposons que G est de type (D_n, ram). On peut choisir un espace sur $\mathbb{F}_q$ muni d'une forme quadratique de sorte qu'en notant $\mathbf{SO}$ son groupe spécial orthogonal, on ait $\mathbf{SO}_{AD} = \mathbf{G}$ et que l'action de $\gamma \in I_F$ sur $\mathbf{G}$ se déduise par passage au quotient de l'action d'une symétrie simple $S(\gamma)$ qui est définie sur $\mathbb{F}_q$. Introduisons le groupe orthogonal tout entier $\mathbf{O}$ de notre forme quadratique. Alors $\mathbf{G}^+$ s'identifie au quotient de $\mathbf{O}$ par le centre de $\mathbf{SO}$, l'élément $S(\gamma)$ s'envoyant sur $\gamma \in \Gamma_{F^G/F^{nr}}$. Cette identification est compatible aux actions de Γ_F^{nr}. Pour tout $N \in \mathfrak{g}_{nil}$, le groupe $A^+(N)$ s'identifie à $Z_{\mathbf{O}}(N)/Z(\mathbf{SO})Z_{\mathbf{SO}}(N)^0$. Des constructions d'algèbre élémentaire montrent les points suivants :

le groupe $A^+(N)$ est commutatif et isomorphe à un produit de copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

si N est fixé par Γ_F^{nr}, l'action de Γ_F^{nr} sur $A(N)$ est triviale ;

pour toute orbite $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ conservée par Γ_F^{nr}, il existe un élément $N \in \boldsymbol{\mathcal{O}}$ qui est fixé par Γ_F^{nr}.

L'assertion (iii) s'en déduit.

□

Remarques. (3) Supposons que G est de type (D_n, ram). Soit $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n)$. Dire que λ paramètre une orbite conservée par I_F signifie que λ possède au moins un terme impair. Supposons cette condition vérifiée. L'interprétation donnée dans la preuve ci-dessus du groupe $A^+(\lambda)$ montre que ce groupe est égal à $\{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1, \xi(\lambda)\}$ et $\tilde{A}(\lambda) = \{\pm 1\}_{-1}^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1, \xi(\lambda)\}$.

(4) Une version affaiblie du lemme s'applique aux orbites $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ conservées seulement par I_F. En effet, pour une telle orbite, il existe une extension finie non ramifiée F' de F telle que $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ soit conservée par $\Gamma_{F'}$ et on peut appliquer le lemme en remplaçant le corps de base F par F'.

Soit $N \in \mathfrak{g}_{nil}$ un élément dont l'orbite est conservée par I_F. On a introduit en 3.1.4 le sous-groupe distingué $A^1(N) \subset A(N)$. Il est aussi distingué dans $A^+(N)$. En effet, cette assertion est invariante par conjugaison par $\mathbf{G}$ et elle est vérifiée pour un élément N vérifiant les conditions du lemme ci-dessus. On peut donc définir sans ambiguïté le quotient $\bar{A}^+(N) = A^+(N)/A^1(N)$ et le sous-ensemble $\tilde{\bar{A}}(N) = \tilde{A}(N)/A^1(N)$. Montrons que

(5) soit $d \in \tilde{\bar{A}}(N)$; alors il existe $b \in \tilde{A}(N)$ dont l'image dans $\tilde{\bar{A}}(N)$ soit d et tel que l'image dans $\bar{A}(N)$ de $Z_{A(N)}(b)$ soit égale à $Z_{\bar{A}(N)}(d)$.

Preuve. Si G est classique, le lemme précédent implique que $A^+(N)$ est commutatif. Pour tout relèvement b de d dans $\tilde{A}(N)$, on a $Z_{A(N)}(b) = A(N)$ et ce groupe se projette surjectivement sur $\bar{A}(N)$. Supposons G exceptionnel. Si $\bar{A}(N) = A(N)$, l'assertion est tautologique. Si $\bar{A}(N) = \{1\}$, pour tout relèvement b de d dans $\tilde{A}(N)$, $Z_{A(N)}(b)$ se

projette surjectivement sur $\bar{A}(N)=\{1\}$. Comme on l'a dit en 3.1.6, l'une ou l'autre des hypothèses ci-dessus est toujours vérifiée sauf dans le cas où G est de type E_8. Dans ce cas, il existe un N tel que $A(N)=\mathfrak{S}_3$ et $\bar{A}(N)=\mathfrak{S}_2$. Le groupe G est forcément déployé donc $\tilde{A}(N)=A(N)$. On peut relever d en un élément b d'ordre au plus 2. Alors $Z_{A(N)}(b)$ se projette surjectivement sur $\bar{A}(N)$. $\square$

On introduit un ensemble de représentants $\mathcal{N}$ de $\mathfrak{g}_{nil}/conj$. On lui impose les conditions suivantes :

(6)(i) pour $\boldsymbol{\mathcal{O}}\in(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}$, le représentant $N\in\mathcal{N}$ de $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ vérifie les conditions du lemme précédent où l'on oublie celles conditions concernant les actions de Γ_F^{nr} ;

(6)(ii) pour $\boldsymbol{\mathcal{O}}\in(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$, le représentant $N\in\mathcal{N}$ de $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ vérifie toutes les conditions du lemme précédent.

On note $\mathcal{N}(I_F)$, resp. $\mathcal{N}(\Gamma_F)$, le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{N}$ dont l'orbite est conservée par I_F, resp. Γ_F. Remarquons qu'un élément de $\mathcal{N}(I_F)$, resp. $\mathcal{N}(\Gamma_F)$, n'est pas toujours fixé par I_F, resp. Γ_F. Par contre, tout élément de $\mathcal{N}(\Gamma_F)$ est fixé par Γ_F^{nr}.

3.2.5 Sur le relèvement des commutants

Fixons $N\in\mathfrak{g}_{nil}$ dont l'orbite est conservée par I_F. Fixons un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f,h,N) de $\mathfrak{g}$ dont le troisième terme est N. Posons $\mathbf{Z}=Z_{\mathbf{G}}(f,h,N)$, $\mathbf{Z}^+=Z_{\mathbf{G}^+}(f,h,N)$ et $\tilde{\mathbf{Z}}=Z_{\tilde{\mathbf{G}}}(f,h,N)$. On a $A(N)=\mathbf{Z}/\mathbf{Z}^0$, $A^+(N)=\mathbf{Z}^+/\mathbf{Z}^0$ et $\tilde{A}(N)=\tilde{\mathbf{Z}}/\mathbf{Z}^0$.

Lemme. *(i) Supposons que G ne soit pas de type B_n, (D_n,nr) ou (D_n,ram). Soit $b\in\tilde{A}(N)$. Alors il existe un élément semi-simple $\tau\in\tilde{\mathbf{Z}}$ dont l'image dans $\tilde{A}(N)$ est égale à b et tel que l'image dans $A(N)$ de $\mathbf{Z}\cap\mathbf{G}_\tau$ soit égale à $Z_{A(N)}(b)$ (on a posé $\mathbf{G}_\tau=Z_{\mathbf{G}}(\tau)^0$).*

(ii) Soit $d\in\tilde{\bar{A}}(N)$. Alors il existe un élément semi-simple $\tau\in\tilde{\mathbf{Z}}$ dont l'image dans $\tilde{\bar{A}}(N)$ est égale à d et tel que l'image dans $\bar{A}(N)$ de $\mathbf{Z}\cap\mathbf{G}_\tau$ soit égale à $Z_{\bar{A}(N)}(d)$.

Preuve. Les assertions sont insensibles à la conjugaison de notre $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (et conséquemment de N) par un élément de $\mathbf{G}$. On se réserve donc le droit de choisir convenablement ces objets.

Traitons (i). Il existe un élément semi-simple $\tau\in\tilde{\mathbf{Z}}$ dont l'image dans $\tilde{A}(N)$ est égale à b. En effet, fixons une paire de Borel $(\mathbf{B}_N,\mathbf{T}_N)$ de $\mathbf{Z}^0$. Puisque toutes les paires de Borel de ce groupe sont conjuguées, toute composante connexe de $A^+(N)$ contient un élément dont l'action par conjugaison sur $\mathbf{Z}^0$ conserve $(\mathbf{B}_N,\mathbf{T}_N)$. Un tel élément est semi-simple. Si $A(N)=\{1\}$, cela suffit à prouver (i). Cela résout le cas où G est de type A_{n-1}.

Supposons que G soit de type C_n. L'élément N est paramétré par une partition $\lambda\in\mathcal{P}^{symp}(2n)$ et b appartient à $\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1,\xi(\lambda)\}$. On relève b en un élément $\dot{b}=(\dot{b}_i)_{i\in Jord_{bp}(\lambda)}\in\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$. Notons λ' la partition telle que, pour tout entier $i\geq1$, $mult_{\lambda'}(i)=1$ si $i\in Jord_{bp}(\lambda)$ et $\dot{b}_i=-1$ et $mult_{\lambda'}(i)=0$ sinon. Notons λ'' l'unique partition telle que $\lambda'\cup\lambda''=\lambda$. Les entiers $S(\lambda')$ et $S(\lambda'')$ sont pairs, notons-les $2n'$ et $2n''$. On a $\lambda'\in\mathcal{P}^{symp}(2n')$ et $\lambda''\in\mathcal{P}^{symp}(2n'')$. On peut fixer un élément semi-simple $\tau\in\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{G}_{\tau,SC}$ soit isomorphe à $Sp(2n')\times Sp(2n'')$. Notons cette décomposition $\mathbf{G}'\times\mathbf{G}''$. Fixons des $\mathfrak{sl}(2)$-triplets (f',h',N') de $\mathfrak{g}'$ et (f'',h'',N'') de $\mathfrak{g}''$ tels que N', resp. N'', soit paramétré par λ', resp. λ''. On peut supposer que (f,h,N) est la somme de ces deux triplets. On a alors $\tau\in\mathbf{Z}$ et on vérifie que son image dans $A(N)$ est égale à b. Le groupe $Z_{\mathbf{G}'}(f',h',N')\times Z_{\mathbf{G}''}(f'',h'',N'')$ s'envoie dans $\mathbf{Z}$, son image est égale à $\mathbf{Z}\cap\mathbf{G}_\tau$ et on vérifie qu'il s'envoie surjectivement sur $A(N)$. Cela vérifie (i).

Supposons que G soit exceptionnel et déployé sur F^{nr}. Alors $A(N)=\tilde{A}(N)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_i$ pour un entier $i=1,...,5$. On a déjà traite le cas $i=1$. Si $A(N)=\mathfrak{S}_4$

ou $\mathfrak{S}_5$, on sait que G est de type E_8 ou F_4 donc est à la fois adjoint et simplement connexe. On sait aussi que $\mathbf{Z}^0 = 0$, cf. [7] pages 401 et 406, donc $\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} = A(N)$. On pose $\tau = b$. Il est évident que cet élément est semi-simple et que $\mathbf{Z} \cap Z_{\mathbf{G}}(\tau) = Z_{A(N)}(b)$. Puisque τ est semi-simple et que G est simplement connexe, le commutant $Z_{\mathbf{G}}(\tau)$ est connexe. L'égalité précédente équivaut donc à $\mathbf{Z} \cap \mathbf{G}_\tau = Z_{A(N)}(b)$. Supposons $A(N) = \mathfrak{S}_i$, avec $i = 2, 3$. Si $b = 1$, l'élément $\tau = 1$ vérifie les conditions requises. Si $b \neq 1$, $Z_{A(N)}(b)$ est le sous-groupe de $A(N)$ engendré par b. On choisit un élément semi-simple $\tau \in \tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}$ dont l'image dans $A(N)$ est égale à b. Parce que τ est semi-simple, il appartient à $\mathbf{G}_\tau$. Le groupe engendré par τ est donc contenu dans $\mathbf{Z} \cap \mathbf{G}_\tau$ et s'envoie surjectivement sur $Z_{A(N)}(b)$.

Supposons que G soit de type (E_6, ram). On a déjà traité le cas $A(N) = \{1\}$. Il nous reste à considérer les cas où l'orbite de N est de type A_2, $E_6(a_3)$ ou $D_4(a_1)$. Supposons que l'orbite de N soit de type $E_6(a_3)$ ou $D_4(a_1)$. On a vu dans la preuve de 3.2.3 que l'on pouvait supposer $N \in \mathfrak{g}_{s_0}$. On a alors $A^+(N) = A(N) \times \Gamma_{F^G/F^{nr}}$. On peut même supposer que le $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f, h, e) est contenu dans $\mathfrak{g}_{s_0}$. On note par des exposants G_{s_0} les objets relatifs au groupe G_{s_0}. Montrons que

(1) l'homomorphisme naturel $\mathbf{Z}^{G_{s_0}} \to A(N)$ est surjectif.

On l'a vu dans la preuve de 3.2.3 quand l'orbite de N dans $\mathfrak{g}$ est de type $D_4(a_1)$. Supposons que cette orbite est de type $E_6(a_3)$. L'orbite de N dans $\mathfrak{g}_{s_0}$ est de type $F_4(a_2)$. Il résulte de [7] p. 401-402 que $\mathbf{Z}^0 = \mathbf{Z}^{G_{s_0},0} = \{1\}$ et que $A(N) = A^{G_{s_0}}(N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donc $A(N) = \mathbf{Z}$, $A^{G_{s_0}}(N) = \mathbf{Z}^{G_{s_0}}$ et ces groupes ont deux éléments. Puisque l'homomorphisme $\mathbf{Z}^{G_{s_0}} \to \mathbf{Z}$ est injectif, il est surjectif, ce qui prouve (1).

Ecrivons $b = a\gamma$ avec $a \in A(N)$. Si $a = 1$, on pose $\tau = \gamma$. Par définition, on a $\mathbf{G}_\gamma = Z_{\mathbf{G}}(\gamma)^0 = G_{s_0}$, donc $\mathbf{Z}^{G_{s_0}}$ est égal à $\mathbf{Z} \cap \mathbf{G}_\tau$. D'après (1), τ vérifie la propriété requise. Si $a \neq 1$, on relève a grâce à (1) en un élément $x \in \mathbf{Z}^{G_{s_0}}$, que l'on peut supposer semi-simple par le même argument qu'au début de la preuve. On pose $\tau = x\gamma$. Cet élément est semi-simple car son carré vaut x^2 qui l'est. Notons X le groupe engendré par x. Parce que x est semi-simple, X est contenu dans $(G_{s_0})_x$. Ce dernier groupe commute à la fois à x et à γ (car il est contenu dans G_{s_0}) donc aussi à τ. Puisqu'il est connexe, on a $(G_{s_0})_x \subset \mathbf{G}_\tau$ puis $X \subset \mathbf{Z} \cap (G_{s_0})_x \subset \mathbf{Z} \cap \mathbf{G}_\tau$. Mais l'image de X dans $A(N)$ contient le groupe engendré par a. Ce groupe est le commutant de b dans $A(N)$ puisque $a \neq 1$ et que $A(N) = \mathfrak{S}_2$ ou $\mathfrak{S}_3$.

Supposons maintenant que l'orbite de N soit de type A_2. Posons $G'_{s_2} = \iota_{s_2}(G_{s_2})$ (on rappelle que s_2 est le sommet associé à la racine $\beta_2 \in \Delta_a^{nr}$). Il est de type C_4. D'après le tableau de 3.2.3, on peut supposer que N est un élément nilpotent de $\mathfrak{g}'_{s_2}$ paramétré par la partition 2^4. On peut supposer que notre $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f, h, N) est contenu dans $\mathfrak{g}_2$. Il n'est pas conservé par γ. Toutefois, par construction de l'application $\iota_{s_2,nil}$, il existe un élément $\delta \in \tilde{\mathbf{Z}}$ dont le commutant contient G'_{s_2}, à savoir $\delta = \mathbf{j}_T(s_2)\gamma$. Comme ci-dessus, on note avec des exposants G'_{s_2} les objets relatifs à ce groupe. Montrons que

(2) l'application naturelle $\mathbf{Z}^{G'_{s_2}} \to A(N)$ est surjective.

Le commutant de (f, h, e) dans $G_{2,SC}$ est bien connu : c'est le groupe orthogonal d'un espace de dimension 4. Posons $H = (SL(2) \times SL(2)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où l'élément non trivial ϵ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ permute les deux composantes $SL(2)$. Il y a une surjection de noyau fini de H sur le groupe orthogonal ci-dessus donc aussi une surjection de noyau fini $H \to \mathbf{Z}^{G'_{s_2}}$. On a $A(N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Supposons que l'application $\mathbf{Z}^{G'_{s_2}} \to A(N)$ ne soit pas surjective. On a alors $\mathbf{Z}^{G'_{s_2}} \subset \mathbf{Z}^0$. Or $\mathbf{Z}^0$ est un groupe de type $A_2 \times A_2$, cf. [7] page 402. On note

$\rho : H \to PGL(3) \times PGL(3)$ l'homomorphisme composé

$$H \to \mathbf{Z}^{G'_{s_2}} \to \mathbf{Z}^0 \to \mathbf{Z}^0_{AD} = PGL(3) \times PGL(3).$$

Le noyau de l'application $H \to \mathbf{Z}^0$ est fini et celui de l'application $\mathbf{Z}^0 \to \mathbf{Z}^0_{AD}$ a pour composante neutre un tore. Donc le noyau de ρ est un sous-groupe distingué de H dont la composante neutre est un tore. Un tel sous-groupe est fini et contenu dans H^0. Les représentations de $SL(2)$ sont bien connues et on voit qu'un homomorphisme de $SL(2) \times SL(2)$ dans $PGL(3)$ est forcément trivial sur un des facteurs $SL(2)$. On en déduit que, quite à permuter les facteurs $SL(2)$, la restriction de ρ à $H^0 = SL(2) \times SL(2)$ est de la forme $(h_1, h_2) \mapsto (\rho_1(h_1), \rho_2(h_2))$, où ρ_1 et ρ_2 sont des homomorphismes à noyau fini de $SL(2)$ dans $PGL(3)$. L'élément $\rho(\epsilon) \in PGL(3) \times PGL(3)$ doit vérifier $\rho(\epsilon)(\rho_1(h_1), \rho_2(h_2)) = (\rho_1(h_2), \rho_2(h_1))\rho(\epsilon)$. Un tel élément n'existe pas. Cette contradiction prouve (2).

Fixons un élément semi-simple $a \in \mathbf{Z}^{G'_{s_2}}$ d'image non triviale dans $A(N)$. On se rappelle l'élément $\delta = \mathbf{j}_T(s_2)\gamma$. Par construction, il y a un entier $n \in \mathbb{P}$ tel que $\delta^n = 1$. Donc δ est semi-simple. L'élément $a\delta \in \tilde{\mathbf{G}}$ est aussi semi-simple : puisque a et δ commutent, $(a\delta)^n = a^n$ est semi-simple. L'élément b est forcément l'image dans $\tilde{A}(N)$ de δ ou de $a\delta$. On choisit pour τ l'élément en question. Comme plus haut, on voit que le groupe engendré par a est contenu dans $\mathbf{Z} \cap \mathbf{G}_\tau$. Ce groupe s'envoie surjectivement dans $A(N)$ donc τ vérifie la condition requise.

Supposons que G soit de type $(D_4, 3-ram)$. On a déjà traité le cas $A(N) = \{1\}$. Il nous reste à considérer le cas où l'orbite de N est paramétrée par la partition $3^2 1^2$. On a vu en 3.2.3 que l'on pouvait supposer $N \in \mathfrak{g}_{s_0}$ et que l'orbite de N pour l'action de G_{s_0} est de type $G_2(a_1)$. On peut aussi supposer que le $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f, h, N) est contenu dans $\mathfrak{g}_{s_0}$. On sait que $\mathbf{Z}^{G_{s_0},0} = \{1\}$ et $A^{G_{s_0},0}(N) = \mathfrak{S}_3$, cf. [7] p. 401, donc $\mathbf{Z}^{G_{s_0}} = \mathfrak{S}_3$. Le groupe $\mathbf{Z}^0$ est commutatif. Donc l'image de $\mathbf{Z}^{G_{s_0}}$ dans $\mathbf{Z}$ n'est pas contenue dans $\mathbf{Z}^0$, donc l'application naturelle $\mathbf{Z}^{G_{s_0}} \to A(N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est surjective. On peut alors construire τ comme dans le cas où G est de type (E_6, ram). Cela achève la preuve de (i).

Traitons (ii). Supposons que G ne soit pas de type B_n, (D_n, nr) ou (D_n, ram). On relève d en un élément $b \in \tilde{A}(N)$ vérifiant la condition 3.2.4(5), puis on applique (i) à cet élément. L'élément τ que l'on obtient vérifie la condition requise.

Supposons que G soit de type B_n. Identifions G à un groupe spécial orthogonal $SO(2n+1)$. L'élément N est paramétré par une partition $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n+1)$ et on a $d = (d_i)_{i \in Int(\lambda)} \in \{\pm 1\}_1^{Int(\lambda)}$. Si $d = 1$, l'élément $\tau = 1$ convient. Supposons $d \neq 1$. Notons $\delta : Jord_{bp}(\lambda) \to Int(\lambda)$ l'application qui, à $i \in Jord_{bp}(\lambda)$, associe l'intervalle qui contient i. Notons K' l'ensemble des $\Delta \in Int(\lambda)$ tels que $d_i = -1$ et fixons un sous-ensemble $J' \subset Jord_{bp}(\lambda)$ tel que δ se restreigne en une bijection de J' sur K'. Notons λ' la partition telle que, pour tout entier $i \geq 1$, $mult_{\lambda'}(i) = 1$ si $i \in J'$ et $mult_{\lambda'}(i) = 0$ sinon. Notons λ'' l'unique partition telle que $\lambda' \cup \lambda'' = \lambda$. Parce que d appartient à $\{\pm 1\}_1^{Int(\lambda)}$, on voit que $S(\lambda')$ est pair, donc $S(\lambda'')$ est impair. On note ces entiers $2n'$ et $2n''+1$. On a $\lambda' \in \mathcal{P}^{orth}(2n')$ et $\lambda'' \in \mathcal{P}^{orth}(2n''+1)$. On peut fixer $\tau \in \mathbf{G}$ tel que $\mathbf{G}_\tau$ soit isomorphe à $SO(2n') \times SO(2n''+1)$. Notons cette décomposition $\mathbf{G}' \times \mathbf{G}''$. Fixons des $\mathfrak{sl}(2)$-triplets (f', h', N') de $\mathfrak{g}'$ et (f'', h'', N'') de $\mathfrak{g}''$ tels que N', resp. N'', soit paramétré par λ', resp. λ''. On peut supposer que (f, h, N) est la somme de ces deux triplets. On a alors $\tau \in \mathbf{Z}$ et on vérifie que son image dans $\bar{\tilde{A}}(N) = \bar{A}(N)$ est égale à d. On introduit les groupes $\mathbf{Z}'$ et $\mathbf{Z}''$ analogues à $\mathbf{Z}$, relatifs aux triplets (f', h', N') et (f'', h'', N''). On a $\mathbf{Z}' \times \mathbf{Z}'' \subset \mathbf{Z} \cap \mathbf{G}_\tau$. Il reste à prouver que

(3) $\mathbf{Z}' \times \mathbf{Z}''$ s'envoie surjectivement sur $\bar{A}(N)$.

On a $Jord_{bp}(\lambda') = J'$ et $\delta(J') = K'$. Posons $K'' = \delta(Jord_{bp}(\lambda''))$. L'application de $\mathbf{Z}'$ dans $\bar{A}(N)$ se décompose en une suite d'applications

$$\mathbf{Z}' \to \mathbf{Z}'/\mathbf{Z}'^0 = \{\pm 1\}_1^{J'} \to \{\pm 1\}_1^{K'} \subset \{\pm 1\}_1^{Int(\lambda)}.$$

La dernière inclusion consiste à prolonger tout élément de $\{\pm 1\}_1^{K'}$ par des 1 pour les indices appartenant à $Int(\lambda) - K'$. C'est ce que l'on fera implicitement dans la suite. Donc l'image de $\mathbf{Z}'$ dans $\bar{A}(N)$ est $\{\pm 1\}_1^{K'}$. De même, l'image de $\mathbf{Z}''$ dans $\bar{A}(N)$ est $\{\pm 1\}_1^{K'}$. On doit prouver que $\bar{A}(N)$ est produit de ces deux images. Par construction, on a $K' \cup K'' = Int(\lambda)$. Montrons que l'on a

(4) $K' \cap K'' \neq \emptyset$.

Rappelons que, pour tout sous-ensemble J de $Jord_{bp}(\lambda)$, on pose $mult_\lambda(J) = \sum_{i \in J} mult_\lambda(i)$. Soit $\Delta \in Int(\lambda)$. Par construction, $mult_\lambda(\Delta)$ est pair sauf si Δ est le plus grand intervalle de λ. Le nombre d'éléments de K' est pair et non nul. Donc K' contient un intervalle Δ tel que $mult_\lambda(\Delta)$ est pair et non nul. Par construction de λ', on a $mult_{\lambda'}(\Delta) = 1$. On a donc $mult_{\lambda''}(\Delta) = mult_\lambda(\Delta) - mult_{\lambda'}(\Delta) > 0$, ce qui équivaut à $\Delta \in K''$. Cela prouve (4).

Fixons $\Delta_0 \in K' \cap K''$. Soit $\xi = (\xi_\Delta)_{\Delta \in Int(\lambda)} \in \{\pm 1\}_1^{Int(\lambda)}$. Posons $\xi^0 = (\xi_\Delta)_{\Delta \in Int(\lambda) - \{\Delta_0\}} \in \{\pm 1\}^{Int(\lambda) - \{\Delta_0\}}$. On peut évidemment fixer $\xi'^0 = (\xi'_\Delta)_{\Delta \in K' - \{\Delta_0\}} \in \{\pm 1\}^{K' - \{\Delta_0\}}$ et $\xi''^0 = (\xi''_\Delta)_{\Delta \in K'' - \{\Delta_0\}} \in \{\pm 1\}^{K'' - \{\Delta_0\}}$ de sorte que $\xi'^0 \xi''^0 = \xi^0$. En adjoignant un terme ξ'_{Δ_0} convenable, on peut prolonger la famille ξ'^0 en une famille $\xi' \in \{\pm 1\}_1^{K'}$. De même, on prolonge la famille ξ''^0 en une famille $\xi'' \in \{\pm 1\}_1^{K''}$. Pour prouver (3), il suffit de montrer que l'on a encore $\xi' \xi'' = \xi$. Cela équivaut à l'égalité $\xi'_{\Delta_0} \xi''_{\Delta_0} = \xi_{\Delta_0}$. Par hypothèse, on a $\xi_{\Delta_0} = \prod_{\Delta \in Int(\lambda) - \{\Delta_0\}} \xi_\Delta$. Par construction, on a aussi $\xi'_{\Delta_0} \xi''_{\Delta_0} = \prod_{\Delta \in Int(\lambda) - \{\Delta_0\}} \xi'_\Delta \xi''_\Delta$. L'égalité $\xi'_{\Delta_0} \xi''_{\Delta_0} = \xi_{\Delta_0}$ résulte alors de l'égalité $\xi'^0 \xi''^0 = \xi^0$. Cela achève la preuve de (3) et celle du (ii) de l'énoncé dans le cas où G est de type B_n. Les cas où G est de type (D_n, nr) ou (D_n, ram) se traitent de la même façon. $\square$

3.2.6 Paramétrage de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj$

Soit $N \in \mathcal{N}(\Gamma_F)$. Considérons l'ensemble des couples (b, u), où $b \in \tilde{A}(N)$ et $u \in A(N)$ soumis à la condition suivante :

(1) si G n'est pas du type $(D_4, 3 - ram)$, $ubu^{-1} = b^q$.

Remarquons que, si G n'est pas du type $(D_4, 3 - ram)$, l'élévation à la puissance q dans le groupe $A^+(N)$ conserve le sous-ensemble $\tilde{A}(N)$. D'autre part, dans le cas où $A(N) = \{1\}$, notre ensemble de couples est réduit à un unique élément $(b, 1)$, où b est l'unique élément de $\tilde{A}(N)$ et la condition (1) est vérifiée. Montrons que

(2) si G n'est pas du type $(D_4, 3 - ram)$, pour tout $b \in \tilde{A}(N)$, il existe $u \in A(N)$ tel que $ubu^{-1} = b^q$.

Si G est classique, $A^+(N)$ est un produit de groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a $b^q = b$ et tout élément $u \in A(N)$ vérifie (1). Si G est exceptionnel, on a $A^+(N) = A(N) \times \Gamma_{F^G/F^{nr}}$ d'après le choix de notre système de représentants $\mathcal{N}$. On a $b = a\gamma$ pour un $a \in A(N)$ et l'égalité $ubu^{-1} = b^q$ équivaut à $uau^{-1} = a^q$. Or $A(N)$ est un groupe $\mathfrak{S}_i$ avec $i = 1, ..., 5$ et q est premier à 2, 3, 5. Dans un tel groupe, tout élément a est conjugué à a^q. Cela prouve (2).

Le groupe $A(N)$ agit sur l'ensemble de couples ci-dessus. On note $\mathcal{C}_F(N)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $A(N)$ dans l'ensemble de couples précédents.

Notation. On notera une telle classe de conjugaison par un couple (b,u) la représentant. Nous utiliserons le même abus de notation pour différents ensembles de classes de conjugaison que nous introduirons plus loin.

On note $\mathcal{C}_F$ l'ensemble des triplets (N,b,u) où $N\in\mathcal{N}(\Gamma_F)$ et $(b,u)\in\mathcal{C}_F(N)$.

En remplaçant dans les constructions précédentes les ensembles $\tilde{A}(N)$ et $A(N)$ par $\bar{\tilde{A}}(N)$ et $\bar{A}(N)$, on définit de même les ensembles $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$ et $\bar{\mathcal{C}}_F$. Pour $N\in\mathcal{N}(\Gamma_F)$, il y a un homomorphisme évident $\mathcal{C}_F(N)\to\bar{\mathcal{C}}_F(N)$. Montrons que

(3) cet homomorphisme est surjectif.

Soit (d,v) un représentant d'un élément de $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$. Si G est classique, on relève d en un élément $b\in\tilde{A}(N)$ et v en un élément $u\in A(N)$. Comme on l'a vu dans la preuve de (2), le couple (b,u) appartient à $\mathcal{C}_F(N)$ et relève (d,v). Supposons G exceptionnel. Si $\bar{A}(N)=A(N)$, on a $\bar{\mathcal{C}}_F(N)=\mathcal{C}_F(N)$ et l'assertion est tautologique. Si $\bar{A}(N)=\{1\}$, on a releve d en un élément $b\in\tilde{A}(N)$ et on relève $v=1$ en un élément $u\in A(N)$ tel que $ubu^{-1}=b^q$. Cet élément existe d'après (2). Le couple (b,u) relève (d,v). Comme on l'a dit, on a toujours $\bar{A}(N)=A(N)$ ou $\bar{A}(N)=\{1\}$ sauf dans le cas où G est de type E_8 pour lequel il y a un N tel que $A(N)=\mathfrak{S}_3$ et $\bar{A}(N)=\mathfrak{S}_2$. On a $\tilde{A}(N)=A(N)$ puisque G est déployé et on vérifie par un calcul aisé la surjectivité requise. Cela prouve (3).

Soit $\mathcal{F}$ une facette de l'appartement $App(T_F)$. On a défini en 3.2.2 l'application $\iota_{\mathcal{F},nil}$ que l'on peut identifier à une application de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj$ dans $\mathcal{N}(\Gamma_F)$. Nous allons "enrichir" (le mot est à la mode) cette application en une application $c_{\mathcal{F},F}$: $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj\to\mathcal{C}_F$.

Soit $\mathcal{O}\in\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj$. Fixons un élément $N'\in\mathcal{O}$. On choisit un point $x\in a_T(\mathbb{T}_F)\cap\mathcal{F}$. Posons $N''=\iota_{\mathcal{F}}(N')$. Notons N l'unique élément de $\mathcal{N}$ qui est conjugué à N''. D'après les définitions, c'est l'image de $\mathcal{O}$ par $\iota_{\mathcal{F},nil}$. Fixons un élément $g\in\mathbf{G}$ tel que $N''=g^{-1}Ng$. Posons $\dot{b}=gj(x)\gamma g^{-1}$ et $\dot{u}=gFr(g)^{-1}$. Rappelons que, par définition, $N''=\underline{v}(\tilde{x})N'\underline{v}(\tilde{x})^{-1}$ où $\tilde{x}=a_T^{-1}(x)$, cf. 2.1.10. Puisque $\tilde{x}\in\mathbb{T}_F$, $\underline{v}(\tilde{x})$ est fixé par l'action de Γ_F^{nr} donc N'' aussi. D'après le choix de notre ensemble $\mathcal{N}(\Gamma_F)$, N l'est aussi, donc $\dot{u}\in Z_{\mathbf{G}}(N)$. L'élément N'' est fixé par $Ad(\mathbf{j}_T(x))\circ\gamma$. Il en résulte que $\dot{b}\in Z_{\tilde{\mathbf{G}}}(N)$. On note b et u les images de $\dot{b}$ et $\dot{u}$ dans $\tilde{A}(N)$ et $A(N)$. Montrons que

(4) le couple (b,u) représente une classe dans $\mathcal{C}_F(N)$.

Si G n'est pas de type $(D_4,3-ram)$, il faut vérifier l'égalité $ubu^{-1}=b^q$. On a

$$\dot{u}Fr(\dot{b})\dot{u}^{-1}=gFr(g)^{-1}Fr(g)Fr(\mathbf{j}_T(x))Fr(\gamma)Fr(g)^{-1}Fr(g)g^{-1}.$$

On est ici dans le groupe $\mathbf{G}^+$. Parce que G n'est pas de type $(D_4,3-ram)$, on a $Fr(\gamma)=\gamma$. Donc

$$\dot{u}Fr(\dot{b})\dot{u}^{-1}=gFr(\mathbf{j}_T(x))\gamma g^{-1}.$$

On a $\mathbf{j}_T(x)\in X_*(T_F)\otimes\bar{\mathbb{F}}_q^\times=\mathbf{T}_F$, donc $Fr(\mathbf{j}_T(x))=\mathbf{j}_T(x)^q$, d'où

$$\dot{u}Fr(\dot{b})\dot{u}^{-1}=g\mathbf{j}_T(x)^q\gamma g^{-1}=\dot{b}^q.$$

On en déduit

$$uFr(b)u^{-1}=b^q.$$

Mais, d'après le choix de notre système $\mathcal{N}(\Gamma_F)$, Fr agit trivialement sur $\tilde{A}(N)$. L'égalité précédente équivaut à $ubu^{-1}=b^q$, ce qui démontre (4).

On pose $c_{\mathcal{F},F}(\mathcal{O})=(N,b,u)$. Cette définition est loisible en vertu du lemme suivant.

Lemme. *Le triplet (N,b,u) ne dépend pas des choix effectués.*

Preuve. Les choix sont ceux de x, N' et g. Fixons x et N'. On ne peut changer g qu'en le multipliant à gauche par un élément $\dot{h} \in Z_{\mathbf{G}}(N)$. En notant h l'image de $\dot{h}$ dans $A(N)$, le couple (b, u) est remplacé par $(hbh^{-1}, huFr(h)^{-1})$. De nouveau, on a $Fr(h) = h$ et le couple précédent est égal à (hbh^{-1}, huh^{-1}), donc la classe de conjugaison de (b, u) ne change pas.

Fixons x. On ne peut changer N' qu'en le remplaçant par $N'_1 = h^{-1}N'h$ pour un $h \in G_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. Alors N'' est remplacé par $N''_1 = h_1^{-1}N''h_1$, où $h_1 = \iota_{\mathcal{F}}(h)$. On a $N''_1 = g_1^{-1}Ng_1$, où $g_1 = gh_1$. Alors le couple $(\dot{b}, \dot{u})$ est remplacé par $(\dot{b}_1, \dot{u}_1)$, où $\dot{b}_1 = gh_1\mathbf{j}_T(x)\gamma h_1^{-1}g^{-1}$ et $\dot{u}_1 = gh_1Fr(h_1)^{-1}Fr(g)^{-1}$. L'élément h_1 appartient à l'image de $\iota_{\mathcal{F}}$ et est donc fixé par $Ad(\mathbf{j}_T(x)) \circ \gamma$. Cela entraine $h_1\mathbf{j}_T(x)\gamma h_1^{-1} = \mathbf{j}_T(x)\gamma$, d'où $\dot{b}_1 = \dot{b}$. Parce que $\iota_{\mathcal{F}}$ est équivariant pour les actions de Γ_F^{nr}, on a aussi $h_1 = Fr(h_1)$, d'où $\dot{u}_1 = \dot{u}$. Donc le couple (b, u) ne change pas.

Remplaçons enfin x par un autre élément $y \in a_T(\mathbb{T}_F) \cap \mathcal{F}$. On peut conserver le même élément N'. L'élément $N'' = \iota_{\mathcal{F}}(N')$ ne change pas et on peut conserver le même élément g. Il en résulte que u ne change pas. Posons $\tilde{x} = a_T^{-1}(x)$, $\tilde{y} = a_T^{-1}(y)$. Choisissons un élément $n \in \mathbb{P}$ tel que $n\tilde{x}, n\tilde{y} \in X_*(T_F)$ et e^G divise n. Soit $\lambda \in \mathfrak{o}_{F^{nr}}^{\times}$. Le même calcul que dans la preuve du lemme 2.1.11 montre que la conjugaison par $n(\tilde{x} - \tilde{y})(\lambda)$ se réduit en un automorphisme de $\mathfrak{g}$ qui fixe l'image de $\iota_{\mathcal{F}}$. Il en résulte que, pour tout $\zeta \in \bar{\mathbb{F}}_q^{\times}$, l'élément $n(\tilde{x} - \tilde{y})(\zeta) \in \mathbf{T}$ commute à N''. Donc $gn(\tilde{x} - \tilde{y})(\zeta)g^{-1}$ commute à N. L'application $\zeta \mapsto gn(\tilde{x} - \tilde{y})(\zeta)g^{-1}$ est un sous-groupe à un paramètre de $Z_{\mathbf{G}}(N)$. Il est donc inclus dans $Z_{\mathbf{G}}(N)^0$. Quand on remplace x par y, l'élément $\dot{b}$ est multiplié à gauche par $g\mathbf{j}_T(y)\mathbf{j}_T(x)^{-1}g^{-1}$. Cet élément est par définition $gn(\tilde{x} - \tilde{y})(\zeta_{1/n})g^{-1}$. Puisque cet élément appartient à $Z_{\mathbf{G}}(N)^0$, l'image $\tilde{b}$ de $\dot{\tilde{b}}$ dans $\tilde{A}(N)$ ne change pas. Cela achève la preuve du lemme. $\square$

Par composition avec les applications $\mathcal{C}_F(N) \to \bar{\mathcal{C}}_F(N)$ pour $N \in \mathcal{N}(\Gamma_F)$, on déduit de $c_{\mathcal{F},F}$ une application $\bar{c}_{\mathcal{F},F} : \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj \to \bar{\mathcal{C}}_F$.

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des couples (N, b) où $N \in \mathcal{N}(I_F)$ et b est une classe de conjugaison par $A(N)$ dans $\tilde{A}(N)$. Soit $\mathcal{F}$ une facette de l'appartement $App_{F^{nr}}(T^{nr})$. En reprenant la construction ci-dessus, mais en oubliant l'élément u dont la définition fait intervenir l'action de Frobenius, on définit une application $c_{\mathcal{F}} : \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}/conj \to \mathcal{C}$. En remplaçant dans les définitions les ensembles $A(N)$ et $\tilde{A}(N)$ par $\bar{A}(N)$ et $\tilde{\bar{A}}(N)$, on définit de même un ensemble $\bar{\mathcal{C}}$ et une application $\bar{c}_{\mathcal{F}} : \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}/conj \to \bar{\mathcal{C}}$.

Revenons à une facette $\mathcal{F}$ de $App(T_F)$. Elle est contenue dans une unique facette $\mathcal{F}^{nr}$ de $App_{F^{nr}}(T^{nr})$. On a une application "oubli de u" qui envoie $\mathcal{C}_F$ dans $\mathcal{C}$. On note $c_{\mathcal{F}} : \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj \to \mathcal{C}$ la composée de $c_{\mathcal{F},F}$ et de cette application d'oubli. L'application $c_{\mathcal{F}}$ est la composée de $c_{\mathcal{F}^{nr}}$ et de l'application naturelle $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj \to \mathfrak{g}_{\mathcal{F}^{nr},nil}/conj$.

3.2.7 Une construction auxiliaire

Soit $N \in \mathcal{N}(I_F)$. Considérons l'ensemble des couples (b, R) où $b \in \tilde{A}(N)$ et R est un sous-groupe de $Z_{A(N)}(b)$. Le groupe $A(N)$ agit par conjugaison sur cet ensemble de couples, on note $\mathcal{R}(N)$ l'ensemble des classes de conjugaison. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des triplets (N, b, R) où $N \in \mathcal{N}(I_F)$ et $(b, R) \in \mathcal{R}(N)$.

Soit $\mathcal{F}$ une facette de $App_{F^{nr}}(T^{nr})$ et soit $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}/conj$. On choisit un point $x \in a_T(\mathbb{T}^{nr}) \cap \mathcal{F}$. Fixons $N' \in \mathcal{O}$. Posons $N'' = \iota_{\mathcal{F}}(N')$ et $R'' = \iota_{\mathcal{F}}(Z_{G_{\mathcal{F}}}(N'))$. Notons N l'unique élément de $\mathcal{N}$ qui est conjugué à N''. Fixons un élément $g \in \mathbf{G}$ tel que $N'' = g^{-1}Ng$. On pose $\dot{b} = g\mathbf{j}_T(x)\gamma g^{-1}$ et $\dot{R} = gR''g^{-1}$. Comme dans le paragraphe précédent, on a $\dot{b} \in Z_{\tilde{\mathbf{G}}}(N)$ et, par construction, $\dot{R}$ commute à la fois à N et à $\dot{b}$. On

note b et R les images de $\dot{b}$ et $\dot{R}$ dans $\tilde{A}(N)$ et $A(N)$. Le triplet (N, b, R) appartient à $\mathcal{R}$. La même preuve que celle du lemme 3.2.6 montre que cet élément ne dépend pas des choix effectués. On définit une application $r_{\mathcal{F}} : \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}/conj \to \mathcal{R}$ par $r_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}) = (N, b, R)$.

On a les propriétés suivantes.

(1) Il y a une application "oubli de R" de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{C}$. Il résulte des constructions que $c_{\mathcal{F}}$ est la composée de $r_{\mathcal{F}}$ et de cette application d'oubli.

(2) Soit $g \in G(F^{nr})$. Posons $\mathcal{F}' = g\mathcal{F}$ et supposons que $\mathcal{F}'$ soit elle-aussi contenue dans $App_{F^{nr}}(T^{nr})$. Comme en 2.1.13, on a un isomorphisme $\overline{Ad(g)} : \mathfrak{g}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{g}_{\mathcal{F}'}$. Il résulte du lemme 2.1.13 et de la construction que $r_{\mathcal{F}'} \circ \overline{ad(g)} = r_{\mathcal{F}}$.

(3) Soit $\mathcal{F}'$ une facette de $App_{F^{nr}}(T^{nr})$ telle que $\mathcal{F}' \subset \bar{\mathcal{F}}$. Comme en 2.1.12, on peut identifier $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ à une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}'}$. Il en résulte une application $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}/conj \to \mathfrak{g}_{\mathcal{F}',nil}/conj$ qui est canonique. On voit que $c_{\mathcal{F}}$ est la composée de cette application et de $c_{\mathcal{F}'}$. Il n'en est pas de même pour les applications $r_{\mathcal{F}}$ et $r_{\mathcal{F}'}$. En passant de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$, les commutants peuvent augmenter. Précisément, soit $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}/conj$, notons $\mathcal{O}'$ son image dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}',nil}/conj$. Posons $r_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}) = (N, b, R)$. Alors $r_{\mathcal{F}'}(\mathcal{O}')$ est de la forme (N, b, R'), où $R \subset R' \subset Z_{A(N)}(b)$.

On note $\mathcal{R}_{max}$ le sous-ensemble des $(N, b, R) \in \mathcal{R}$ tels que $R = Z_{A(N)}(b)$.

En remplaçant les ensembles $\tilde{A}(N)$ et $A(N)$ par $\bar{\tilde{A}}$ et $\bar{A}(N)$, on définit de même les ensembles $\bar{\mathcal{R}}(N)$, $\bar{\mathcal{R}}$ et $\bar{\mathcal{R}}_{max}$, ainsi qu'une application $\bar{r}_{\mathcal{F}} : \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}/conj \to \bar{\mathcal{R}}$ pour toute facette $\mathcal{F}$ de $App_{F^{nr}}(T^{nr})$. Il y a une application naturelle $\mathcal{R} \to \bar{\mathcal{R}}$: à $(N, b, R) \in \mathcal{R}$, elle associe (N, d, V), où d est l'image de b dans $\bar{\tilde{A}}(N)$ et V est l'image de R dans $A(N)$.

Lemme. *(i) Supposons que G n'est pas du type B_n, (D_n, nr) ou (D_n, ram). Quand s décrit $S(\bar{C}^{nr})$, la réunion des images des applications r_s contient $\mathcal{R}_{max}$.*

(ii) Quand s décrit $S(\bar{C}^{nr})$, la réunion des images des applications $\bar{r}_s$ contient $\bar{\mathcal{R}}_{max}$.

(iii) Quand s décrit $S(\bar{C}^{nr})$, la réunion des images des applications c_s est $\mathcal{C}$ tout entier.

Preuve. Commençons par prouver (i). Fixons $(N, b, R) \in \mathcal{R}_{max}$. Fixons un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f, h, e) de $\mathfrak{g}$ tel que $e = N$. Avec les notations du lemme 3.2.5, celui-ci nous dit que l'on peut fixer un élément semi-simple $\tau \in \tilde{\mathbf{Z}}$ dont l'image dans $\tilde{A}(N)$ est égale à b et tel que l'image dans $A(N)$ de $\mathbf{Z} \cap \mathbf{G}_\tau$ soit égale à $Z_{A(N)}(b) = R$. Dans la composante $\tilde{\mathbf{G}}$, tout élément semi-simple est conjugué à un élément $t\gamma$, où $t \in \mathbf{T}^{I_F}$. Puisque $\mathbf{G}$ est adjoint, $\mathbf{T}^{I_F}$ est connexe et donc égal à $\mathbf{T}^{nr}$. Fixons un tel t et un élément $g \in \mathbf{G}$ tel que $Ad(g)(t\gamma) = \tau$. Fixons $x \in a_T(\mathbb{T}^{nr})$ tel que $\mathbf{j}_T(x) = t$. Notons $\mathcal{F}$ la facette de l'appartement $App_{F^{nr}}(T^{nr})$ contenant x. L'image de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ par l'application $Ad(g) \circ \iota_{\mathcal{F}}$ est le sous-espace des éléments de $\mathfrak{g}$ fixés par $Ad(\tau)$. L'image de $G_{\mathcal{F}}$ par cette application est $\mathbf{G}_\tau$. En particulier, notre triplet (f, h, e) appartient à l'image de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ par $Ad(g) \circ \iota_{\mathcal{F}}$. Notons $(f_{\mathcal{F}}, h_{\mathcal{F}}, e_{\mathcal{F}})$ son image réciproque et $Z_{\mathcal{F}}$ le commutant de ce triplet dans $G_{\mathcal{F}}$. L'image de $Z_{\mathcal{F}}$ par $Ad(g) \circ \iota_{\mathcal{F}}$ est égale à $\mathbf{Z} \cap \mathbf{G}_\tau$. Notons $\mathcal{O}$ l'image de $e_{\mathcal{F}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}/conj$. Il suffit de reprendre la construction de l'application $r_{\mathcal{F}}$ pour voir que $r_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}) = (N, b, R)$. La facette $\mathcal{F}$ n'a pas de raison d'être contenue dans $\bar{C}^{nr}$. Mais son image par l'action d'un élément convenable de $G(F^{nr})$ est contenue dans cette clôture. La propriété (2) nous permet de remplacer $\mathcal{F}$ par son image. La propriété (3) nous permet ensuite de remplacer $\mathcal{F}$ par un sommet adhérent à cette facette : cela ne peut qu'augmenter la troisième composante de $r_{\mathcal{F}}(\mathcal{O})$ mais, puisque celle-ci est déjà maximale, elle ne change pas. Un tel sommet appartient à $S(\bar{C}^{nr})$. Cela prouve le (i) de l'énoncé. Le (ii) se prouve de façon analogue. Le (iii) aussi : on choisit simplement un élément semi-simple $\tau \in \tilde{\mathbf{Z}}$ dont l'image dans

$\tilde{A}(N)$ est égale à b, ce qui est toujours possible par l'argument donné au début de la preuve de 3.2.5. $\square$

3.2.8 Surjectivité du paramétrage

Proposition. *Quand s décrit $S(\bar{C})$, la réunion des images des applications $\bar{c}_{s,F}$ est $\bar{\mathcal{C}}_F$ tout entier.*

Preuve. Soit $(N,d,v) \in \bar{\mathcal{C}}_F$. Posons $V = Z_{\bar{A}(N)}(b)$. D'après l'assertion (ii) du lemme 3.2.7, on peut fixer $s^{nr} \in S(\bar{C}^{nr})$ et $\mathcal{O}^{nr} \in \mathfrak{g}_{s^{nr},nil}/conj$ de sorte que $\bar{r}_{s^{nr}}(\mathcal{O}^{nr}) = (N,d,V)$. Supposons les conditions suivantes vérifiées :

(1) s^{nr} est fixé par l'action de Γ_F^{nr} et $\mathcal{O}^{nr}$ est fixée par l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ sur $\mathfrak{g}_{s^{nr},nil}/conj$.

Alors s^{nr} appartient à $S(\bar{C})$, on pose $s = s^{nr}$. Puisque $\mathcal{O}^{nr}$ est fixée par l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$, l'ensemble $\mathcal{O}^{nr} \cap \mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)$ n'est pas vide et on peut fixer une orbite $\mathcal{O}_1 \in \mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)/conj$ contenue dans cette intersection. Fixons $N_1' \in \mathcal{O}_1$. Posons $N_1'' = \iota_s(N_1')$. D'après les compatibilités de nos différentes applications, N_1'' est conjugué à N par un élément de $\mathbf{G}$ et on peut choisir $g_1 \in \mathbf{G}$ tel que $N_1'' = g_1^{-1}Ng_1$ et que l'image dans $\tilde{\bar{A}}(N)$ de l'élément $g_1 j(s)\gamma g_1^{-1}$ soit d. Notons v_1 l'image de $g_1 Fr(g_1)^{-1}$ dans $\bar{A}(N)$. Par définition, $\bar{c}_{s,F}(\mathcal{O}_1) = (N,d,v_1)$. Si G est de type $(D_4, 3-ram)$, le groupe $\bar{A}^+(N)$ est commutatif donc vv_1^{-1} appartient à V. Si G n'est pas de type $(D_4, 3-ram)$, les deux triplets (N,d,v) et (N,d,v_1) appartiennent à $\bar{\mathcal{C}}_F$ donc les égalités suivantes sont vérifiées :

$$vdv^{-1} = d^q = v_1 d v_1^{-1}.$$

Il en résulte encore que vv_1^{-1} appartient à V. L'égalité $\bar{r}_{s^{nr}}(\mathcal{O}^{nr}) = (N,d,V)$ signifie que V est l'image dans $\bar{A}(N)$ du groupe $g_1\iota_s(Z_{G_s}(N_1'))g_1^{-1}$. Soit $z \in Z_{G_s}(N_1')$ tel que vv_1^{-1} soit l'image dans $\bar{A}(N)$ de $g_1\iota_s(z)g_1^{-1}$. En appliquant le théorème de Lang dans G_s, on écrit $z = xFr(x)^{-1}$ pour un $x \in G_s$. Posons $N' = x^{-1}N_1'x$. Parce que z appartient à $Z_{G_s}(N_1')$, on a encore $N' \in \mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)$. Reprenons les constructions pour cet élément N'. On pose $N'' = \iota_s(N')$. On a $N'' = y^{-1}N_1''y$, où $y = \iota_s(x)$. En posant $g = g_1 y$, on a $N'' = g^{-1}Ng$. Parce que y appartient à l'image de ι_s, y commute à $\mathbf{j}_T(s)\gamma$ et on en déduit

$$g\mathbf{j}_T(s)\gamma g^{-1} = g_1\mathbf{j}_T(s)\gamma g_1^{-1}.$$

Autrement dit, l'élément d ne change pas. L'élément v_1 est remplacé par l'image dans $\bar{A}(N)$ de $gFr(g)^{-1} = g_1 yFr(y)Fr(g_1)^{-1}$. Parce que ι_s est équivariante pour les actions de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$, on a $yFr(y)^{-1} = \iota_s(xFr(x)^{-1}) = \iota_s(z)$. Alors $gFr(g)^{-1} = g_1\iota_s(z)Fr(g_1)^{-1} = g_1\iota_s(z)g_1^{-1}g_1Fr(g_1)^{-1}$. Les images dans $\bar{A}(N)$ de $g_1\iota_s(z)g_1^{-1}$ et $g_1Fr(g_1)^{-1}$ sont respectivement vv_1^{-1} et v_1. Donc l'image dans $\bar{A}(N)$ de $gFr(g)^{-1}$ est v. En notant $\mathcal{O}$ l'orbite de N' dans $\mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)/conj$, on a donc $\bar{c}_{s,F}(\mathcal{O}) = (N,d,v)$. Cela prouve que ce triplet appartient à l'ensemble décrit dans l'énoncé.

On va montrer que, quitte à changer de couple $(s^{nr}, \mathcal{O}^{nr})$, on peut supposer que la condition (1) est vérifiée.

Supposons que G est déployé sur F. Alors toutes les actions de Γ_F^{nr} sont triviales et (1) est évident.

Supposons que G n'est pas déployé sur F^{nr}. Par construction, Γ_F^{nr} agit sur $\mathcal{D}_a^{nr}$ en conservant la racine β_0. Or l'identité est le seul automorphisme de $\mathcal{D}_a^{nr}$ fixant β_0 donc cette action est triviale. En particulier s^{nr} est fixé par l'action de Γ_F^{nr}. La trivialité de l'action de Γ_F^{nr} implique aussi que $G_{s^{nr}}$ est déployé. Toute orbite nilpotente est alors conservée par l'action galoisienne. Donc (1) est vérifiée.

Supposons que G est déployé sur F^{nr} mais pas sur F. Alors G est de type A_{n-1}, D_n avec une action d'ordre 2 de Γ_F^{nr} sur $\mathcal{D}$, D_4 trialitaire ou E_6. Le sous-groupe $\mathbf{\Omega}$ de $G(F^{nr})$ introduit en 2.1.8 agit sur l'ensemble des couples $(s^{nr}, \mathcal{O}^{nr})$ sans changer l'image $\bar{r}_{s^{nr}}(\mathcal{O}^{nr})$ d'après 3.2.7(2). On vérifie cas par cas que, pour tout sommet $s' \in S(\bar{C}^{nr})$, il existe $\omega \in \mathbf{\Omega}$ tel que $\omega(s')$ soit fixé par Γ_F^{nr}. On peut donc supposer que s^{nr} est fixe par l'action de Γ_F^{nr}. On pose simplement $s = s^{nr}$. Supposons vérifiées les conditions

(2) l'action de Γ_F^{nr} sur le diagramme de Dynkin de G_s conserve chaque composante irréductible et ces composantes ne sont pas de type D_n.

D'après 3.1.7(1), $\mathcal{O}^{nr}$ est alors conservée par l'action galoisienne donc (1) est vérifiée.

Il reste à considérer les cas où (2) n'est pas vérifiée. Ce sont les cas (a) à (d) suivants.

(a) On suppose que G est de type D_n, le Frobenius agissant sur Δ_a par l'automorphisme θ qui permute α_{n-1} et α_n et fixe les autres racines. On paramètre l'orbite de N par une partition $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n)$. Puisque s est un élément de $S(\bar{C})$ qui reste un sommet dans $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$, il est associé à une racine $\alpha_{n''}$, avec $n'' \in \{0, ..., n-2\}$. Puisqu'il existe un élément de $\mathbf{\Omega}$ qui permute α_0 et α_1, on peut supposer $n'' \neq 1$. Alors $G_{s,SC}$ est de type $D_{n'} \times D_{n''}$, où $n' = n - n'' \geq 2$. Le groupe Γ_F^{nr} agit trivialement sur le diagramme de $D_{n''}$ et non trivialement sur celui de $D_{n'}$. L'orbite $\mathcal{O}^{nr}$ est paramétrée par un couple $(\lambda', \lambda'') \in \mathcal{P}^{orth}(2n') \times \mathcal{P}^{orth}(2n'')$ tel que $\lambda' \cup \lambda'' = \lambda$. Si λ' possède au moins un terme impair, $\mathcal{O}^{nr}$ est conservée par l'action galoisienne et (1) est vérifiée. Supposons que λ' soit formée de termes pairs. Par hypothèse, N appartient à $\mathcal{N}(\Gamma_F)$ donc λ possède au moins un terme impair. Donc λ'' possède au moins un terme impair. A fortiori, $n'' \neq 0$ donc $n'' \geq 2$. Mais il y a un élément $\delta \in \mathbf{\Omega}$ qui agit par $\alpha_i \mapsto \alpha_{n-i}$ sur le sous-ensemble $\{\alpha_i; i = 2, ..., n-2\}$ de Δ_a. On remplace s par son image $\delta(s)$, qui est associée à $\alpha_{n'}$. Cela permute (λ', λ''). Après cette permutation, λ' possède au moins un terme impair et (1) est vérifiée.

(b) On suppose que G est de type D_4 trialitaire et que $s = s_0$. Dans ce cas, G_{s_0} est de type D_4. Le groupe G_{s_0} s'identifie à $\mathbf{G}$ et $\iota_{s_0,nil}$ est l'identité. Puisque $N = \iota_{s_0,nil}(\mathcal{O}^{nr})$ et que N est par hypothèse conservée par Γ_F^{nr}, il en est de même de $\mathcal{O}^{nr}$ et (1) est vérifiée.

(c) On suppose que G est de type D_4 trialitaire et que $s = s_2$ (on rappelle que s_2 est le sommet associé à α_2). Dans ce cas, G_{s_2} est de type A_1^4. On note plus précisément ses composantes $A_{1,j}$, où $j = 0, 1, 3, 4$, chacune d'elles correspondant à la racine $\alpha_j \in \Delta_a$. Le groupe $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ fixe la composante $A_{1,0}$ et permute cycliquement les trois autres. Dans chaque composante A_1, il n'y a que deux orbites possibles sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, l'orbite régulière et l'orbite nulle. L'orbite $\mathcal{O}^{nr}$ s'identifie à un quadruplet de telles orbites. Supposons que le quadruplet contienne trois termes égaux. L'action du groupe $\mathbf{\Omega}$ fixe s_2 et permute transitivement les composantes A_1. On peut remplacer $\mathcal{O}^{nr}$ par son image par un élément convenable et supposer que les composantes de $\mathcal{O}^{nr}$ dans $A_{1,1}$, $A_{1,3}$ et $A_{1,4}$ sont égales. Alors $\mathcal{O}^{nr}$ est conservée par l'action galoisienne et (1) est vérifiée. Il reste le cas où le quadruplet déterminé par $\mathcal{O}^{nr}$ a deux éléments réguliers et deux éléments nuls. On raisonne alors comme dans la preuve de 3.2.3 en fixant le produit scalaire sur $X_*(T)$ pour lequel $||\check{\alpha}||^2 = 2$ pour toute racine α. On calcule $||x_{*,\mathcal{O}^{nr}}|| = 4$. Cette norme se conserve par l'application $\iota_{s_2,nil}$. En notant $x_{*,N}$ le terme associé à l'orbite de N, on a donc $||x_{*,N}||^2 = 4$. Mais, d'après notre tableau de 3.2.3, c'est impossible puisque $N \in \mathcal{N}(\Gamma_F)$.

(d) On suppose que G est de type E_6 et que $s = s_4$. Dans ce cas, G_{s_4} est de type A_2^3. Comme ci-dessus, on note plus précisément ses composantes $A_{2,0,2}$, $A_{2,1,3}$, $A_{2,6,5}$. Le groupe $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ fixe la composante $A_{2,0,2}$ et permute les deux autres. Dans chaque composante A_2, il n'y a que trois orbites possibles sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, paramétrées par les partitions (3), (21) et (111). L'orbite $\mathcal{O}^{nr}$ s'identifie à un triplet de telles orbites. Supposons que le triplet

contienne deux termes égaux. L'action du groupe $\mathbf{\Omega}$ fixe s_4 et permute transitivement les composantes A_2. On peut remplacer $\mathcal{O}^{nr}$ par son image par un élément convenable et supposer que les composantes de $\mathcal{O}^{nr}$ dans $A_{2,1,3}$ et $A_{2,6,5}$ sont égales. Alors $\mathcal{O}^{nr}$ est conservée par l'action galoisienne et (1) est vérifiée. Reste le cas où les trois termes du triplet sont distincts. Comme dans le cas (c), on voit que cela entraîne $||x_{*,N}||^2 = 10$. D'après notre tableau de 3.2.3, l'orbite de N est de type $A_2 + A_1$. Pour cette orbite, $A(N) = \{1\}$ d'après [7] p. 402 donc $d = 1$ et $V = \{1\}$. On peut alors remplacer notre sommet s_4 par s_0. En effet, on a $G_{s_0} = \mathbf{G}$ et $\iota_{s_0,nil}$ est l'identité. Notons $\mathcal{O}_0^{nr}$ l'élément de $\mathfrak{g}_{s_0,nil}/conj$ qui s'identifie à l'orbite de N. Puisque $A(N) = \{1\}$, on a forcément $r_{s_0}(\mathcal{O}_0^{nr}) = (N, d, V)$. Pour le couple $(s_0, \mathcal{O}_0^{nr})$, l'assertion (2) est vérifiée puisque G_{s_0} est de type E_6. Cela achève la preuve de la proposition. $\square$

3.2.9 Description de c_s dans le cas ramifié

On suppose que G n'est pas déployé sur F^{nr}. Soit $s \in \bar{C}^{nr}$. On note β_s l'élément de Δ_a^{nr} qui lui est associé. On a décrit en 3.2.3 l'application $\iota_{s,nil}$.

Dans le cas où G est de type (A_{n-1}, ram), on a $A(N) = \{1\}$ pour tout $N \in \mathcal{N}(I_F)$. Il n'y a qu'une classe de conjugaison dans $\tilde{A}(N)$, qui est réduite au seul élément de cet ensemble. Donc $\mathcal{C} \simeq \mathcal{N}(I_F)$ et c_s s'identifie à $\iota_{s,nil}$.

Supposons que G est de type (D_n, ram). Le groupe $G_{s,SC}$ est produit de deux groupes de types $B_{n'}$ et $B_{n''}$ avec $n'+n'' = n-1$. On doit distinguer les deux composantes. Celles-ci correspondent aux composantes connexes du diagramme $\mathcal{D}_a^{nr} - \{\beta_s\}$. Si $\beta_s \neq \beta_0$, on suppose que $B_{n''}$ correspond à la composante qui contient β_0. Si $\beta_s = \beta_0$, cette composante disparaît, $G_{s,SC}$ est quasi-simple de type $B_{n'}$ avec $n' = n-1$. On identifie les orbites nilpotentes intervenant dans chacun de nos groupes à des partitions. Soient $\lambda' \in \mathcal{P}^{orth}(2n'+1)$ et $\lambda'' \in \mathcal{P}^{orth}(2n''+1)$. Posons $\lambda = \iota_{s,nil}(\lambda', \lambda'')$. On a déjà dit que $\lambda = \lambda' \cup \lambda''$. On a $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(n)$. L'ensemble $Jord_{bp}(\lambda)$ est non vide : au moins l'une des deux partitions λ' ou λ'' est non vide et possède alors un terme impair. L'ensemble $\tilde{A}(\lambda)$ s'identifie à $\{\pm 1\}_{-1}^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1, \xi(\lambda)\}$, cf. 3.2.4(3). Notons $\dot{b}(\lambda', \lambda'') = (\dot{b}(\lambda', \lambda'')_i)_{i \in Jord_{bp}(\lambda)}$ l'élément de $\{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$ défini par $\dot{b}(\lambda', \lambda'')_i = (-1)^{mult_{\lambda''}(i)}$. On vérifie que $\dot{b}(\lambda', \lambda'') \in \{\pm 1\}_{-1}^{Jord_{bp}(\lambda)}$ et on note $b(\lambda', \lambda'')$ son image dans $\tilde{A}(\lambda)$. Il est facile de voir que $c_s(\lambda', \lambda') = (\lambda, b(\lambda', \lambda''))$.

Considérons maintenant les deux cas restants : G de type $(D_4, 3-ram)$ ou (E_6, ram). Soit $\mathcal{O}_s \in \mathfrak{g}_{s,nil}/conj$, posons $N = \iota_{s,nil}(\mathcal{O}_s)$. Comme dans le cas où G est de type (A_{n-1}, ram), si $A(N) = \{1\}$, on n'a rien à ajouter pour décrire $c_s(\mathcal{O}_s)$ puisqu'il n'y a qu'une classe de conjugaison dans $\tilde{A}(N)$, qui est réduite à l'unique élément de cet ensemble. On n'a donc à se préoccuper que des $N \in \mathcal{N}(I_F)$ tels que $A(N) \neq \{1\}$. D'après 3.2.3 et [7] p. 402, N est fixé par I_F et appartient à l'image de $\iota_{s_0,nil}$. Plus précisément, il existe une unique orbite $\mathcal{O}_0 \in \mathfrak{g}_{s_0,nil}/conj$ telle que $\iota_{s_0,nil}(\mathcal{O}_0) = N$. On note b_1 la classe de conjugaison de γ dans $\tilde{A}(N) = A(N)\gamma$. On a $s_0 = a_T(0)$, $\mathbf{j}_T(s_0) = 1$ et il résulte des constructions que $c_{s_0}(\mathcal{O}_0) = (N, b_1)$.

Supposons G de type $(D_4, 3 - ram)$. Il n'y a qu'un élément $N \in \mathcal{N}(I_F)$ tel que $A(N) \neq \{1\}$. Il est paramétré par la partition $3^2 1^2$ et on a $A(N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. D'après 3.2.3, il y a deux sommets s tels que N appartienne à l'image de $\iota_{s,nil}$, à savoir s_0 et s_{134}. De plus, pour $i = 0, 134$, il y a une seule orbite $\mathcal{O}_i \in \mathfrak{g}_{s_i,nil}/conj$ telle que $\iota_{s_i,nil}(\mathcal{O}_i) = N$. Il n'y a que deux classes de conjugaison dans $\tilde{A}(N)$: la classe de $(0, \gamma) \in \tilde{A}(N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{\gamma\}$ que l'on a notée b_1 et celle de $(1, \gamma)$ que l'on note b_2. On a calculé ci-dessus $c_{s_0}(\mathcal{O}_0) = (N, b_1)$. L'assertion (iii) du lemme 3.2.7 implique que $c_{s_{134}}(\mathcal{O}_{134}) = (N, b_2)$.

Supposons maintenant G de type (E_6, ram). Rappelons que $\Delta_a^{nr} = \{\beta_0, \beta_{16}, \beta_{35}, \beta_4, \beta_2\}$,

avec $\beta_0 = -(2\beta_{16}+3\beta_{35}+2\beta_4+\beta_2\}$. On introduit la base $\{\check{\varpi}_i; i = 1, ..., 6\}$ de $X_*(T)$ duale de Δ et les éléments $\check{\varpi}_{16} = \check{\varpi}_1 + \check{\varpi}_6$, $\check{\varpi}_{35} = \check{\varpi}_3 + \check{\varpi}_5$. Alors $\check{\Pi}^{nr} = \{\check{\varpi}_{16}, \check{\varpi}_{35}, \check{\varpi}_4, \check{\varpi}_2\}$ est une base de $X_*(T^{nr})$. La racine affine β_0^{aff} est $\beta_0 + 1/2$.

Il y a trois éléments $N \in \mathcal{N}(I_F)$ tels que $A(N) \neq \{1\}$, dont les orbites sont notées $E_6(a_3)$, $D_4(a_1)$ et A_2, cf. [7] page 402. Pour N de type $E_6(A_3)$, on a $A(N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et la situation est la même que dans le cas $(D_4, 3-ram)$: N provient des deux sommets s_0 et s_2 et d'une seule classe pour chaque sommet. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on obtient $c_{s_2}(\mathcal{O}_2) = (N, b_2)$.

Supposons maintenant N de type $D_4(a_1)$. Alors $A(N) = S_3$. On a vu que $A^+(N) = A(N) \times \{1, \gamma\}$. Il y a donc trois classes de conjugaison dans $\tilde{A}(N)$: les classes b_1 de (a_1, γ), b_2 de (a_2, γ) et b_3 de (a_3, γ), où a_1, resp. a_2, resp. a_3, est un élément d'ordre 1 resp. 2, resp. 3, de $A(N)$. Il y a quatre sommets s tels que N appartienne à l'image de $\iota_{s,nil}$: s_0, s_{16}, s_{35}, s_2. On introduit les éléments suivants de $\mathbb{T}^{nr}$: $\tilde{x}_0 = 0$, $\tilde{x}_{16} = \frac{1}{4}\check{\varpi}_{16}$, $\tilde{x}_{35} = \frac{1}{6}\check{\varpi}_{35}$, $\tilde{x}_2 = \frac{1}{2}\check{\varpi}_2$. On voit que $a_T(\tilde{x}_0) = s_0$, $a_T(\tilde{x}_{16}) = s_{16}$, $a_T(\tilde{x}_{35}) = s_{35}$, $a_T(\tilde{x}_2) = s_2$. Pour chacun des indices $i = 0, 16, 35, 2$, on pose $t_i = \mathbf{j}_T(s_i)$. On calcule $t_0 = 1$, $t_{16} = \check{\varpi}_{16}(\zeta_{1/4})^{-1}$, $t_{35} = \check{\varpi}_{35}(\zeta_{1/6})^{-1}$, $t_2 = \check{\varpi}_2(\zeta_{1/2})^{-1}$. Il y a une unique orbite $\mathcal{O}_i \in \mathfrak{g}_{s_i,nil}/conj$ telle que $\iota_{s_i,nil}(\mathcal{O}_i) = N$. Posons $c_{s_i}(\mathcal{O}_i) = (N, b(s_i))$. Par construction, l'image réciproque de $b(s_i)$ dans $Z_{\tilde{\mathbf{G}}}(N)$ contient un élément conjugué à $t_i\gamma$. L'élément $t_i \in \mathbf{T}^{nr}$ commute à γ. D'où $(t_i\gamma)^2 = t_i^2$. On en déduit que l'élément $t_i\gamma$ est d'ordre 2 dans $\mathbf{G}^+$ si $i = 0$ ou $i = 2$, d'ordre 4 si $i = 16$ et d'ordre 6 si $i = 35$. L'assertion (iii) du lemme 3.2.7 nous dit qu'il y a au moins un indice i tel que $b(s_i) = b_3$. Pour cet indice, l'ordre de $t_i\gamma$ est divisible par 3. Ce ne peut être que l'indice 35, donc $b(s_{35}) = b_3$. On a déjà calculé $b(s_0) = b_1$. Pour les deux autres indices $i = 16, 2$, on a forcément $b(s_i) = b_1$ ou b_2. Prouvons que

(1) $b(s_{16}) = b(s_2) = b_2$.

Pour chacun des indices $i = 0, 16, 2$, fixons un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f_i', h_i', N_i') de $\mathfrak{g}_{s_i}$ tel que $N_i' \in \mathcal{O}_i$. Posons $(f_i, h_i, N_i) = \iota_{s_i}(f_i', h_i', N_i')$. Par construction, $t_i\gamma$ appartient à $Z_{\tilde{\mathbf{G}}}(f_i, h_i, N_i)$ et ι_{s_i} identifie $Z_{G_{s_i}}(f_i', h_i', N_i')^0$ à la composante neutre du commutant de $t_i\gamma$ dans $Z_{\mathbf{G}}(f_i, h_i, N_i)^0$. On a choisi N dans l'image de $\iota_{s_0,nil}$ et on ne perd rien à supposer que $N = N_0$. On a $t_0 = 1$, donc $Z_{G_{s_0}}(f_0', h_0', N_0')^0$ s'identifie à la composante neutre de l'action de γ dans $Z_{\mathbf{G}}(f_0, h_0, N_0)^0$. Considérons un indice $i = 16, 2$ et supposons $b(s_i) = b_1$. Les ensembles $Z_{\tilde{\mathbf{G}}}(f_i, h_i, N_i)$ et $Z_{\tilde{\mathbf{G}}}(f_0, h_0, N_0)$ sont conjugués par un élément de $\mathbf{G}$ et l'hypothèse précédente signifie que l'on peut imposer à cette conjugaison d'envoyer $t_i\gamma$ sur un élément $z\gamma$, où $z \in Z_{\mathbf{G}}(f_0, h_0, N_0)^0$. Alors $Z_{G_{s_i}}(f_i', h_i', N_i')^0$ s'identifie à la composante neutre du commutant de $z\gamma$ dans $Z_{\mathbf{G}}(f_0, h_0, N_0)^0$. Or, d'après [7] page 402, $Z_{\mathbf{G}}(f_0, h_0, N_0)^0$ est un tore de dimension 2 et est donc commutatif. Le commutant de $z\gamma$ est donc le même que celui de γ et on obtient un isomorphisme $Z_{G_{s_i}}(f_i', h_i', N_i')^0 \simeq Z_{G_{s_0}}(f_0', h_0', N_0')^0$. L'orbite $\mathcal{O}_0$ est de type $F_4(a_3)$. D'après [7] page 401, on a $Z_{G_{s_0}}(f_0', h_0', N_0')^0 = \{1\}$. Si $i = 16$, l'orbite $\mathcal{O}_{16}$ est paramétrée par $(2, 51^2)$; si $i = 2$, $\mathcal{O}_2$ est paramétrée par (42^2). Dans les deux cas, $Z_{G_{s_i}}(f_i', h_i', N_i')^0$ est un tore de dimension 1. Cela contredit l'égalité précédente. Notre hypothèse $b(s_i) = b_1$ est donc contradictoire, ce qui prouve (1).

Supposons enfin N de type A_2. On a $A(N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $A^+(N) = A(N) \times \{1, \gamma\}$. Il y a deux classes de conjugaison dans $\tilde{A}(N)$: la classe b_1 de $(0, \gamma)$ et la classe b_2 de $(1, \gamma)$. L'élément N appartient à l'image de $\iota_{s,nil}$ pour tous les sommets $s \in S(\bar{C}^{nr})$. Sauf pour l'indice 16, il y a une unique orbite $\mathcal{O}_i \in \mathfrak{g}_{s_i,nil}/conj$ telle que $\iota_{s_i,nil}(\mathcal{O}_i) = N$. On pose alors $c_{s_i}(\mathcal{O}_i) = (N, b(s_i))$. Pour l'indice 16, il y en a deux : notons $\mathcal{O}_{16}'$ l'orbite paramétrée par $(2, 31^4)$ et $\mathcal{O}_{16}''$ l'orbite paramétrée par $(1^2, 3^21)$. On pose $c_{s_{16}}(\mathcal{O}_{16}') = (N, b'(s_{16}))$ et $c_{s_{16}}(\mathcal{O}_{16}'') = (N, b''(s_{16}))$. Montrons que

(2) $b(s_0) = b''(s_{16}) = b(s_{35}) = b_1$, $b'(s_{16}) = b(s_4) = b(s_2) = b_2$.

Il suffit de prouver que $b(s_0) = b''(s_{16}) = b(s_{35})$ et $b'(s_{16}) = b(s_4) = b(s_2)$. En effet, on sait déjà que $b(s_0) = b_1$, d'où les premières égalités de (2). L'assertion (iii) du lemme 3.2.7 entraîne alors que les trois autres classes sont forcément égales à b_2.

Introduisons la facette $\mathcal{F} \subset \bar{C}^{nr}$ telle que les éléments de $S(\bar{C}^{nr})$ adhérents à $\mathcal{F}$ soient s_0, s_{16}, s_{35}. Le groupe $G_{\mathcal{F},SC}$ est de type A_2. Considérons l'orbite nilpotente régulière $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}$ paramétrée par la partition 3. On a des plongements

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{g}_{s_0} \\ & \nearrow & \\ \mathfrak{g}_{\mathcal{F}} & \rightarrow & \mathfrak{g}_{s_{16}} \\ & \searrow & \\ & & \mathfrak{g}_{s_{35}} \end{array}$$

On vérifie que l'image de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ par le deuxième plongement est $\mathcal{O}''_{16}$ et, par le troisième plongement, est $\mathcal{O}_{35}$. En vertu de la compatibilité des applications $\iota_{s,nil}$, l'image de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ par le premier plongement est une orbite $\mathcal{O}'_0 \in \mathfrak{g}_{s_0,nil}/conj$ telle que

$$\iota_{s_0,nil}(\mathcal{O}'_0) = \iota_{\mathcal{F},nil}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) = \iota_{s_{35},nil}(\mathcal{O}_{35}) = N.$$

Il n'y a qu'une seule telle orbite à savoir $\mathcal{O}_0$, donc $\mathcal{O}'_0 = \mathcal{O}_0$. D'après 3.2.7 (3), on obtient alors

$$\begin{array}{ccccc} & & & & c_{s_{16}}(\mathcal{O}''_{16}) \\ & & & & \| \\ (N, b_1) & = & c_{s_0}(\mathcal{O}_0) & = & c_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \\ & & & & \| \\ & & & & c_{s_{35}}(\mathcal{O}_{35}) \end{array}$$

Cela prouve les premières égalités voulues.

Oublions la facette $\mathcal{F}$ précédente et notons maintenant $\mathcal{F}$ la facette telle que les éléments de $S(\bar{C}^{nr})$ adhérents à $\mathcal{F}$ soient s_{16}, s_4, s_2. Le groupe $G_{\mathcal{F},SC}$ est de type $A_1 \times A_1$. Considérons l'orbite $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}$ formée des couples d'éléments réguliers dans les deux composantes. On a comme ci-dessus des plongements

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{g}_{s_{16}} \\ & \nearrow & \\ \mathfrak{g}_{\mathcal{F}} & \rightarrow & \mathfrak{g}_{s_4} \\ & \searrow & \\ & & \mathfrak{g}_{s_2} \end{array}$$

On vérifie que les images de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ par ces plongements sont respectivement $\mathcal{O}'_{16}$, $\mathcal{O}_4$, $\mathcal{O}_2$. Le même raisonnement que ci-dessus conduit aux égalités

$$\begin{array}{ccc} & & c_{s_{16}}(\mathcal{O}'_{16}) \\ & & \| \\ c_{s_4}(\mathcal{O}_4) & = & c_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \\ & & \| \\ & & c_{s_2}(\mathcal{O}_2) \end{array}$$

Cela prouve les deuxièmes égalités voulues, d'où (2).

3.3 Orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}(F)$

3.3.1 La construction de DeBacker

Dans ce paragraphe, on suppose que G est un groupe réductif connexe défini sur F. On a la propriété suivante :

(1) soient $x \in Imm(G_{AD})$, $r \in \mathbb{R}$ avec $r \geq 0$ et $e \in \mathfrak{g}_{nil}(F) \cap \mathfrak{k}_{x,r}$; alors $exp(e) \in K_{x,r}$.

Preuve. Puisque e est nilpotent, les éléments e et $exp(e)$ sont les images naturelles d'éléments similaires appartenant respectivement à $\mathfrak{g}_{SC}(F)$ et $G_{SC}(F)$. L'assertion (1) pour ces éléments entraîne (1) pour nos éléments initiaux. Autrement dit, on peut remplacer G par G_{SC} et supposer G simplement connexe. On peut aussi remplacer le corps de base F par F^{nr}. Le groupe G est alors quasi-déployé et on peut utiliser les constructions de 2.1.10. On peut supposer $x \in App(T^{nr})$. La transformation $ad(e)$ de $\mathfrak{g}(F^{nr})$ conserve $\mathfrak{k}_x^{nr}$ donc $Ad(exp(e))$ aussi d'après la formule de 2.1.2 décrivant $exp(e)$. Un élément de $G(F^{nr})$ qui conserve $\mathfrak{k}_x^{nr}$ conserve aussi la facette contenant x (celle-ci est l'unique facette $\mathcal{F}$ telle que $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^{nr} = \mathfrak{k}_x^{nr}$). Puisque G est simplement connexe, le sous-groupe des éléments de $G(F^{nr})$ qui conservent cette facette est $K_x^{0,nr}$. Donc $exp(e) \in K_x^{0,nr}$. Si $r = 0$, on a $K_x^{0,nr} = K_{x,0}^{nr}$ et on a terminé. Supposons $r > 0$. On peut fixer $\tilde{y} \in \mathbb{T}^{nr}$ tel qu'en posant $y = a_T(\tilde{y})$, le point y appartienne à la même facette que x. On a alors $\mathfrak{k}_{x,0+}^{nr} = \mathfrak{k}_{y,0+}^{nr}$, donc $e \in \mathfrak{k}_{y,0+}^{nr}$. On fixe une extension finie F' de F^{nr} modérément ramifiée telle que G soit déployé sur F' et que, en notant $n = [F' : F^{nr}]$, on ait $n\tilde{y} \in X_*(T^{nr})$. Le raisonnement que l'on vient de faire montre que $exp(\lambda e) \in K_{y,F'}^0$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{o}_{F'}$. Donc $exp(\lambda e)$ se réduit en un élément de $G_{y,F'}$ que l'on note $u(\lambda)$. Parce que $e \in \mathfrak{k}_{y,0+}$, $Ad(u(\lambda))$ agit trivialement sur $\mathfrak{g}_{y,F'}$. Donc $u(\lambda)$ appartient au centre de $G_{y,F'}$. Parce que $n\tilde{y} \in X_*(T^{nr})$, y est un point spécial dans $Imm_{F'}(G_{AD})$ et, puisque G est semi-simple, $G_{y,F'}$ l'est aussi. Le centre de $G_{y,F'}$ est fini. L'application $\lambda \mapsto u(\lambda)$ se réduit en une application algébrique définie sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. C'est donc forcément l'application constante de valeur $u(0) = 1$. En particulier $exp(e)$ a pour réduction 1 donc appartient à $K_{y,0+,F'}$. Puisque c'est un élément de $G(F^{nr})$, on a en fait $exp(e) \in K_{y,0+}^{nr} = K_{x,0+}^{nr}$. Comme l'application $s \mapsto K_{x,s}^{nr}$ est continue à gauche, on peut définir le plus grand réel $s \in [0, r]$ tel que $exp(e) \in K_{x,s}^{nr}$. La relation $exp(e) \in K_{x,0+}^{nr}$ entraîne que $s > 0$. Supposons $s < r$. D'après [2], proposition 1.6.3, il y a un isomorphisme $\phi : K_{x,s}^{nr}/K_{x,s+}^{nr} \simeq \mathfrak{k}_{x,s}^{nr}/\mathfrak{k}_{x,s+}^{nr}$ vérifiant les conditions suivantes. Soient $g \in K_{x,s}^{nr}$ et $X \in \mathfrak{k}_{x,s}^{nr}$. Notons $\bar{g}$, resp. $\bar{X}$, l'image de g dans $K_{x,s}^{nr}/K_{x,s+}^{nr}$, resp. X dans $\mathfrak{k}_{x,s}^{nr}/\mathfrak{k}_{x,s+}^{nr}$. Supposons $\phi(\bar{g}) = \bar{X}$. Soient $z \in \mathbb{R}$ et $Z \in \mathfrak{k}_{x,z}^{nr}$. Alors $Ad(g)(Z) - Z - [X, Z]$ appartient à $\mathfrak{k}_{x,(z+s)+}^{nr}$. On applique cela à $g = exp(e)$. Par définition de s et d'après l'hypothèse $s < r$, on a $\bar{g} \neq 1$ d'où $\bar{X} \neq 0$. D'après [12] lemme B.6.1, on peut trouver $z \in \mathbb{R}$ et $Z \in \mathfrak{k}_{x,z}^{nr}$ de sorte que $[X, Z] \notin \mathfrak{k}_{x,(z+s)+}^{nr}$ (les hypothèses de l'article de DeBacker et Reeder sont plus fortes que les nôtres mais ces dernières suffisent pour le lemme cité). On a alors $Ad(exp(e))(Z) - Z \notin \mathfrak{k}_{x,(z+s)+}^{nr}$. Mais la définition de $exp(e)$ et l'hypothèse $e \in \mathfrak{k}_{x,r}$ entraînent que $Ad(exp(e))(Z) - Z \in \mathfrak{k}_{x,z+r}^{nr} \subset \mathfrak{k}_{x,(z+s)+}^{nr}$. Cette contradiction à laquelle conduit notre hypothèse $s < r$ prouve que $s = r$, c'est-à-dire que $exp(e) \in K_{x,r}^{nr}$. Cela prouve (1).

Soit $\mathcal{F}$ une facette de l'immeuble $Imm(G_{AD})$. On note $x \mapsto \bar{x}$ les applications de réduction de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}^{nr}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ ou de $K_{\mathcal{F}}^{0,nr}$ dans $G_{\mathcal{F}}$. On a défini les ensembles $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj$ et $\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$. Pour une orbite $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$, on note $Cl_F(\mathcal{O})$ son adhérence pour la topologie p-adique. Dans [9], DeBacker définit une application

$$rel_{\mathcal{F},F} : \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj \to \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj.$$

Rappelons la construction. Soit $\underline{\mathcal{O}} \in \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj$. Si $\underline{\mathcal{O}} = \{0\}$, on pose $rel_{\mathcal{F},F}(\underline{\mathcal{O}}) = \{0\}$. Supposons $\underline{\mathcal{O}} \neq \{0\}$. Choisissons un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet $(\underline{f}, \underline{h}, \underline{e})$ de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ tel que $\underline{e} \in \underline{\mathcal{O}}$. DeBacker démontre qu'il existe un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f, h, e) de $\mathfrak{g}(F)$ vérifiant les conditions suivantes :

$f, h, e \in \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$;

$\bar{f} = \underline{f}$, $\bar{h} = \underline{h}$, $\bar{e} = \underline{e}$.

On dira qu'un tel triplet relève $(\underline{f}, \underline{h}, \underline{e})$ dans $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$. DeBacker démontre que l'orbite nilpotente $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$ contenant e ne dépend pas du choix des $\mathfrak{sl}(2)$-triplets. Alors $rel_{\mathcal{F},F}(\underline{\mathcal{O}}) = \mathcal{O}$.

Remarque. Inversement, si (f, h, e) est un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet de $\mathfrak{g}(F)$ tel que $f, h, e \in \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$, alors $(\bar{f}, \bar{h}, \bar{e})$ est un $\mathfrak{sl}(2)$-triplets de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$.

Précisons quelques points de la construction qui sont implicites dans l'article de DeBacker mais que l'on préfère énoncer.

Lemme. *(i) Soient (f, h, e) et (f', h', e') deux $\mathfrak{sl}(2)$-triplets de $\mathfrak{g}(F)$. Supposons que les éléments f, h, e, f', h', e' appartiennent à $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ et supposons que les réductions $(\bar{f}, \bar{h}, \bar{e})$ et $(\bar{f}', \bar{h}', \bar{e}')$ soient deux $\mathfrak{sl}(2)$-triplets de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ qui sont conjugués par un élément de $G_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$, resp. qui sont égaux. Alors (f, h, e) et (f', h', e') sont conjugués par un élément de $K^0_{\mathcal{F}}$, resp. de $K^+_{\mathcal{F}}$.*

(ii) Soit $(\underline{f}, \underline{h}, \underline{e})$ un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$, soit $S \in \mathcal{T}_{max}$ un tore tel que $\mathcal{F}$ appartienne à l'appartement de $Imm(G_{AD})$ associé à S et que $\underline{h}$ appartienne à $\mathfrak{s}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. Alors il existe un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f, h, e) de $\mathfrak{g}(F)$ qui relève $(\underline{f}, \underline{h}, \underline{e})$ dans $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ et tel que $h \in \mathfrak{s}(\mathfrak{o}_F)$. On a alors $x_{*,h} \in X_*(S)$, $x_{*,\underline{h}} \in X_*(S_{\mathcal{F}})$ et ces éléments s'identifient par l'isomorphisme $X_*(S) \simeq X_*(S_{\mathcal{F}})$.

Preuve de (i). L'assertion concernant le cas où les réductions des deux $\mathfrak{sl}(2)$-triplets sont égales implique celle où elles sont seulement conjuguées. En effet si ces réductions sont conjuguées, on choisit un élément $k \in K^0_{\mathcal{F}}$ se réduisant en un élément $\bar{k}$ conjuguant $(\bar{f}', \bar{h}', \bar{e}')$ en $(\bar{f}, \bar{h}, \bar{e})$. On remplace (f', h', e') par son image par la conjugaison par k. On obtient un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet dans $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ dont la réduction coïncide avec $(\bar{f}, \bar{h}, \bar{e})$ et il reste à appliquer à ces triplets l'assertion concernant le cas où les réductions des deux $\mathfrak{sl}(2)$-triplets sont égales.

On suppose donc que $(\bar{f}, \bar{h}, \bar{e}) = (\bar{f}', \bar{h}', \bar{e}')$. D'après le résultat de DeBacker mentionné ci-dessus, e et e' appartiennent à la même orbite dans $\mathfrak{g}_{nil}(F)$. Puisque $\bar{e}' = \bar{e}$, on a $e' \in e + \mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}}$. Le lemme 5.2.1 de [9] dit qu'il existe $k \in K^+_{\mathcal{F}}$ et $Y \in \mathfrak{z}_G(f) \cap \mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}}$ de sorte que $ad(k)(e') = Y + e$. Parce que e et e' appartiennent à la même orbite, on a $Y = 0$ d'après [43] V.7(9). On conjugue le triplet (f', h', e') par k et on est ramené au cas où $e = e'$, ce que l'on suppose désormais. Fixons un point $x \in \mathcal{F}$. On sait que l'ensemble des réels r tels que $\mathfrak{k}_{x,r} \neq \mathfrak{k}_{x,r+}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ invariant par translations par $\mathbb{Z}$ et qu'il est d'image finie dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Notons ses éléments positifs ou nuls $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \ldots$. On note m l'entier tel que $\mathfrak{k}_{x,r_{i+m}} = \mathfrak{p}_F \mathfrak{k}_{x,r_i}$ pour tout i. On a $f' \in f + \mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}} = f + \mathfrak{k}_{x,r_1}$, $h' \in h + \mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}} = h + \mathfrak{k}_{x,r_1}$ et $K_{x,r} \subset K^+_{\mathcal{F}}$ pour tout $r > 0$. On voit qu'il suffit de démontrer l'assertion suivante :

(2) soit $i \geq 1$ un entier et soit (f_i, h_i, e) un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet de $\mathfrak{g}(F)$ tel que $f_i \in f + \mathfrak{k}_{x,r_i}$, $h_i \in h + \mathfrak{k}_{x,r_i}$; alors il existe $k \in K_{x,r_i} \cap Z_G(e)(F)$ tel qu'en posant $f_{i+1} = ad(k)(f_i)$ et $h_{i+1} = ad(k)(h_i)$, on ait $f_{i+1} \in f + \mathfrak{k}_{x,r_{i+1}}$, $h_{i+1} \in h + \mathfrak{k}_{x,r_{i+1}}$.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, posons $\mathfrak{g}_{x,r_j} = \mathfrak{k}_{x,r_j}/\mathfrak{k}_{x,r_{j+1}}$. L'action adjointe de l'algèbre $\mathfrak{k}_x = \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ conserve chaque $\mathfrak{k}_{x,r_j}$ et cette action se quotiente en une action de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ dans $\mathfrak{g}_{x,r_j}$.

En particulier, l'action du $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f,e,h) dans $\mathfrak{k}_{x,r_i}$ se quotiente en une action de $(\bar{f},\bar{h},\bar{e})$ dans $\mathfrak{g}_{x,r_i}$. En identifiant (f,h,e) au triplet standard dans $\mathfrak{sl}(2,F)$, on applique la proposition 3.1.1 à l'action du triplet (f,h,e) dans $\mathfrak{g}(F)$, cet espace étant muni de la chaîne de réseaux $\mathfrak{k}_{x,r_i} \supset \mathfrak{k}_{x,r_{i+1}} \supset ... \supset \mathfrak{k}_{x,r_{i+m}} = \mathfrak{p}_F\mathfrak{k}_{x,r_i}$. On peut fixer un ensemble fini J muni d'une application $d : J \to \{1,...,p\}$ et un morphisme injectif de $\mathfrak{sl}(2,F)$-modules $\phi : \oplus_{j\in J}\mathcal{W}_{d(j)} \to \mathfrak{g}(F)$ de sorte que $\phi(\oplus_{j\in J}\mathcal{L}_{d(j)}) \subset \mathfrak{k}_{x,r_i}$ et que cette dernière application se réduise en un isomorphisme

$$(3) \qquad \oplus_{j\in J}\,\bar{\mathcal{L}}_{d(j)} \simeq \mathfrak{g}_{x,r_i},$$

où on a noté $\bar{\mathcal{L}}_{d(j)} = \mathcal{L}_{d(j)}/\mathfrak{p}_F\mathcal{L}_{d(j)}$. On fait disparaître ϕ de la notation en identifiant son ensemble de départ à son image. Posons $y = f_i - f$ et $z = h_i - h$. Ce sont des éléments de $\mathfrak{k}_{x,r_i}$ par hypothèse et on note $\bar{y}$ et $\bar{z}$ leurs réductions dans $\mathfrak{g}_{x,r_i}$. Les relations $[e,f] = h$, $[e,f_i] = h_i$, $[h,e] = 2e$ et $[h_i,e] = 2e$ impliquent $[e,y] = z$ et $[z,e] = 0$, d'où $[\bar{e},\bar{y}] = \bar{z}$ et $[\bar{z},\bar{e}] = 0$. Ecrivons $\bar{y} = \sum_{j\in J}\bar{y}_j$ et $\bar{z} = \sum_{j\in J}\bar{z}_j$ selon l'isomorphisme (3). On a encore $[\bar{e},\bar{y}_j] = \bar{z}_j$ et $[\bar{z}_j,\bar{e}] = 0$ pour tout j. Ces relations impliquent $[\bar{h},\bar{z}_j] = (d(j)-1)\bar{z}_j$ et $\bar{z}_j = 0$ si $d(j) = 1$. Si $d(j) = 1$, posons $z'_j = 0$. Si $d(j) \geq 2$, il est loisible de fixer un élément $z'_j \in \mathcal{L}_{d(j)}$ qui vérifie $[h,z'_j] = (d(j)-1)z'_j$, $[e,z'_j] = 0$ et $\bar{z}'_j = \frac{1}{d(j)-1}\bar{z}_j$. Posons $z' = \sum_{j\in J} z'_j$. Les relations imposées impliquent que z' est un élément du radical nilpotent de $\mathfrak{z}_G(e)(F)$. Posons $k = exp(z')$. On a $k \in Z_G(e)(F)$. Puisque $z' \in \mathfrak{k}_{x,r_i}$, on a $k \in K_{x,r_i}$ d'après (1). Par construction de k, on a $Ad(k)(h_i) \equiv h_i + [z',h_i]\, mod\, \mathfrak{k}_{x,r_{i+1}}$. On a aussi $h_i + [z',h_i] \equiv h_i + [z',h] = h + z + [z',h]\, mod\, \mathfrak{k}_{x,r_{i+1}}$. Mais, d'après les définitions, on a $\bar{z} + [\bar{z}',\bar{h}] = 0$. Donc $Ad(k)(h_i) \in h + \mathfrak{k}_{x,r_{i+1}}$. Notons (f_{i+1},h_{i+1},e) l'image de (f_i,h_i,e) par la conjugaison par k. Alors $h_{i+1} \in h + \mathfrak{k}_{x,r_{i+1}}$. Posons $y'' = f_{i+1} - f$, $z'' = h_{i+1} - h$, notons encore $\bar{y}''$ et $\bar{z}''$ leurs réductions dans $\mathfrak{g}_{x,r_i}$ et introduisons leurs composantes $\bar{y}''_j$ et $\bar{z}''_j$ comme ci-dessus. On a $\bar{z}'' = 0$. Les égalités $[h_{i+1},f_{i+1}] = -2f_{i+1}$ et $[h,f] = -2f$ entraînent $[\bar{h},\bar{y}''] = -2\bar{y}''$ d'où $[\bar{h},\bar{y}''_j] = -2\bar{y}''_j$ pour tout $j \in J$. On a aussi comme ci-dessus $[\bar{e},\bar{y}''_j] = \bar{z}''_j = 0$. Ces deux égalités entraînent $\bar{y}''_j = 0$ pour tout $j \in J$, d'où $\bar{y}'' = 0$. Alors $f_{i+1} \in f + \mathfrak{k}_{x,r_{i+1}}$. Cela démontre (2) et l'assertion (i) de l'énoncé.

Preuve de (ii). Fixons un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f',h',e') relevant $(\underline{f},\underline{h},\underline{e})$ dans $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$. Notons M le commutant de h' dans G. D'après 3.1.2 (1), c'est un F-Levi de G qui est égal au commutant dans G de l'image du groupe à un paramètre $X_{*,h'}$. D'après [9] corollaire 4.5.9, la facette $\mathcal{F}$ est contenue dans $Imm^G(M_{ad})$. Notons $\mathcal{F}_M$ la facette de $Imm(M_{AD})$ qui contient $p_M(\mathcal{F})$. En appliquant les constructions de 2.1.6 à un point $x \in \mathcal{F}$ quelconque, on déduit de M un $\mathbb{F}_q$-Levi $M_{\mathcal{F}}$ de $G_{\mathcal{F}}$, qui s'identifie à $M_{\mathcal{F}_M}$. Montrons que

(4) $M_{\mathcal{F}}$ est le commutant de $\underline{h}$ dans $G_{\mathcal{F}}$.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, notons $\mathfrak{g}_i$ le sous-espace des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $[h,X] = iX$. Pour $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, notons $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},i}$ le sous-espace des $X \in \mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ tels que $[\underline{h},X] = iX$. Notons $\pi : \mathfrak{k}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ la projection naturelle. En appliquant la proposition 3.1.1 à la suite de réseaux $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}} \supset \mathfrak{k}^+_{\mathcal{F}} \supset \mathfrak{p}_F\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ de $\mathfrak{g}(F)$, on voit que $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ est somme directe des sous-espaces $\pi(\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}})$ quand i décrit $\mathbb{Z}$. Il est clair que $\pi(\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}) \subset \mathfrak{g}_{\mathcal{F},\bar{i}}$ où $\bar{i}$ est l'image de i dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. D'après notre hypothèse sur p, l'ensemble des i tels que $\mathfrak{g}_i \neq \{0\}$ est contenu dans un intervalle $[-a,a]$ avec $a < p$. Il y a un seul élément i de cet intervalle tel que $\bar{i} = 0$, à savoir $i = 0$. Il en résulte que $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},0} = \pi(\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}})$. L'espace $\mathfrak{g}_0$ n'est autre que $\mathfrak{m}$ donc $\pi(\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}})$ est égal à $\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$. L'espace $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},0}$ est égal à l'algèbre de Lie de $Z_{G_{\mathcal{F}}}(\underline{h})$. On obtient donc que cette dernière algèbre de Lie est égale à $\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$. Puisque $M_{\mathcal{F}}$ et $Z_{G_{\mathcal{F}}}(\underline{h})$ sont déterminés par leurs algèbres de Lie, cela implique (4).

Puisque $\underline{h} \in \mathfrak{s}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$, (4) implique que $S_{\mathcal{F}} \subset M_{\mathcal{F}}$. On peut alors relever $S_{\mathcal{F}}$ en un tore

$S' \in \mathcal{T}_{max}$ contenu dans M et tel que $\mathcal{F}_M$ appartienne à l'appartement de $Imm(M_{AD})$ associé à S' (dire que S' relève $S_{\mathcal{F}}$ signifie que $S_{\mathcal{F}} = S'_{\mathcal{F}}$). Ces propriétés restent valables en remplaçant M par G : S' relève $S_{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{F}$ appartient à l'appartement de $Imm(G_{AD})$ associé à S'. Le tore S vérifie les mêmes propriétés. Il existe alors $k \in K^+_{\mathcal{F}}$ tel que $kS'k^{-1} = S$. Fixons un tel k et notons (f, h, e) l'image de (f', h', e') par $Ad(k)$. Puisque k appartient à $K^+_{\mathcal{F}}$, le triplet (f, h, e) relève encore $(\underline{f}, \underline{h}, \underline{e})$ dans $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$. Reprenons les constructions ci-dessus en remplaçant (f', h', e') par (f, h, e), c'est-à-dire en définissant M comme le commutant de h. On a maintenant $S \subset M$. L'image du groupe à un paramètre $X_{*,h}$ est un sous-tore déployé de G qui est contenu dans le centre de M, donc commute à S. Puisque S est un sous-tore déployé maximal, cette image est contenue dans S. Cela implique $x_{*,h} \in X_*(S)$ et $h \in \mathfrak{s}(\mathfrak{o}_F)$. Introduisons l'homomorphisme $\phi : SL(2) \to G$ associé à (f, h, e), cf. 3.1.2 (dans cette référence, ϕ était à valeurs dans G_{SC}, on prend ici son composé avec l'homomorphisme naturel $G_{SC} \to G$). Introduisons l'homomorphisme similaire $\underline{\phi} : SL(2) \to G_{\mathcal{F}}$ associé à $(\underline{f}, \underline{h}, \underline{e})$. Le groupe $SL(2, \mathfrak{o}_{F^{nr}})$ est engendré par les éléments $exp(\lambda \boldsymbol{e})$ et $exp(\lambda \boldsymbol{f})$ pour $\lambda \in \mathfrak{o}_{F^{nr}}$. Les images par ϕ de ces éléments sont $exp(\lambda e)$ et $exp(\lambda f)$ qui appartiennent à $K^{0,nr}_{\mathcal{F}}$ d'après (1) et se réduisent en $exp(\bar{\lambda}\underline{e}) = \underline{\phi}(\bar{\lambda}\mathbf{e})$ et $exp(\bar{\lambda}\underline{f}) = \underline{\phi}(\bar{\lambda}\mathbf{f})$. On en déduit que $\phi(SL(2, \mathfrak{o}_{F^{nr}})) \subset K^{0,nr}_{\mathcal{F}}$ et que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} SL(2, \mathfrak{o}_{F^{nr}}) & \stackrel{\phi}{\to} & K^{0,nr}_{\mathcal{F}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ SL(2, \bar{\mathbb{F}}_q) & \stackrel{\underline{\phi}}{\to} & G_{\mathcal{F}} \end{array}$$

Alors $x_{*,\underline{h}}$ est la réduction de $x_{*,h}$, c'est-à-dire que $x_{*,\underline{h}}(\bar{\lambda})$ est la réduction de $x_{*,h}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{o}^{\times}_{F^{nr}}$. Puisque $x_{*,\underline{h}}$ prend ses valeurs dans S, $x_{*,\underline{h}}$ prend ses valeurs dans $S_{\mathcal{F}}$. Autrement dit, $x_{*,\underline{h}} \in X_*(S_{\mathcal{F}})$ et cet élément s'identifie à $x_{*,h}$ par l'isomorphisme $X_*(S_{\mathcal{F}}) \simeq X_*(S)$. $\square$

Il résulte du lemme ci-dessus que

(5) $rel_{\mathcal{F},F}$ conserve les termes $x_{*,\mathcal{O}}$.

Précisons ce que l'on entend par là. Fixons un tore $T^{nr} \in \mathcal{T}^{nr}_{max}$ tel que $\mathcal{F}$ soit contenue dans l'appartement de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ associé à T^{nr} et notons T le commutant de T^{nr} dans G. Soit $\underline{\mathcal{O}} \in \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}/conj$, posons $\mathcal{O} = rel_{\mathcal{F},F}(\underline{\mathcal{O}})$. L'élément $x_{*,\underline{\mathcal{O}}}$ s'identifie à la classe de conjugaison par le groupe de Weyl $W_{\mathcal{F}}$ de $G_{\mathcal{F}}$ d'un élément de $X_*(T^{nr})$ et $x_{*,\mathcal{O}}$ s'identifie à la classe de conjugaison par W d'un élément de $X_*(T)$. Alors $x_{*,\mathcal{O}}$ est l'unique classe de conjugaison par W contenant la classe $x_{*,\underline{\mathcal{O}}}$.

On a aussi, cf. [9] corollaire 5.2.5 :

(6) soit $\mathcal{O}' \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$; supposons qu'il existe $e' \in \mathcal{O}' \cap \mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$ tel que $\bar{e}' \in \underline{\mathcal{O}}$; alors $rel_{\mathcal{F},F}(\underline{\mathcal{O}}) \subset Cl_F(\mathcal{O}')$;

Soit $\mathcal{F}'$ une facette contenue dans $\bar{\mathcal{F}}$. On a alors $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{k}_{\mathcal{F}'}$. D'après 2.1.12, on peut identifier $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ à une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}'}$. Il en résulte une application $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj \to \mathfrak{g}_{\mathcal{F}',nil}(\mathbb{F}_q)/conj$ qui est canonique. Alors

(7) $rel_{\mathcal{F},F}$ est la composée de $rel_{\mathcal{F}',F}$ et de cette application.

Soit $g \in G(F)$, posons $\mathcal{F}' = g\mathcal{F}$. Comme en 2.1.13, on a un isomorphisme $\overline{Ad(g)}$: $\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj \to \mathfrak{g}_{\mathcal{F}',nil}(\mathbb{F}_q)/conj$. Il est clair que

(8) $rel_{\mathcal{F},F}$ est la composée de $rel_{\mathcal{F}',F}$ et de $\overline{Ad(g)}$.

Enfin, et surtout, on a, cf. [9] théorème p. 297 :

(9) $\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$ est réunion des images des applications $rel_{\mathcal{F},F}$ quand $\mathcal{F}$ décrit les facettes de l'immeuble $Imm(G_{AD})$.

D'après (7), on peut se limiter dans (9) à des facettes qui sont des sommets et, d'après (8), on peut même se limiter à des sommets dans un ensemble de représentants des orbites pour l'action de $G(F)$ dans l'ensemble des sommets.

3.3.2 Un diagramme d'applications

Pour la fin de la section 3, on reprend les hypothèses de 3.2.1 : G est quasi-déployé, adjoint et absolument simple.

Soit $\mathcal{F}$ une facette de l'immeuble $Imm(G_{AD})$. Soit F' une extension finie non ramifiée de F, notons $\mathbb{F}_{q^f}$ son corps résiduel. Il existe une unique facette $\mathcal{F}_{F'}$ de $Imm_{F'}(G_{AD})$ telle que $\mathcal{F}$ soit le sous-ensemble des points fixes dans $\mathcal{F}_{F'}$ par l'action de $\Gamma_{F'/F}$. On a $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}} = \mathfrak{g}_{\mathcal{F}_{F'}}$. Il résulte des définitions que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj & \overset{rel_{\mathcal{F},F}}{\rightarrow} & \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_{q^f})/conj & \overset{rel_{\mathcal{F}_{F'},F'}}{\rightarrow} & \mathfrak{g}_{nil}(F')/conj \end{array}$$

Avec des notations évidentes, on en déduit une suite d'applications

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}/conj = \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\bar{\mathbb{F}}_q)/conj \rightarrow \mathfrak{g}_{nil}(F^{nr})/conj \rightarrow (\mathfrak{g}_{nil}(\bar{F})/conj)^{I_F} = (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F},$$

dont on note $Rel_{\mathcal{F}}$ la composée. On a supposé que $\mathcal{F}$ était une facette de $Imm(G_{AD})$ mais on peut remplacer le corps de base F par une extension finie non ramifiée. L'application précédente est donc définie pour toute facette $\mathcal{F}$ de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$.

Le résultat de DeBacker 3.3.1(9) nous dit que $\mathfrak{g}_{nil}(F^{nr})/conj$ est réunion des images des applications $rel_{\mathcal{F},F^{nr}}$ quand $\mathcal{F}$ décrit l'ensemble des facettes de $Imm_{F^{nr}}(G)$. Le groupe G est supposé quasi-déployé. Pour toute extension finie F' de F, toute orbite dans $\mathfrak{g}_{nil}$ qui est conservée par $\Gamma_{F'}$ contient un point de $\mathfrak{g}(F')$. Il en résulte que l'application $\mathfrak{g}_{nil}(F^{nr})/conj \rightarrow (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}$ est surjective. Donc $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}$ est réunion des images des applications $Rel_{\mathcal{F}}$ quand $\mathcal{F}$ décrit l'ensemble des facettes de $Imm_{F^{nr}}(G)$.

Reprenons les constructions de 2.1.10. Rappelons que l'on note F^G la plus petite extension de F^{nr} telle que G soit déployé sur F^G. Fixons une extension finie modérément ramifiée F' de F^G. On a introduit le point $s_0 \in Imm(G)$. Le groupe $\mathbf{G}$ s'identifie à $G_{s_0,F'}$. On peut fixer une extension finie E de F de sorte que $F' = E^{nr}$. En se plaçant sur le corps de base E, on a défini l'application $Rel_{s_0} : \mathfrak{g}_{s_0,F',nil}/conj \rightarrow \mathfrak{g}_{nil}/conj$. Elle s'identifie à une application que nous notons

$$\mathbf{Rel} : \mathfrak{g}_{nil}/conj \rightarrow \mathfrak{g}_{nil}/conj.$$

Cette application "conserve les termes $x_{*,\mathcal{O}}$", cf. 3.3.1(5). Puisque les groupes de Weyl de $\mathbf{G}$ et de G sont les mêmes, pour $\boldsymbol{\mathcal{O}} \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$, le terme $x_{*,\mathbf{Rel}(\boldsymbol{\mathcal{O}})}$ détermine $x_{*,\boldsymbol{\mathcal{O}}}$. Puisque ces termes déterminent les orbites, l'application $\mathbf{Rel}$ est injective. Elle est en fait bijective : la classification des orbites nilpotentes d'une algèbre de Lie ne dépend pas du corps de base pourvu que celui-ci soit algébriquement clos et de caractéristique nulle ou de caractéristique p vérifiant 3.2.1(1). On a déjà utilisé des paramétrages de nos ensembles $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ et $\mathfrak{g}_{nil}/conj$. L'application $\mathbf{Rel}$ se traduit par l'identité en termes de paramètres, toujours parce que $\mathbf{Rel}$ conserve les termes $x_{*,\mathcal{O}}$.

Le groupe Γ_F agit sur $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ et $\mathfrak{g}_{nil}/conj$. Il résulte de sa construction que l'application $\mathbf{Rel}$ est équivariante pour ces actions. En particulier $\mathbf{Rel}((\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}) = (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F}$.

Soit $\mathcal{F}$ une facette de l'appartement $App_{F^{nr}}(T^{nr})$. On a défini un diagramme d'applications

$$\begin{array}{ccc} & & (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F} \\ & \nearrow \iota_{\mathcal{F},nil} & \\ \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}/conj & & \downarrow \mathbf{Rel} \\ & \searrow Rel_{\mathcal{F}} & \\ & & (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F} \end{array}$$

Ce diagramme est commutatif. En effet, chaque application conserve les termes $x_{*,\mathcal{O}}$, en un sens convenable, et ces termes déterminent les orbites nilpotentes.

3.3.3 Comparaison des commutants

Fixons une extension finie modérément ramifiée F' de F^{nr} contenant F^G, autrement dit sur laquelle G est déployé. Pour simplifier la notation, on pose $\mathbf{K} = K^0_{s_0,F'}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{s_0,F'}$ etc... On note $k \mapsto \bar{k}$ l'application de réduction naturelle de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{G} \simeq G_{s_{0,F'}}$. On note de même $X \mapsto \bar{X}$ l'application de réduction de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$.

Soit $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{e})$ un $\mathfrak{sl}(2)$ triplet de $\mathfrak{g}$. Comme on l'a dit en 3.3.2, on peut appliquer la construction de DeBacker en remplaçant le corps de base F par une extension finie convenable contenue dans F'. Ainsi, on fixe un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f, e, h) de $\mathfrak{g}(F')$ relevant $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{e})$ dans $\mathfrak{k}$. On pose $Z = Z_G(f, h, e)$, $\mathbf{Z} = Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{e})$ et, si l'orbite de $\mathbf{e}$ est conservée par I_F, $\mathbf{Z}^+ = Z_{\mathbf{G}^+}(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{e})$. On a $Z/Z^0 = A(e)$ et on a défini le quotient $\bar{A}(e)$ de $A(e)$. D'où un homomorphisme surjectif $Z \to \bar{A}(e)$ dont on note Z^1 le noyau. On définit de même $\mathbf{Z}^1$.

Considérons le cas où l'hypothèse suivante est vérifiée :

(Hyp) l'orbite de $\mathbf{e}$ est conservée par l'action de Γ_F et $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{e})$ est fixé par l'action de Γ_F^{nr}.

Rappelons que $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G} \rtimes \Gamma_{F^G/F^{nr}}$. Pour $\sigma \in I_F$, on note $\bar{\sigma}$ l'image de σ dans $\Gamma_{F^G/F^{nr}}$ et $\mathbf{Z}_{\bar{\sigma}}$ la fibre de $\mathbf{Z}^+$ au-dessus de $\bar{\sigma}$. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. Notons Z_σ l'ensemble des $g \in G$ tels que $Ad(g) \circ \sigma$ fixe le triplet (f, h, e). Il est conservé par multiplication à gauche par Z et, s'il est non vide, il est réduit à une unique classe pour cette action. Puisque (f, h, e) est fixé par $\Gamma_{F'}$, Z_σ ne dépend que de l'image σ^{mod} de σ dans Γ_F^{mod}. Ecrivons $\sigma^{mod} = \sigma_I \sigma_{nr}$ avec $\sigma_I \in I_F^{mod}$ et $\sigma_{nr} \in \Gamma_F^{nr}$. Notons $\bar{\sigma}$ l'image de σ_I dans $\Gamma_{F^G/F^{nr}}$. On définit une application $\xi_\sigma : Z_\sigma(F') \cap \mathbf{K} \to \mathbf{G}^+$ par $\xi_\sigma(g) = (\bar{g}, \bar{\sigma})$ où $\bar{g}$ est la réduction naturelle de g dans $\mathbf{G}$. Parce que $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{e})$ est fixé par l'action de Γ_F^{nr}, on voit que l'image de ξ_σ est contenue dans $\mathbf{Z}_{\bar{\sigma}}$.

Proposition. *(i) L'homomorphisme de réduction $Z(F') \cap \mathbf{K} \to \mathbf{Z}$ est surjectif et se quotiente en un isomorphisme*

$$(Z(F') \cap \mathbf{K})/(Z^0(F') \cap \mathbf{K}) \simeq \mathbf{Z}/\mathbf{Z}^0 = A(\mathbf{e}).$$

(ii) L'injection naturelle $Z(F') \cap \mathbf{K} \to Z$ se quotiente en un isomorphisme

$$(Z(F') \cap \mathbf{K})/(Z^0(F') \cap \mathbf{K}) \simeq Z/Z^0 = A(e).$$

(iii) L'isomorphisme $A(\mathbf{e}) \to A(e)$ déduit des isomorphismes de (i) et (ii) se quotiente en un isomorphisme $\bar{A}(\mathbf{e}) \to \bar{A}(e)$.

(iv) Supposons vérifiée l'hypothèse (Hyp). Pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, l'application ξ_σ se quotiente en un isomorphisme

$$(Z^1(F') \cap \mathbf{K}) \backslash Z_\sigma(F') \cap \mathbf{K}) \to \mathbf{Z}^1 \backslash \mathbf{Z}_{\bar{\sigma}}.$$

(v) Supposons vérifiée l'hypothèse (Hyp). Pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, l'injection naturelle $Z_\sigma(F') \cap \mathbf{K} \to Z_\sigma$ se quotiente en une bijection

$$(Z^1(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_\sigma(F') \cap \mathbf{K}) \to Z^1\backslash Z_\sigma.$$

Preuve de (i). Quitte à étendre le corps de base F, on peut supposer $F' = F^{nr}$, cela simplifie les notations. Soit $k \in \mathbf{K}$. Remplaçons les triplets (f, h, e), resp. $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{e})$, par leurs images par $Ad(k)$, resp. $Ad(\bar{k})$. L'assertion (i) pour ces triplets est équivalente à la même assertion pour les triplets d'origine. Cela nous autorise à effectuer de telles conjugaison, ce qui nous permettra d'imposer des conditions supplémentaires à nos triplets.

Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}$. On relève $\mathbf{x}$ en un élément $k \in \mathbf{K}$. Notons (f', h', e') l'image de (f, h, e) par $Ad(k)$. Alors les triplets (f, h, e) et (f', h', e') relèvent tous deux $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{e})$ dans $\mathfrak{k}$. On applique le lemme 3.3.1 : il existe $k' \in \mathbf{K}^+$ tel que l'image de (f', h', e') par $Ad(k')$ soit égale à (f, h, e). Alors $Ad(k'k)$ conserve (f, h, e), c'est-à-dire $k'k \in Z$. On a plus précisement $k'k \in Z(F^{nr}) \cap \mathbf{K}$ et l'image dans $\mathbf{Z}$ de $k'k$ est $\mathbf{x}$. Donc l'homomorphisme de réduction $Z(F^{nr}) \cap \mathbf{K} \to \mathbf{Z}$ est surjectif.

Montrons que

(1) $\mathfrak{z}$ est l'image par réduction de $\mathfrak{z}(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$; a fortiori, $dim(Z^0) = dim(\mathbf{Z}^0)$.

On applique le lemme 3.1.1 à l'action du triplet (f, h, e) dans $\mathfrak{g}(F^{nr})$, cet espace étant muni de la chaîne de réseaux réduite à $\mathfrak{k} \supset \mathfrak{p}_{F^{nr}}\mathfrak{k}$. Ce lemme fournit une décomposition de $\mathfrak{g}(F^{nr})$ en somme directe de sous-espaces irréductibles pour l'action du triplet (f, h, e) et une décomposition correspondante de $\mathfrak{g}$ en somme directe de sous-espaces irréductibles pour l'action du triplet $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{e})$. L'algèbre $\mathfrak{z}(F^{nr})$ est la somme des sous-représentations de dimension 1. Le lemme entraîne que $\mathfrak{z}(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$ se réduit en la somme des sous-représentations de dimension 1 de $\mathfrak{g}$ et cette somme est justement $\mathfrak{z}$. D'où (1).

Fixons un sous-tore maximal $\mathbf{S}$ de $\mathbf{Z}^0$. Quitte à conjuguer le triplet $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{e})$,on peut supposer que $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$. Notons $\mathbf{M}$ le commutant de $\mathbf{S}$ dans $\mathbf{G}$. C'est un Levi de $\mathbf{G}$. Puisque $\mathbf{S} \subset \mathbf{Z}$, on a $\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{e} \in \mathfrak{m}$. Donc $Z(\mathbf{M})^0$ est contenu dans $\mathbf{Z}^0$. Par construction, on a $\mathbf{S} \subset Z(\mathbf{M})^0$. La maximalité de $\mathbf{S}$ entraîne que $\mathbf{S} = Z(\mathbf{M})^0$. Par la bijection $X_*(\mathbf{T}) \simeq X_*(T)$, $\mathbf{S}$ se relève en un sous-tore S de T. On note M son commutant dans G. D'après 2.1.6(3), on a encore $S = Z(M)^0$, le point s_0 appartient à $Imm^G_{F^{nr}}(M_{ad})$ et, en notant $s_{0,M}$ l'image de s_0 dans $Imm_{F^{nr}}(M_{ad})$, on a $M_{s_{0,M}} = \mathbf{M}$. Affectons d'un exposant M les objets analogues pour M à ceux introduits pour G, en particulier $\mathbf{K}^M = K^{M,0,nr}_{s_{0,M}}$, $\mathfrak{k}^M = \mathfrak{k}^{M,nr}_{s_{0,M}}$. On a $\mathfrak{k}^M = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}(F^{nr})$. Puisque le triplet $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{e})$ est contenu dans $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{nr}_{x_{0,M}}$, on peut le relever en un triplet contenu dans $\mathfrak{k}^M$ et on peut supposer que notre triplet (f, h, e) est un tel triplet, c'est-à-dire $f, h, e \in \mathfrak{m}(F^{nr})$. On a alors $S \subset Z^0$. Montrons que

(2) S est un sous-tore maximal (sur $\bar{F}$) de Z^0, a fortiori Z^0 est déployé sur F^{nr}.

Il existe en tout cas un sous-tore maximal S' de Z^0 qui est défini sur F^{nr} et contient S. Alors $\mathfrak{s}'(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$ est un sous-réseau de $\mathfrak{z}(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$ qui se réduit en une sous-algèbre $\mathfrak{s}'$ de $\mathfrak{z}$ d'après (1). Puisque $S \subset S'$ et que S' est commutatif, $\mathfrak{s}'$ est contenu dans le commutant de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{z}$. Puisque $\mathbf{S}$ est un sous-tore maximal de $\mathbf{Z}^0$, cela implique $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}$. Mais les dimensions de S et S' sont égales aux dimensions de $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}'$, donc S et S' sont de même dimension et l'inclusion $S \subset S'$ est une égalité. Cela prouve (2).

Notons Σ^Z l'ensemble des racines de S dans $\mathfrak{z}$. Pour $\alpha \in \Sigma^Z$, notons $\mathfrak{z}_\alpha$ l'espace radiciel associé à α et $\mathfrak{z}_\alpha$ l'image dans $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{z}_\alpha(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$. L'espace $\mathfrak{z}_\alpha$ est non nul et inclus dans $\mathfrak{z}$ d'après (1). Il est clair que, modulo l'isomorphisme $X^*(S) \simeq X^*(\mathbf{S})$, $\mathbf{S}$ agit dans $\mathfrak{z}_\alpha$ par la racine α. Cela implique que α est une racine de $\mathbf{S}$ dans $\mathfrak{z}$ et que $\mathfrak{z}_\alpha$ en est le sous-espace radiciel associé. Par comparaison des dimensions, cf. (1), on voit que Σ^Z s'identifie à l'ensemble de racines de $\mathbf{S}$ dans $\mathfrak{z}$.

Fixons une paire de Borel épinglée $(B^Z, S, (H_\alpha)_{\alpha\in\Delta^Z})$ de Z conservée par l'action de I_F et telle que, pour tout $\alpha \in \Delta^Z$, H_α soit un générateur du $\mathfrak{o}_{F^{nr}}$-module $\mathfrak{z}_\alpha(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$. Complétons l'épinglage $(H_\alpha)_{\alpha\in\Delta^Z}$ en une famille de Chevalley $(H_\alpha)_{\alpha\in\Sigma^Z}$. Montrons que

(3) pour tout $\alpha \in \Sigma^Z$, H_α est un générateur de $\mathfrak{z}_\alpha(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$.

Commençons par prouver (3) pour les racines positives. Considérons une telle racine $\alpha > 0$. On peut écrire $\alpha = \sum_{\beta\in\Delta^Z} m(\beta)\beta$, avec des entiers $m(\beta) \geq 0$. On pose $l(\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta^Z} m(\beta)$ et on raisonne par récurrence sur $l(\alpha)$. L'assertion est vérifiée par hypothèse si $\alpha \in \Delta^Z$, c'est-à-dire si $l(\alpha) = 1$. Supposons $l(\alpha) > 1$. On peut décomposer α en $\alpha' + \beta$ où $\alpha' \in \Sigma^Z$ vérifie $l(\alpha') = l(\alpha) - 1$ et où $\beta \in \Delta^Z$. L'hypothèse de récurrence dit que $H_{\alpha'}$, resp. H_β, est un générateur de $\mathfrak{z}_{\alpha'}(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$, resp. $\mathfrak{z}_\beta(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$. Il en résulte que $[H_{\alpha'}, H_\beta]$ appartient à $\mathfrak{k}$. Par définition d'une famille de Chevalley, on a $[H_{\alpha'}, H_\beta] = rH_\alpha$, où $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$ est premier à p. Donc $H_\alpha \in \mathfrak{z}_\alpha(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$. Par réduction, on a $[\bar{H}_{\alpha'}, \bar{H}_\beta] = \bar{r}\bar{H}_\alpha$. Mais, puisque $\alpha' + \beta$ est une racine de $\mathbf{S}$, le produit $[\bar{H}_{\alpha'}, \bar{H}_\beta]$ est un élément non nul de $\mathfrak{z}_\alpha$. Donc $\bar{H}_\alpha \neq 0$, ce qui équivaut à ce que H_α soit un générateur de $\mathfrak{z}_\alpha(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$. Cela démontre (3) pour les racines positives. Soit $\alpha \in \Sigma^Z$. Fixons $\lambda \in F^{nr,\times}$ tel que $\lambda H_{-\alpha}$ soit un générateur de $\mathfrak{z}_{-\alpha}(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$. Posons $H'_{-\alpha} = \lambda H_{-\alpha}$. On a $[H_\alpha, H'_{-\alpha}] = \lambda\check{\alpha}^Z$, où $\check{\alpha}^Z$ est la coracine dans $X_*(S)$ associée à α. Puisque H_α et $H'_{-\alpha}$ appartiennent à $\mathfrak{k}$, on a $\lambda\check{\alpha}^Z \in \mathfrak{k}$. Par définition de S, on a $\mathfrak{s}(F^{nr}) \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{s}(\mathfrak{o}_{F^{nr}}) = X_*(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}_{F^{nr}}$. La coracine $\check{\alpha}^Z$ n'est pas forcément un élément primitif de $X_*(S)$ mais elle l'est dans $X_*(S_{sc})$, où S_{sc} est l'image réciproque de S dans Z^0_{SC}. Notre hypothèse $(Hyp)_1(p)$ implique que $X_*(S_{sc})$ est un sous-groupe de $X_{*,\mathbb{Q}}(S_{sc}) \cap X_*(S)$ d'indice premier à p. La relation $\lambda\check{\alpha}^Z \in \mathfrak{k}$ implique donc $\lambda \in \mathfrak{o}_{F^{nr}}$. Par réduction de la relation $[H_\alpha, H'_{-\alpha}] = \lambda\check{\alpha}^Z$, on obtient $[\bar{H}_\alpha, \bar{H}'_{-\alpha}] = \bar{\lambda}\check{\alpha}^Z$, où $\check{\alpha}^Z$ est identifié à un élément de $X_*(\mathbf{S})$. Puisque $\bar{H}_\alpha$ et $\bar{H}'_\alpha$ sont des éléments non nuls de $\mathfrak{z}_\alpha$ et $\mathfrak{z}_{-\alpha}$, $[\bar{H}_\alpha, \bar{H}'_{-\alpha}]$ est non nul. Cela implique $\bar{\lambda} \neq 0$, ce qui équivaut à $\lambda \in \mathfrak{o}^\times_{F^{nr}}$. Mais alors, $H_{-\alpha}$ est un générateur de $\mathfrak{z}_{-\alpha}(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$. Cela prouve (3).

Puisque Z^0 est déployé sur F^{nr}, la paire de Borel épinglée que l'on a fixée détermine un point spécial $x^Z \in Imm_{F^{nr}}(Z^0_{AD})$. Fixons une base D de $X_*(S)$ sur $\mathbb{Z}$. C'est aussi une base de $\mathfrak{s}(\mathfrak{o}_{F^{nr}})$ sur $\mathfrak{o}_{F^{nr}}$. Par définition, la sous-algèbre parahorique $\mathfrak{k}^Z$ associée à x^Z est le $\mathfrak{o}_{F^{nr}}$-module engendré par D et la famille $(H_\alpha)_{\alpha\in\Sigma^Z}$. Il résulte de (1) et (3) que $\mathfrak{k}^Z \subset \mathfrak{z}(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$ et que l'ensemble de générateurs ci-dessus de $\mathfrak{k}^Z$ se projette en une base de $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}(F^{nr}) \cap \mathfrak{k})/\mathfrak{p}_{F^{nr}}(\mathfrak{z}(F^{nr}) \cap \mathfrak{k})$. Le lemme de Nakayama entraîne alors $\mathfrak{k}^Z = \mathfrak{z}(F^{nr}) \cap \mathfrak{k}$.

Montrons que

(4) l'application $Z(F^{nr}) \cap \mathbf{K} \to \mathbf{Z}$ se restreint en une surjection $Z^0(F^{nr}) \cap \mathbf{K} \to \mathbf{Z}^0$.

Notons $\mathbf{K}^Z$ le sous-groupe parahorique de $Z(F^{nr})$ associé à x^Z. Puisque Z^0 est déployé sur F^{nr} et que x^Z est spécial, $\mathbf{K}^Z$ est un sous-groupe compact maximal de $Z^0(F^{nr})$. Il est engendré par $S(\mathfrak{o}_{F^{nr}})$ et les exponentielles $exp(\lambda H_\alpha)$ pour $\lambda \in \mathfrak{o}_{F^{nr}}$ et $\alpha \in \Sigma^Z$. Tous ces éléments appartiennent à $\mathbf{K}$ d'après 3.3.1(1). Il en résulte que $\mathbf{K}^Z \subset Z^0(F^{nr}) \cap \mathbf{K}$. Cette intersection est un sous-groupe compact de $Z^0(F^{nr})$. Par la maximalité de $\mathbf{K}^Z$, cela implique l'égalité $\mathbf{K}^Z = Z^0(F^{nr}) \cap \mathbf{K}$. L'image de $Z^0(F^{nr}) \cap \mathbf{K}$ dans $\mathbf{Z}^0$ est donc l'image par réduction dans $\mathbf{G}$ de $\mathbf{K}^Z$. Cette image est engendrée par $\mathbf{S}$ et les exponentielles $exp(\bar{\lambda}\bar{H}_\alpha)$ pour $\bar{\lambda} \in \bar{\mathbb{F}}_q$ et $\alpha \in \Sigma^Z$. Ces éléments engendrent $\mathbf{Z}^0$. Cela prouve (4).

Il résulte de (4) que l'image réciproque de $\mathbf{Z}^0$ dans $Z(F^{nr}) \cap \mathbf{K}$ est égale à $(Z^0(F^{nr}) \cap \mathbf{K})(Z(F^{nr}) \cap \mathbf{K}^+)$. Pour achever la preuve de l'assertion (i) de l'énoncé, il suffit de prouver que $Z(F^{nr}) \cap \mathbf{K}^+ \subset Z^0(F^{nr})$. Or $Z(F^{nr}) \cap \mathbf{K}^+$ est un pro-p-groupe. Il suffit donc de prouver que le nombre d'éléments de $Z(F^{nr})/Z^0(F^{nr})$ est premier à p. Evidemment, ce quotient s'injecte dans Z/Z^0. Or $Z/Z^0 = A(e)$ et ce groupe est soit un produit de groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, soit $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ ou $\mathfrak{S}_5$. En tout cas, il est d'ordre premier à p. Cela achève la

preuve de l'assertion (i) de l'énoncé.

Preuve de (ii). L'injection $Z(F')\cap\mathbf{K}\to Z$ se quotiente en un homomorphisme injectif $(Z(F')\cap\mathbf{K})/(Z^0(F')\cap\mathbf{K})\to Z/Z^0$. Par composition avec l'isomorphisme de l'assertion (i), on obtient un homorphisme injectif $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}^0\to Z/Z^0$, autrement dit $A(\mathbf{e})\to A(e)$. Les orbites de e et $\mathbf{e}$ se correspondent selon les paramétrages habituels de $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ et $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ comme on l'a dit en 3.3.2. Deux orbites se correspondant ont même groupe A associé, celui-ci ne dépendant pas du corps de base, pourvu que la caractéristique de celui-ci soit assez grande si elle n'est pas nulle. Donc $A(\mathbf{e})$ et $A(e)$ sont isomorphes. Puisqu'ils sont finis, l'injection précédente est bijective. Cela entraîne que l'injection $(Z(F')\cap\mathbf{K})/(Z^0(F')\cap\mathbf{K})\to Z/Z^0$ est elle-aussi bijective. D'où (ii).

Preuve de (iii). Dans le cas des groupes classiques, on peut expliciter l'isomorphisme $A(\mathbf{e})\simeq A(e)$ en utilisant des constructions d'algèbre linaire. On constate qu'elle devient l'identité modulo les descriptions combinatoires que l'on a données de ces deux groupes. L'assertion (iii) en résulte. On laisse la mise au point de la construction au lecteur. Dans le cas des groupes exceptionnels, on montre que tout isomorphisme $A(\mathbf{e})\simeq A(e)$ se quotiente en un isomorphisme $\bar{A}(\mathbf{e})\simeq\bar{A}(e)$. Cela resulte du fait que les paires $(A(\mathbf{e}),\bar{A}(\mathbf{e}))$ et $(A(e),\bar{A}(e))$ sont isomorphes et forcément isomorphes à l'une des paires $(A(e),A(e))$, $(A(e),\{1\})$ ou $(\mathfrak{S}_3,\mathfrak{S}_2)$.

Preuve de (iv) et (v). L'isomorphisme du (ii) se quotiente en une bijection

$$(Z^1(F')\cap\mathbf{K})\backslash(Z(F')\cap\mathbf{K})\to Z^1\backslash Z=\bar{A}(e).$$

Il résulte de (iii) que l'isomorphisme du (i) se quotiente lui-aussi en une bijection

$$(Z^1(F')\cap\mathbf{K})\backslash(Z(F')\cap\mathbf{K})\to\mathbf{Z}^1\backslash\mathbf{Z}=\bar{A}(\mathbf{e}).$$

Si $Z_\sigma(F')\cap\mathbf{K}$ n'est pas vide, c'est une unique classe pour la multiplication à gauche par $Z(F')\cap\mathbf{K}$. Alors (iv) et (v) se déduisent immédiatement des isomorphismes ci-dessus. Tout revient à prouver que $Z_\sigma(F')\cap\mathbf{K}$ n'est pas vide. Le triplet $(\sigma(f),\sigma(h),\sigma(e))$ est contenu dans $\mathfrak{k}$ et relève le triplet $(\sigma(\mathbf{f}),\sigma(\mathbf{h}),\sigma(\mathbf{e}))$ de $\mathfrak{g}$. Par hypothèse, l'orbite de $\mathbf{e}$ est conservée par l'action galoisienne. Donc $(\sigma(\mathbf{f}),\sigma(\mathbf{h}),\sigma(\mathbf{e}))$ est conjugué à $(\mathbf{f},\mathbf{h},\mathbf{e})$ par un élément de $\mathbf{G}$. Le lemme 3.3.1 implique qu'il existe $k\in\mathbf{K}$ tel que $Ad(k)$ envoie $(\sigma(f),\sigma(h),\sigma(e))$ sur (f,e,h). Un tel k appartient à $Z_\sigma(F')\cap\mathbf{K}$. Cela achève la preuve. $\square$

3.3.4 Interprétation cohomologique de l'application $c_{\mathcal{F},F}$

Soit $\mathcal{O}\in(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$. L'intersection $\mathcal{O}\cap\mathfrak{g}(F)$ n'est pas vide puisque G est quasi-déployé. Notons $(\mathcal{O}\cap\mathfrak{g}(F))/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $\mathcal{O}\cap\mathfrak{g}(F)$. Soit $e\in\mathcal{O}\cap\mathfrak{g}(F)$. On définit l'ensemble de cohomologie $H^1(\Gamma_F,Z_G(e))$. Il s'envoie dans $H^1(\Gamma_F,G)$, on note $H^1(\Gamma_F,Z_G(e))_1$ le noyau de cette application (au sens des applications entre ensembles pointés).

De l'homomorphisme naturel $Z_G(e)\to\bar{A}(e)$ se déduit une application $d_e:H^1(\Gamma_F,Z_G(e))\to H^1(\Gamma_F,\bar{A}(e))$.

Soit $e'\in\mathcal{O}\cap\mathfrak{g}(F)$. Choisissons un élément $r\in G$ tel que $e'=r^{-1}er$. Soit u' un cocycle de Γ_F dans $Z_G(e')$. Pour $\sigma\in\Gamma_F$, posons $u(\sigma)=ru'(\sigma)\sigma(r)^{-1}$. C'est un cocycle de Γ_F dans $Z_G(e)$. L'application $u'\mapsto u$ se quotiente en une bijection $r_{e,e'}:H^1(\Gamma_F,Z_G(e'))\to H^1(\Gamma_F,Z_G(e))$ qui ne dépend pas du choix de r. Celle-ci se restreint en une bijection de $H^1(\Gamma_F,Z_G(e'))_1$ sur $H^1(\Gamma_F,Z_G(e))_1$. Notons $\mathbf{1}_{e'}$ la classe triviale dans $H^1(\Gamma_F,Z_G(e'))$

et $\mathbf{u}_{e,e'}$ son image par $r_{e,e'}$. L'application $e' \mapsto \mathbf{u}_{e,e'}$ se quotiente en une bijection de $(\mathcal{O}\cap\mathfrak{g}(F))/conj$ sur $H^1(\Gamma_F, Z_G(e))_1$. On définit aussi une bijection $\mathbf{r}_{e,e'} : H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e')) \to H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$ de la façon suivante. Soit u' un cocycle de Γ_F dans $\bar{A}(e')$. On relève u' en une application $\tilde{u}' : \Gamma_F \to Z_G(e')$. On définit $\tilde{u} : \Gamma_F \to Z_G(e)$ par $\tilde{u}(\sigma) = r\tilde{u}'(\sigma)\sigma(r)^{-1}$ et on note u le composé de $\tilde{u}$ et de la projection $Z_G(e) \to \bar{A}(e)$. On vérifie que u est un cocycle qui ne dépend pas du choix de $\tilde{u}'$. L'application $\mathbf{r}_{e,e'}$ est déduite de l'application $u' \mapsto u$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Gamma_F, Z_G(e')) & \stackrel{d_{e'}}{\to} & H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e')) \\ \downarrow r_{e,e'} & & \downarrow \mathbf{r}_{e,e'} \\ H^1(\Gamma_F, Z_G(e)) & \stackrel{d_e}{\to} & H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e)) \end{array}$$

Notons N l'unique élément de $\mathcal{N}$ tel que l'image par **Rel** de l'orbite de N soit $\mathcal{O}$. Puisque **Rel** est équivariante pour les actions galoisiennes, on a $N \in \mathcal{N}(\Gamma_F)$. Nous allons définir une application $\bar{c}_e : H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e)) \to \bar{\mathcal{C}}_F(N)$. On a vu en 3.3.3 que les groupes $\bar{A}(e)$ et $\bar{A}(N)$ étaient isomorphes. Si ces groupes sont réduits à $\{1\}$, les deux ensembles $H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$ et $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$ n'ont qu'un élément et l'application $\bar{c}_e$ est vite définie. On suppose maintenant que $\bar{A}(N) \neq \{1\}$, a fortiori $N \neq \{0\}$.

On insère e dans un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f, h, e) de $\mathfrak{g}(F)$. On pose $Z = Z_G(f, h, e)$. Montrons que

(1) l'homomorphisme $Z(F^{mod})/Z^0(F^{mod}) \to Z/Z^0$ est bijectif.

On utilise la propriété générale suivante, qu'on laisse au lecteur :

(2) soit H un groupe réductif (pas forcément connexe) défini sur un corps k de caractéristique nulle et ℓ un nombre premier ; supposons que H^0 soit déployé sur k et que $[H : H^0]$ soit premier à ℓ ; alors il existe une extension finie k' de k telle que $[k' : k]$ soit premier à ℓ et que l'homomorphisme $H(k')/H^0(k') \to H/H^0$ soit bijectif.

Le groupe Z^0 se déploie sur une extension modérément ramifiée de F d'après notre hypothèse sur p. Le groupe $Z/Z^0 = A(e)$ est d'ordre premier à p. Alors (1) résulte de (2).

Remarquons que (1) entraîne que le groupe d'inertie sauvage $\Gamma_{F^{mod}}$ agit trivialement sur $Z/Z^0 = A(e)$. Puisque $A(e)$ est d'ordre premier à p, tout cocycle de $\Gamma_{F^{mod}}$ dans $A(e)$ est trivial. Donc

(3) l'inflation $H^1(\Gamma_F^{mod}, A(e)) \to H^1(\Gamma_F, A(e))$ est bijective.

D'après le choix de notre système de représentants $\mathcal{N}$, N est fixé par l'action de Γ_F^{nr}. On peut donc compléter N en un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, N)$ de $\mathbf{g}$ fixé par Γ_F^{nr}. Rappelons que $\mathbf{G}$ s'identifie à $K^0_{s_0,F^G}$. On peut relever $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, N)$ en un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f_0, h_0, N_0) de $\mathfrak{k}_{s_0,F^G}$. Montrons que

(4) il existe $g \in G(F^{mod})$ tel que $Ad(g)$ envoie (f, h, e) sur (f_0, h_0, N_0).

Il résulte de la compatibilité de nos différentes applications que N et N_0 appartiennent à la même orbite dans $\mathfrak{g}_{nil}/conj$. On peut donc fixer $g \in G$ tel que $Ad(g)$ envoie (f, h, e) sur (f_0, h_0, N_0). Fixons une extension finie E de F, modérément ramifiée, telle que $f_0, h_0, N_0 \in \mathfrak{g}(E)$. L'application $\sigma \mapsto g^{-1}\sigma(g)$ est un cocycle de Γ_E dans Z. Elle se quotiente en un cocycle de Γ_E dans $A(e) = Z/Z^0$. En appliquant (3) où l'on remplace F par E, quitte à multiplier g à droite par un élément de Z, on peut supposer que ce cocycle est trivial sur Γ_E^{mod}. Autrement dit $g^{-1}\sigma(g) \in Z^0$ pour $\sigma \in \Gamma_{E^{mod}}$. Fixons une extension galoisienne finie E' de E telle que $g \in G(E')$, posons $E'' = E' \cap E^{mod}$. L'application $\sigma \mapsto g^{-1}\sigma(g)$ prend ses valeurs dans Z^0 pour $\sigma \in \Gamma_{E^{mod}}$ et pour $\sigma \in \Gamma_{E'}$. Puisque c'est un cocycle et que ces deux groupes engendrent $\Gamma_{E''}$, cette application prend ses

valeurs dans Z^0 pour tout $\sigma \in \Gamma_{E''}$. Puisque Z^0 est connexe, tout cocycle de $\Gamma_{E''}$ dans Z^0 devient cohomologue à 0 dans $\Gamma_{E''nr}$. Cela signifie que, quitte à multiplier encore g à droite par un élément de Z^0, on a $g^{-1}\sigma(g) = 1$ pour $\sigma \in \Gamma_{E''nr}$. Alors $g \in G(E''^{nr})$. Puisque $E'' \subset E^{mod} = F^{mod}$, on a $E''^{nr} \subset F^{mod}$. Donc $g \in G(F^{mod})$, ce qui démontre (4).

Grâce à (1) et (4), on peut fixer une extension finie F' de F^{nr}, modérément ramifiée, et un élément $g \in G(F')$ de sorte que $F^G \subset F'$, que l'homomorphisme $Z(F')/Z^0(F') \to Z/Z^0$ soit bijectif et que $Ad(g)$ envoie (f, h, e) sur (f_0, h_0, N_0). Comme en 3.3.3, posons $\mathbf{K} = K^0_{s_0,F'}$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{s_0,F'}$. On a déjà défini Z et on pose $Z_0 = Z_G(f_0, h_0, N_0)$, $\mathbf{Z} = Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{f}, \mathbf{h}, N)$. L'hypothèse (Hyp) de 3.3.3 est vérifiée et on introduit les mêmes variantes de ces objets que dans ce paragraphe : Z^1, Z^1_0, Z_σ etc...

De même qu'en (3), l'inflation $H^1(\Gamma^{mod}_F, \bar{A}(e)) \to H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$ est bijective. On peut définir notre application $\bar{c}_e$ sur $H^1(\Gamma^{mod}_F, \bar{A}(e))$. Soit u un cocycle de Γ^{mod}_F dans $\bar{A}(e)$. Pour $\sigma \in \Gamma^{mod}_F$, l'application $x \mapsto gx\sigma(g)^{-1}$ envoie $Z(F')$ dans $Z_{0,\sigma}(F')$ et cette application se descend en une bijection

$$Ad_\sigma(g) : \bar{A}(e) = Z^1(F')\backslash Z(F') \to Z^1_0(F')\backslash Z_{0,\sigma}(F').$$

Posons $u_0(\sigma) = Ad_\sigma(g)(u(\sigma))$. D'après le (v) de la proposition 3.3.3, l'application

$$(Z^1_0(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_{0,\sigma}(F') \cap \mathbf{K}) \to Z^1_0(F')\backslash Z_{0,\sigma}(F')$$

est bijective. On note $\mathbf{u}_0(\sigma) \in (Z^1_0(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_{0,\sigma}(F') \cap \mathbf{K})$ l'image réciproque de $u_0(\sigma)$ par cette bijection. D'après le (iv) de la proposition 3.3.3, on a aussi une bijection

$$\xi_\sigma : (Z^1_0(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_{0,\sigma}(F') \cap \mathbf{K}) \to \mathbf{Z}^1\backslash\mathbf{Z}_{\bar{\sigma}}.$$

Pour $\sigma = \gamma$, on a l'égalité $\mathbf{Z}^1\backslash\mathbf{Z}_\gamma = \tilde{\bar{A}}(N)$ (on a écrit $\mathbf{Z}_\gamma$ plutôt que $\mathbf{Z}_{\bar{\gamma}}$ puisqu'on a convenu de noter encore γ l'image de cet élément dans $\Gamma_{F^G/F^{nr}}$). Pour $\sigma = Fr$, on a l'égalité $\mathbf{Z}^1\backslash\mathbf{Z}_{\bar{Fr}} = \bar{A}(N)$ puisque $\bar{Fr} = 1$. Posons $(d, v) = (\xi_\gamma(\mathbf{u}_0(\gamma)), \xi_{Fr}(\mathbf{u}_0(Fr))) \in \tilde{\bar{A}}(N) \times \bar{A}(N)$. Montrons que

(5) le couple (d, v) représente un élément de $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$.

Il n'y a rien à prouver si G est de type $(D_4, 3-ram)$. Supposons que G ne soit pas de ce type. On doit prouver que $vdv^{-1} = d^q$. On a $Fr\gamma = \gamma^q Fr$ dans Γ^{mod}_F. Puisque u est un cocycle, on a

$$u(Fr)Fr(u(\gamma)) = u(Fr\gamma) = u(\gamma^q Fr) = u(\gamma^q)\gamma^q(u(Fr)).$$

On a aussi $u(\gamma^q) = u(\gamma)\gamma(u(\gamma))...\gamma^{q-1}(u(\gamma))$. En appliquant $Ad_{Fr\gamma}(g) = Ad_{\gamma^q Fr}(g)$, on obtient

$$u_0(Fr)Fr(u_0(\gamma)) = u_0(\gamma)\gamma(u_0(\gamma))...\gamma^{q-1}(u_0(\gamma))\gamma^q(u_0(Fr)).$$

D'où aussi

$$\mathbf{u}_0(Fr)Fr(\mathbf{u}_0(\gamma)) = \mathbf{u}_0(\gamma)\gamma(\mathbf{u}_0(\gamma))...\gamma^{q-1}(\mathbf{u}_0(\gamma))\gamma^q(\mathbf{u}_0(Fr)).$$

Il s'agit d'une égalité entre éléments de de $(Z^1_0(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_{0,Fr\gamma}(F') \cap \mathbf{K})$. Calculons leurs images par $\xi_{Fr\gamma}$. Rappelons que, pour $x \in (Z^1_0(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_{0,Fr\gamma}(F') \cap \mathbf{K})$, $\xi_{Fr\gamma}(x)$ se calcule de la façon suivante. On fixe un relèvement $\dot{x} \in Z_{0,Fr\gamma}(F') \cap \mathbf{K}$ de x, on note $\bar{x}$ l'image par réduction de $\dot{x}$ dans $\mathbf{G}$; alors $\xi_{Fr\gamma}(x) = \bar{x}\gamma^q = \bar{x}\gamma$ (on a $\gamma^q = \gamma$ dans $\Gamma_{F^G/F^{nr}}$ puisque G n'est pas de type $(D_4, 3-ram)$). En utilisant ces notations pour $x = \mathbf{u}_0(Fr)$ et $\mathbf{u}_0(\gamma)$, on obtient alors l'égalité

$$\bar{\mathbf{u}}_0(Fr)Fr(\bar{\mathbf{u}}_0(\gamma))\gamma = \bar{\mathbf{u}}_0(\gamma)\gamma(\bar{\mathbf{u}}_0(\gamma))...\gamma^{q-1}(\bar{\mathbf{u}}_0(\gamma))\gamma^q(\bar{\mathbf{u}}_0(Fr))\gamma.$$

D'après le choix de notre système de représentants $\mathcal{N}$, Fr agit trivialement sur $\bar{A}(N)$. Le membre de gauche est donc égal à $\bar{\mathbf{u}}_0(Fr)\bar{\mathbf{u}}_0(\gamma)\gamma$. Mais $v = \bar{\mathbf{u}}_0(Fr)$ et $d = \bar{\mathbf{u}}_0(\gamma)\gamma$. Ce membre de gauche est donc égal à vd. Parce que $\gamma = \gamma^q$ dans $\Gamma_{F^G/F^{nr}}$, on voit que le membre de droite est égal à $(\bar{\mathbf{u}}_0(\gamma)\gamma)^q\bar{\mathbf{u}}_0(Fr)$. Ceci est égal à $d^q v$. On obtient l'égalité cherchée $ud = d^q u$, ce qui prouve (5).

Montrons que

(6) l'élément de $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$ défini par (d, v) (c'est-à-dire la classe de conjugaison de (d, v) par $\bar{A}(N)$) ne dépend pas des choix effectués et ne dépend que de la classe de cohomologie de u.

Il est clair que le choix du corps F' n'influe pas, pourvu que ce corps soit assez grand. On ne peut changer g qu'en le multipliant à gauche par un élément $\dot{y} \in Z_0(F')$ (quitte à agrandir F'). Notons y son image dans $Z_0^1(F')\backslash Z_0(F')$. Par nos bijections, y s'identifie à un élément $\mathbf{y} \in (Z_0^1(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_0(F') \cap \mathbf{K})$ puis à un élément $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{Z}^1\backslash\mathbf{Z} = \bar{A}(N)$. On vérifie que, pour $\sigma \in \Gamma_F^{mod}$, les éléments $u_0(\sigma)$, resp. $\mathbf{u}_0(\sigma)$, $\xi_\sigma(\mathbf{u}_0(\sigma))$, sont remplacés par $yu_0(\sigma)\sigma(y)^{-1}$, resp. $\mathbf{y}\mathbf{u}_0(\sigma)\sigma(\mathbf{y})^{-1}$, $\bar{\mathbf{y}}\xi_\sigma(\mathbf{u}_0(\sigma))\bar{\mathbf{y}}^{-1}$. Alors (d, v) est remplacé par son conjugué par $\bar{\mathbf{y}}$ et la classe de conjugaison de (d, v) ne change pas.

Remplaçons le triplet (f, h, e) par un autre triplet (f', h', e) et notons par des $'$ les groupes relatifs à ce triplet. Il existe alors $x \in Z_G(e)^0(F)$ tel que $Ad(x)$ envoie (f', h', e) sur (f, h, e), cf. [7] proposition 5.5.10. On peut remplacer g par $g' = gx$. Pour tout $\sigma \in \Gamma_F^{mod}$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\bar{A}(e) & \simeq & Z^1(F')\backslash Z(F') & & \\
 & & & \searrow Ad_\sigma(g) & \\
\| & & \downarrow Ad(x) & & Z_0^1\backslash Z_{0,\sigma}(F') \\
 & & & \nearrow Ad_\sigma(g') & \\
\bar{A}(e) & \simeq & Z'^1(F')\backslash Z'(F') & &
\end{array}$$

Donc $u_0(\sigma)$ ne change pas et le couple (d, v) non plus.

Remplaçons le triplet $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, N)$ par un triplet $(\mathbf{f}', \mathbf{h}', N)$ et (f_0, h_0, N_0) par un relèvement (f_0', h_0', N_0') de ce nouveau triplet. On note encore par des $'$ les objets relatifs aux nouveaux triplets. D'après le lemme 3.3.1 et [7] proposition 5.5.10, on peut fixer un élément $k \in \mathbf{K}$ dont la réduction $\bar{k}$ dans $\mathbf{G}$ appartient à $Z_{\mathbf{G}}(N)^0$ et tel que $Ad(k)(f_0, h_0, N_0) = (f_0', h_0', N_0')$. On peut remplacer g par $g' = kg$. Pour $\sigma \in \Gamma_F^{mod}$, on définit la bijection

$$Ad_\sigma(k) : Z_0^1(F')\backslash Z_{0,\sigma}(F') \to Z_0'^1(F')\backslash Z_{0,\sigma}'(F')$$

comme on a défini $Ad_\sigma(g)$ ci-dessus. On voit que $u_0(\sigma)$ est remplacé par $u_0'(\sigma) = Ad_\sigma(k)(u_0(\sigma))$. On vérifie que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
Z_0^1(F')\backslash Z_{0,\sigma}(F') & \simeq & (Z_0^1(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_{0,\sigma}(F') \cap \mathbf{K}) & & \\
 & & & \searrow \xi_\sigma & \\
Ad_\sigma(k) \downarrow & & Ad_\sigma(k) \downarrow & & \mathbf{Z}^1\backslash\mathbf{Z}_{\bar{\sigma}} \\
 & & & \nearrow \xi_\sigma' & \\
Z_0'^1(F')\backslash Z_{0,\sigma}'(F') & \simeq & (Z_0'^1(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_{0,\sigma}'(F') \cap \mathbf{K}) & &
\end{array}$$

Alors $\xi_\sigma'(\bar{u}_0'(\sigma)) = \xi_\sigma(\bar{u}_0(\sigma))$ et le couple (d, v) ne change pas.

Enfin, soit $z \in \bar{A}(e)$, remplaçons le cocycle u par le cocycle u' défini par $u'(\sigma) = zu(\sigma)\sigma(z)^{-1}$. Par l'application $Ad(g)$, z s'envoie sur un élément $z_0 \in Z_0^1(F')\backslash Z_0(F')$. Cet élément s'identifie à un élément $\mathbf{z} \in (Z_0^1(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_0(F') \cap \mathbf{K})$, puis à un élément

$\bar{\mathbf{z}} \in \bar{A}(N)$. On vérifie que le couple (d, v) est remplacé par son conjugué par $\bar{\mathbf{z}}$, donc sa classe de conjugaison ne change pas. Cela prouve (6).

Grâce à (6), on peut définir notre application $\bar{c}_e$ par $\bar{c}_e(u) = (d, v)$.

Proposition. *(i) Soient $e, e' \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{g}(F)$. Alors le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e')) & & \\ & \searrow \bar{c}_{e'} & \\ \mathbf{r}_{e,e'} \downarrow & & \bar{\mathcal{C}}_F(N) \\ & \nearrow \bar{c}_e & \\ H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e)) & & \end{array}$$

(ii) Soient $\mathcal{F}$ une facette de $App(T_F)$ et $\mathcal{O}' \in \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj$. Soit e un élément de l'orbite $rel_{\mathcal{F},F}(\mathcal{O}')$. Supposons que $e \in \mathcal{O}$. Alors $\bar{c}_e \circ d_e(\mathbf{1}_e) = \bar{c}_{\mathcal{F},F}(\mathcal{O}')$.

(iii) Pour tout $e \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{g}(F)$, l'application $\bar{c}_e : H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e)) \to \bar{\mathcal{C}}_F(N)$ est bijective.

(iv) Pour tout $e \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{g}(F)$, l'application d_e se restreint en une surjection $H^1(\Gamma_F, Z_G(e))_1 \to H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$.

Toutes ces assertions sont triviales pour des éléments e tels que $\bar{A}(e) = \{1\}$. On ne considère que des éléments tels que $\bar{A}(e) \neq \{1\}$.

Preuve de (i). Fixons des $\mathfrak{sl}(2)$-triplets (f', h', e') et (f, h, e) de $\mathfrak{g}(F)$, où e et e' sont les éléments de l'énoncé. On utilise les notations des constructions précédant l'énoncé pour le triplet (f, h, e) et les mêmes notations affectées d'un $'$ pour le triplet (f', h', e). On montre comme en (4) qu'il existe $y \in G(F^{mod})$ tel que $Ad(y)$ envoie (f', h', e') sur (f, h, e). On fixe un tel y. Reprenons les constructions de $\bar{c}_e$ et $\bar{c}_{e'}$, en imposant au corps F' la condition : $y \in G(F')$. On choisit un élément g pour le triplet (f, h, e). Pour le triplet (f', h', e'), on peut choisir $g' = gy$. Soit u' un cocycle de Γ_F^{mod} dans $\bar{A}(e')$, notons u son image par $\mathbf{r}_{e,e'}$. Notre construction appliquée à (f, h, e) et u, resp.(f', h', e') et u', fournit une application u_0, resp. u'_0. On voit que $u'_0 = u_0$. L'assertion (i) résulte de cette égalité.

Preuve de (ii). Fixons $\tilde{x} \in \mathbb{T}_F$ tel que $a_T(\tilde{x}) \in \mathcal{F}$. Posons $t = \underline{v}(\tilde{x})$. On a $t \in T_F(F^{mod})$. On impose à F' la condition : $t \in T_F(F')$. Fixons un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet $(\underline{f}', \underline{h}', N')$ de $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ dont le troisième terme N' appartient à $\mathcal{O}'$ et relevons-le en un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet contenu dans $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$. Supposons d'abord que le troisième terme de ce triplet soit égal à e, notons (f, h, e) ce triplet. On pose $(f'', h'', e'') = Ad(t)(f, h, e)$ et $(\mathbf{f}'', \mathbf{h}'', N'') = \iota_{\mathcal{F}}((\underline{f}', \underline{h}', N'))$. Par définition de l'application $\iota_{\mathcal{F}}$, le triplet (f'', h'', e'') est contenu dans $\mathfrak{k}$ et relève le triplet $(\mathbf{f}'', \mathbf{h}'', N'')$. Les compatibilités de nos diverses applications entraînent que N'' est conjugué à N par un élément de $\mathbf{G}$. Il en est de même des triplets $(\mathbf{f}'', \mathbf{h}'', N'')$ et $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, N)$. En appliquant le lemme 3.3.1, on peut fixer $k \in \mathbf{K}$ tel que $Ad(k)$ envoie (f'', h'', e'') sur (f_0, h_0, N_0). Posons $g = kt$. Alors $Ad(g)$ envoie (f, h, e) sur (f_0, h_0, N_0). Appliquons la construction de l'application $\bar{c}_e$ au cocycle $u = \mathbf{1}_e$. L'application u_0 envoie $\sigma \in \Gamma_F^{mod}$ sur l'image de $g\sigma(g)^{-1}$ dans $Z_0^1(F')\backslash Z_{0,\sigma}(F')$. L'élément t est fixé par Γ_F^{nr}. Pour $\sigma \in I_F^{mod}$, on a $t\sigma(t)^{-1} = t_{\tilde{x}}(\sigma) \in T_F(\mathfrak{o}_{F^{nr}})$. Donc $t\sigma(t)^{-1} \in \mathbf{K}$ et aussi $g\sigma(g)^{-1} \in \mathbf{K}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F^{mod}$. Alors l'application $\mathbf{u}_0$ envoie $\sigma \in \Gamma_F^{mod}$ sur l'image de $g\sigma(g)^{-1}$ dans $(Z_0^1(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_{0,\sigma}(F') \cap \mathbf{K})$. La réduction de $t_{\tilde{x}}(\gamma)$ est $\mathbf{j}_T(x)$, où $x = a_T(\tilde{x})$. Alors $\xi_\gamma(\mathbf{u}_0(\gamma))$ est l'image de $\bar{k}\mathbf{j}_T(x)\gamma(\bar{k})^{-1}\gamma = \bar{k}\mathbf{j}_T(x)\gamma\bar{k}^{-1}$ dans $\tilde{\bar{A}}(N)$. Parce que t est fixe par Γ_F^{nr}, $\xi_{Fr}(\mathbf{u}_0(Fr))$ est l'image de $\bar{k}Fr(\bar{k})^{-1}$ dans $\bar{A}(N)$. Donc $\bar{c}_e(\mathbf{1}_e)$ est l'image $(\bar{k}\mathbf{j}_T(x)\gamma\bar{k}^{-1}, \bar{k}Fr(\bar{k})^{-1})$ dans $\tilde{\bar{A}}(N) \times \bar{A}(N)$. L'automorphisme $Ad(\bar{k})$ envoie $(\mathbf{f}'', \mathbf{h}'', N'')$ sur $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, N)$. Il suffit alors de reprendre la construction de l'application $\bar{c}_{\mathcal{F},F}$ pour constater que l'image de $\mathcal{O}'$ par cette application est le couple précédent. Cela démontre (ii) sous

la restriction que e appartient à un triplet relevant $(\underline{f}', \underline{h}', N')$ dans $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$. En général, fixons un triplet (f', h', e') relevant $(\underline{f}', \underline{h}', N')$ dans $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}}$. Il existe alors un élément $r \in G(F)$ tel que $rer^{-1} = e'$. Parce que $r \in G(F)$, l'application $r_{e',e}$ envoie $\mathbf{1}_e$ sur $\mathbf{1}_{e'}$ et $\mathbf{r}_{e',e}$ envoie $d_e(\mathbf{1}_e)$ sur $d_{e'}(\mathbf{1}_{e'})$. On applique (i) en échangeant les rôles de e et e' et on obtient $\bar{c}_e \circ d_e(\mathbf{1}_e) = \bar{c}_{e'} \circ \mathbf{r}_{e',e}(d_e(\mathbf{1}_e)) = \bar{c}_{e'} \circ d_{e'}(\mathbf{1}_{e'}) = \bar{c}_{\mathcal{F},F}(\mathcal{O}')$. Cela prouve (ii).

Preuve de (iii). Soient u et u' deux cocycles de Γ_F^{mod} dans $\bar{A}(e)$. On reprend les constructions en affectant d'un $'$ les termes relatifs au cocycle u. Supposons que $\bar{c}_e(u) = \bar{c}_e(u')$. Cela signifie que les deux couples (d, v) et (d', v') sont conjugués par un élément $y \in \bar{A}(N) : (d', v') = y(d, v)y^{-1}$. Par la bijection $(Z_0^1(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_0(F') \cap \mathbf{K}) \simeq \bar{A}(N)$, y correspond à un élément de $(Z_0^1(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_0(F') \cap \mathbf{K})$, que l'on relève en un élément $k \in Z_0(F') \cap \mathbf{K}$. Pour $\sigma \in \Gamma_F^{mod}$, l'application $x \mapsto kx\sigma(k)^{-1}$ conserve $Z_{0,\sigma}(F') \cap \mathbf{K}$ et se descend en une permutation $Ad_\sigma(k)$ de $(Z_0^1(F') \cap \mathbf{K})\backslash(Z_{0,\sigma}(F') \cap \mathbf{K})$. Posons $\mathbf{u}_0''(\sigma) = Ad_\sigma(k)(\mathbf{u}_0(\sigma))$. Il résulte des définitions que l'égalité $d' = ydy^{-1}$ équivaut à $\mathbf{u}_0''(\gamma) = \mathbf{u}_0'(\gamma)$. D'après le choix de notre ensemble $\mathcal{N}$, le groupe $\Gamma_{F^{nr}}$ agit trivialement sur $\bar{A}(N)$. L'égalité $v' = yvy^{-1}$ équivaut à $v' = yvFr(y)^{-1}$ et celle-ci équivaut à $\mathbf{u}_0''(Fr) = \mathbf{u}_0'(Fr)$. L'élément $g^{-1}kg$ appartient à $Z(F')$, notons x son image dans $\bar{A}(e)$. Définissons le cocycle u'' de Γ_F^{mod} dans $\bar{A}(e)$ par $u''(\sigma) = xu(\sigma)\sigma(x)^{-1}$. On voit que $\mathbf{u}_0''$ est l'analogue de $\mathbf{u}_0$ pour ce cocycle u'' et que les égalités précédentes sont équivalentes à $u''(\gamma) = u'(\gamma)$ et $u''(Fr) = u'(Fr)$. Puisque u' et u'' sont des cocycles et que Fr et γ engendrent topologiquement Γ_F^{mod}, on obtient l'égalité $u' = u''$, donc u' est cohomologue à u. Cela prouve que l'application $\bar{c}_e$ est injective.

Soit $(d, v) \in \bar{\mathcal{C}}_F(N)$ (on note comme toujours un élément de cet ensemble par un couple le représentant). D'après la proposition 3.2.8, on peut fixer une facette $\mathcal{F} \in App(T_F)$ et une orbite $\mathcal{O}' \in \mathfrak{g}_{\mathcal{F},nil}(\mathbb{F}_q)/conj$ de sorte que $\bar{c}_{\mathcal{F},F}(\mathcal{O}') = (d, v)$. D'après (ii), il en résulte l'existence de $e' \in (\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}(F))$ tel que $\bar{c}_{e'} \circ d_{e'}(\mathbf{1}_{e'}) = (d, v)$. D'après (i), on a alors $\bar{c}_e \circ d_e(\mathbf{u}_{e,e'}) = (d, v)$. Cela prouve la surjectivité de $\bar{c}_e$ et cela achève la preuve de (iii).

Preuve de (iv). On vient de prouver que, pour tout $(d, v) \in \bar{\mathcal{C}}_F(N)$, il existe $e' \in (\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}(F))$ tel que $\bar{c}_e \circ d_e(\mathbf{u}_{e,e'}) = (d, v)$. Puisque $\mathbf{u}_{e,e'} \in H^1(\Gamma_F, Z_G(e))_1$, l'application $\bar{c}_e \circ d_e$ se restreint en une surjection de $H^1(\Gamma_F, Z_G(e))_1$ sur $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$. Puisque $\bar{c}_e$ est bijective, d_e se restreint en une surjection de $H^1(\Gamma_F, Z_G(e))_1$ sur $H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$. Cela achève la preuve. $\square$

4 Normalisation des actions de Frobenius

4.1 Espaces $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ et isomorphismes de groupes

4.1.1 Position du problème

Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On suppose que G est adjoint, absolument simple et quasi-déployé. On impose la condition $(Hyp)_1(p)$.

En 2.2.14, on a raffiné selon la structure de G sur F^{nr} la classification habituelle du système de racines de G. Pour des raisons qui apparaîtront plus tard, on pose l'hypothèse

(1) G n'est pas des types (A_{n-1}, nr), $(D_4, 3-ram)$, (E_6, ram), E_8, F_4, G_2.

Rappelons que le groupe d'automorphismes $Aut(G)$ est un groupe algébrique défini sur F, en général non connexe. Puisque G est adjoint, l'application $g \mapsto Ad(g)$ est un isomorphisme de G sur la composante neutre $Aut(G)^0$. Nous noterons $Ad(G)$ cette composante neutre. Soit H un groupe réductif connexe défini sur F. On note $Isom(G, H)$

l'ensemble des isomorphismes de H sur G. C'est une variété algébrique définie sur F et on suppose que $Isom(G,H,F^{nr})$ n'est pas vide, c'est-à-dire que H et G sont isomorphes sur F^{nr}. D'après [48] paragraphe 9, les espaces $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ et $FC^{st}(\mathfrak{h}(F))$ ont même dimension. Si G n'est pas du type (A_{n-1},ram), on se propose de définir un isomorphisme canonique

$$\iota : FC^{st}(\mathfrak{h}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{g}(F)).$$

Le cas (A_{n-1},ram) est plus compliqué. On note $Isom'(G,H,F^{nr})$ le sous-ensemble des éléments de $Isom(G,H,F^{nr})$ qui sont des torseurs intérieurs. Il est stable par composition avec le groupe $Ad(G)(F^{nr})$. On suppose que $Isom'(G,H,F^{nr})$ est non vide, c'est-à-dire que H est une forme intérieure de G, et on fixe une classe $\Phi \in Ad(G)(F^{nr})\backslash Isom'(G,H,F^{nr})$. On se propose de définir un isomorphisme ι comme ci-dessus. Il n'est plus canonique mais ne dépend que du choix de Φ.

Le cas $G=\{1\}$ n'est pas exclu par les hypothèses précédentes. Dans ce cas, on a aussi $H=\{1\}$ et $FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ et $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ sont les droites formées des fonctions constantes sur un ensemble réduit à un point. Alors ι est l'isomorphisme évident qui conserve la valeur des fonctions. On suppose désormais que $G\neq\{1\}$. On suppose aussi $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))\neq\{0\}$, sinon le problème est vite résolu (c'est cette hypothèse qui nous permet d'exclure ci-dessus le cas (A_{n-1},nr)).

4.1.2 Rappels sur la construction de l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$

Pour un élément $s\in S(G)$, c'est-à-dire que s est un sommet de $Imm(G)$, on a noté $\mathbf{FC}(\mathfrak{g}_s)$ l'ensemble des faisceaux-caractères cuspidaux à support nilpotent sur $\mathfrak{g}_s$ et $\mathbf{FC}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g}_s)$ le sous-ensemble des faisceaux conservés par l'action de Frobenius. Pour simplifier les notations, nous notons ces ensembles $\mathbf{FC}_s$ et $\mathbf{FC}_{s,\mathbb{F}_q}$. L'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est engendré par les fonctions caractéristiques de certains éléments de $\mathbf{FC}_{s,\mathbb{F}_q}$. On note $\mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}$ le sous-ensemble de ces faisceaux. On note $S^{st}(G)$ l'ensemble des $s\in S(G)$ tels que $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))\neq\{0\}$. Tout élément de cet ensemble reste un sommet dans l'immeuble $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$. Plus précisément, soit E une extension finie non ramifiée de degré n de F. D'après 2.2.12, si $s\in S^{st}(G)$, on a aussi $s\in S^{st}_E(G)$ et $\mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}=\mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_{q^n}}\cap\mathbf{FC}_{s,\mathbb{F}_q}$. Cela permet de définir

- l'ensemble $S^{nr,st}(G)$: c'est l'ensemble des sommets s de $Imm_{F^{nr}}(G)$ pour lesquels il existe une extension E comme ci-dessus de sorte que $s\in S^{st}_E(G)$;

- pour $s\in S^{nr,st}(G)$, l'ensemble $\mathbf{FC}^{st}_s$: c'est l'ensemble des $\mathcal{E}\in\mathbf{FC}_s$ pour lesquels il existe une extension E comme ci-dessus de sorte que $\mathcal{E}\in\mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_{q^n}}$.

Soit $s\in S^{nr,st}(G)$. Un faisceau-caractère cuspidal à support nilpotent $\mathcal{E}$ sur $\mathfrak{g}_s$ est déterminé par une orbite nilpotente $\mathcal{O}$ (ou plus précisément $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$) et, pour tout $N\in\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, par une représentation irréductible ξ_N (ou plus précisément $\xi_{N,\mathcal{E}}$) de $Z_{G_s}(N)/Z_{G_s}(N)^0$, cf. 2.2.2. D'après les résultats de [48], si $\mathcal{E}\in\mathbf{FC}^{st}_s$, ξ_N est de dimension 1, c'est-à-dire que c'est un caractère. Quand N parcourt $\mathcal{O}$, les représentations ξ_N vérifient la condition de cohérence suivante :

(1) $\xi_{g^{-1}Ng}(z)=\xi_N(gzg^{-1})$ pour tous $g\in G_s$ et $z\in Z_{G_s}(g^{-1}Ng)/Z_{G_s}(g^{-1}Ng)^0$.

Supposons que $s\in S^{st}(G)$ et que $\mathcal{E}$ est conservé par l'action de Frobenius. Alors $\mathcal{O}$ est stable par l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. Munir $\mathcal{E}$ d'une action de Frobenius revient à se donner pour tout $N\in\mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$ un scalaire $r_N\in\mathbb{C}^\times$ (ou plus précisément $r_{N,\mathcal{E}}$), cf. 2.2.5. Ces scalaires vérifient la condition de cohérence

(2) $r_{g^{-1}Ng}=r_N\xi_N(Fr(g)g^{-1})$ pour tout $g\in G_s$ tel que $g^{-1}Ng\in\mathcal{O}^{\mathbb{F}_q}$.

4.1.3 Familles admissibles

Soit $s \in S^{nr,st}(G)$ et $\mathcal{F} \in \mathbf{FC}_s^{st}$. On utilise pour ce faisceau les notations du paragraphe précédent.

On note $g \mapsto \bar{g}$ l'homomorphisme de réduction de $K_s^{0,nr}$ dans G_s. Notons $Aut_s(G, F^{nr})$ le sous-groupe des automorphisme $\delta \in Aut(G, F^{nr})$ dont l'action sur $Imm_{F^{nr}}(G)$ conserve s. Tout élément $\delta \in Aut_s(G, F^{nr})$ se réduit en un automorphisme δ_s de G_s. D'après [48] 9(5), le faisceau $\mathcal{F}$ est conservé par δ_s pour tout $\delta \in Aut_s(G, F^{nr})$. Cela entraîne que, pour $N \in \mathcal{O}$ et $\delta \in Aut_s(G, F^{nr})$, $\delta_s(N)$ appartient à $\mathcal{O}$ et que l'on a l'égalité

(1) $\xi_{\delta_s(N)}(\delta_s(z)) = \xi_N(z)$ pour tout $z \in Z_{G_s}(N)/Z_{G_s}(N)^0$.

Pour $N \in \mathcal{O}$, on note $Aut_{s,N}(G, F^{nr})$ le sous-groupe des $\delta \in Aut_s(G, F^{nr})$ tels que $\delta_s(N) = N$. On note $K_{s,N}^{0,nr}$ l'image réciproque de $Z_{G_s}(N)$ dans $K_s^{0,nr}$.

Si G est de type (A_{n-1}, ram), on pose $Aut'(G, F^{nr}) = Ad(G)(F^{nr}) \subset Aut(G, F^{nr})$. Pour unifier les notations, on pose $Aut'(G, F^{nr}) = Aut(G, F^{nr})$ dans le cas où G n'est pas de type (A_{n-1}, ram). On pose $Aut'_s(G, F^{nr}) = Aut_s(G, F^{nr}) \cap Aut'(G, F^{nr})$ et $Aut'_{s,N}(G, F^{nr}) = Aut_{s,N}(G, F^{nr}) \cap Aut'(G, F^{nr})$. Le groupe $Ad(K_{s,N}^{0,nr})$ est un sous-groupe de $Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$. Dans le cas où s et N sont fixés par l'action galoisienne, on définit de façon évidente les groupes $Aut'(G, F)$, $Aut'_s(G, F)$ et $Aut'_{s,N}(G, F)$.

Remarque. Supposons que $s \in S^{st}(G)$ et que $\mathcal{E}$ soit conservé par l'action galoisienne. Alors toute action de Frobenius est conservée par δ_s pour tout $\delta \in Aut'_s(G, F)$. Dans le cas (A_{n-1}, ram), cela ne serait pas vrai pour $\delta \in Aut_s(G, F)$.

Soient $N, N' \in \mathcal{O}$. Considérons l'ensemble $Aut'_{s,N' \mapsto N}(G, F^{nr})$ des éléments $\tau \in Aut'_s(G, F^{nr})$ tels que $\tau_s(N') = N$ (nous noterons aussi cet ensemble $Aut_{s,N' \mapsto N}(G, F^{nr})$ si G n'est pas de type (A_{n-1}, ram)). Il n'est pas vide : en effet, il existe $x \in G_s$ tel que $N' = x^{-1}Nx$; pour un relèvement $k \in K_s^{0,nr}$ de x, on a $Ad(k) \in Aut'_{s,N' \mapsto N}(G, F^{nr})$. Pour $\tau \in Aut'_{s,N' \mapsto N}(G, F^{nr})$, l'application $\delta \mapsto \tau^{-1}\delta\tau$ est un isomorphisme de $Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$ sur $Aut'_{s,N'}(G, F^{nr})$.

Considérons une famille $(\epsilon_N)_{N \in \mathcal{O}}$ d'applications $\epsilon_N : Aut'_{s,N}(G, F^{nr}) \to \mathbb{C}^\times$. Pour tous $N, N' \in \mathcal{O}$, introduisons les conditions suivantes :

$Hyp(1, N)$ pour $k \in K_{s,N}^{0,nr}$, on a $\epsilon_N(Ad(k)) = \xi_N(\bar{k})$;

$Hyp(2, N)$ ϵ_N est un caractère de $Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$;

$Hyp(3, N, N')$ $\epsilon_{N'}(\tau^{-1}\delta\tau) = \epsilon_N(\delta)$ pour tout $\tau \in Aut'_{s,N' \mapsto N}(G, F^{nr})$ et tout $\delta \in Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$.

Nous dirons que $(\epsilon_N)_{N \in \mathcal{O}}$ est une famille admissible si ces trois conditions sont vérifiées pour tous $N, N' \in \mathcal{O}$.

Supposons que $s \in S^{st}(G)$ et que $\mathcal{E}$ soit conservé par l'action galoisienne. Si $N \in \mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$, le groupe $Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$ est conservé par l'action de Frobenius. Introduisons l'hypothèse

$Hyp(4, N)$ on a l'égalité $\epsilon_N = \epsilon_N \circ Fr$.

Nous dirons que $(\epsilon_N)_{N \in \mathcal{O}}$ est une famille admissible définie sur F si c'est une famille admissible et que $Hyp(4, N)$ est vérifiée pour tout $N \in \mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$.

Lemme. *(i) Soit $N \in \mathcal{O}$ et soit ϵ_N une application de $Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$ dans $\mathbb{C}^\times$. Supposons vérifiées les conditions $Hyp(1, N)$ et $Hyp(2, N)$. Alors ϵ_N est la composante en N d'une unique famille admissible $(\epsilon_{N'})_{N' \in \mathcal{O}}$.*

(ii) Supposons que $s \in S^{st}(G)$ et que $\mathcal{E}$ soit conservé par l'action galoisienne. Soit $N \in \mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$ et soit ϵ_N une application de $Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$ dans $\mathbb{C}^\times$. Supposons vérifiées les conditions $Hyp(1, N)$, $Hyp(2, N)$ et $Hyp(4, N)$. Alors ϵ_N est la composante en N d'une unique famille admissible $(\epsilon_{N'})_{N' \in \mathcal{O}}$ définie sur F.

Preuve de (i). Soit $N' \in \mathcal{O}$. Fixons $\tau \in Aut'_{s,N'\mapsto N}(G,F^{nr})$ et définissons $\epsilon_{N'}$: $Aut'_{s,N'}(G,F^{nr}) \to \mathbb{C}^\times$ par l'égalité

(2) $\epsilon_{N'}(\tau^{-1}\delta\tau) = \epsilon_N(\delta)$ tout $\delta \in Aut'_{s,N}(G,F^{nr})$.

Cette définition ne dépend pas du choix de τ. En effet, soit $\tau' \in Aut'_{s,N'\mapsto N}(G,F^{nr})$. Posons $\nu = \tau'\tau^{-1}$. Alors $\nu \in Aut'_{s,N}(G,F^{nr})$. Pour $\delta \in Aut'_{s,N}(G,F^{nr})$, on a $\epsilon_{N'}(\tau'^{-1}\delta\tau') = \epsilon_{N'}(\tau^{-1}\nu^{-1}\delta\nu\tau)$. Par définition, ceci est égal à $\epsilon_N(\nu^{-1}\delta\nu)$. Par $Hyp(2,N)$, c'est égal à $\epsilon_N(\delta)$. D'où $\epsilon_{N'}(\tau'^{-1}\delta\tau') = \epsilon_N(\delta)$. Cela démontre l'indépendance du choix de τ, autrement dit $Hyp(3,N,N')$ est vérifiée.

Soit $k' \in K^{0,nr}_{s,N'}$. Par définition, on a l'égalité $\epsilon_{N'}(Ad(k')) = \epsilon_N(Ad(\tau(k')))$. Par $Hyp(1,N)$, ceci est égal à $\xi_N(\tau_s(\bar{k}'))$. D'après (1), c'est encore égal à $\xi_{N'}(\bar{k}')$. D'où $\epsilon_{N'}(Ad(k')) = \xi_{N'}(\bar{k}')$ et $Hyp(1,N')$ est vérifiée. De la même façon, $Hyp(2,N')$ résulte immédiatement de la définition de $\epsilon_{N'}$ et de $Hyp(2,N)$.

L'unicité de la famille admissible $(\epsilon_{N'})_{N'\in\mathcal{O}}$ est claire, l'égalité (2) étant forcément vérifiée pour une telle famille.

Preuve de (ii). Soit $N' \in \mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. Alors $Fr(\tau)$ appartient encore à à $Aut'_{s,N'\mapsto N}(G,F^{nr})$. Soit $\delta' \in Aut'_{s,N'}(G,F^{nr})$. D'après $Hyp(3,N,N')$ appliquée à $Fr(\tau)$, on a $\epsilon_{N'}(Fr(\delta')) = \epsilon_N(Fr(\tau)Fr(\delta')Fr(\tau)^{-1}) = \epsilon_N\circ Fr(\tau\delta'\tau^{-1})$. D'après $Hyp(4,N)$, ceci est égal à $\epsilon_N(\tau\delta\tau^{-1})$. On applique $Hyp(3,N,N')$ à τ : l'expression précédente vaut aussi $\epsilon_{N'}(\delta')$. D'où $\epsilon_{N'}(Fr(\delta')) = \epsilon_{N'}(\delta')$ et $Hyp(4,N')$ est vérifiée. $\square$

4.1.4 G-familles admissibles

Dans le paragraphe précédent, on a fixé le sommet s et le faisceau $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_s$. Faisons-les varier. On ajoute si besoin est des indices s et $\mathcal{E}$ aux notations. Pour tout sommet $s \in S^{nr,st}(G)$ et pour tout faisceau-caractère $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_s$, supposons donnée une famille admissible $(\epsilon_{s,\mathcal{E},N})_{N\in\mathcal{O}_\mathcal{E}}$.

Soit $g \in G(F^{nr})$. L'action de g sur $Imm_{F^{nr}}(G)$ conserve l'ensemble $S^{nr,st}(G)$. Fixons $s \in S^{nr,st}(G)$, notons s' son image par cette action . L'application $Ad(g)$ se descend en un isomorphisme $\overline{Ad(g)}$ de G_s sur $G_{s'}$. Cet isomorphisme transporte un faisceau-caractère $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_s$ en un faisceau-caractère $\mathcal{E}' = \overline{Ad(g)}(\mathcal{E}) \in \mathbf{FC}_{s'}$. On a $\overline{Ad(g)}(\mathcal{O}_\mathcal{E}) = \mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$. Le premier faisceau appartient à $\mathbf{FC}^{st}_s$ si et seulement si le second appartient à $\mathbf{FC}^{st}_{s'}$. Supposons que ces deux faisceaux vérifient ces conditions. Soit $N \in \mathcal{O}_\mathcal{F}$, posons $N' = \overline{Ad(g)}(N)$. On a l'égalité $Aut'_{s',N'}(G,F^{nr}) = \{Ad(g)\delta Ad(g)^{-1}; \delta \in Aut'_{s,N}(G,F^{nr})\}$. Considérons la condition

$Hyp(5)$ sous les hypothèses ci-dessus, on a l'égalité $\epsilon_{s',\mathcal{E}',N'}(Ad(g)\delta Ad(g)^{-1}) = \epsilon_{s,\mathcal{E},N}(\delta)$ pour tout $\delta \in Aut'_{s,N}(G,F^{nr})$.

Nous dirons que la famille $(\epsilon_{s,\mathcal{E},N})_{s\in S^{nr,st}(G),\mathcal{E}\in\mathbf{FC}^{st}_s,N\in\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ est une G-famille admissible si cette condition est vérifiée pour tous s, $\mathcal{E}$, N et g comme ci-dessus.

On dit que $(\epsilon_{s,\mathcal{E},N})_{s\in S^{nr,st}(G),\mathcal{E}\in\mathbf{FC}^{st}_s,N\in\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ est une G-famille admissible définie sur F si c'est une G-famille admissible et que, pour tous $s \in S^{st}(G)$ et $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}$, la famille $(\epsilon_{s,\mathcal{E},N})_{N\in\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ est définie sur F.

Remarque. (1) Supposons que les familles $(\epsilon_{s,\mathcal{F},N})_{N\in\mathcal{O}_\mathcal{F}}$ soient canoniques en ce sens que leur définition ne dépendent d'aucun objet auxiliaire (ce sera le cas pour celles que nous définirons). Alors $Hyp(5)$ est vérifiée par simple transport de structure.

4.1.5 Résolution du problème

On suppose fixée une G-famille admissible $(\epsilon_{s,\mathcal{E},N})_{s\in S^{nr,st}(G),\mathcal{E}\in\mathbf{FC}^{st}_s,N\in\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ définie sur F.

Considérons un groupe H comme en 4.1.1. D'après les résultats de [48] paragraphe 9 et parce que l'on a imposé l'hypothèse restrictive 4.1.1(1), l'ensemble $S^{st}(G)$ est formé d'une seule orbite pour l'action de $G(F)$ sur $Imm(G)$. On a une propriété analogue pour H. Fixons de tels sommets s_H, s. D'après le lemme 2.2.8, on a l'égalité

$$(1) \qquad FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) = FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)),$$

et une égalité analogue pour le groupe H.

Remarque. Il s'agit en vérité d'un isomorphisme. L'espace de droite est un sous-espace de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ tandis que celui de gauche est un sous-espace de $I(\mathfrak{g}(F))$. La projection naturelle $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))$ envoie bijectivement le membre de droite sur celui de gauche.

Notre problème revient à définir un isomorphisme

$$\iota : FC^{st}(\mathfrak{h}_{s_H}(\mathbb{F}_q)) \to FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)).$$

Si G est de type (A_{n-1}, ram), on a fixé un sous-ensemble $\Phi \subset Isom'(H, G, F^{nr})$ qui forme une unique classe pour l'action à gauche de $Ad(G)(F^{nr})$. Pour unifier les notations, on pose $\Phi = Isom(H, G, F^{nr})$ dans le cas où G n'est pas de type (A_{n-1}, ram). Pour $\phi \in Isom(H, G, F^{nr})$, on note $\phi^{Imm} : Imm_{F^{nr}}(H) \to Imm_{F^{nr}}(G)$ l'isomorphisme d'immeubles qui se déduit de ϕ. Soit $\phi \in \Phi$. Alors $\phi^{Imm}(s_H)$ appartient à $S^{nr,st}(G)$. Comme ci-dessus, $S^{nr,st}(G)$ est une unique orbite pour l'action de $G(F^{nr})$. Quitte à remplacer ϕ par $Ad(y)\circ\phi$ pour un $y \in G(F^{nr})$ convenable, on peut supposer que $\phi^{Imm}(s_H) = s$. L'isomorphisme ϕ se descend en un isomorphisme $\phi_s : H_{s_H} \to G_s$. L'isomorphisme ϕ_s^{-1} transporte un faisceau $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}$ en un faisceau $\mathcal{E}_H$ sur $\mathfrak{h}_{s_H}$. On pose $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ etc... et $\mathcal{O}_H = \mathcal{O}_{\mathcal{E}_H}$ etc... On a $\mathcal{O}_H = \phi_s^{-1}(\mathcal{O})$. Pour $N_H \in \mathcal{O}_H$, on a l'égalité $\xi_{N_H}(z) = \xi_{\phi_s(N_H)}(\phi_s(z))$ pour tout $z \in Z_{H_{s_H}}(N_H)/Z_{H_{s_H}}(N_H)^0$. Posons $\delta = Fr(\phi)\phi^{-1}$. On a $\delta \in Aut'_s(G, F^{nr})$. On a vu en 4.1.3 que tout élément de $\mathbf{FC}^{st}_s$ était conservé par δ_s. Or $\delta_s = Fr(\phi_s)\phi_s^{-1}$, donc $\mathcal{E}$ est conservé par l'automorphisme $Fr(\phi_s)\phi_s^{-1}$ de G_s. Cela équivaut à : le faisceau $\mathcal{E}_H$ est conservé par l'action de Frobenius. Il résulte des descriptions de [48] que $\mathcal{E}_H$ appartient à $\mathbf{FC}^{st}_{s_H,\mathbb{F}_q}$ et que l'application ainsi définie de $\mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}$ sur $\mathbf{FC}^{st}_{s_H,\mathbb{F}_q}$ est bijective. Cette application ne dépend pas du choix de ϕ. En effet, on ne peut remplacer ϕ que par un élément $\delta' \circ \phi$ où $\delta' \in Aut'_s(G, F^{nr})$ et l'assertion résulte comme ci-dessus du fait que tout élément de $\mathbf{FC}^{st}_s$ est conservé par δ'_s.

Fixons un faisceau-caractère $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}$. Fixons un élément $N \in \mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. Montrons que

(2) il existe $\phi \in \Phi$ tel que

(a) l'isomorphisme ϕ^{Imm} envoie s_H sur s ;

(b) en posant $\delta = Fr(\phi)\phi^{-1}$, δ appartienne à $Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$.

On a déjà vu que l'on pouvait choisir $\phi \in \Phi$ de sorte que (a) soit vérifié. Fixons un tel ϕ. Cette hypothèse (a) entraîne que $\delta \in Aut'_s(G, F^{nr})$. Il s'en déduit un automorphisme δ_s de G_s. Puisque $\delta \in Aut'_s(G, F^{nr})$, $\mathcal{E}$ est conservé par δ_s. Il existe donc $g \in G_s$ tel que $\delta_s(N) = gNg^{-1}$. Munissons un instant le groupe G_s de l'action de Frobenius $x \mapsto \delta_s^{-1} \circ Fr(x)$. On applique le théorème de Lang : il existe $x \in G_s$ tel que $x\delta_s^{-1}\circ Fr(x)^{-1} = \delta_s^{-1}(g)$. Relevons x en un élément $k \in K_s^{0,nr}$ et remplaçons ϕ par $Ad(k)\phi$. On a encore $\phi \in \Phi$ et, puisque k fixe s, (a) reste vérifié. A l'aide de la définition de k, on voit que, maintenant, on a $\delta_s(N) = N$, donc $\delta \in Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$. Cela prouve (2).

Fixons $\phi \in \Phi$ vérifiant (2). On a construit ci-dessus le faisceau $\mathcal{F}_H \in \mathbf{FC}^{st}_{s_H,\mathbb{F}_q}$. On munit $\mathcal{E}$ d'une action de Frobenius, qui est déterminée par un scalaire $r_N \in \mathbb{C}^\times$. Posons

$N_H = \phi_s^{-1}(N)$. Parce que δ_s fixe N, on voit que $N_H \in \mathcal{O}_H^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. On définit une action de Frobenius sur $\mathcal{E}_H$ à l'aide du scalaire $r_{N_H} = r_N \epsilon_{s,\mathcal{F},N}(\delta)$.

Notons $f_{\mathcal{E}}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{E}$ et $f_{\mathcal{E}_H}$ celle de $\mathcal{E}_H$. La famille $(f_{\mathcal{E}})_{\mathcal{E}\in\mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}}$ est une base de $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ et la famille $(f_{\mathcal{E}_H})_{\mathcal{E}\in\mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}}$ est une base de $FC^{st}(\mathfrak{h}_{s_H}(\mathbb{F}_q))$. On définit ι par l'égalité

$$(3) \qquad \iota(f_{\mathcal{E}_H}) = |G_s(\mathbb{F}_q)|^{-1}|H_{s_H}(\mathbb{F}_q)|f_{\mathcal{E}}$$

pour tout $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}$. Cela définit l'isomorphisme ι.

Proposition. *Cette définition ne dépend pas des choix effectués.*

Preuve. On a choisi les sommets s et s_H puis, $\mathcal{E}$ étant fixé, un élément N, un isomorphisme ϕ et un scalaire r_N. Ce dernier n'influe pas : en vertu de la définition $r_{N_H} = r_N \epsilon_{s,\mathcal{F},N}(\delta)$, changer r_N multiplie les deux fonctions $f_{\mathcal{E}}$ et $f_{\mathcal{E}_H}$ par le même scalaire et ne modifie pas ι_s.

Supposons fixés s, s_H et $\mathcal{E}$. Montrons que la définition de l'action du Frobenius sur $\mathcal{E}_H$ ne dépend pas des choix de N et ϕ. Choisissons un autre élément $N' \in \mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$, puis un autre isomorphisme $\phi' \in \Phi$ vérifiant l'analogue de (2) où l'on remplace N par N'. Il existe $a \in Aut'(G, F^{nr})$ tel que $\phi' = a\phi$. Les hypothèses (2)(a) disent que $\phi^{Imm}(s_H) = \phi'^{Imm}(s_H) = s$. Donc $a \in Aut'_s(G, F^{nr})$. On déduit de $\mathcal{E}$ muni de son action de Frobenius un autre faisceau $\mathcal{E}'_H$ sur $\mathfrak{h}_{s_H}$ muni d'une action de Frobenius. On affecte de $'$ les objets afférents à ce faisceau. On a $\mathcal{E}'_H = \phi_s'^{-1}(\mathcal{E}) = \phi_s^{-1}a_s^{-1}(\mathcal{E})$. Mais on a déjà dit que a_s^{-1} conservait $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{E}'_H = \phi_s^{-1}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_H$. Posons $N'_H = \phi_s'^{-1}(N')$. Puisque N et N' sont deux éléments de $\mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$, on peut fixer $g \in K_s^{0,nr}$ de sorte que $N' = \bar{g}^{-1}N\bar{g}$ et on a $\bar{g}Fr(\bar{g})^{-1} \in Z_{G_s}(N)$. Donc $gFr(g)^{-1}$ appartient à $K_{s,N}^{0,nr}$. Puisque a_s^{-1} conserve $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{O}$, on peut de même fixer $u \in K_s^{0,nr}$ tel que $a_s^{-1}(N) = \bar{u}^{-1}N\bar{u}$. On a

$$N'_H = \phi_s'^{-1}(N') = \phi_s^{-1}a_s^{-1}(\bar{g}^{-1}N\bar{g}) = \phi_s^{-1}(a_s^{-1}(\bar{g}^{-1})a_s^{-1}(N)a_s^{-1}(\bar{g}))$$

$$= \phi_s^{-1}(a_s^{-1}(\bar{g}^{-1})\bar{u}^{-1}N\bar{u}a_s^{-1}(\bar{g})).$$

Remarquons que $a_s^{-1}(\bar{g}) = \overline{(a^{-1}(g))}$. Posons $h = \phi^{-1}(ua^{-1}(g))$. Alors h appartient à $K_{s_H}^{H,0,nr}$ et $\phi_s^{-1}(\bar{u}a_s^{-1}(\bar{g}))$ est la réduction $\bar{h}$ de h dans H_{s_H}. L'égalité précédente se récrit $N'_H = \bar{h}^{-1}\phi_s^{-1}(N)\bar{h} = \bar{h}^{-1}N_H\bar{h}$. En vertu de 4.1.2(2), pour démontrer que les deux actions de Frobenius définies sur $\mathcal{F}_H$ sont les mêmes, il suffit de prouver l'égalité

(4) $r'_{N'_H} = \xi_{N_H}(Fr(\bar{h})\bar{h}^{-1})r_{N_H}$.

On simplifie la notation en supprimant les termes s et $\mathcal{E}$ de notre famille admissible $(\epsilon_{s,\mathcal{E},N''})_{N''\in\mathcal{O}}$. En appliquant les définitions des termes $r'_{N'_H}$, ξ_{N_H} et r_{N_H}, la relation (4) équivaut à

$$\epsilon_{N'}(\delta')r_{N'} = \xi_N \circ \phi_s(Fr(\bar{h})\bar{h}^{-1})\epsilon_N(\delta)r_N.$$

En appliquant 4.1.2(2) et $Hyp(3, N, N')$, on a $r_{N'} = \xi_N(Fr(\bar{g})\bar{g}^{-1})r_N$ et $\epsilon_{N'}(\delta') = \epsilon_N(Ad(g)\delta' Ad(g)^{-1})$. La relation (4) équivaut à

$$(5) \qquad \epsilon_N(Ad(g)\delta' Ad(g)^{-1})\xi_N(Fr(\bar{g})\bar{g}^{-1}) = \xi_N \circ \phi_s(Fr(\bar{h})\bar{h}^{-1})\epsilon_N(\delta).$$

En vertu de la définition de h, on a $\bar{h} = \phi_s^{-1}(\bar{u}a_s^{-1}(\bar{g}))$. D'où $\phi_s(\bar{h}) = \bar{u}a_s^{-1}(\bar{g})$. Pour calculer $Fr(\bar{h})$, on utilise la relation $Fr(\phi_s) = \delta_s\phi_s$ qui résulte de la définition de δ. On a

$$Fr(\bar{h}) = Fr(\phi_s^{-1})Fr(\bar{u}a_s^{-1}(\bar{g})) = \phi_s^{-1}\delta_s^{-1} \circ Fr(\bar{u}a_s^{-1}(\bar{g})).$$

D'où $\phi_s \circ Fr(\bar{h}) = \delta_s^{-1} \circ Fr(\bar{u}a_s^{-1}(\bar{g}))$, puis

$$\phi_s(Fr(\bar{h})\bar{h}^{-1}) = \delta_s^{-1} \circ Fr(\bar{u}a_s^{-1}(\bar{g}))a_s^{-1}(\bar{g})^{-1}\bar{u}^{-1}.$$

En posant $v = ua^{-1}(g)$, c'est aussi

$$(6) \qquad \phi_s(Fr(\bar{h})\bar{h}^{-1}) = \delta_s^{-1} \circ Fr(\bar{v})\bar{v}^{-1}.$$

Notons que, puisque $Fr(\bar{h})\bar{h}^{-1}$ appartient à $Z_{H_{s_H}}(N_H)$, $\phi_s(Fr(\bar{h})\bar{h}^{-1})$ appartient à $Z_{G_s}(N)$. C'est la réduction de $\delta^{-1} \circ Fr(v)v^{-1}$ qui appartient à $K_s^{0,nr}$. D'où $\delta^{-1} \circ Fr(v)v^{-1} \in K_{s,N}^{0,nr}$.

On a $\delta' = Fr(a)\delta a^{-1}$ d'où

$$Ad(g)\delta' Ad(g)^{-1} = Ad(g)Fr(a)\delta a^{-1}Ad(g)^{-1} = Ad(gFr(g)^{-1})Ad(Fr(g))Fr(a)\delta a^{-1}Ad(g)^{-1}.$$

Posons $b = Ad(u)a^{-1}$. Parce que $a \in Aut'_s(G, F^{nr})$ et que $a_s^{-1}(N) = \bar{u}^{-1}N\bar{u}$, on a $b \in Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$. On a $Ad(g)a = aAd(a^{-1}(g)) = b^{-1}Ad(ua^{-1}(g)) = b^{-1}Ad(v)$. Alors

$$Ad(g)\delta' Ad(g)^{-1} = Ad(gFr(g)^{-1})Fr(b)^{-1}Ad(Fr(v))\delta Ad(v)^{-1}b.$$

On a $gFr(g)^{-1} \in K_{s,N}^{0,nr}$. En appliquant $Hyp(1, N)$ et $Hyp(2, N)$, on en déduit

$$\epsilon_N(Ad(g)\delta' Ad(g)^{-1}) = \xi_N(\bar{g}Fr(\bar{g}^{-1}))\epsilon_N(Fr(b)^{-1})\epsilon_N(Ad(Fr(v))\delta Ad(v)^{-1})\epsilon_N(b).$$

D'après $Hyp(4, N)$, on a $\epsilon_N(Fr(b)^{-1})\epsilon_N(b) = 1$. On a aussi $Ad(Fr(v))\delta Ad(v)^{-1} = \delta Ad(\delta^{-1} \circ Fr(v)v^{-1})$. On a remarqué ci-dessus que $\delta^{-1} \circ Fr(v)v^{-1}$ appartenait à $K_{s,N}^{0,nr}$. En appliquant $Hyp(1, N)$ et $Hyp(2, N)$, on obtient

$$\epsilon_N(Ad(Fr(v))\delta Ad(v)^{-1}) = \xi_N(\delta_s^{-1} \circ Fr(\bar{v})\bar{v}^{-1})\epsilon_N(\delta).$$

En rassemblant les calculs ci-dessus, on arrive à l'égalité

$$(7) \qquad \epsilon_N(Ad(g)\delta' Ad(g)^{-1}) = \xi_N(\delta_s^{-1} \circ Fr(\bar{v})\bar{v}^{-1})\xi_N(\bar{g}Fr(\bar{g}^{-1}))\epsilon_N(\delta).$$

La relation (5) que nous devons démontrer résulte de (6) et (7).

Il nous reste maintenant à faire varier les sommets s et s_H. Considérons d'autres sommets $\underline{s}_H \in S^{st}(H)$ et $\underline{s} \in S^{st}(G)$. On note plus précisément ι_s et $\iota_{\underline{s}}$ les isomorphismes définis à l'aide des sommets s et $\underline{s}$. On peut fixer $g \in G(F)$ tel que l'action de g sur $Imm_{F^{nr}}(G)$ envoie s sur $\underline{s}$, resp. $h \in H(F)$ tel que l'action de h sur $Imm_{F^{nr}}(H)$ envoie $\underline{s}_H$ sur s_H. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & FC^{st}(\mathfrak{h}_{\underline{s}_H}(\mathbb{F}_q)) & \stackrel{\iota_{\underline{s}}}{\to} & FC^{st}(\mathfrak{g}_{\underline{s}}(\mathbb{F}_q)) & \\ \swarrow & & & & \searrow \\ I(\mathfrak{h}(F)) & \downarrow Ad(h) & & \uparrow Ad(g) & I(\mathfrak{g}(F)) \\ \nwarrow & & & & \nearrow \\ & FC^{st}(\mathfrak{h}_{s_H}(\mathbb{F}_q)) & \stackrel{\iota_s}{\to} & FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)) & \end{array}$$

Les deux triangles sont commutatifs. Pour démontrer que le changement de sommets ne modifie pas ι, il suffit donc de démontrer que le carré intérieur est commutatif. Soit $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_{s,\mathbb{F}_q}^{st}$, avec les notations afférentes. Fixons $N \in \mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. De $Ad(g)$ se déduit l'isomorphisme $\overline{Ad(g)} : G_s \to G_{\underline{s}}$. Posons $\underline{\mathcal{E}} = \overline{Ad(g)}(\mathcal{E})$, $\underline{N} = \overline{Ad(g)}(N)$. On a $\underline{\mathcal{E}} \in \mathbf{FC}_{\underline{s},\mathbb{F}_q}^{st}$.

Puisque $g \in G(F)$, on a encore $\underline{N} \in \underline{\mathcal{O}}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$ (où évidemment $\underline{\mathcal{O}}$ est l'orbite supportant $\underline{\mathcal{E}}$). L'action $\overline{Ad(g)}$ transporte l'action fixée de Frobenius sur $\mathcal{E}$ en l'action sur $\underline{\mathcal{E}}$ définie par le scalaire $\underline{r}_{\underline{N}} = r_N$. On choisit $\phi \in \Phi$ vérifiant (2) pour $\mathcal{E}$ et N et on pose $\underline{\phi} = Ad(g)\phi Ad(h)^{-1}$. On voit que $\underline{\phi}$ appartient à Φ et vérifie (2) relativement à $\underline{\mathcal{E}}$ et $\underline{N}$. Appliquons les constructions de ι_s à l'aide de ϕ et de $\iota_{\underline{s}}$ à l'aide de $\underline{\phi}$. On en déduit des faisceaux $\mathcal{E}_H \in \mathbf{FC}^{st}_{s_H,\mathbb{F}_q}$ et $\underline{\mathcal{E}}_H \in \mathbf{FC}^{st}_{\underline{s}_H,\mathbb{F}_q}$ et des éléments $N_H \in \mathcal{O}_H^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$ et $\underline{N}_H \in \underline{\mathcal{O}}_H^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. Il est clair que l'isomorphisme $\overline{Ad(h)} : H_{s_H} \to H_{\underline{s}_H}$ transporte $\mathcal{E}_H$ et N_H sur $\underline{\mathcal{E}}_H$ et $\underline{N}_H$. Il suffit de prouver que cet isomorphisme entrelace les actions de Frobenius. En reprenant les définitions, cela équivaut à l'égalité $\epsilon_{\underline{s},\underline{\mathcal{E}},\underline{N}}(\underline{\delta}) = \epsilon_{s,\mathcal{E},N}(\delta)$, où $\delta = Fr(\phi)\phi^{-1}$ et $\underline{\delta} = Fr(\underline{\phi})\underline{\phi}^{-1}$. Parce que $h \in H(F)$ et $g \in G(F)$, on voit que $\underline{\delta} = Ad(g)\delta Ad(g)^{-1}$ et l'égalité requise résulte de l'hypothèse $Hyp(5)$. Cela achève la preuve de la proposition. $\square$

Remarque (8). Supposons que G ne soit pas du type (A_{n-1}, ram) et que G et H soient isomorphes sur F. Fixons un isomorphisme $\phi : H \to G$ défini sur F. Il s'en déduit par transport de structure un isomorphisme $FC^{st}(\mathfrak{h}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Celui-ci ne dépend pas du choix de ϕ car le groupe $Aut(G, F)$ agit trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$, cf. [48] 9(5). Cet isomorphisme est égal à l'isomorphisme ι que l'on vient de construire, cela résulte aisément de la construction ci-dessus. Dans le cas où G est de type (A_{n-1}, ram), supposons plus précisément que la classe Φ contienne un isomorphisme défini sur F. On choisit un tel $\phi \in \Phi$ défini sur F. De nouveau, ι est égal à l'isomorphisme déduit de ϕ par transport de structure. Remarquons que dans ce cas de type (A_{n-1}, ram), le groupe $Aut(G, F)$ n'agit pas toujours trivialement sur $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ et ces isomorphismes dépendent de la classe Φ.

La proposition ci-dessus nous ramène à construire une famille G-admissible $(\epsilon_{s,\mathcal{F},N})_{s\in S^{nr,st}(G),\mathcal{E}\in\mathbf{FC}^{st}_s,N\in\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}$ définie sur F. Nous le ferons dans la sous-section suivante. Remarquons que ces familles vivent sur le groupe G, le groupe H disparaît.

4.2 Construction des applications ϵ_N

4.2.1 Les hypothèses

Soit G un goupe réductif connexe défini sur F vérifiant les hypothèses posées en 4.1.1. On veut construire une famille G-admissible $(\epsilon_{s,\mathcal{F},N})_{s\in S^{nr,st}(G),\mathcal{E}\in\mathbf{FC}^{st}_s,N\in\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}$ définie sur F. On veut que la définition de ces familles soit canonique au sens qu'elle ne dépende pas de choix auxiliaires. Comme on l'a dit dans la remarque (1) de 4.1.4, l'hypothèse $Hyp(5)$ sera alors automatiquement vérifiée. Puisque $S^{nr,st}(G)$ forme une seule orbite pour l'action de $G(F^{nr})$, on peut fixer un sommet $s \in S^{nr,st}(G)$ et se contenter de définir une famille $(\epsilon_{s,\mathcal{E},N})_{N\in\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ pour tout faisceau $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_s$. On fixe aussi un tel faisceau $\mathcal{E}$ et on simplifie la notation en supprimant les indices s et $\mathcal{E}$. Autrement dit, on va construire une famille $(\epsilon_N)_{N\in\mathcal{O}}$. Seule la condition $Hyp(4, N)$ dépend de la structure de G sur F. Nous supposerons donc que le corps de base est F^{nr}, en ne revenant à la situation sur F que pour traiter cette condition $Hyp(4, N)$. Bien sûr, pour traiter cette dernière condition, il faut imposer les hypothèses supplémentaires que $s \in S^{st}(G)$ et que $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}$.

Nous commencerons par traiter le cas où G est déployé sur F^{nr}. Nous adapterons ensuite la construction au cas où G est de type (A_{n-1}, ram) avec n pair. Dans le cas où G est de type (A_{n-1}, ram) avec n impair ou de type (D_n, ram), nous utiliserons d'autres méthodes plus simples qui utilisent des propriétés particulières à ces cas, lesquelles ne

sont pas vérifiées en général.

4.2.2 Un sous-ensemble de $\mathcal{O}$, cas non ramifié

On suppose que G est déployé sur F^{nr}. On reprend les constructions de 2.1.7 et 2.1.9. On fixe donc une paire de Borel épinglée $\mathfrak{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ que l'on suppose fixée par I_F. On la prolonge en un épinglage affine $\mathfrak{E}_a = (T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta_a})$ lui-aussi fixé par I_F. On a déduit de $\mathfrak{E}$ une alcôve $C^{nr} \subset Imm_{F^{nr}}(G)$ et on suppose que $s \in S(\bar{C}^{nr})$ (le sommet s étant fixé, on peut toujours construire des données telles que cette condition soit vérifiée). Le sommet s est associé à une racine $\alpha_s \in \Delta_a$. Parce que $s \in S^{nr,st}$, un examen cas par cas des résultats de [48] montre que $\alpha_s \neq \alpha_0$. Ceci entraîne que E_{α_0} est une base du $\mathfrak{o}_{F^{nr}}$-module $\mathfrak{u}_{\alpha_0} \cap \mathfrak{k}_s^{nr}$. En 4.1.1, on a interdit à G d'être de type (A_{n-1}, nr). On a alors identifié en 2.1.8 le groupe $Aut(\mathcal{D}_a)$ au sous-groupe $\mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a) = \mathbf{\Omega} \rtimes \mathbf{Out}(G)$ de $Aut(G, F^{nr})$. D'après [48] 9(4), ce sous-groupe $\mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a)$ fixe le sommet s, c'est-à-dire qu'il est inclus dans $Aut_s(G, F^{nr})$. Tout élément δ de ce groupe définit par réduction un automorphisme δ_s de G_s. Notons R la composante neutre du sous-groupe des éléments de G_s fixés par δ_s pour tout $\delta \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$.

Lemme. *L'ensemble $\mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$ est une unique orbite sous l'action de R.*

Preuve. On traite tous les cas, en se référant à [48] où on a décrit le sommet s et l'orbite $\mathcal{O}$ associée au faisceau $\mathcal{F}$ (l'ensemble $\mathbf{FC}_s^{st}$ peut avoir plusieurs éléments mais l'orbite $\mathcal{O}$ est commune à tous ceux-ci).

Supposons G de type B_n avec $2n+1 = k^2+h^2$, où $k, h \in \mathbb{N}$, k est pair et $|k-h| = 1$. Alors $G_{s,SC} = Spin(k^2) \times Spin(h^2)$. Le groupe $\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$ a deux éléments, l'élément non trivial agissant par un automorphisme extérieur non trivial de la première composante $Spin(k^2)$. On a $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, où $\mathcal{O}_1$, resp. $\mathcal{O}_2$, sont paramétrées par les partitions $(2k-1, ..., 3, 1)$, resp. $(2h-1, ..., 3, 1)$. On a $R_{SC} = Spin(k^2-1) \times Spin(h^2)$, l'homomorphisme de R_{SC} dans $G_{s,SC}$ étant évident. Considérons un élément nilpotent de $\mathfrak{spin}(k^2-1)$ paramétré par une partition $(\lambda_1, ..., \lambda_l)$, avec $\lambda_l > 0$. Alors son image dans $\mathfrak{spin}(k^2)$ est paramétrée par la partition $(\lambda_1, .., \lambda_l, 1)$. Donc $\mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$ est égal à $\mathcal{O}_1' \times \mathcal{O}_2$, où $\mathcal{O}_1'$ est paramétrée par la partition $(2k-1, ..., 5, 3)$.

Supposons G de type C_n où $n = k(k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $G_{s,SC} = Sp(k(k+1)) \times Sp(k(k+1))$. Le groupe $\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$ a deux éléments, l'élément non trivial agissant par permutation des facteurs. On a $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, où $\mathcal{O}_1$, resp. $\mathcal{O}_2$, sont paramétrées par la même partition $(2k, ..., 4, 2)$. On a $R_{SC} = Spin(k(k+1))$, l'homomorphisme de R_{SC} dans $G_{s,SC}$ étant diagonal. Alors $\mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$ est égal à l'orbite paramétrée par cette même partition $(2k, ..., 4, 2)$.

Supposons G de type D_n avec $n = h^2$ où $h \in \mathbb{N}$ est pair. Supposons $n > 4$. Alors $G_{s,SC} = Spin(h^2) \times Spin(h^2)$.Le groupe $\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$ a 8 éléments. Il est engendré par les automorphismes extérieurs habituels de chacun des facteurs $Spin(h^2)$ et par la permutation des deux facteurs. On a $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, où $\mathcal{O}_1$, resp. $\mathcal{O}_2$, sont paramétrées par la même partition $(2h-1, ..., 3, 1)$. On a $R_{SC} = Spin(h^2-1)$, l'homomorphisme de R_{SC} dans $G_{s,SC}$ étant composé du plongement évident $Spin(h^2-1) \to Spin(h^2)$ et du plongement diagonal. Comme dans le cas de type B_n, on voit que $\mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$ est égal à l'orbite paramétrée par la partition $(2h-1, ..., 5, 3)$.

Supposons G de type D_4. Alors $G_{s,SC} = SL(2)^4$ et $\mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a)$ est le groupe des permutations de ces 4 facteurs. L'orbite $\mathcal{O}$ est le produit des orbites régulières. On a $R_{SC} = SL(2)$, l'homomorphisme de R_{SC} dans $G_{s,SC}$ étant diagonal. Alors $\mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$ est l'orbite régulière de $\mathfrak{r}$.

Supposons G de type E_6. Alors $G_{s,SC} = SL(3)^3$ et $\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$ est le groupe des permutations des trois facteurs. L'orbite $\mathcal{O}$ est le produit des orbites régulières. On a $R_{SC} = SL(3)$, l'homomorphisme de R_{SC} dans $G_{s,SC}$ étant diagonal. Alors $\mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$ est l'orbite régulière de $\mathfrak{r}$.

Supoosons G de type E_7. Alors $G_{s,SC} = SL(4) \times SL(4) \times SL(2)$ et $\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$ est le groupe des permutations des deux facteurs $SL(4)$. L'orbite $\mathcal{O}$ est le produit des orbites régulières. On a $R_{SC} = SL(4) \times SL(2)$, l'homomorphisme de R_{SC} dans $G_{s,SC}$ étant le produit de l'homomorphisme diagonal $SL(4) \to SL(4) \times SL(4)$ et de l'identité de $SL(2)$. Alors $\mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$ est le produit des orbites régulières. $\square$

4.2.3 Construction de la famille admissible $(\epsilon_N)_{N \in \mathcal{O}}$, cas non ramifié

On conserve les hypothèses du paragraphe précédent. Si G n'est pas de type (B_n), on note $\boldsymbol{\epsilon}$ le caractère trivial de $Aut(\mathcal{D}_a)$. Supposons que G soit de type (B_n). Comme on l'a rappelé au paragraphe précédent, on a $2n+1 = k^2 + h^2$ où $k, h \in \mathbb{N}$, k est pair et $|k-h| = 1$. Le groupe $Aut(\mathcal{D}_a)$ a deux éléments. Notons sgn son unique caractère non trivial. On pose $\boldsymbol{\epsilon} = sgn^{(k+h+1)/2}$.

Soit $N \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$. Montrons que

(1) l'application produit $Ad(K_{s,N}^{0,nr}) \times \mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a) \to Aut(G, F^{nr})$ est injective et son image est $Aut_{s,N}(G, F^{nr})$.

Par définition de R, N est fixé par δ_s pour tout $\delta \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$. Donc $\mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a) \subset Aut_{s,N}(G, F^{nr})$. Soit $\delta \in Aut_{s,N}(G, F^{nr})$. La même preuve qu'en 2.1.9(6) montre qu'il existe $k \in K_s^{0,nr}$ tel que $Ad(k)\delta$ conserve à la fois C^{nr} et T. De $Ad(k)\delta$ se déduit alors un automorphisme de $\mathcal{D}_a$ que l'on remonte en un élément $\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$. On a alors $Ad(k)\delta = \delta'\boldsymbol{\delta}$, où δ' est un automorphisme qui préserve T, C^{nr} et tel que son image dans $Aut(\mathcal{D}_a)$ est l'identité. Un tel automorphisme δ' est forcément de la forme $Ad(t)$ pour un $t \in T(\mathfrak{o}_{F^{nr}}) \subset K_s^{0,nr}$. Cela démontre que $\delta = Ad(k')\boldsymbol{\delta}$ pour un $k' \in K_s^{0,nr}$. On a $\delta \in Aut_{s,N}(G, F^{nr})$ par hypothèse et on a vu que $\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$ était inclus dans ce groupe. Donc $Ad(k') \in Aut_{s,N}(G, F^{nr})$, ce qui implique que k' appartient à $K_{s,N}^{0,nr}$. Cela prouve que l'image de notre application est $Aut_{s,N}(G, F^{nr})$. Soit $k \in K_{s,N}^{0,nr}$ tel que $Ad(k) \in \mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a)$. Tout élément de $\mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a)$ conserve C^{nr}, donc $k \in K_{C^{nr}}^{0,nr}$. Un tel élément agit trivialement sur $\mathcal{D}$. Puisque $Ad(k) \in \mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a)$, cela entraîne $k = 1$. D'où l'injectivité de l'application. Cela prouve (1).

Pour $\delta \in Aut_{s,N}(G, F^{nr})$, on écrit $\delta = Ad(k)\boldsymbol{\delta}$ avec $k \in K_{s,N}^{0,nr}$ et $\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a^{nr})$. Cette décomposition est unique. On définit $\epsilon_N(\delta) = \xi_N(\bar{k})\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta})$.

Remarque. On pourrait définir $\epsilon_N(\delta)$ par la formule plus simple $\epsilon_N(\delta) = \xi_N(\bar{k})$. Les résultats de la sous-section 4.2 resteraient vrais. Mais le théorème 4.3.1 ne le serait plus.

L'application ϵ_N ainsi définie vérifie l'hypothèse $Hyp(1, N)$ de 4.1.3. Montrons que

(2) l'hypothèse $Hyp(2, N)$ est vérifiée.

Soient $\delta, \delta' \in Aut_{s,N}(G, F^{nr})$. Ecrivons $\delta = Ad(k)\boldsymbol{\delta}$, $\delta' = Ad(k')\boldsymbol{\delta}'$, avec $k, k' \in K_{s,N}^{0,nr}$ et $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\delta}' \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$. Posons $k'' = k\boldsymbol{\delta}(k')$, $\boldsymbol{\delta}'' = \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}'$. On a $k'' \in K_{s,N}^{0,nr}$, $\boldsymbol{\delta}'' \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$ et $\delta\delta' = Ad(k'')\boldsymbol{\delta}''$. Alors $\epsilon_N(\delta\delta') = \xi_N(\bar{k}'')\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta}'')$. On a $\bar{k}'' = \bar{k}\boldsymbol{\delta}_s(\bar{k}')$. Puisque ξ_N est invariant par $\boldsymbol{\delta}_s$ d'après 4.1.3(1), on a $\xi_N(\bar{k}'') = \xi_N(\bar{k})\xi_N(\bar{k}')$. D'où $\epsilon_N(\delta\delta') = \xi_N(\bar{k})\xi_N(\bar{k}')\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta}') = \epsilon_N(\delta)\epsilon_N(\delta')$. Cela prouve (2).

En utilisant le lemme 4.1.3, notre application ϵ_N se prolonge en une unique famille admissible $(\epsilon_{N'})_{N' \in \mathcal{O}}$.

Lemme. *La famille admissible $(\epsilon_{N'})_{N' \in \mathcal{O}}$ ne dépend pas des choix effectués.*

Preuve. Ces choix sont ceux de l'épinglage $\mathfrak{E}$, de l'élément supplémentaire E_{α_0} et de l'élément $N \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$.

Conservons l'épinglage et l'élément E_{α_0} et remplaçons N par un autre élément $\tilde{N} \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$. On en déduit une autre famille admissible $(\tilde{\epsilon}_{N'})_{N' \in \mathcal{O}}$. Il nous suffit de prouver que $\tilde{\epsilon}_{\tilde{N}} = \epsilon_{\tilde{N}}$. D'après le lemme 4.2.2, on peut fixer $\bar{r} \in R$ tel que $\tilde{N} = \bar{r}^{-1} N \bar{r}$. Relevons $\bar{r}$ en un élément $r \in K_s^{0,nr}$. On a $Ad(r) \in Aut_{s,\tilde{N} \mapsto N}(G, F^{nr})$. Soit $\delta \in Aut_{s,N}(G, F^{nr})$. D'après $Hyp(3, N, \tilde{N})$, on a l'égalité $\epsilon_{\tilde{N}}(Ad(r)^{-1}\delta Ad(r)) = \epsilon_N(\delta)$. Ecrivons $\delta = Ad(k)\boldsymbol{\delta}$ avec $k \in K_{s,N}^{0,nr}$ et $\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a^{nr})$. Alors $Ad(r)^{-1}\delta Ad(r) = Ad(k')\boldsymbol{\delta}$, où $k' = r^{-1}k\boldsymbol{\delta}(r)$. On a $k' \in K_s^{0,nr}$. Puisque $Ad(r)^{-1}\delta Ad(r)$ et $\boldsymbol{\delta}$ appartiennent tous deux à $Aut_{s,\tilde{N}}(G, F^{nr})$, on a en fait $k' \in K_{s,\tilde{N}}^{0,nr}$. Alors, par définition, $\tilde{\epsilon}_{\tilde{N}}(Ad(r)^{-1}\delta Ad(r)) = \xi_{\tilde{N}}(\bar{k}')\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta})$. On a $\bar{k}' = \bar{r}^{-1}\bar{k}\boldsymbol{\delta}_s(\bar{r})$. Mais $\bar{r} \in R$ donc $\boldsymbol{\delta}_s(\bar{r}) = \bar{r}$. Puisque $\tilde{N} = \bar{r}^{-1}N\bar{r}$, on a $\xi_{\tilde{N}}(\bar{r}^{-1}\bar{k}\bar{r}) = \xi_N(\bar{k})$. On obtient $\tilde{\epsilon}_{\tilde{N}}(Ad(r)^{-1}\delta Ad(r)) = \xi_N(\bar{k})\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta}) = \epsilon_N(\delta)$. D'où l'égalité $\tilde{\epsilon}_{\tilde{N}}(Ad(r)^{-1}\delta Ad(r)) = \epsilon_{\tilde{N}}(Ad(r)^{-1}\delta Ad(r))$. Cela prouve que notre famille ne dépend pas du choix de N.

Conservons l'épinglage $\mathfrak{E}$ et montrons que nos constructions ne dépendent pas du choix de E_{α_0}. On a déjà dit que la racine $\alpha_s \in \Delta_a$ associée à s était fixée par tout élément de $Aut(\mathcal{D}_a)$. Il en résulte

(3) E_{α_s} est fixé par l'action de $\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$.

Choisissons un autre élément $\tilde{E}_{\alpha_0}$ vérifiant les mêmes propriétés que E_{α_0}. On affecte de ˜ les objets construits à l'aide de ce nouveau choix. En particulier, on pose $\tilde{E}_\alpha = E_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta$. D'après les définitions, on a $\tilde{E}_{\alpha_0} = \lambda E_{\alpha_0}$ pour un $\lambda \in \mathfrak{o}_{F^{nr}}^\times$. Rappelons la relation linéaire $\sum_{\alpha \in \Delta_a} d(\alpha)\alpha = 0$. Choisissons $\mu \in F^{nr,\times}$ tel que $\mu^{d(\alpha_s)} = \lambda$ et posons $t = \check{\varpi}_{\alpha_s}(\mu)$ (on a déjà dit que $\alpha_s \neq \alpha_0$ donc $\alpha_s \in \Delta$). On a $\alpha_0(t) = \lambda^{-1}$ et $\alpha(t) = 1$ pour $\alpha \in \Delta_a - \{\alpha_0, \alpha_s\}$, dont on déduit que $Ad(t)(\tilde{E}_\alpha) = E_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta_a - \{\alpha_s\}$ tandis que $Ad(t)(\tilde{E}_{\alpha_s}) = \mu E_{\alpha_s}$. Montrons que

(4) $\tilde{\boldsymbol{Aut}}(\mathcal{D}_a) = \{Ad(t)^{-1}\boldsymbol{\delta}Ad(t); \boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)\}$.

Soient $\delta \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$ et $\alpha \in \Delta_a$. Posons $\beta = \delta(\alpha)$. On doit montrer que $Ad(t^{-1})\delta Ad(t)(\tilde{E}_\alpha) = \tilde{E}_\beta$. Si $\alpha \neq \alpha_s$, on a aussi $\beta \neq \alpha_s$ et l'égalité cherchée résulte des formules ci-dessus et de l'égalité $\delta(E_\alpha) = E_\beta$. Si $\alpha = \alpha_s$, on a aussi $\beta = \alpha_s$ et l'égalité cherchée résulte de l'égalité $\delta(E_{\alpha_s}) = E_{\alpha_s}$, laquelle résulte de (3). Cela prouve (4).

Evidemment, l'application $\boldsymbol{\delta} \mapsto Ad(t)^{-1}\boldsymbol{\delta}Ad(t)$ identifie les caractères $\boldsymbol{\epsilon}$ des deux groupes $\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$ et $\tilde{\boldsymbol{Aut}}(\mathcal{D}_a)$.

Soit $N \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$. Posons $\tilde{N} = \bar{t}^{-1}N\bar{t}$. D'après (4), on a $\tilde{R} = \bar{t}^{-1}R\bar{t}$ donc $\tilde{N} \in \mathcal{O} \cap \tilde{\mathfrak{r}}$. Soit $\delta \in Aut_{s,N}(G, F^{nr})$, posons $\tilde{\delta} = Ad(t)^{-1}\delta Ad(t)$. Alors $\tilde{\delta} \in Aut'_{s,\tilde{N}}(G, F^{nr})$. D'après $Hyp(3, N, \tilde{N})$, on a $\epsilon_{\tilde{N}}(\tilde{\delta}) = \epsilon_N(\delta)$. Ecrivons $\delta = Ad(k)\boldsymbol{\delta}$ avec $k \in K_{s,N}^{0,nr}$ et $\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$. Posons $\tilde{\boldsymbol{\delta}} = Ad(t)^{-1}\boldsymbol{\delta}Ad(t)$. D'après (4), c'est un élément de $\tilde{\boldsymbol{Aut}}(\mathcal{D}_a)$. On calcule $\tilde{\delta} = Ad(\tilde{k})\tilde{\boldsymbol{\delta}}$, où $\tilde{k} = t^{-1}kt$. Par définition, on a

$$\tilde{\epsilon}_{\tilde{N}}(\tilde{\delta}) = \xi_{\tilde{N}}(\bar{\tilde{k}})\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}) = \xi_{\tilde{N}}(\bar{t}^{-1}\bar{k}\bar{t})\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta}) = \xi_N(\bar{k})\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta}) = \epsilon_N(\delta).$$

D'où l'égalité $\tilde{\epsilon}_{\tilde{N}}(\tilde{\delta}) = \epsilon_{\tilde{N}}(\tilde{\delta})$, puis $\tilde{\epsilon}_{\tilde{N}} = \epsilon_{\tilde{N}}$. Cela démontre que notre famille ne dépend pas du choix de E_{α_0}.

Considérons maintenant un autre épinglage $\tilde{\mathfrak{E}} = (\tilde{B}, \tilde{T}, (\tilde{E}_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de G vérifiant les mêmes hypothèses que $\mathfrak{E}$: il est fixé par l'action de I_F ; en notant $\tilde{C}^{nr}$ l'alcôve de $Imm_{F^{nr}}(G)$ qui s'en déduit, s appartient à $S(\bar{\tilde{C}}^{nr})$. Puisque $\mathfrak{E}$ et $\tilde{\mathfrak{E}}$ sont tous deux définis sur F^{nr} et que G est adjoint, il existe un unique $g \in G(F^{nr})$ tel que $Ad(g^{-1})(\mathfrak{E}) = \tilde{\mathfrak{E}}$. Montrons que

(5) il existe $x \in K_s^{0,nr}$ et $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$ tels que $Ad(g)^{-1} = Ad(x)^{-1}\boldsymbol{\tau}$.

Comme dans la preuve de 2.1.9(6), on peut fixer $y \in K_s^{0,nr}$ tel que l'action de y sur l'immeuble envoie $\tilde{C}^{nr}$ sur C^{nr} et que $y\tilde{T}y^{-1} = T$. Alors yg^{-1} normalise T et conserve C^{nr}. Toujours comme dans la preuve de 2.1.9(6), un tel élément s'écrit $t\boldsymbol{\omega}$ où $t \in T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})$ et $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}$. Alors $g^{-1} = x^{-1}\boldsymbol{\omega}$, où $x = t^{-1}y$ appartient à $K_s^{0,nr}$. Donc $Ad(g)^{-1} = Ad(x)^{-1}Ad(\boldsymbol{\omega})$ et $Ad(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$. D'où (5).

Remarque. Pour $g \in G$, resp. $\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$, on a noté $Ad(g)$, resp. simplement $\boldsymbol{\delta}$, son image dans $Aut(G)$. Cela crée un léger conflit pour les éléments de $\boldsymbol{\Omega}$ puisque ce groupe est par définition un sous-groupe de G mais qu'on l'a identifié à un sous-groupe de $\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$. D'où l'égalité ci-dessus $Ad(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}$.

A fortiori, l'action de g^{-1} sur l'immeuble fixe s. Posons $\tau = Ad(g)^{-1}$. Il s'en déduit un automorphisme τ_s, qui est égal à $Ad(\bar{x}^{-1})\boldsymbol{\tau}_s$. On peut compléter l'épinglage $\tilde{\mathfrak{E}}$ en un épinglage affine en posant $\tilde{E}_{\alpha_0} = g^{-1}E_{\alpha_0}g$. A l'aide de cet épinglage affine, on construit de nouvelles applications $\tilde{\epsilon}_N$ dont on doit prouver qu'elles sont identiques aux applications ϵ_N initiales. De nouveau, on affecte d'un $\tilde{}$ les objets relatifs à notre nouvel épinglage affine. Il est clair que $\tilde{R} = \tau_s(R)$ et que $\tilde{\boldsymbol{Aut}}(\mathcal{D}_a) = Ad(g)^{-1}\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)Ad(g)^{-1} = Ad(x)^{-1}\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)Ad(x)$. Fixons $N \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$. Posons $\tilde{N} = \tau_s(N)$. On a $\tilde{N} \in \mathcal{O} \cap \tilde{\mathfrak{r}}$. Puisque $N \in \mathfrak{r}$ est fixé par $\boldsymbol{\tau}_s$, on a $\tilde{N} = \bar{x}^{-1}N\bar{x}$. On a l'égalité $Aut_{s,\tilde{N}}(G, F^{nr}) = Ad(g)^{-1}Aut_{s,N}(G, F^{nr})Ad(g) = Ad(x)^{-1}Aut_{s,N}(G, F^{nr})Ad(x)$. Soit $\delta \in Aut_{s,N}(G, F^{nr})$, posons $\tilde{\delta} = Ad(x)^{-1}\delta Ad(x)$. Par $Hyp(3, N, \tilde{N})$, on a $\epsilon_{\tilde{N}}(\tilde{\delta}) = \epsilon_N(\delta)$. D'autre part, écrivons $\delta = Ad(k)\boldsymbol{\delta}$, avec $k \in K_{s,N}^{0,nr}$ et $\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$. Alors $\tilde{\delta} = Ad(\tilde{k})\tilde{\boldsymbol{\delta}}$, où $\tilde{k} = x^{-1}kx \in K_{s,\tilde{N}}^{0,nr}$ et $\tilde{\boldsymbol{\delta}} = Ad(x)^{-1}\boldsymbol{\delta}Ad(x) \in \tilde{\boldsymbol{Aut}}(\mathcal{D}_a)$. On a l'égalité $\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}) = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta})$. Par définition, $\tilde{\epsilon}_{\tilde{N}}(\tilde{\delta}) = \xi_{\tilde{N}}(\bar{\tilde{k}})\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}) = \xi_{\tilde{N}}(\bar{x}^{-1}\bar{k}\bar{x})\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta})$. Puisque $\tilde{N} = \bar{x}^{-1}N\bar{x}$, on a $\xi_{\tilde{N}}(\bar{x}^{-1}\bar{k}\bar{x}) = \xi_N(\bar{k})$, d'où $\tilde{\epsilon}_{\tilde{N}}(\tilde{\delta}) = \xi_N(\bar{k})\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta}) = \epsilon_N(\delta) = \epsilon_{\tilde{N}}(\tilde{\delta})$. Cela démontre l'égalité cherchée et achève la preuve du lemme. $\square$

Supposons que $s \in S^{st}(G)$ et que $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_{s,\mathbb{F}_q}^{st}$. Pour démontrer que notre famille admissible est définie sur F, il suffit d'après le lemme 4.1.3 que, pour un seul élément $N \in \mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$, la condition $Hyp(4, N)$ soit vérifiée. Puisque $s \in S^{st}(G)$, on peut choisir un épinglage $\mathfrak{E}$ conservé par Γ_F. On le complète en un épinglage affine lui-aussi conservé par Γ_F, c'est-à-dire que $E_{\alpha_0} \in \mathfrak{g}(F)$, cf. 2.1.9(2). Alors $\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$ est conservé par Γ_F^{nr}. Le groupe R est défini sur $\mathbb{F}_q$. Donc $\mathcal{O} \cap \mathfrak{r}(\mathbb{F}_q)$ n'est pas vide. On choisit un élément $N \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{r}(\mathbb{F}_q)$. Soit $\delta \in Aut_{s,N}(G, F^{nr})$. Ecrivons $\delta = Ad(k)\boldsymbol{\delta}$ avec $k \in K_{s,N}^{0,nr}$ et $\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$. L'égalité $Fr(\delta) = Ad(Fr(k))Fr(\boldsymbol{\delta})$ est une décomposition similaire. Par définition $\epsilon_N(\delta) = \xi_N(\bar{k})\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta})$ et $\epsilon_N \circ Fr(\delta) = \xi_N(Fr(\bar{k}))\boldsymbol{\epsilon}(Fr(\boldsymbol{\delta}))$. Or $\xi_N \circ Fr = \xi_N$ puisque notre faisceau-caractère est conservé par $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. Si $\boldsymbol{\epsilon}$ n'est pas trivial, le groupe $\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$ est réduit à deux éléments et l'action galoisienne y est forcément triviale. Donc $\boldsymbol{\epsilon}(Fr(\boldsymbol{\delta})) = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta})$. On obtient $\epsilon_N \circ Fr = \epsilon_N$. Cela prouve $Hyp(4, N)$. Notre famille admissible est donc définie sur F.

4.2.4 Un sous-ensemble de $\mathcal{O}$, cas (A_{n-1}, ram), n pair

On suppose que G est de type (A_{n-1}, ram) avec n pair. On reprend les constructions de 2.1.7 et 2.1.9. On fixe une paire de Borel épinglée $\mathfrak{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ conservée par I_F. On construit l'alcôve C^{nr} et un épinglage affine $\mathfrak{E}_a = (T, (E_\beta)_{\beta\in\Delta_a^{nr}})$. On suppose $s \in \bar{C}^{nr}$. On a construit le groupe $\boldsymbol{\Omega}^{nr}$ en 2.1.9. C'est un sous-groupe de $G(F^{nr})$ qui a deux éléments. Il fixe le sommet s. Tout élément δ de ce groupe définit par réduction un automorphisme δ_s de G_s. Notons R la composante neutre du sous-groupe des éléments de G_s fixés par δ_s pour tout $\delta \in \boldsymbol{\Omega}^{nr}$.

Lemme. *L'ensemble $\mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$ est une unique orbite sous l'action de R.*

Preuve. Parce que $s \in S^{nr,st}(G)$, on a $n = h^2 + k(k+1)$ avec $h, k \in \mathbb{N}$ et $h = k$ ou $h = k+1$, cf. [48] paragraphe 9. Puisque n est pair, h l'est aussi. Alors $G_{s,SC} = Spin(h^2) \times Sp(k(k+1))$. On a $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, où $\mathcal{O}_1$, resp. $\mathcal{O}_2$, sont paramétrées par les partitions $(2h-1, ..., 3, 1)$, resp. $(2k, ..., 4, 2)$. L'élément non trivial de $\mathbf{\Omega}$ agit par un automorphisme extérieur non trivial du facteur $Spin(h^2)$. On a $R_{SC} = Spin(h^2 - 1) \times Sp(k(k+1))$, l'homomorphisme de R_{SC} dans $G_{s,SC}$ étant évident. Comme dans la preuve de 4.2.2, cas d'un groupe de type B_n, $\mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$ est égal à $\mathcal{O}'_1 \times \mathcal{O}_2$, où $\mathcal{O}'_1$ est paramétré par la partition $(2h-1, ..., 5, 3)$. $\square$

4.2.5 Construction de la famille $(\epsilon_N)_{N \in \mathcal{O}}$, cas (A_{n-1}, ram), n pair

Soit $N \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$. Montrons que

(1) l'application produit $Ad(K^{0,nr}_{s,N}) \times \mathbf{\Omega}^{nr} \to Aut'(G, F^{nr})$ est injective et son image est $Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$.

Par définition de l'ensemble $\mathbf{\Omega}^{nr}$, celui-ci est formé d'automorphismes intérieurs. Pour $\delta \in \mathbf{\Omega}^{nr}$, δ préserve s et δ_s conserve N puisque $N \in \mathfrak{r}$. L'image de notre application est donc contenue dans $Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$. La suite de la preuve est à peu près la même qu'en 4.2.3(1). On est ramené à prouver qu'un élément $\delta \in Aut'(G, F^{nr})$ qui préserve T et C^{nr} et tel que son image dans $Aut(\mathcal{D}^{nr}_a)$ est l'identité appartient à $K^{0,nr}_s$. Puisque δ est intérieur, c'est un élément de $Norm_{G(F^{nr})}(T)$ et il définit un élément $w \in W^{I_F}$. Les conditions imposées à δ impliquent que w fixe Δ^{nr}_a. A fortiori, il fixe Δ^{nr}. Par construction de cet ensemble, w conserve Δ, donc $w = 1$. Donc $\delta \in T(\bar{F})^{I_F}$. Parce que δ conserve C^{nr}, $\alpha(\delta)$ est une unité pour toute racine $\alpha \in \Delta$. Donc $\delta \in T(\mathfrak{o}_{\bar{F}})^{I_F}$. Ce groupe est contenu dans $K^{0,nr}_s$. Cela prouve (1).

Remarque. Remarquons que $Aut_{s,N}(G, F^{nr})$ est plus gros que $Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$: l'automorphisme extérieur usuel θ appartient à $Aut_{s,N}(G, F^{nr})$.

On note sgn le caractère non trivial de $\mathbf{\Omega}^{nr}$. Comme on l'a rappelé dans le paragraphe précédent, on a $n = h^2 + k(k+1)$ avec $h, k \in \mathbb{N}$ et $h = k$ ou $h = k+1$. On pose $\boldsymbol{\epsilon} = sgn^{k+1}$. Pour $\delta \in Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$, on écrit $\delta = Ad(k)\boldsymbol{\delta}$ avec $k \in K^{0,nr}_{s,N}$ et $\boldsymbol{\delta} \in \mathbf{\Omega}^{nr}$. Cette décomposition est unique. On définit $\epsilon_N(\delta) = \xi_N(\bar{k})\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\delta})$. L'application ϵ_N ainsi définie vérifie l'hypothèse $Hyp(1, N)$ de 4.1.3. La même preuve qu'en 4.2.3 (2) montre que $Hyp(2, N)$ est vérifiée. En appliquant le lemme 4.1.3, on déduit de ϵ_N une famille admissible $(\epsilon_{N'})_{N' \in \mathcal{O}}$.

Lemme. *La famille admissible $(\epsilon_{N'})_{N' \in \mathcal{O}}$ ne dépend pas des choix effectués.*

Preuve. Elle est identique à celle du lemme 4.2.3. On doit seulement modifier un point dans la première partie de celle-ci. Choisissons un autre élément $\tilde{E}_{\beta_0}$ vérifiant les mêmes propriétés que E_{β_0}. Alors $\tilde{E}_{\beta_0} = \lambda E_{\beta_0}$ pour un $\lambda \in \mathfrak{o}^\times_{F^{nr}}$. Choisissons $\mu \in F^{nr,\times}$ tel que $\mu^2 = \lambda$. Le sommet s est associé à la racine $\beta_{h^2/2, n-h^2/2} \in \Delta^{nr}$. On pose $t = \check{\varpi}_{\alpha_{h^2/2}}(\mu)\check{\varpi}_{\alpha_{n-h^2/2}}(\mu)$. Avec cette définition de t, on poursuit la démonstration comme en 4.2.3. $\square$

Supposons que $s \in S^{st}(G)$ et que $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}$. On doit montrer que notre famille admissible est définie sur F. La preuve est la même qu'en 4.2.3, à condition de choisir un épinglage $\mathfrak{E}$ et un épinglage affine $\mathfrak{E}_a$ conservés par Γ_F, cf. 2.1.9(2).

4.2.6 Construction de la famille admissible $(\epsilon_N)_{N\in\mathcal{O}}$, cas (A_{n-1}, ram), n impair

On suppose que G est de type (A_{n-1}, ram) avec n impair. On a alors $Aut(\mathcal{D}_a^{nr}) = \{1\}$. En utilisant cette propriété, on démontre comme en 4.2.5 que

(1) pour tout $N \in \mathcal{O}$, on a l'égalité $Aut'_{s,N}(G, F^{nr}) = Ad(K_{s,N}^{0,nr})$.

Soient $N \in \mathcal{O}$ et $\delta \in Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$. Soit $k \in K_{s,N}^{0,nr}$ tel que $\delta = Ad(k)$. On définit $\epsilon_N(\delta) = \xi_N(\bar{k})$. On vérifie aisément que la famille $(\epsilon_N)_{N\in\mathcal{O}}$ ainsi définie est une famille admissible. Si $s \in S^{st}(G)$ et $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_{s,\mathbb{F}_q}^{st}$, elle est définie sur F. En fait, c'est l'unique famille admissible, elle est donc évidemment canonique.

4.2.7 Un sous-ensemble de $\mathcal{O}$, cas (D_n, ram)

On suppose que G est du type (D_n, ram) avec $n \geq 4$. L'hypothèse $s \in S^{nr,st}(G)$ implique que $n = h^2$, où $h \geq 3$ est un entier impair et que G_s est de type $B_{(n-1)/2} \times B_{(n-1)/2}$, cf. [48] paragraphe 9. Un calcul simple montre que $G_s \simeq SO(n) \times SO(n)$ est adjoint. Fixons un épinglage $\mathfrak{E}_s$ du groupe G_s. Notons Θ_s le groupe des automorphismes de G_s qui conservent cet épinglage. Notons R la composante neutre du sous-groupe des éléments de G_s fixés par tout élément de Θ_s.

Lemme. *L'ensemble $\mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$ est une unique orbite sous l'action de R.*

Preuve. On a $G_s = SO(n) \times SO(n)$ et n est impair. Le groupe Θ_s a deux éléments, l'élement non trivial permutant les deux facteurs $SO(n)$. On a $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, où $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont toutes deux paramétrées par la partition $(2h-1, ..., 3, 1)$. Alors $R = SO(n)$, l'homomorphisme de R dans G_s étant diagonal. L'ensemble $\mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$ est l'orbite paramétrée par la même partition. $\square$

4.2.8 Construction de la famille admissible $(\epsilon_N)_{N\in\mathcal{O}}$, cas (D_n, ram)

On conserve les hypothèses du paragraphe précédent. Notons Θ le sous-groupe des éléments $\delta \in Aut_s(G, F^{nr})$ tels que $\delta_s \in \Theta_s$. Soit $N \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$. Montrons que

(1) on a les égalités $Aut_{s,N}(G, F^{nr}) = Ad(K_{s,N}^{0,nr})\Theta$ et $Ad(K_{s,N}^{0,nr}) \cap \Theta = Ad(K_s^{+,nr})$.

L'inclusion $Ad(K_{s,N}^{0,nr})\Theta \subset Aut_{s,N}(G, F^{nr})$ résulte du fait que N est fixé par tout élément de Θ_s. Inversement, soit $\delta \in Aut_{s,N}(G, F^{nr})$. Puisque $\mathfrak{E}_s$ et $\delta_s(\mathfrak{E}_s)$ sont deux épinglages de G_s, on peut fixer $\bar{k} \in G_s$ tel que $Ad(\bar{k})^{-1}\delta_s(\mathfrak{E}_s) = \mathfrak{E}_s$, c'est-à-dire $Ad(\bar{k})^{-1}\delta_s \in \Theta_s$. Relevons $\bar{k}$ en un élément $k \in K_s^{0,nr}$ et posons $\theta = Ad(k)^{-1}\delta$. Alors $\theta \in \Theta$ et on a $\delta = Ad(k)\theta$. Puisque δ et θ appartiennent à $Aut_{s,N}(G, F^{nr})$, $Ad(k)$ appartient aussi à cet ensemble, donc $k \in K_{s,N}^{0,nr}$. Cela démontre la première assertion de (1). Soit $k \in K_s^{0,nr}$ tel que $Ad(k) \in \Theta$. Alors $Ad(\bar{k}) \in \Theta_s$, c'est-à-dire que $Ad(\bar{k})$ conserve $\mathcal{E}_s$. Puisque G_s est adjoint, on a $\bar{k} = 1$ et k appartient à $K_s^{+,nr}$. Cela prouve la seconde assertion de (1).

Pour $\delta \in Aut_{s,N}(G, F^{nr})$, écrivons $\delta = Ad(k)\theta$, avec $k \in K_{s,N}^{0,nr}$ et $\theta \in \Theta$. On pose $\epsilon_N = \xi_N(\bar{k})$. Ceci est bien défini d'après la seconde assertion de (1). L'application ϵ_N ainsi définie vérifie $Hyp(1, N)$. On démontre comme en 4.2.3 (2) que $Hyp(2, N)$ est vérifiée. Grâce au lemme 4.1.3, on prolonge ϵ_N en une famille admissible $(\epsilon_{N'})_{N'\in\mathcal{O}}$

Lemme. *La famille admissible $(\epsilon_{N'})_{N'\in\mathcal{O}}$ ne dépend pas des choix effectués.*

Preuve. On démontre comme en 4.2.3 que le choix de N n'importe pas. Le seul autre choix est celui de l'épinglage $\mathfrak{E}_s$. Considérons un autre épinglage $\tilde{\mathfrak{E}}_s$ de G_s. On affecte d'un ˜les objets construits avec l'épinglage $\tilde{\mathfrak{E}}_s$. On peut fixer $\bar{x} \in G_s$ tel que $\tilde{\mathfrak{E}}_s = Ad(\bar{x})^{-1}(\mathfrak{E}_s)$.

Fixons un relèvement $x \in K_s^{0,nr}$ de $\bar{x}$. On a $\tilde{\Theta}_s = \bar{x}^{-1}\Theta_s\bar{x}$, $\tilde{\Theta} = x^{-1}\Theta x$, $\tilde{R} = \bar{x}^{-1}R\bar{x}$. Soit $N \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$, posons $\tilde{N} = \bar{x}^{-1}N\bar{x}$. On a $\tilde{N} \in \mathcal{O} \cap \tilde{\mathfrak{r}}$. Soit $\delta \in Aut_{s,N}(G, F^{nr})$, posons $\tilde{\delta} = Ad(x)^{-1}\delta Ad(x)$. On a $\tilde{\delta} \in Aut_{s,\tilde{N}}(G, F^{nr})$. D'après $Hyp(3, N, \tilde{N})$, on a $\epsilon_{\tilde{N}}(\tilde{\delta}) = \epsilon_N(\delta)$. Ecrivons $\delta = Ad(k)\theta$, où $k \in K_{s,N}^{0,nr}$ et $\theta \in \Theta$. Posons $\tilde{k} = x^{-1}kx$ et $\tilde{\theta} = Ad(x)^{-1}\theta Ad(x)$. Alors $\tilde{k} \in K_{s,\tilde{N}}^{0,nr}$, $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$ et $\tilde{\delta} = Ad(\tilde{k})\tilde{\theta}$. Par définition, $\tilde{\epsilon}_{\tilde{N}}(\tilde{\delta}) = \xi_{\tilde{N}}(\bar{\tilde{k}})$. Mais $\bar{\tilde{k}} = \bar{x}^{-1}\bar{k}\bar{x}$ donc $\xi_{\tilde{N}}(\bar{\tilde{k}}) = \xi_N(\bar{k}) = \epsilon_N(\delta)$. D'où $\tilde{\epsilon}_{\tilde{N}}(\tilde{\delta}) = \epsilon_{\tilde{N}}(\tilde{\delta})$, ce qui démontre l'indépendance du choix de l'épinglage. $\square$

Supposons $s \in S^{st}(G)$ et $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_{s,\mathbb{F}_q}^{st}$. Alors la famille admissible $(\epsilon_{N'})_{N' \in \mathcal{O}}$ est définie sur F. En effet, la même preuve qu'en 4.2.3 s'applique, en choisissant un épinglage $\mathfrak{E}_s$ défini sur $\mathbb{F}_q$.

4.3 Isomorphismes d'espaces $FC^{st}(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ et transfert endoscopique

4.3.1 Enoncé du théorème

Soient G et H deux groupes réductifs connexes définis sur F vérifiant les hypothèses de 4.1.1. En particulier, si G est de type (A_{n-1}, ram), on fixe une classe $\Phi \subset Isom'(G, H, F^{nr})$ comme dans ce paragraphe. On impose de plus l'hypothèse

(1) G n'est pas de type (D_n, ram).

Considérons une forme intérieure H' de H. Précisément, H' est un groupe réductif connexe défini sur F et on suppose donné un torseur intérieur $\psi : H' \to H$ défini sur F^{nr}. Dans le cas où G est de type (A_{n-1}, ram), on définit la classe $\Phi' \subset Isom'(G, H', F^{nr})$ comme l'ensemble des composés $\phi \circ \psi$ où $\phi \in \Phi$. Nos constructions appliquées à (G, H) et (G, H') (avec de plus les classes Φ et Φ' dans le cas où G est de type (A_{n-1}, ram)) définissent des isomorphismes $\iota : FC^{st}(\mathfrak{h}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$ et $\iota' : FC^{st}(\mathfrak{h}'(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Parce que ψ est un torseur intérieur, il se déduit de ψ un isomorphisme de transfert endoscopique $transfert_\psi : I_{cusp}^{st}(\mathfrak{h}'(F)) \to I_{cusp}^{st}(\mathfrak{h}(F))$ qui se restreint en un isomorphisme $transfert_\psi : FC^{st}(\mathfrak{h}'(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{h}(F))$, cf. 2.3.8.

Théorème. *On a l'égalité $\iota' = \iota \circ transfert_\psi$.*

On énoncera en 4.3.3 une proposition dont on déduira le théorème .

Remarque. Le théorème est vrai si G est de type (D_n, ram). Mais nous n'en aurons pas besoin dans ce cas et on préfère raccourcir la preuve qui est déjà suffisamment longue.

4.3.2 Composition d'isomorphismes

Soient G, G', H trois groupes réductifs connexes définis sur F. On les suppose tous trois isomorphes sur F^{nr}. On suppose que G et G' vérifient les hypothèses imposées à G en 4.1.1, en particulier que G et G' sont quasi-déployés. On impose de plus

(1) G et G' ne sont pas du type (A_{n-1}, ram).

En appliquant nos constructions successivement aux paires (G, H), (G', H) et (G, G'), on obtient des isomorphismes $\iota_{G,H} : FC^{st}(\mathfrak{h}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$, $\iota_{G',H} : FC^{st}(\mathfrak{h}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{g}'(F))$, $\iota_{G,G'} : FC^{st}(\mathfrak{g}'(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

Lemme. *On a l'égalité $\iota_{G,H} = \iota_{G,G'} \circ \iota_{G',H}$.*

Preuve. On fixe des sommets $s_H \in S^{st}(H)$, $s' \in S^{st}(G')$ et $s \in S^{st}(G)$. Fixons $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}$ pour lequel on utilise les notations habituelles. Fixons $N \in \mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$ et munissons $\mathcal{E}$ d'une action de Frobenius définie par un scalaire r_N. Fixons $\phi \in Isom(G, G', F^{nr})$ tel que $\phi^{Imm}(s') = s$ et qu'en posant $\delta = Fr(\phi)\phi^{-1}$, on ait $\delta_s(N) = N$. Posons $\mathcal{E}' = \phi_s^{-1}(\mathcal{E})$, $\mathcal{O}' = \phi_s^{-1}(\mathcal{O})$ et $N' = \phi_s^{-1}(N)$. Alors $\mathcal{E}'$ appartient à $\mathbf{FC}^{st}_{s',\mathbb{F}_q}$, ce faisceau est porté par l'orbite $\mathcal{O}'$ et on a $N' \in \mathcal{O}'^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. Fixons $\psi \in Isom(G', H, F^{nr})$ tel que $\psi^{Imm}(s_H) = s'$ et qu'en posant $\eta = Fr(\psi)\psi^{-1}$, on ait $\eta_{s'}(N') = N'$. Posons $\mathcal{E}_H = \psi_{s'}^{-1}(\mathcal{E}')$, $\mathcal{O}_H = \psi_{s'}^{-1}(\mathcal{O}')$ et $N_H = \psi_{s'}^{-1}(N')$. Alors $\mathcal{E}_H$ appartient à $\mathbf{FC}^{st}_{s_H,\mathbb{F}_q}$, ce faisceau est porté par l'orbite $\mathcal{O}_H$ et on a $N_H \in \mathcal{O}_H^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. Posons $\boldsymbol{\psi} = \phi \circ \psi$. Alors $\boldsymbol{\psi}^{Imm}(s_H) = s$ et, en posant $\boldsymbol{\delta} = Fr(\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{\psi}^{-1}$, on a $\boldsymbol{\delta}_s(N) = N$. Le faisceau $\mathcal{E}_H$ est égal à $\boldsymbol{\psi}_s^{-1}(\mathcal{E})$ et on a $N_H = \boldsymbol{\psi}_s^{-1}(N)$. Il y a deux façons de munir $\mathcal{E}_H$ d'une action de Frobenius. En appliquant la construction de 4.1.5 à (G, H), on obtient une action définie par un scalaire que l'on note ici $\mathbf{r}_{N_H}$. En appliquant la même construction à (G, G'), on obtient une action de Frobenius sur $\mathcal{E}'$ définie par un scalaire $r_{N'}$. Puis, en appliquant encore cette construction à (G', H), on obtient une action sur $\mathcal{E}_H$ définie par un scalaire r_{N_H}. D'après la définition 4.1.5(3) de nos isomorphismes, pour prouver l'égalité de l'énoncé, il suffit de prouver que les deux actions de Frobenius sur $\mathcal{E}_H$ sont les mêmes, c'est-à-dire que $r_{N_H} = \mathbf{r}_{N_H}$.

Par définition, on a

$$\mathbf{r}_{N_H} = \epsilon_{s,\mathcal{E},N}(\boldsymbol{\delta})r_N,\ r_{N'} = \epsilon_{s,\mathcal{E},N}(\delta)r_N,\ r_{N_H} = \epsilon_{s',\mathcal{E}',N'}(\eta)r_{N'}.$$

On doit donc prouver que

$$(1) \qquad \epsilon_{s,\mathcal{E},N}(\boldsymbol{\delta}) = \epsilon_{s,\mathcal{E},N}(\delta)\epsilon_{s',\mathcal{E}',N'}(\eta).$$

La définition de nos applications $\epsilon_{s,\mathcal{E},N}$ et $\epsilon_{s',\mathcal{E}',N'}$ est canonique et ne dépend que de la structure de nos groupes sur F^{nr}. Puisque ϕ est un isomorphisme sur F^{nr}, on a donc par simple transport de structure l'égalité

$$\epsilon_{s',\mathcal{E}',N'}(\eta) = \epsilon_{s,\mathcal{E},N}(\phi\eta\phi^{-1}).$$

On a $\boldsymbol{\delta} = Fr(\phi\psi)(\phi\psi)^{-1} = Fr(\phi)\phi^{-1}\phi Fr(\psi)\psi^{-1}\phi^{-1} = \delta\phi\eta\phi^{-1}$. L'égalité (1) résulte des deux égalités précédentes et du fait que $\epsilon_{s,\mathcal{E},N}$ est un homomorphisme (hypothèse $Hyp(2, N)$). $\square$

4.3.3 Simplification du théorème

Reprenons les hypothèses de 4.1.1, en imposant de plus la condition de 4.3.1 : G n'est pas de type (D_n, ram).

On suppose dans ce paragraphe que H est une forme intérieure de G. On fixe un torseur intérieur $\phi : H \to G$, que l'on suppose défini sur F^{nr}. Si G est de type (A_{n-1}, ram), on suppose que $\phi \in \Phi$ (rappelons que $\Phi \subset Isom'(G, H, F^{nr})$ est formé de torseurs intérieurs).

Proposition. *Sous ces hypothèses, on a l'égalité $\iota = transfert_\phi$.*

La preuve de cette proposition occupe le reste de la section.

Preuve du théorème 4.3.1. On reprend les données et notations de 4.3.1. Supposons d'abord que G est de type (A_{n-1}, ram). La proposition ci-dessus dit que $\iota = transfert_\phi$. On peut aussi appliquer la proposition au couple (G, H') et au torseur

intérieur $\phi \circ \psi$, d'où $\iota' = transfert_{\phi\circ\psi}$. Mais il résulte de la définition du transfert endoscopique que $transfert_{\phi\circ\psi} = transfert_\phi \circ transfert_\psi$, d'où $\iota' = \iota \circ transfert_\psi$, ce qui prouve le théorème 4.3.1 dans ce cas. Supposons maintenant que G n'est pas de type (A_{n-1}, ram). Introduisons la forme quasi-déployée H^* de H et fixons un torseur intérieur $\psi^* : H \to H^*$ défini sur F^{nr}. En appliquant nos constructions aux couples (G, H^*), resp. (H^*, H), (H^*, H'), on obtient des isomorphismes $\iota_{G,H^*} : FC^{st}(\mathfrak{h}^*(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$, resp. $\iota_{H^*,H} : FC^{st}(\mathfrak{h}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{h}^*(F))$, $\iota_{H^*,H'} : FC^{st}(\mathfrak{h}'(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{h}^*(F))$. Le lemme 4.3.2 dit que $\iota = \iota_{G,H^*} \circ \iota_{H^*,H}$ et $\iota' = \iota_{G,H^*} \circ \iota_{H^*,H'}$. On applique la proposition ci-dessus aux deux torseurs intérieurs $\psi^* : H \to H^*$ et $\psi^* \circ \psi : H' \to H^*$: on a $\iota_{H^*,H} = transfert_{\psi^*}$ et $\iota_{H^*,H'} = transfert_{\psi^*\circ\psi}$. Comme plus haut, on a $transfert_{\psi^*\circ\psi} = transfert_{\psi^*} \circ transfert_\psi$. Des égalités précédentes résulte l'égalité $\iota' = \iota \circ transfert_\psi$, ce qui prouve le théorème 4.3.1.

4.3.4 Préparatifs à la preuve de la proposition 4.3.3

Pour la fin de la section, on se place dans la situation de 4.3.3. Supposons d'abord que ϕ soit un isomorphisme défini sur F à torsion intérieure près, c'est-à-dire qu'il existe $x \in G(F^{nr})$ tel que $Ad(x)\phi$ soit défini sur F. L'isomorphisme $transfert_\phi$ est insensible au remplacement de ϕ par $Ad(x)\phi$, on peut donc aussi bien supposer que ϕ est un isomorphisme défini sur F. Alors $transfert_\phi$ n'est autre que l'isomorphisme déduit de ϕ par transport de structure. Il en est de même de ι d'après 4.1.5, remarque (8). Alors $\iota = transfert_\phi$, ce qui démontre la proposition 4.3.3. On suppose désormais que ϕ n'est pas défini sur F à torsion intérieure près. Cela exclut le cas où G est de type (A_{n-1}, ram) avec n impair car un tel groupe n'a pas de forme intérieure autre qu'elle-même. D'après nos hypothèses restrictives, G est donc de l'un des types suivants

(A_{n-1}, ram) avec n pair, B_n, C_n, (D_n, nr), (E_6, nr), E_7.

On peut préciser que, dans le cas où G est de type (D_4, nr), l'action du Frobenius sur $\mathcal{D}$ est d'ordre au plus 2 : un groupe trialitaire n'a pas de forme intérieure autre qu'elle-même.

Fixons un sommet $s \in S^{st}(G)$. Reprenons les constructions de 4.2.2 et 4.2.4. On a fixé un épinglage , $\mathfrak{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ que l'on suppose conservé par Γ_F, dont on déduit une alcôve C^{nr} et un épinglage affine $\mathfrak{E}_a = (T^{nr}, (E_\beta)_{\beta\in\Delta_a^{nr}})$ conservé par Γ_F^{nr}. Dans le cas (A_{n-1}, ram) avec n pair, on a défini un sous-groupe $\mathbf{\Omega}^{nr} \subset G(F^{nr})$. Dans le cas non ramifié, on a défini un sous-groupe $\mathbf{\Omega} \subset G(F^{nr})$. Pour unifier les notations, on pose $\mathbf{\Omega}^{nr} = \mathbf{\Omega}$. On a $s \in S(\bar{C}^{nr})$ et s est fixé par le groupe $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$, a fortiori par $\mathbf{\Omega}^{nr}$.

Lemme. *De l'inclusion $\mathbf{\Omega}^{nr} \to G(F^{nr})$ se déduit un isomorphisme $H^1(\Gamma_F^{nr}, \mathbf{\Omega}^{nr}) \to H^1(\Gamma_F^{nr}, G(F^{nr})) = H^1(F, G)$.*

Preuve. On a déjà utilisé l'égalité $H^1(\Gamma_F^{nr}, G(F^{nr})) = H^1(F, G)$. Pour tout groupe A et tout A-module X, notons X_A le quotient des coinvariants. L'homomorphisme de Kottowitz fournit un homomorphisme surjectif $w_G : G(F^{nr}) \to (X_*(T)/X_*(T_{sc}))_{I_F}$ dont se déduit un isomorphisme $H^1(\Gamma_F^{nr}, G(F^{nr})) \to H^1(\Gamma_F^{nr}, (X_*(T)/X_*(T_{sc}))_{I_F}) = (X_*(T)/X_*(T_{sc}))_{\Gamma_F}$. Notons $\mathcal{N}^{nr}$ le sous-groupe des éléments de $G(F^{nr})$ dont l'action sur $Imm_{F^{nr}}(G)$ conserve C^{nr}. Alors $\mathcal{N}^{nr}$ agit sur $\mathcal{D}_a^{nr}$, c'est-à-dire que l'on a un homomorphisme $\mathcal{N}^{nr} \to Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$. Notons $\mathcal{N}_0^{nr}$ son noyau. On a évidemment $\mathbf{\Omega}^{nr} \subset \mathcal{N}^{nr}$ et les lemmes 2.1.8 et 2.1.9 impliquent que $\mathcal{N}^{nr}$ est produit semi-direct de $\mathbf{\Omega}^{nr}$ et de $\mathcal{N}_0^{nr}$. D'après [14] lemme 14, l'application composée $\mathcal{N}^{nr} \to G(F^{nr}) \overset{w_G}{\to} (X_*(T)/X_*(T_{sc}))_{I_F}$ est surjective et son noyau est $\mathcal{N}_0^{nr}$. On en déduit que l'application composée $\mathbf{\Omega}^{nr} \to$

$G(F^{nr}) \overset{w_G}{\to} (X_*(T)/X_*(T_{sc}))_{I_F}$ est un isomorphisme. Donc l'application composée

$$H^1(\Gamma_F^{nr}, \mathbf{\Omega}^{nr}) \to H^1(\Gamma_F^{nr}, G(F^{nr})) \overset{w_G}{\to} H^1(\Gamma_F^{nr}, (X_*(T)/X_*(T_{sc}))_{I_F})$$

est bijective. On a dit que le second homomorphisme était bijectif. Le premier l'est aussi. $\square$

En conséquence, quitte à remplacer ϕ par $Ad(x)\phi$ pour un élément $x \in G(F^{nr})$ convenable, ce qui ne change pas $transfert_\phi$, on peut supposer que $\phi Fr(\phi)^{-1}$ est de la forme $Ad(\boldsymbol{\omega})$ pour un $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{\Omega}^{nr}$. Posons alors $s_H = (\phi^{Imm})^{-1}(s)$. Puisque $(\phi Fr(\phi)^{-1})^{Imm}$ fixe s, s_H est fixé par l'action galoisienne, donc $s_H \in S^{st}(H)$. Notons $\sigma \mapsto \boldsymbol{\omega}(\sigma)$ l'unique cocycle de Γ_F^{nr} dans $\mathbf{\Omega}^{nr}$ tel que $\boldsymbol{\omega}(Fr) = \boldsymbol{\omega}$. On le relève par inflation en un cocycle de Γ_F dans $\mathbf{\Omega}^{nr}$. On peut identifier H à G par ϕ et ϕ devient l'identité. L'action galoisienne sur H est définie par $\sigma \mapsto \sigma_H = Ad(\boldsymbol{\omega}(\sigma)) \circ \sigma_G$. Par l'identification $\Gamma_F^{nr} \simeq \Gamma_{\mathbb{F}_q}$, le cocycle $\sigma \mapsto \boldsymbol{\omega}(\sigma)$ s'identifie à un cocycle défini sur $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. On peut identifier H_{s_H} à G_s muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_H = Ad(\boldsymbol{\omega}(\sigma))_s \circ \sigma_G$, pour $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{F}_q}$ (pour simplifier, on utilise les notations σ_G et σ_H plutôt que σ_{G_s} et $\sigma_{H_{s_H}}$).

Si G est classique, l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$ est une droite et l'ensemble $\mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}$ est formé d'un unique faisceau-caractère dont on note $\mathcal{O}$ le support. Si G est de type (E_6, nr) ou E_7, l'espace $FC^{st}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$, qui est supposé non nul, est de dimension 2. Rappelons en passant que la non-nullité de l'espace précédent impose les conditions $\delta_3(q-1) = 1$ dans le cas (E_6, nr) et $\delta_4(q-1) = 1$ dans le cas E_7, où, pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on note δ_n la fonction caractéristique du sous-groupe $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$. L'ensemble $\mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}$ a deux éléments. Mais ces deux faisceaux sont supportés par la même orbite nilpotente, que l'on note $\mathcal{O}$. On a définit un sous-groupe R de G_s, cf. 4.2.2 et 4.2.4. Il est fixé par δ_s pour tout élément $\delta \in \mathbf{\Omega}^{nr}$. En conséquence, les actions galoisiennes $\sigma \mapsto \sigma_G$ et $\sigma \mapsto \sigma_H$ coïncident sur R. On fixe $N \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{r}(\mathbb{F}_q)$. Chaque $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}$ correspond à un caractère $\xi_{\mathcal{E}}$ du groupe $Z_{G_s}(N)/Z_{G_s}(N)^0$. On pose $\Xi = \{\xi_{\mathcal{E}}, \mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_{s,\mathbb{F}_q}\}$. On munit un tel $\mathcal{E}$ de l'action galoisienne déterminée par le scalaire $r_N = 1$. Puisque $N \in \mathfrak{r}$, on a $\boldsymbol{\omega} \in Aut'_{s,N}(G, F^{nr})$. En reprenant les définitions, on voit que $\epsilon_{s,\mathcal{E},N}(\boldsymbol{\omega}) = 1$ sauf dans les deux cas ci-dessous.

(1) Supposons que G est de type (B_n). On a $2n+1 = k^2 + h^2$ avec $k, h \in \mathbb{N}$, k est pair et $|h-k| = 1$. Le groupe $\mathbf{\Omega}^{nr}$ a deux éléments. L'hypothèse que ϕ n'est pas un isomorphisme sur F modulo automorphismes intérieurs signifie que $\boldsymbol{\omega}$ est l'élément non trivial de $\mathbf{\Omega}^{nr}$. Il résulte des définitions que $\epsilon_{s,\mathcal{F},N}(\boldsymbol{\omega}) = 1$ si $h = k-1$ et $\epsilon_{s,\mathcal{E},N}(\boldsymbol{\omega}) = -1$ si $h = k+1$.

(2) Supposons G de type (A_{n-1}, ram) avec n pair. On a $n = h^2 + k(k+1)$ avec $h, k \in \mathbb{N}$ et $h = k$ ou $h = k+1$. Comme ci-dessus, $\boldsymbol{\omega}$ est l'élément non trivial de $\mathbf{\Omega}^{nr}$. On a $\epsilon_{s,\mathcal{E},N}(\boldsymbol{\omega}) = 1$ si $h = k+1$ et $\epsilon_{s,\mathcal{E},N}(\boldsymbol{\omega}) = -1$ si $h = k$.

En tout cas, nous poserons simplement $\epsilon = \epsilon_{s,\mathcal{E},N}(\boldsymbol{\omega})$. Par l'identification $H_{s_H} = G_s$, $\mathcal{E}$ s'identifie à un faisceau $\mathcal{E}_H$ sur $\mathfrak{h}_{s_H}$. On le munit de l'action galoisienne tel que le Frobenius agisse par multiplication par ϵ sur la fibre au-dessus de N. En posant $\xi = \xi_{\mathcal{E}}$, on note f^G_ξ la fonction caractéristique de $\mathcal{E}$ et f^H_ξ celle de $\mathcal{E}_H$. Ces fonctions sont définies sur $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$, resp. $\mathfrak{h}_{s_H}(\mathbb{F}_q)$. On en déduit par relèvement des fonctions sur $\mathfrak{g}(F)$, resp. $\mathfrak{h}(F)$, que l'on a souvent notées de la même façon. Pour éviter les confusions, on les note ici $\mathbf{f}^G_\xi$ et $\mathbf{f}^H_\xi$. D'après la définition (3) de 4.1.5, on a l'égalité $\iota(\mathbf{f}^H_\xi) = c(s)\mathbf{f}^G_\xi$, où $c(s) = |G_s(\mathbb{F}_q)|^{-1}|H_{s_H}(\mathbb{F}_q)|$. La proposition 4.3.3 équivaut à la relation

(3) $transfert_\phi(\mathbf{f}^H_\xi) = c(s)\mathbf{f}^G_\xi$ pour tout $\xi \in \Xi$.

4.3.5 Début de la preuve

Complétons N en un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f,h,N) contenu dans $\mathfrak{r}(\mathbb{F}_q)$. Il s'en déduit une graduation $(\mathfrak{g}_{s,i})_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathfrak{g}_s$: pour $i\in\mathbb{Z}$, $\mathfrak{g}_{s,i}=\{X\in\mathfrak{g}_s;[h,X]=iX\}$.

Remarque. On vérifie cas par cas que notre hypothèse $(Hyp)_1(p)$, qui implique $p\geq 3h(G)$, implique $p\geq 4h(G_s)$. On voit alors que $\mathfrak{g}_{s,i}$ est aussi l'ensemble des $X\in\mathfrak{g}_s$ tels que $Ad(x_{*,h}(t))X=t^iX$ pour tout $t\in\bar{\mathbb{F}}_q^\times$.

En fait, on a $\mathfrak{g}_{s,i}=\{0\}$ pour i impair. On note P le sous-groupe parabolique de G_s d'algèbre de Lie $\oplus_{i\geq 0}\mathfrak{g}_{s,i}$ et M sa composante de Levi d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{s,0}$. L'action du groupe M dans $\mathfrak{g}_{s,2}$ admet une unique orbite ouverte que l'on note $\tilde{\mathfrak{g}}_{s,2}$. L'élément N appartient à cet ensemble. Parce que le $\mathfrak{sl}(2)$-triplet est contenu dans $\mathfrak{r}(\mathbb{F}_q)$, tous ces objets sont conservés par les deux actions galoisiennes $\sigma\mapsto\sigma_G$ et $\sigma\mapsto\sigma_H$. Notons $\mathfrak{k}_u^{nr}$ l'image réciproque dans $\mathfrak{k}_s^{nr}$ du radical nilpotent de l'algèbre de Lie de P, c'est-à-dire de $\oplus_{i\geq 2}\mathfrak{g}_{s,i}$. Considérons un groupe réductif connexe $\tilde{G}$ défini sur F^{nr} et un homomorphisme surjectif $\tilde{G}\to G$ défini sur F^{nr} de noyau central dans $\tilde{G}$. On a alors $G=\tilde{G}_{AD}$ et il y a un homomorphisme surjectif $\tilde{G}_s\to G_s$. Notons $\tilde{P}$ l'image réciproque de P dans $\tilde{G}_s$ et notons $K_s^{\tilde{P},nr}$ le sous-groupe des $x\in K_s^{\tilde{G},\dagger,nr}$, c'est-à-dire des $x\in\tilde{G}(F^{nr})$ qui fixent le sommet s, tels que l'action réduite de $Ad(x)$ dans $\tilde{G}_s$ conserve $\tilde{P}$.

Lemme. *Supposons construits des familles $(X_\xi^G)_{\xi\in\Xi}$ et $(X_\xi^H)_{\xi\in\Xi}$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) pour tout $\xi\in\Xi$, X_ξ^G est un élément elliptique régulier de $\mathfrak{g}(F)$, X_ξ^H est un élément elliptique régulier de $\mathfrak{h}(F)$ et les classes de conjugaison stable de ces éléments se correspondent ;

(ii) pour tout $\xi\in\Xi$, X_ξ^G appartient à $\mathfrak{k}_u^{nr}$; l'ensemble des éléments $x\in\tilde{G}(F^{nr})$ tels que $x^{-1}X_\xi^Gx\in\mathfrak{k}_u^{nr}$ est égal à $K_s^{\tilde{P},nr}$; X_ξ^H appartient à $\mathfrak{k}_u^{nr}$ et l'ensemble des éléments $x\in\tilde{G}(F^{nr})$ tels que $x^{-1}X_\xi^Hx\in\mathfrak{k}_u^{nr}$ est égal à $K_s^{\tilde{P},nr}$;

(iii) les matrices carrées $(\mathbf{f}_{\xi'}^G(X_\xi^G))_{\xi,\xi'\in\Xi}$ et $(\mathbf{f}_{\xi'}^H(X_\xi^H))_{\xi,\xi'\in\Xi}$ sont inversibles et égales.

Alors on a l'égalité $\iota=transfert_\phi$

Preuve. Puisque $\tilde{G}_{AD}=G$, on a aussi $\tilde{G}_{SC}=G_{SC}$ et $\tilde{G}$ s'inscrit dans une suite d'homomorphismes $G_{SC}\to\tilde{G}\to G$. On note $K_{SC,s}^{P,nr}$ le groupe des $x\in K_{SC,s}^{0,nr}=K_s^{G_{SC},0,nr}$ tels que l'action réduite de $Ad(x)$ dans $\mathfrak{g}_s$ conserve P. Remarquons que l'on peut remplacer $K_{SC,s}^{0,nr}$ par $K_{SC,s}^{\dagger,nr}$: ces deux groupes sont égaux puisque G_{SC} est simplement connexe. L'image réciproque de $K_s^{\tilde{P},nr}$ dans $G_{SC}(F^{nr})$ est égale à ce groupe $K_{SC,s}^{P,nr}$. Alors l'hypothèse (ii) reste vérifiée si l'on remplace $\tilde{G}$ par G_{SC}. C'est-à-dire que l'ensemble des éléments $x\in G_{SC}(F^{nr})$ tels que $x^{-1}X_\xi^Gx\in\mathfrak{k}_u^{nr}$ est égal à $K_s^{G_{SC},0,nr}$ et de même pour X_ξ^H. Cela nous autorise à supposer que $\tilde{G}=G_{SC}$.

Fixons $\xi,\xi'\in\Xi$ et posons pour simplifier $f=f_{\xi'}^G$, $\mathbf{f}=\mathbf{f}_{\xi'}^G$ et $X=X_\xi^G$. Notons $T_X=G_X$. Avec nos définitions de mesures, on vérifie que l'injection naturelle $T_{X,sc}(F)\backslash G_{SC}(F)\to T_X(F)\backslash G(F)$ préserve localement les mesures. Il en est de même si l'on remplace X par un conjugué stable de X. On en déduit l'égalité $S^G(X,\mathbf{f})=S^{G_{SC}}(X,\mathbf{f})$. On note $\tilde{f}$ la fonction égale à f sur $\mathfrak{u}_P(\mathbb{F}_q)=\oplus_{i\geq 2}\mathfrak{g}_{s,i}(\mathbb{F}_q)$ et nulle hors de ce sous-ensemble. Notons P_{sc} l'image réciproque de P dans $G_{SC,s}$. Il est muni de la structure galoisienne issue de celle de $G_{SC,s}$. Pour $Y\in\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$, on a l'égalité

$$f(Y)=\sum_{g\in P_{sc}(\mathbb{F}_q)\backslash G_{SC,s}(\mathbb{F}_q)}\tilde{f}(gYg^{-1}).$$

Notons $\tilde{\mathbf{f}}$ la fonction sur $\mathfrak{g}(F)$ qui relève $\tilde{f}$. On obtient que l'image de $\mathbf{f}$ dans $I(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ est égale à c_1^G fois l'image de $\tilde{\mathbf{f}}$, où

$$c_1^G = |G_{SC,s}(\mathbb{F}_q)||P_{sc}(\mathbb{F}_q)|^{-1}.$$

D'où

$$S^{G_{SC}}(X, \mathbf{f}) = c_1^G S^{G_{SC}}(X, \tilde{\mathbf{f}}).$$

L'homomorphisme $G_{SC,s} \to G_s$ est surjectif et son noyau est fini et central. On en déduit $|G_{SC,s}(\mathbb{F}_q)| = |G_s(\mathbb{F}_q)|$. D'où aussi

$$c_1^G = |G_s(\mathbb{F}_q)||P_{sc}(\mathbb{F}_q)|^{-1}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} I^{G_{SC}}(X, \tilde{\mathbf{f}}) &= d^G(X)^{1/2} \int_{T_{X,sc}(F)\backslash G_{SC}(F)} \tilde{\mathbf{f}}(g^{-1}Xg)\, dg \\ &= d^G(X)^{1/2} mes(T_{X,sc}(F))^{-1} \int_{G_{SC}(F)} \tilde{\mathbf{f}}(g^{-1}Xg)\, dg. \end{aligned}$$

La fonction $\tilde{\mathbf{f}}$ est à support dans $\mathfrak{k}_u^{nr} \cap \mathfrak{g}(F)$. En utilisant l'hypothèse (ii) de l'énoncé, on obtient

$$I^{G_{SC}}(X, \tilde{\mathbf{f}}) = d^G(X)^{1/2} mes(T_{X,sc}(F))^{-1} \int_{K_{SC,s}^{P,nr} \cap G_{SC}(F)} \tilde{\mathbf{f}}(g^{-1}Xg)\, dg.$$

Mais la fonction $\tilde{\mathbf{f}}$ est par construction invariante par conjugaison par $K_{SC,s}^{P,nr} \cap G_{SC}(F)$. D'où

$$I^{G_{SC}}(X, \tilde{\mathbf{f}}) = c_2^G(X)\tilde{\mathbf{f}}(X),$$

où

$$c_2^G(X) = d^G(X)^{1/2} mes(T_{X,sc}(F))^{-1} mes(K_{SC,s}^{P,nr} \cap G_{SC}(F)).$$

On a $mes(K_{SC,s}^{P,nr} \cap G_{SC}(F)) = |P_{sc}(\mathbb{F}_q)| mes(\mathfrak{k}_s^{G,+})$. D'où

$$c_2^G(X) = d^G(X)^{1/2} mes(T_{X,sc}(F))^{-1} |P_{sc}(\mathbb{F}_q)| mes(\mathfrak{k}_s^{G,+}).$$

Puisque $X \in \mathfrak{k}_u^{nr}$, on a $\tilde{\mathbf{f}}(X) = \mathbf{f}(X)$. D'où

$$I^{G_{SC}}(X, \tilde{\mathbf{f}}) = c_2^G(X)\mathbf{f}(X).$$

La fonction $\mathbf{f}$ est cuspidale et stable. Il en est de même de $\tilde{\mathbf{f}}$ puisque les images des deux fonctions dans $I(\mathfrak{g}_{SC}(F))$ sont proportionnelles. Les intégrales orbitales de $\tilde{\mathbf{f}}$ sont donc constantes sur toute classe de conjugaison stable elliptique. Puisque X est régulier elliptique, on a donc

$$S^{G_{SC}}(X, \tilde{\mathbf{f}}) = c_3^G(X) I^{G_{SC}}(X, \tilde{\mathbf{f}}),$$

où $c_3(X)$ est le nombre de classes de conjugaison par $G_{SC}(F)$ dans la classe de conjugaison stable de X. Finalement

$$S^G(X, \mathbf{f}) = c^G(X)\mathbf{f}(X),$$

où

$$c^G(X) = c_1^G c_2^G(X) c_3^G(X) = |G_s(\mathbb{F}_q)| d^G(X)^{1/2} mes(T_{X,sc}(F))^{-1} mes(\mathfrak{k}_s^{G,+}) c_3^G(X).$$

En rétablissant les indices ξ et ξ' et les exposants G, on a plus précisément

$$(1) \qquad S^G(X_\xi^G, \mathbf{f}_{\xi'}^G) = c^G(X_\xi^G)\mathbf{f}_{\xi'}^G(X_\xi^G).$$

Un même calcul prouve que

$$(2) \qquad S^H(X_\xi^H, \mathbf{f}_{\xi'}^H) = c^H(X_\xi^H)\mathbf{f}_{\xi'}^H(X_\xi^H).$$

La famille $(\mathbf{f}_{\xi'}^G)_{\xi'\in\Xi}$ est une base de $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. La relation (1) et l'hypothèse (iii) disant que la matrice $(\mathbf{f}_{\xi'}^G(X_\xi^G))_{\xi,\xi'\in\Xi}$ est inversible entraînent que les formes linéaires $S^G(X_\xi^G, .)$ séparent les éléments de $FC^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Pour démontrer la relation 4.3.4(3), il suffit de prouver que, pour tout $\xi, \xi' \in \Xi$, on a l'égalité

$$(3) \qquad c(s)S^G(X_\xi^G, \mathbf{f}_{\xi'}^G)) = S^G(X_\xi^G, transfert_\phi(\mathbf{f}_{\xi'}^H)).$$

Puisque les classes de conjugaison stable de X_ξ^G et X_ξ^H se correspondent, il résulte de la définition du transfert endoscopique que

$$S^G(X_\xi^G, transfert_\phi(\mathbf{f}_{\xi'}^H)) = S^H(X_\xi^H, \mathbf{f}_{\xi'}^H),$$

d'où, grâce à (2) :

$$S^G(X_\xi^G, transfert_\phi(\mathbf{f}_{\xi'}^H)) = c^H(X_\xi^H)\mathbf{f}_{\xi'}^H(X_\xi^H).$$

Grâce à (1), on a aussi

$$c(s)S^G(X_\xi^G, \mathbf{f}_{\xi'}^G)) = c(s)c^G(X_\xi^G)\mathbf{f}_{\xi'}^G(X_\xi^G).$$

En utilisant l'hypothèse (iii), on voit que (3) résulte de l'égalité

$$(4) \qquad c(s)c^G(X_\xi^G) = c^H(X_\xi^H),$$

qu'il nous reste à démontrer. Parce que les classes stables de X_ξ^G et X_ξ^H se correspondent, on a $d^G(X_\xi^G) = d^H(X_\xi^H)$, $mes(T_{X_\xi^G,sc}(F)) = mes(T_{X_\xi^H,sc}(F))$ et il est connu que $c_3^G(X_\xi^G) = c_3^H(X_\xi^H)$ (en posant $T_{X_\xi,sc} = T_{X_\xi^G,sc} = T_{X_\xi^H,sc}$, ces deux termes sont égaux au nombre d'éléments de $H^1(F, T_{X_\xi,sc})$). Le terme $mes(\mathfrak{t}_s^{G,+})$ est une puissance de q qui ne change pas quand on remplace G par H. Alors (4) résulte immédiatement des définitions. □

Dans les paragraphes suivants, on construira cas par cas les familles $(X_\xi^G)_{\xi\in\Xi}$ etc... vérifiant les hypothèses du lemme. Comme on l'a déjà dit, dans le cas des groupes classiques, Ξ est réduit à un élément et on supprime les ξ de la notation.

4.3.6 Preuve dans le cas B_n

On va décrire certains groupes classiques en termes d'algèbre linéaire. Commençons par fixer les notations pour le groupe $GL(n)$, où n est un entier strictement positif. On choisit pour tore maximal T le tore diagonal et pour sous-groupe de Borel B le groupe des matrices triangulaires supérieures. Pour $i, j \in \{1, ..., n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le (i, j)-ième qui vaut 1. Alors $(B, T, (E_{i,i+1})_{i=1,...,n-1})$ est l'épinglage "standard" de $GL(n)$. On note θ l'automorphisme extérieur usuel de $GL(n)$: il conserve l'épinglage, en envoyant $E_{i,i+1}$ sur $E_{n-i-1,n-i}$ et agit sur $Z(G)$ par

$z \mapsto z^{-1}$. Evidemment, si V est un espace vectoriel sur F de dimension n, muni d'une base $(e_i)_{i=1,...,n}$ et si F' est une extension de F, on identifie à l'aide de cette base le groupe $GL_{F'}(V)$ des automorphismes F'-linéaires de $V \otimes_F F'$ à $GL(n, F')$. Le groupe de Weyl W s'identifie à celui des permutations des vecteurs de base, ou encore à celui des permutations de l'ensemble $\{1, ..., n\}$.

On suppose que G est de type B_n avec $n \geq 2$. L'hypothèse que $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) \neq \{0\}$ entraîne que $2n + 1 = k^2 + h^2$, où $h, k \in \mathbb{N}$, k est pair, h est impair et $h = k + \eta$, avec $\eta \in \{\pm 1\}$.

Introduisons un espace V sur F de dimension $2n+1$ muni d'une base $(e_i)_{i=1,...,2n+1}$ et d'une forme quadratique q telle que $q(e_i, e_{2n+2-i}) = 1$ et $q(e_i, e_j) = 0$ pour $i+j \neq 2n+2$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ s'identifie à l'ensemble des $X \in \mathfrak{gl}(V)$ tels que $q(Xv, v') + q(v, Xv') = 0$ pour tous $v, v' \in V$. On choisit l'épinglage $\mathfrak{E} = (B, T, (E_{\alpha_i})_{i=1,...,n})$ de G suivant : B est le Borel triangulaire supérieur, T est le tore diagonal ; pour $i = 1, ..., n$, $E_{\alpha_i} = E_{i,i+1} - E_{2n+1-i,2n+2-i}$. On le complète en un épinglage affine en fixant une uniformisante ϖ_F de F et en posant $E_{\alpha_0} = \varpi_F(-E_{2n,1} + E_{2n+1,2})$. Notons ω l'unique élément non trivial de $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$. C'est l'élément de $G(F)$ qui permute e_1 et $-\varpi_F e_{2n+1}$ et multiplie e_j par -1 pour $j = 2, ..., 2n$. Notons $\mathcal{S}$ le $\mathfrak{o}_F$-réseau engendré par les éléments e_i pour $i = 1, ..., 2n + 1 - k^2/2$ et $\varpi_F e_i$ pour $i = 2n + 2 - k^2/2, ..., 2n + 1$. Notons $\mathcal{S}^\star$ son dual, c'est-à-dire $\mathcal{S}^\star = \{v \in V; \forall v' \in V, q(v', v) \in \mathfrak{o}_F\}$. C'est le $\mathfrak{o}_F$-réseau engendré par les éléments $\varpi_F^{-1} e_i$ pour $i = 1, ..., k^2/2$ et e_i pour $i = k^2/2 + 1, ..., 2n$. Notons $\mathfrak{s}$ le $\mathfrak{o}_F$-module des éléments $X \in \mathfrak{gl}(V)(F)$ qui conservent $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^\star$. Alors $\mathfrak{k}_s$ est l'intersection de $\mathfrak{g}(F)$ et de $\mathfrak{s}$. L'espace $\bar{V}' = \mathcal{S}/\varpi_F \mathcal{S}^\star$ sur $\mathbb{F}_q$ est muni de la base $(\bar{e}_{1+k^2/2}, ..., \bar{e}_{2n+1-k^2/2})$, où $\bar{e}_i$ est la réduction de e_i, et de la forme quadratique q' qui est la réduction de q. L'espace $\bar{V}'' = \mathcal{S}^\star/\mathcal{S}$ est muni de la base $(\bar{e}_{2n+2-k^2/2}, ..., \bar{e}_{2n+1}, \bar{e}_1, ..., \bar{e}_{k^2/2})$, où, pour $i = 2n + 2 - k^2/2, ..., 2n + 1$, $\bar{e}_i$ est la réduction de e_i et, pour $i = 1, ..., k^2/2$, $\bar{e}_i$ est la réduction de $\varpi_F^{-1} e_i$. Il est muni de la forme quadratique q'' qui est la réduction de $\varpi_F q$. L'algèbre $\mathfrak{g}_s$ se décompose en $\mathfrak{g}'_s \oplus \mathfrak{g}''_s$, les facteurs étant les algèbres de Lie des groupes spéciaux orthogonaux G'_s de $(\bar{V}', q')$ et G''_s de $(\bar{V}'', q'')$. On a $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \times \mathcal{O}''$, où $\mathcal{O}' \subset \mathfrak{g}'_s$, resp. $\mathcal{O}'' \subset \mathfrak{g}''_s$, est paramétrée par la partition $(2h - 1, ..., 3, 1)$, resp. $(2k - 1, ..., 3, 1)$.

Posons $l = min(h, k)$. Pour $m \in \{1, ..., l\}$, fixons un élément $\alpha_m \in \bar{F}^\times$ de sorte que $\alpha_m^{4m} = 2(-1)^{l+1}\varpi_F$. On pose $V_m = F(\alpha_m)$. C'est un espace vectoriel sur F de dimension $4m$ et on le munit de la forme quadratique $q_m(v, v') = (-1)^{m+1}(4m)^{-1} trace_{F(\alpha_m)/F}(\bar{v}v')$, où $v \mapsto \bar{v}$ est la conjugaison galoisienne relative à l'extension $F(\alpha_m)/F(\alpha_m^2)$. On note $\mathcal{S}_m$ le $\mathfrak{o}_{F(\alpha_m)}$-sous-module $\mathfrak{p}_{F(\alpha_m)}^{m+1-l-h}$. Son dual $\mathcal{S}_m^\star$ est égal à $\mathfrak{p}_{F(\alpha_m)}^{l+h-5m}$. On a $dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{S}_m/\mathfrak{p}_F\mathcal{S}_m^\star) = 2m-1+2(h-l)$ et $dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{S}_m^\star/\mathcal{S}_m) = 2m-1+2(k-l)$. On fixe une droite V_0 sur F, muni d'un élément non nul v_0, et on le munit de la forme quadratique q_0 telle que $q_0(v_0, v_0) = 1$ si $h > k$, $q_0(v_0, v_0) = -\frac{1}{2}\varpi_F$ si $h < k$. On pose $\mathcal{S}_0 = \mathfrak{o}_F v_0$. L'espace quadratique (V, q) est isomorphe à la somme directe des (V_m, q_m) pour $m = 0, ..., l$. Il est un peu difficile d'écrire explicitement l'isomorphisme car les (V_m, q_m) ne sont pas déployés. Mais cela devient plus simple si l'on regroupe ces espaces deux par deux. Distinguons deux cas.

Supposons d'abord $h > k$ donc $l = k$. Pour $m = 1, ..., k/2$, on pose $W_m = V_{2m} \oplus V_{2m-1}$, $\mathcal{S}_{W_m} = \mathcal{S}_{2m} \oplus \mathcal{S}_{2m-1}$, $d'_m = 8m$, $d''_m = 8m - 4$, $W_0 = V_0$, $\mathcal{S}_{W_0} = \mathcal{S}_0$. On décompose $\{1, ..., 2n + 1\}$ en intervalles croissants

$$I''_1 \cup ... \cup I''_{k/2} \cup I'_{k/2} \cup ... \cup I'_1 \cup I_0 \cup J'_1 \cup ... \cup J'_{k/2} \cup J''_{k/2} \cup ... \cup J''_1$$

de sorte que $|I''_m| = |J''_m| = d''_m/2$ et $|I'_m| = |J'_m| = d'_m/2$ pour $m = 1, ..., k/2$ et $|I_0| = 1$. On a $I_0 = \{n + 1\}$. On vérifie que, pour $m = 1, ..., k/2$, on peut identifier W_m au sous-espace de V engendré par les e_i pour $i \in I''_m \cup I'_m \cup J'_m \cup J''_m$ et que l'on peut identifier

W_0 à la droite engendrée par e_{n+1}, ces identifications étant telles que $\mathcal{S}$ soit la somme des $\mathcal{S}_{W_m}$.

Supposons maintenant $h < k$ donc $l = h$. Pour $m = 1, ..., k/2$, on pose $W_m = V_{2m-1} \oplus V_{2m-2}$, $\mathcal{S}_{W_m} = \mathcal{S}_{2m-1} \oplus \mathcal{S}_{2m-2}$, $d'_m = 8m - 8$, $d''_m = 8m - 4$, sauf pour $m = 1$ auquel cas $d'_1 = 1$. On décompose $\{1, ..., 2n + 1\}$ en intervalles croissants

$$I''_1 \cup ... \cup I''_{k/2} \cup I'_{k/2} \cup ... \cup I'_2 \cup I_1 \cup J'_2 \cup ... \cup J'_{k/2} \cup J''_{k/2} \cup ... \cup J''_1$$

de sorte que $|I''_m| = |J''_m| = d''_m/2$ pour $m = 1, ..., k/2$, $|I'_m| = |J'_m| = d'_m/2$ pour $m = 2, ..., k/2$ et $|I_1| = d'_1 = 1$. On vérifie que, pour $m \geq 2$, on peut identifier W_m au sous-espace de V engendré par les e_i pour $i \in I''_m \cup I'_m \cup J'_m \cup J''_m$ et que l'on peut identifier W_1 au sous-espace engendré par les e_i pour $i \in I''_1 \cup I_1 \cup J''_1$, ces identifications étant telles que $\mathcal{S}$ soit la somme des $\mathcal{S}_{W_m}$.

On note X^G l'élément de $\mathfrak{g}(F)$ qui conserve chaque V_m pour $m = 0, ..., l$ et y agit par la multiplication par α_m, avec l'exception $m = 0$: X^G agit par 0 sur V_0. C'est un élément elliptique régulier, ses valeurs propres étant les conjugués des α_m, plus 0. Il est clair qu'il conserve chaque $\mathcal{S}_m$ donc aussi $\mathcal{S}$, c'est-à-dire que $X^G \in \mathfrak{k}_s$. Notons N l'image de X^G dans $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$. Pour tout $m \in \{0, ..., l\}$, l'action de X_G sur V_m se réduit en des éléments nilpotents réguliers de $\mathcal{S}_m/\mathfrak{p}_F\mathcal{S}^*_m$ et de $\mathcal{S}^*_m/\mathcal{S}_m$. Les partitions paramétrant les composantes $N' \in \mathfrak{g}'_s$, resp. $N'' \in \mathfrak{g}''_s$, sont donc formées des dimensions des espaces $\mathcal{S}_m/\mathfrak{p}_F\mathcal{S}^*_m$, resp. $\mathcal{S}^*_m/\mathcal{S}_m$, c'est-à-dire $(2h-1, ..., 3, 1)$ et $(2k-1, ..., 3, 1)$. Donc N appartient à $\mathcal{O}$. On va prouver

(1) on peut choisir les isomorphismes ci-dessus de sorte que $N \in \mathfrak{r}(\mathbb{F}_q)$.

On remarque qu'avec nos identifications, les vecteurs e_1 et e_{2n+1} appartiennent à W_1. L'élément ω conserve chaque W_m et, si $m \neq 1$, il agit sur cet espace par multiplication par -1. Cette multiplication est centrale, donc la composante de X^G dans W_m pour $m \neq 1$ est invariante par $Ad(\omega)$. Donc seule importe la composante de X^G dans W_1. On peut pour simplifier supposer que $V = W_1$ si $h < k$, $V = W_1 \oplus W_0$ si $h > k$, autrement dit que $n = 2$, $k = 2$ et $h = 1$, ou que $n = 6$, $k = 2$ et $h = 3$. On va préciser nos identifications dans ces cas.

Supposons $n = 2$, $k = 2$, $h = 1$. On introduit les éléments suivants de $W_1 = V_0 \oplus V_1$:

$$e'_1 = \frac{1}{2}\alpha_1^2 - v_0,\ e'_2 = \alpha_1^1,\ e'_3 = \alpha_1^0,\ e'_4 = -\alpha_1^{-1},\ e'_5 = \alpha_1^{-2} + \frac{1}{\varpi_F}v_0.$$

Ils forment une base de W_1. On identifie W_1 à V par l'isomorphisme qui envoie e'_i sur e_i pour tout $i = 1, ..., 5$. On voit qu'alors ω agit par multiplication par -1 sur V_1 et par l'identité de V_0. Cet élément commute à X^G, c'est-à-dire que $Ad(\omega)(X^G) = X^G$, a fortiori la réduction N de X^G est fixée par $Ad(\omega)_s$.

Supposons $n = 6$, $k = 2$, $h = 3$. On introduit les éléments suivants de $W_1 \oplus W_0 = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$:

$$e'_1 = \frac{1}{2}(\alpha_2^4 - \alpha_1^2),\ e'_2 = \alpha_2^3,\ e'_3 = \alpha_2^2,\ e'_4 = \alpha_2^1,\ e'_5 = \alpha_1^1,\ e'_6 = \frac{1}{2}(v_0 - \alpha_2^0),\ e'_7 = \alpha_1^0,$$

$$e'_8 = v_0 + \alpha_2^0,\ e'_9 = -\alpha_1^{-1},\ e'_{10} = \alpha_2^{-1},\ e'_{11} = -\alpha_2^{-2},\ e'_{12} = \alpha_2^{-3},\ e'_{13} = -\alpha_1^{-2} - \alpha_2^{-4}.$$

Evidemment, α_1^0 et α_2^0 sont tous deux égaux à 1 mais ils désignent clairement l'un l'élément neutre de $F(\alpha_1)^\times$, l'autre celui de $F(\alpha_2)^\times$. La famille $(e'_i)_{i=1,...,13}$ est une base de $W_1 \oplus W_0$. On identifie $W_1 \oplus W_0$ à V par l'isomorphisme qui envoie e'_i sur e_i pour tout $i = 1, ..., 13$. Notons $V_1^\flat$ le F espace engendré par $\alpha_1^1, \alpha_1^0, \alpha_1^{-1}$. On voit que ω agit par

multiplication par -1 sur $V_0 \oplus V_1^\flat \oplus V_2$ et par l'identité sur $F\alpha_1^2$. Cette fois, X^G n'est plus invariant par $Ad(\omega)$. Mais on voit que la réduction de ω agit par -1 sur $\bar{V}'$ et agit sur $\bar{V}''$ par multiplication par -1 sur $\mathcal{S}_2^*/\mathcal{S}_2$ et par l'identité sur $\mathcal{S}_1^*/\mathcal{S}_1$. Puisque N'' préserve ces deux sous-espaces de $\bar{V}''$, on a $Ad(\omega)_s(N) = N$. Cela démontre (1).

On choisit l'élément N ainsi défini dans la construction de 4.3.4.

Il nous reste à définir X^H. Si $h < k$, on a vu ci-dessus que X^G était invariant par $Ad(\omega)$. Alors X^G appartient à $\mathfrak{h}(F)$ et on prend $X^H = X^G$. Le terme ϵ défini en 4.3.4 vaut 1 donc $\mathbf{f}^H(X^H) = \mathbf{f}^G(X^G)$. Les assertions (i) et (iii) du lemme 4.3.5 sont vérifiées. L'assertion (ii) se démontre comme en [48] 5.2(3) pour le groupe $\tilde{G} = G$.

Supposons $h > k$. Rappelons que $Fr_H = Ad(\omega) \circ Fr_G$. On définit X^H comme somme de composantes agissant dans W_m pour $m = 1, ..., h$. Pour $m \geq 2$, la composante de X^G dans W_m est invariante par $Ad(\omega)$ et on la conserve comme composante de X^H. Pour traiter le cas $m = 1$, on simplifie les notations comme plus haut en supposant $n = 6$, $k = 2$ et $h = 3$. Notons τ l'élément de G qui agit par multiplication par l'identité sur $V_0 \oplus V_2$ et par multiplication par -1 sur V_1. L'automorphisme $Ad(\tau)$ fixe X^G. D'après la description ci-dessus de ω, on a $\omega\tau = \tau\omega$ et cet élément agit par multiplication par -1 sur $V_0 \oplus F\alpha_1^2 \oplus V_2$ et par l'identité sur $V_1^\flat$. On voit que $\omega\tau$ fixe les vecteurs e_5, e_7, e_9 et multiplie les autres vecteurs de base par -1. Donc $\omega\tau$ appartient à $T(\mathfrak{o}_F)$. Par le théorème de Lang, on peut fixer $t \in T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})$ tel que $t^{-1}Fr_H(t) = \omega\tau$. Posons $X^H = Ad(t^{-1})(X^G)$. On a $Fr_H(X^H) = Ad(Fr_H(t))^{-1} \circ Fr_H(X^G)$. On a aussi $Fr_H(X^G) = Ad(\omega) \circ Fr_G(X^G) = Ad(\omega)(X^G)$. Parce que $Ad(\tau)$ fixe X^G, on a aussi $Fr_H(X^G) = Ad(\omega\tau)(X^G) = Ad(t^{-1}Fr_H(t))(X^G)$. Alors $Fr_H(X^H) = Ad(Fr_H(t))^{-1} \circ Ad(t^{-1}Fr_H(t))(X^G) = Ad(t^{-1})(X^G) = X^H$. Donc $X^H \in \mathfrak{h}(F)$. Puisque X^G et X^H sont conjugués par définition, leurs classes de conjugaison stable se correspondent. L'assertion (ii) du lemme 4.3.5 pour X^G et le groupe $\tilde{G} = G$ se démontre comme en [48] 5.2(3). Puisque t appartient à $K_s^{P,nr}$, cette assertion pour X^G entraîne la même assertion pour X^H. Il reste à démontrer l'assertion (iii) du lemme 4.3.5. On a défini N comme la réduction de X^G dans $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$. Notons N^H la réduction de X^H dans $\mathfrak{h}_s(\mathbb{F}_q)$. Par définition $\mathbf{f}^G(X^G) = f^G(N) = 1$, $\mathbf{f}^H(X^H) = f^H(N^H)$ et $f^H(N) = -1$ car le terme ϵ défini en 4.3.4 vaut -1. Notons $\bar{t}$ la réduction de t dans H_s. On a $N^H = \bar{t}^{-1}N\bar{t}$ donc, par définition, $f^H(N^H) = \xi(\bar{z})^{-1}f^H(N) = -\xi(\bar{z})^{-1}$, où ξ est l'unique élément de Ξ et $\bar{z} = \bar{t}Fr_H(\bar{t})^{-1}$. Décomposons $\bar{z}$ en $\bar{z}' \times \bar{z}''$, avec $\bar{z}' \in G_s'$ et $\bar{z}'' \in G_s''$. On a décrit ci-dessus l'élément $t^{-1}Fr_H(t) = \omega\tau$. On en déduit que $\bar{z}'' = -1$ et que $\bar{z}'$ a pour valeurs propres $+1$ avec multiplicité 3 et -1 avec multiplicité 6. L'élément N' appartient à l'orbite nilpotente paramétrée par $(5, 3, 1)$. On sait que son commutant dans le groupe orthogonal tout entier de $(\bar{V}', q')$ est produit d'un groupe unipotent et d'un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ engendré par trois éléments $\bar{z}_1$, $\bar{z}_3$ et $\bar{z}_5$, chaque $\bar{z}_i$ possédant pour valeurs propres 1 avec multiplicité $9 - i$ et -1 avec pour multiplicité i. Le groupe $Z_{G_s'}(N')$ est inclus dans le groupe précédent et ξ est la restriction du caractère qui vaut -1 sur $\bar{z}_1$ et $\bar{z}_5$ et qui vaut 1 sur $\bar{z}_3$. En comparant les valeurs propres, on voit que $\bar{z}'$ est le produit de $\bar{z}_1\bar{z}_5$ par un élément unipotent. Donc $\xi(\bar{z}') = 1$. Un calcul analogue montre que $\xi(\bar{z}'') = -1$. Donc $\xi(\bar{z}) = -1$ et $f^H(N^H) = f^G(N)$. Donc $\mathbf{f}^H(X^H) = \mathbf{f}^G(X^G)$, ce qui démontre l'assertion (iii) du lemme 4.3.5. Cela achève la démonstration. $\square$

4.3.7 Preuve dans le cas C_n

On suppose que G est de type C_n avec $n \geq 2$. L'hypothèse $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) \neq \{0\}$ signifie que $n = k(k+1)$, avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Introduisons un espace V sur F de dimension $2n$ muni d'une base $(e_i)_{i=1,...,2n}$ et d'une

forme symplectique q définie par $q(e_i, e_j) = 0$ si $i + j \neq 2n + 1$, $q(e_i, e_{2n+1-i}) = (-1)^i$ si $i \in \{1, ..., 2n\}$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ s'identifie à l'ensemble des $X \in \mathfrak{gl}(V)$ tels que $q(Xv, v') + q(v, Xv') = 0$ pour tous $v, v' \in V$. On choisit l'épinglage $\mathfrak{E} = (B, T, (E_{\alpha_i})_{i=1,...,n})$ suivant : B est le Borel triangulaire supérieur, T est le tore diagonal ; $E_{\alpha_i} = E_{i,i+1} + E_{2n-i,2n+1-i}$ pour $i = 1, ..., n-1$ et $E_{\alpha_n} = E_{n,n+1}$. On le complète en un épinglage affine en fixant une uniformisante ϖ_F de F et en posant$E_{\alpha_0} = \varpi_F E_{2n,1}$. Notons ω l'unique élément non trivial de $\mathbf{\Omega}$. Il s'identifie à un élément de $GL(V)(\bar{F})$ tel que $\omega(e_i) = \lambda e_{n+i}$ pour $i = 1, ..., n$, $\omega(e_i) = \lambda^{-1} e_{i-n}$ pour $i = n+1, ..., 2n$, où λ est une racine carrée de ϖ_F dans $\bar{F}$ (rappelons que G est le groupe adjoint du groupe symplectique, l'élément ci-dessus se descend bien en un élément de $G(F)$ qui est indépendant du choix de λ). Notons $\mathcal{S}$ le $\mathfrak{o}_F$-réseau engendré par les éléments e_i pour $i = 1, ..., 3n/2$ et $\varpi_F e_i$ pour $i = 3n/2 + 1, ..., 2n$. Notons $\mathcal{S}^\star$ son dual. C'est le $\mathfrak{o}_F$-réseau engendré par les éléments $\varpi_F^{-1} e_i$ pour $i = 1, ..., n/2$ et e_i pour $i = n/2+1, ..., 2n$. Notons $\mathfrak{s}$ le $\mathfrak{o}_F$-module des éléments $X \in \mathfrak{gl}(V)(F)$ qui conservent $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^\star$. Alors $\mathfrak{k}_s$ est l'intersection de $\mathfrak{g}(F)$ et de $\mathfrak{s}$. Les $\mathbb{F}_q$-espaces $\bar{V}' = \mathcal{S}/\varpi_F \mathcal{S}^\star$ et $\bar{V}'' = \mathcal{S}^\star/\mathcal{S}$ sont de dimension $k(k+1)$ et sont naturellement munis de formes symplectiques. On en déduit une décomposition $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{sp}(k(k+1)) \oplus \mathfrak{sp}(k(k+1))$ et $\mathcal{O}$ est la somme des deux orbites nilpotentes paramétrées par la partition $(2k, ..., 4, 2)$.

L'égalité $n = k(k+1)$ équivaut à $n = \sum_{h=1,...,k} 2h$. Pour tout $h = 1, ..., k$, effectuons les mêmes constructions que ci-dessus en remplaçant n par $2h$. On affecte les objets d'un indice h. On identifie V à $\oplus_{h=1,...,k} V_h$ de la façon suivante. On décompose l'ensemble $\{1, ..., 2n\}$ en réunion croissante d'intervalles

$$I_1'' \cup ... \cup I_k'' \cup I_k' \cup ... \cup I_1' \cup J_1' \cup ... \cup J_k' \cup J_k'' \cup ... \cup J_1''$$

tels que, pour $h = 1, ..., k$, $|I_h''| = |I_h'| = |J_h'| = |J_h''| = h$. Soit $h \in \{1, ..., k\}$. Notons $a_h : \{1, ..., 4h\} \to I_h'' \cup I_h' \cup J_h' \cup J_h''$ l'unique bijection croissante. Alors notre identification envoie $e_{i,h}$ sur $(-1)^{h(h-1)/2} e_{a_h(i)}$ pour $i = 1, ..., 4h$. On en déduit un plongement $\oplus_{h=1,...,k} \mathfrak{gl}(V_h) \to \mathfrak{gl}(V)$. Pour $h = 1, ..., k$, l'espace $\mathfrak{gl}(V_h)$ est conservé par l'action de ω et la restriction de cette action est celle de ω_h. De même, $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{gl}(V_h) = \mathfrak{s}_h$. On peut alors construire X^G et N comme les sommes, en un sens évident, d'éléments X_h et N_h pour $h = 1, ..., k$. Fixons donc h. On pose $X^h = \sum_{j=0,...,2h} E_{\alpha_j,h}$. Dans $\mathfrak{gl}(V_h)$, c'est un élément tel que $(X_h)^{4h} = \varpi_F$, il est donc clairement semi-simple régulier et elliptique. Il est fixe par l'action de $Ad(\omega_h)$ et appartient à $\mathfrak{s}_h$. Sa réduction est $N_h = \sum_{j=0,...,2h, j \neq h} \bar{E}_{\alpha_j,h}$, avec une notation évidente. Remarquons que $\mathfrak{g}_{s,h}$ s'identifie à $\mathfrak{sp}(2h) \oplus \mathfrak{sp}(2h)$ et N_h est la somme de deux éléments nilpotents réguliers. La somme $N = \oplus_{h=1,...,k} N_h$ est donc un élément de $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q) \simeq \mathfrak{sp}(n)(\mathbb{F}_q) \oplus \mathfrak{sp}(n)(\mathbb{F}_q)$ dont chaque composante est paramétrée par la partition $(2k, ..., 4, 2)$. C'est-à-dire que $N \in \mathcal{O}$. Posons $X^G = \oplus_{h=1,...,k} X_h$. Puisque X^G est fixe par $Ad(\omega)$, N est fixe par $Ad(\omega)_s$ donc appartient à $\mathfrak{r}(\mathbb{F}_q)$. On choisit cet élément N dans la construction de 4.3.4. L'élément X^G est elliptique régulier puisque les valeurs propres des X_h sont toutes distinctes (la valuation d'une valeur propre de X_h est $\frac{1}{4h}$). L'assertion (ii) de 4.3.5 est vérifiée pour X^G et $\tilde{G} = G_{SC}$: la démonstration est la même qu'en [48] 5.2(3), en interprétant l'immeuble $Imm_{F^{nr}}(G)$ à l'aide de l'algèbre linéaire. Puisque X^G est fixe par $Ad(\omega)$, on peut choisir $X^H = X^G$, c'est bien un élément de $\mathfrak{h}(F)$. L'assertion (i) du lemme 4.3.5 est claire, l'assertion (ii) pour X^H est la même que pour X^G et l'assertion (iii) est triviale, puisque le terme ϵ de 4.3.4 vaut 1. $\square$

4.3.8 Preuve dans le cas (D_n, nr)

On suppose que G est de type D_n avec $n \geq 4$, que G est déployé sur F^{nr} et que l'action de Γ_F^{nr} sur $\mathcal{D}$ se quotiente par un homomorphisme $\Gamma_F^{nr} \to \{1, \theta\}$ (pas forcément surjectif). L'hypothèse $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) \neq \{0\}$ signifie que $n = k^2$, avec $k \in \mathbb{N}$, k pair.

Introduisons le groupe adjoint $\underline{G}$ de type D_n et déployé sur F. Le groupe G n'est pas forcément isomorphe à $\underline{G}$, mais peut l'être. Donc les objets définis pour G ont aussi un sens pour ce groupe. Décrivons-les. Introduisons un espace V sur F de dimension $2n$ muni d'une base $(e_i)_{i=1,...,2n}$ et d'une forme quadratique q définie par $q(e_i, e_j) = 0$ si $i+j \neq 2n+1$ et $q(e_i, e_{2n+1-i}) = 1$. L'algèbre $\underline{\mathfrak{g}}$ s'identifie à l'ensemble des $X \in \mathfrak{gl}(V)$ tels que $q(Xv, v') + q(v, Xv') = 0$ pour tous $v, v' \in V$. On choisit l'épinglage $\mathfrak{E} = (B, T, (E_{\alpha_i})_{i=1,...,n})$ suivant : B est le Borel triangulaire supérieur, T est le tore diagonal ; pour $i = 1, ..., n-1$, $E_{\alpha_i} = E_{i,i+1} - E_{2n-i,2n+1-i}$ et $E_{\alpha_n} = E_{n-1,n+1} - E_{n,n+2}$. On le complète en un épinglage affine en fixant une uniformisante ϖ_F de F et en posant$E_{\alpha_0} = \varpi_F(-E_{2n-1,1} + E_{2n,2})$. L'automorphisme θ de $\underline{G}$ est la conjugaison par l'automorphisme de V, que nous notons encore θ, qui permute e_n et e_{n+1} et fixe e_i pour $i \neq n, n+1$. Notons A l'automorphisme de V qui permute e_1 et $\varpi_F e_{2n}$, e_n et e_{n+1} et qui fixe e_i pour $i \neq 1, n, n+1, 2n$. Fixons un élément $\lambda \in \bar{F}^\times$ tel que $\lambda^2 = \varpi_F$. Notons C l'automorphisme de V défini par $C(e_i) = \lambda(-1)^i e_{n+i}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $C(e_i) = \lambda^{-1}(-1)^{i+1} e_{i-n}$ pour $n+1 \leq i \leq 2n$. Les automorphismes A et C appartiennent au groupe spécial orthogonal de (V, q), leurs images dans le groupe adjoint $\underline{G}$ appartiennent à $\underline{G}(F)$ et ces images engendrent le groupe $\mathbf{\Omega}$. Notons $\mathcal{S}$ le $\mathfrak{o}_F$-réseau engendré par les éléments e_i pour $i = 1, ..., 3n/2$ et $\varpi_F e_i$ pour $i = 3n/2+1, ..., 2n$. Son dual $\mathcal{S}^\star$ est le $\mathfrak{o}_F$-réseau engendré par les éléments $\varpi_F^{-1} e_i$ pour $i = 1, ..., n/2$ et e_i pour $i = n/2+1, ..., 2n$. Notons $\mathfrak{s}$ le $\mathfrak{o}_F$-module des éléments $X \in \mathfrak{gl}(V)(F)$ qui conservent $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^\star$. Alors $\underline{\mathfrak{k}}_s$ est l'intersection de $\underline{\mathfrak{g}}(F)$ et de $\mathfrak{s}$. Les $\mathbb{F}_q$-espaces $\bar{V}' = \mathcal{S}/\varpi_F \mathcal{S}^\star$ et $\bar{V}'' = \mathcal{S}^\star/\mathcal{S}$ sont de dimension k^2 et sont naturellement munis de formes quadratiques. On en déduit une décomposition $\underline{\mathfrak{g}}_s = \mathfrak{so}(k^2) \oplus \mathfrak{so}(k^2)$ et $\mathcal{O}$ est la somme des deux orbites nilpotentes paramétrées par la partition $(2k-1, ..., 3, 1)$.

Puisque G est quasi-déployé, il y a pour G deux cas possibles : ou bien $G = \underline{G}$, ou bien on peut identifier G à $\underline{G}$ muni de l'action galoisienne telle que $\sigma_G = \sigma_{\underline{G}}$ pour $\sigma \in I_F$ et $Fr_G = \theta \circ Fr_{\underline{G}}$ pour tout relèvement Fr du Frobenius dans Γ_F.

Pour tout $m \in \{1, ..., k/2\}$, introduisons un espace quadratique (W_m, Q_m) similaire à (V, q) mais de dimension $16m - 8$. On note avec des indices m les objets analogues pour cet espace à ceux introduits pour (V, q). Décomposons l'ensemble $\{1, ..., 2n\}$ en réunion d'intervalles croissants

$$I_1'' \cup ... \cup I_{k/2}'' \cup I_{k/2}' \cup ... \cup I_1' \cup J_1' \cup ... \cup J_{k/2}' \cup J_{k/2}'' \cup ... \cup J_1''$$

de sorte que $|I_m''| = |I_m'| = |J_m'| = |J_m''| = 4m - 2$ pour tout $m = 1, ..., k/2$. Notons $a_m : \{1, ..., 16m - 8\} \to I_m'' \cup I_m' \cup J_m' \cup J_m''$ l'unique bijection croissante. On identifie la somme directe des (W_m, Q_m) à (V, q) en envoyant $e_{i,m}$ sur $e_{a_m(i)}$ pour tout $m = 1, ..., k/2$ et tout $i = 1, ..., 16m - 8$. On en déduit un plongement $\oplus_{m=1,...,k/2} \mathfrak{gl}(W_m) \to \mathfrak{gl}(V)$. Pour tout $m = 1, ..., k/2$, $\mathfrak{gl}(W_m)$ est conservé par les actions de θ, A et C. Si $m = 1$, ces actions coïncident avec celles de θ_1, A_1 et C_1. Si $m \geq 2$, les actions de θ et A sur $\mathfrak{gl}(W_m)$ sont triviales tandis que l'action de C coïncide avec celle de C_m. On a aussi $\mathcal{S} \cap W_m = \mathcal{S}_m$.

Fixons un élement $\mu \in \mathfrak{o}_F^\times - \mathfrak{o}_F^{\times,2}$ et une racine carrée ν de μ dans $\mathfrak{o}_{F^{nr}}^\times$. On pose $\mu_G = 1$, $\nu_G = 1$ si $G = \underline{G}$, $\mu_G = \mu$, $\nu_G = \nu$ si $G \neq \underline{G}$. Pour tout $m \in \{1, ..., k\}$, fixons un élément $\alpha_m \in \bar{F}^\times$ de sorte que $\alpha_m^{4m-2} = -\varpi_F$ pour $m \geq 2$ tandis que $\alpha_1^2 = -\varpi_F \mu_G^{-1}$. On pose $V_m = F(\alpha_m)$. C'est un espace vectoriel sur F de dimension $4m-2$ et on le munit de

la forme quadratique $q_m(v,v') = \gamma_m \frac{1}{4m-2} trace_{F(\alpha_m)/F}(\bar{v}v')$, où $v \mapsto \bar{v}$ est la conjugaison galoisienne relative à l'extension quadratique $F(\alpha_m)/F(\alpha_m^2)$ et où $\gamma_m = \frac{(-1)^m}{2}$ pour $m \geq 2$, tandis que $\gamma_1 = -\frac{1}{2\mu_G}$. Notons par anticipation (V^G, q^G) la somme directe des (V_m, q_m). Si $G = \underline{G}$, l'espace quadratique (V,q) est isomorphe sur F à (V^G, q^G). Si $G \neq \underline{G}$, les deux espaces ne sont pas isomorphes sur F mais le sont sur l'extension quadratique non ramifiée $F(\nu)$ de F. Comme dans le cas d'un groupe de type B_n, regroupons nos espaces (V_m, q_m) deux par deux en notant (W'_m, Q'_m) la somme directe de (V_{2m}, q_{2m}) et (V_{2m-1}, q_{2m-1}). On va identifier (W'_m, Q'_m) à (W_m, Q_m).

Supposons d'abord $m \geq 2$. Introduisons les éléments suivants de W'_m :

$$e'_1 = \alpha_{2m}^{4m-1} + \alpha_{2m-1}^{4m-3},\ e'_{8m-4} = \alpha_{2m}^0 + \alpha_{2m-1}^0,\ e'_{8m-3} = \alpha_{2m}^0 - \alpha_{2m-1}^0,\ e'_{16m-8} = -\alpha_{2m}^{1-4m} + \alpha_{2m-1}^{3-4m};$$

pour $i = 2, ...2m$, $e'_i = \alpha_{2m}^{4m-i}$; pour $i = 2m+1, ..., 6m-4$, $e'_i = \alpha_{2m-1}^{6m-3-i}$; pour $i = 6m-3, ..., 8m-5$, $e'_i = \alpha_{2m}^{8m-4-i}$; pour $i = 8m-2, ..., 10m-4$, $e'_i = (-\alpha_{2m})^{8m-3-i}$; pour $i = 10m-3, ...14m-8$, $e'_i = (-\alpha_{2m-1})^{10m-4-i}$; pour $i = 14m-7, ..., 16m-9$, $e'_i = (-\alpha_{2m})^{12m-7-i}$.

Ces éléments forment une base de W'_m et on identifie (W'_m, Q'_m) à (W_m, Q_m) en envoyant e'_i sur $e_{i,m}$ pour tout $i = 1, ..., 16m-8$. Modulo cette identification, on a $\mathcal{S}_m = \mathfrak{p}_{F(\alpha_{2m})}^{1-2m} \oplus \mathfrak{p}_{F(\alpha_{2m-1})}^{2-2m}$. On vérifie que l'automorphisme C_m conserve V_{2m}, resp. V_{2m-1}, et que sa restriction à cet espace est la multiplication par $-\lambda\alpha_{2m}^{1-4m}$, resp. $\lambda\alpha_{2m-1}^{3-4m}$.

Supposons maintenant $m = 1$. On introduit les éléments suivants de W'_1 :

$$e'_1 = \alpha_2^3 + \mu_G\alpha_1^1,\ e'_2 = 2\alpha_2^2,\ e'_3 = \alpha_2^1,\ e'_4 = \alpha_2^0 + \nu_G\alpha_1^0,$$

$$e'_5 = \alpha_2^0 - \nu_G\alpha_1^0,\ e'_6 = -2\alpha_2^{-1},\ e'_7 = \alpha_2^{-2},\ e'_8 = -\alpha_2^{-3} + \alpha_1^{-1}.$$

On identifie comme précédemment (W'_1, Q'_1) à (W_1, Q_1) à l'aide de cette base. Si $G = \underline{G}$, l'identification est la même que précédemment et est définie sur F. Si $G \neq \underline{G}$, cette identification est définie sur l'extension $F(\nu)$. Précisément, on voit que l'action sur W'_1 d'un élément $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_{F(\nu)}$ s'identifie au composé de θ et de l'action de σ sur W_1. On a encore $\mathcal{S}_1 = \mathfrak{p}_{F(\alpha_2)}^{-1} \oplus \mathfrak{o}_{F(\alpha_1)}$. L'automorphisme A_1, conserve V_2, resp. V_1, et sa restriction à cet espace est l'identité, resp. la multiplication par -1. L'automorphisme C_1, conserve V_2, resp. V_1, et sa restriction à cet espace est la multiplication par $-\lambda\alpha_2^{-3}$, resp. $\nu_G^{-1}\lambda\alpha_1^{-1}$.

Modulo ces isomorphismes, on a identifié (V,q) à (V^G, q^G). Si $G = \underline{G}$, cet isomorphisme est défini sur F, autrement dit G s'identifie au groupe adjoint du groupe spécial orthogonal de (V^G, q^G). Si $G \neq \underline{G}$, cet isomorphisme est défini sur sur $F(\nu)$ et l'action sur V^G d'un élément $\sigma \in \Gamma_F - \Gamma_{F(\nu)}$ s'identifie au composé de θ et de l'action de σ sur V. De nouveau, G s'identifie au groupe adjoint du groupe spécial orthogonal de (V^G, q^G). Notons X^G l'élément de $\underline{\mathfrak{g}}(F^{nr})$ qui préserve chaque V_m et y agit par multiplication par α_m. D'après ce que l'on vient de dire, on a $X^G \in \mathfrak{g}(F)$. Il préserve $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^*$ donc appartient à $\mathfrak{k}_s$. D'après la description ci-dessus des automorphismes A et C, X^G est fixé par ces automorphismes. On définit N comme la réduction de X^G dans $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$. Alors N est fixé par A_s et C_s donc appartient à $\mathfrak{r}(\mathbb{F}_q)$. On voit comme en 4.3.6 que $N \in \mathcal{O}$. On utilise cet élément dans la construction de 4.3.4. On pose $X^H = X^G$. Puisque X^G est fixé par A et C, donc par $\mathbf{\Omega}$, X^H appartient à $\mathfrak{h}(F)$. L'hypothèse (i) du lemme 4.3.5 est claire et l'hypothèse (iii) aussi puisque le terme ϵ de 4.3.4 vaut 1. On démontre comme en [48] 5.2(3) l'hypothèse (ii) pour le groupe $\tilde{G}$ égal au groupe spécial orthogonal de (V,q). $\square$

4.3.9 Preuve dans le cas où G est de type (E_6, nr) ou (E_7)

Supposons que G est de type (E_6, nr). L'hypothèse $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) \neq \{0\}$ équivaut à $\delta_3(q-1) = 1$. L'hypothèse que H est une forme intérieure de G non isomorphe à G sur F implique que G est déployé. Pour simplifier la notation, on note $E_i = E_{\alpha_i}$ les éléments de l'épinglage affine. L'unique élément non trivial θ de $\boldsymbol{Out}(G)$ fixe E_0, E_2 et E_4 et échange E_1 et E_6 ainsi que E_3 et E_5. Le groupe $\boldsymbol{\Omega}$ a trois éléments et est engendré par l'élément qui fixe E_4 et agit sur les autres éléments de l'épinglage affine par les permutations $E_1 \mapsto E_6 \mapsto E_0 \mapsto E_1$, $E_3 \mapsto E_5 \mapsto E_2 \mapsto E_3$. Pour fixer la notation, supposons que l'élément ω qui définit H soit cet élément.

Le groupe $G_{s,SC}$ s'identifie à $SL(3)^3$, les trois copies de $SL(3)$ ayant respectivement pour épinglages $\{\bar{E}_1, \bar{E}_3\}$, $\{\bar{E}_6, \bar{E}_5\}$, $\{\bar{E}_0, \bar{E}_2\}$, où $\bar{E}_i$ est la réduction de E_i dans $\mathfrak{g}_s$. Plus précisément, on identifie $G_{s,SC}$ à $SL(3)^3$ de sorte que l'action déduite de $Ad(\omega)$ soit $(g_1, g_2, g_3) \mapsto (g_3, g_1, g_2)$. L'orbite $\mathcal{O}$ est le produit des orbites régulières. On choisit $N = \bar{E}_1 + \bar{E}_3 + \bar{E}_6 + \bar{E}_5 + \bar{E}_0 + \bar{E}_2$. Il appartient à $\mathcal{O}$ et est fixé par δ_s tous les éléments $\delta \in \boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a)$, donc appartient à $\mathcal{O} \cap \mathfrak{r}(\mathbb{F}_q)$. On peut supposer que le $\mathfrak{sl}(2)$-triplet fixé en 4.3.4 a pour élément semi-simple l'unique élément possible appartenant à $\mathfrak{t}_s(\mathbb{F}_q)$ (on rappelle que T_s est le sous-tore maximal de G_s déduit de T). Identifions $Z(G_{s,SC})$ à $(\bar{\mathbb{F}}_q^\times)^3$. Notons $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{1/3}$ le groupe des racines cubiques de l'unité dans $\bar{\mathbb{F}}_q^\times$. Il est contenu dans $\mathbb{F}_q^\times$ d'après l'hypothèse $\delta_3(q-1) = 1$. Le groupe $Z_{G_{s,SC}}(N)/Z_{G_{s,SC}}(N)^0$ s'identifie à $(\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{1/3})^3$. Le groupe $Z_{G_s}(N)/Z_{G_s}(N)^0$ est un quotient du groupe précédent et l'ensemble Ξ se relève en celui des caractères de $Z_{G_{s,SC}}(N)/Z_{G_{s,SC}}(N)^0$ de la forme $(z_1, z_2, z_3) \mapsto \xi(z_1 z_2 z_3)$ où ξ est un caractère non trivial de $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{1/3}$. On identifie ainsi Ξ à l'ensemble à deux éléments des caractères non triviaux de $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{1/3}$.

Le groupe P est simplement le groupe de Borel de G_s associé à l'épinglage, $K_{SC,s}^{P,nr}$ est un sous-groupe d'Iwahori de $G_{SC}(F^{nr})$ et $\mathfrak{k}_u^{nr}$ est le premier terme de la filtration usuelle d'une algèbre d'Iwahori.

Notons E l'extension non ramifiée de degré 3 de F, fixons un élément $y \in \mathfrak{o}_E^\times$, posons $x = Norm_{E/F}(y)$. Posons

$$X^G = E_1 + xE_3 + E_4 + E_5 + E_6 + E_2 + E_0,\ X^H = E_1 + yE_3 + E_4 + Fr(y)E_5 + E_6 + Fr^2(y)E_2 + E_0.$$

On a $X^G \in \mathfrak{g}(F)$ et $X^H \in \mathfrak{h}(F)$.

Lemme. *(i) L'élément X^G, resp. X^H, appartient à $\mathfrak{k}_u^{nr}$ et est semi-simple régulier et elliptique. Il reste elliptique dans $\mathfrak{g}(F^{nr})$, resp. $\mathfrak{h}(F^{nr})$.*

(ii) L'ensemble des $g \in G_{SC}(F^{nr})$ tels que $g^{-1}X^G g \in \mathfrak{k}_u^{nr}$, resp. $g^{-1}X^H g \in \mathfrak{k}_u^{nr}$, est égal à $K_{SC,s}^{P,nr}$.

Preuve. Que X^G appartienne à $\mathfrak{k}_u^{nr}$ est clair. Fixons une uniformisante ϖ_F de F. Rappelons que s_0 est le sommet appartenant à $S(\bar{C}^{nr})$ associé à la racine α_0. Posons $E_0^\star = \varpi_F^{-1} E_0$. Cet élément appartient à $\mathfrak{k}_{s_0}$ et sa réduction $\bar{E}_0^\star$ dans $\mathfrak{g}_{s_0}(\mathbb{F}_q)$ est un élément non nul du sous-espace radiciel de cette algèbre associé à la racine α_0. Fixons $\lambda \in \bar{F}^\times$ tel que $\lambda^{12} = \varpi_F$. Posons $t = \prod_{i=1,\dots,6} \check{\varpi}_i(\lambda)$. On calcule $tX^G t^{-1} = \lambda Y$, où $Y = E_0^\star + xE_3 + \sum_{i=1,\dots,6, i\neq 3} E_i$. L'élément Y appartient à $\mathfrak{k}_{s_0}$ et sa réduction $\bar{Y}$ dans $\mathfrak{g}_{s_0}(\mathbb{F}_q)$ est un élément cyclique selon la définition de [18] 6.2. Un tel élément est semi-simple régulier, cf. [18] lemme 6.3 et corollaire 6.4. On peut choisir un élément $\bar{g} \in G_{s_0}$ de sorte que $\bar{g}\bar{Y}\bar{g}^{-1} \in \mathfrak{t}_{s_0}$. Posons $\bar{Z} = \bar{g}\bar{Y}\bar{g}^{-1}$. Un raisonnement standard permet de relever $\bar{g}$ en un élément $g \in K_{s_0}^{0,nr}$ de sorte que $gYg^{-1} \in \mathfrak{t}(F^{nr})$. L'élément $\bar{Y}$ étant semi-simple régulier, Y et X^G le sont aussi. Notons T_X le commutant de X^G dans G. On a

$Ad(gt)(T_X) = T$. L'automorphisme $Ad(gt)$ identifie T_X à T muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto Ad((gt)^{-1}\sigma_G(gt)) \circ \sigma_G$. Puisque T est déployé, $X_*(T_X)$ s'identifie à $X_*(T)$ muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto w_\sigma$, où w_σ est l'image dans le groupe de Weyl de $(gt)^{-1}\sigma_G(gt)$. Pour prouver que X^G est elliptique dans $\mathfrak{g}(F^{nr})$, il suffit de prouver qu'il existe $\sigma \in I_F$ tel que w_σ agisse sans point fixe non nul dans $X_*(T)$. Fixons une racine primitive ζ d'ordre 12 de l'unité dans $\bar{F}^\times$. On peut choisir $\sigma \in I_F$ de sorte que $\sigma(\lambda) = \zeta\lambda$. On a alors $(gt)^{-1}\sigma_G(gt) = t^{-1}\sigma_G(t) = \prod_{i=1,...,6} \check{\varpi}_i(\zeta)$. On a $Ad(t^{-1}\sigma_G(t))(Y) = \zeta Y$. L'élément $t^{-1}\sigma_G(t)$ appartient à $K^{0,nr}_{s_0}$. Notons $\bar{t}_\sigma$ sa réduction dans G_{s_0}. L'action de w_σ sur $X_*(T)$ s'identifie à l'action de $\bar{g}^{-1}\bar{t}_\sigma\bar{g}$ sur $X_*(T_{s_0})$. Or $Ad(\bar{g}\bar{t}_\sigma\bar{g}^{-1})(\bar{Z}) = Ad(\bar{g}\bar{t}_\sigma)(\bar{Y}) = \zeta Ad(\bar{g})(\bar{Y}) = \zeta\bar{Z}$. Le théorème 9.2 de [18] implique que w_σ est une transformation de Coxeter. Une telle transformation n'a pas de point fixe non nul dans $X_*(T)$, cf. [18] lemme 8.1. Cela prouve le (i) de l'énoncé pour l'élément X^G.

En 2.1.9, on a identifié l'appartement $App_{F^{nr}}(T)$ à $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. En particulier, s_0 s'identifie à 0. Soit z le point de $App_{F^{nr}}(T)$ tel que $\alpha_i(z) = \frac{1}{12}$ pour tout $i = 1, ..., 6$. Il résulte de [44] lemme 8.2 que $\mathfrak{k}^{nr}_u = \mathfrak{k}^{nr}_{z,\frac{1}{12}}$. On vérifie que $K^{P,nr}_{SC,s} = K^{0,nr}_{SC,z}$. Alors l'assertion (ii) de l'énoncé pour l'élément X^G se démontre comme en [48] 8.4. Répétons l'argument. Posons $F' = F^{nr}(\lambda)$. Alors $\lambda^{-1}\mathfrak{k}^{nr}_u = \lambda^{-1}\mathfrak{k}^{nr}_{z,\frac{1}{12}} \subset \lambda^{-1}\mathfrak{k}_{z,\frac{1}{12},F'} = \mathfrak{k}_{z,0,F'}$. Soit $g \in G_{SC}(F^{nr})$ tel que $g^{-1}X^G g \in \mathfrak{k}^{nr}_u$. Alors $\lambda^{-1}g^{-1}X^G g \in \mathfrak{k}_{z,0,F'}$ d'où $\lambda^{-1}X^G \in \mathfrak{k}_{gz,0,F'}$. D'après la preuve de (i), $\lambda^{-1}X^G$ est un élément entier et de reduction régulière de $\mathfrak{t}_X(F')$. Il résulte du lemme [48] 8.1 que gz est un point de l'appartement associé à T_X dans l'immeuble $Imm_{F'}(G)$ (la preuve de (i) montre que T_X est déployé sur F'). Mais il est aussi fixe par I_F. Puisque T_X est elliptique sur F^{nr}, l'appartement associé à T_X possède un unique point fixe par I_F, qui n'est autre que z. Cela prouve $gz = z$, donc $g \in K^{0,nr}_{SC,z} = K^{P,nr}_{SC,s}$. Cela achève la preuve du lemme pour l'élément X^G. Evidemment, la même preuve s'applique à X^H. $\square$

Posons $u = \check{\varpi}_3(yx^{-1})\check{\varpi}_5(Fr(y))\check{\varpi}_2(Fr^2(y))$. On constate que $Ad(u)(X^G) = X^H$. Donc

(1) la classe de conjugaison stable de X^H dans H correspond à celle de X^G dans G.

Notons $\boldsymbol{\zeta}_{1/3}$ le groupe des racines cubiques de l'unité dans $\bar{F}^\times$. Il s'identife à $\bar{\boldsymbol{\zeta}}_{1/3}$ par l'application de réduction $z \mapsto \bar{z}$. Notons $\mathcal{Z} = \boldsymbol{\zeta}_{1/3} - \{1\}$. Les ensembles $\mathcal{Z}$ et Ξ ont chacun deux éléments. Il est clair que

(2) la matrice carrée $(\xi(\bar{\zeta}))_{\xi\in\Xi,\zeta\in\mathcal{Z}}$ est inversible.

Pour $\zeta \in \mathcal{Z}$, fixons un élément $b_\zeta \in F^{nr,\times}$ tel que $b_\zeta^{-1}Fr^3(b_\zeta) = \zeta^{-1}$ et posons $y_\zeta = b_\zeta^3$. C'est un élément de E. On pose $x_\zeta = Norme_{E/F}(y_\zeta)$. On note X^G_ζ et X^H_ζ les éléments X^G et X^H construits ci-dessus à l'aide de x_ζ et y_ζ. L'hypothèse (i) du lemme 4.3.5 résulte de (1) et du (i) du lemme ci-dessus tandis que l'hypothèse (ii) du lemme 4.3.5 résulte du (ii) du lemme ci-dessus. En vertu de (2) ci-dessus, l'hypothèse (iii) du lemme 4.3.5 résulte de

(3) pour tous $\xi \in \Xi$ et $\zeta \in \mathcal{Z}$, on a les égalités $\mathbf{f}^G_\xi(X^G_\zeta) = \mathbf{f}^H_\xi(X^H_\zeta) = \xi(\bar{\zeta})$.

Prouvons (3). L'élément ϵ de 4.3.4 vaut 1. En conséquence $f^G_\xi(N) = f^H_\xi(N) = 1$. Posons simplement $x = x_\zeta$, $y = y_\zeta$, $b = b_\zeta$. Posons $a = bFr(b)Fr^2(b)$. Il résulte des définitions que $x = a^3$ et que $a^{-1}Fr(a) = \zeta^{-1}$. La réduction $\bar{X}^G_\zeta$ dans $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$ est égale à $\bar{E}_1 + \bar{a}^3\bar{E}_3 + \bar{E}_5 + \bar{E}_6 + \bar{E}_2 + \bar{E}_0$. Notons t_1 l'élément diagonal de $SL(3)(\bar{\mathbb{F}}_q)$ de coefficients diagonaux $(\bar{a}^{-1}, \bar{a}^{-1}, \bar{a}^2)$. Posons $t = (t_1, 1, 1)$. On vérifie que $t^{-1}Nt = \bar{X}^G_\zeta$. On a $tFr_G(t)^{-1} = (\bar{a}^{-1}Fr(\bar{a}), 1, 1) = (\bar{\zeta}^{-1}, 1, 1)$. On a donc $\xi(Fr_G(t)t^{-1}) = \xi(\bar{\zeta})$, d'où

$$\mathbf{f}^G_\xi(X^G_\zeta) = f^G_\xi(\bar{X}^G_\zeta) = \xi(\bar{\zeta})f^G_\xi(N) = \xi(\bar{\zeta}).$$

La réduction $\bar{X}_\zeta^H$ dans $\mathfrak{h}_s(\mathbb{F}_q)$ est égale à $\bar{E}_1 + \bar{y}\bar{E}_3 + Fr(\bar{y})\bar{E}_5 + \bar{E}_6 + Fr^2(\bar{y})\bar{E}_2 + \bar{E}_0$. Notons t'_1, t'_2 et t'_3 les éléments diagonaux de $SL(3)(\bar{\mathbb{F}}_q)$ de coefficients diagonaux $(\bar{b}^{-1}, \bar{b}^{-1}, \bar{b}^2)$, resp. $(Fr(\bar{b})^{-1}, Fr(\bar{b})^{-1}, Fr(\bar{b}^2))$, $(Fr^2(\bar{b})^{-1}, Fr^2(\bar{b})^{-1}, Fr^2(\bar{b}^2))$. Posons $t' = (t'_1, t'_2, t'_3)$. On vérifie que ${t'}^{-1}Nt' = \bar{X}_\zeta^H$. On a $t'Fr_H(t')^{-1} = (\bar{b}^{-1}Fr^3(\bar{b}), 1, 1) = (\bar{\zeta}^{-1}, 1, 1)$. Donc, comme ci-dessus,

$$\mathbf{f}_\xi^H(X_\zeta^H) = f_\xi^H(\bar{X}_\zeta^H) = \xi(\bar{\zeta})f_\xi^H(N) = \xi(\bar{\zeta}).$$

Cela démontre (3) et achève la preuve dans le cas où G est de type E_6.

Une preuve similaire s'applique quand G est de type E_7. $\square$

4.3.10 Preuve dans le cas où G est de type (A_{n-1}, ram) avec n pair

On suppose que G est de type A_{n-1} avec n pair et $n \geq 4$, que G n'est pas déployé sur F mais l'est sur une extension quadratique ramifiée E de F. L'hypothèse que $FC^{st}(\mathfrak{g}(F)) \neq \{0\}$ équivaut à ce que $n = h^2 + k(k+1)$ avec $h, k \in \mathbb{N}$ et $h = k$ ou $h = k+1$. Remarquons que la parité de n entraîne celle de h. Le groupe G est le groupe adjoint d'un groupe unitaire que l'on note $\tilde{G}$. On affecte d'un ˜ les objets relatifs à $\tilde{G}$.

On fixe une uniformisante ϖ_E de E telle que $\varpi_E^2 \in F^\times$. On introduit un espace V sur E de dimension n muni d'une base $(e_i)_{i=1,...,n}$ et d'une forme hermitienne q (relativement à l'extension E/F) telle que $q(e_i, e_{n+1-i}) = (-1)^i\varpi_E^{-1}$ pour $i = 1, ..., n$ et $q(e_i, e_j) = 0$ pour $i + j \neq n + 1$ (la forme q est bien hermitienne car n est pair). Grâce à cette base, on identifie $GL(V \otimes_E \bar{F})$ à $GL(n, \bar{F})$. On introduit l'épinglage de $GL(n, \bar{F})$ que l'on note ici $\tilde{\mathfrak{E}} = (\tilde{B}, \tilde{T}, (E_{\alpha_i})_{i=1,...,n-1})$ et l'automorphisme θ définis au début du paragraphe 4.3.6. En notant $\sigma \mapsto \sigma_{GL(n)}$ l'action naturelle de Γ_F sur $GL(n, \bar{F})$, on vérifie que le groupe unitaire $\tilde{G}$ de V s'identifie à $GL(n, \bar{F})$ muni de l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ telle que $\sigma_G = \sigma_{GL(n)}$ si $\sigma \in \Gamma_E$ et $\sigma_G = \theta \circ \sigma_{GL(n)}$ si $\sigma \notin \Gamma_E$. On vérifie que $\theta(E_{n-1,1}) = -E_{n,2}$. Rappelons que $\Delta_a^{nr} = \{\beta_{i,n-i}; i = 1, ..., n/2 - 1\} \cup \{\beta_{n/2}, \beta_0\}$. Pour $i = 1, ..., n/2 - 1$, on pose $E_{\beta_{i,n-i}} = E_{\alpha_i} + E_{\alpha_{n-i}}$. On pose $E_{\beta_{n/2}} = E_{\alpha_{n/2}}$ et $E_{\beta_0} = \varpi_E(E_{n-1,1} + E_{n,2})$. Alors $\tilde{\mathfrak{E}}_a = (\tilde{T}^{nr}, (E_\beta)_{\beta \in \Delta_a^{nr}})$ est un épinglage affine de $\tilde{G}$ conservé par l'action galoisienne. On déduit de cet épinglage affine un tel épinglage $\mathfrak{E}_a = (T^{nr}, (E_\beta)_{\beta \in \Delta_a^{nr}})$ de G, où T est l'image de $\tilde{T}$ dans $G = \tilde{G}_{AD}$. Remarquons que $\tilde{\mathfrak{g}}(F) \subset \mathfrak{gl}(n, E)$ et que $\mathfrak{g}(F)$ est le sous-espace des éléments de trace nulle dans $\tilde{\mathfrak{g}}(F)$.

L'unique élément non trivial $\omega \in \mathbf{\Omega}^{nr}$ se relève en l'élément de $\tilde{G}$ qui permute e_1 et $\varpi_E e_n$ et fixe e_i pour $i = 2, ..., n-1$. Notons F' l'extension quadratique non ramifiée de F. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, on pose $n(\sigma) = 0$ si $\sigma \in \Gamma_{F'}$ et $n(\sigma) = 1$ sinon. On a $\sigma_H = Ad(\omega)^{n(\sigma)} \circ \sigma_G$. Posons $n' = h^2$ et $n'' = k(k+1)$. Notons $\mathcal{S}$ le $\mathfrak{o}_E$-réseau de V engendré par les e_i pour $i = 1, ..., n'/2$ et les $\varpi_E e_i$ pour $n'/2 + 1, ..., n$ et notons $\mathcal{S}^\star$ son dual, c'est-à-dire $\mathcal{S}^\star = \{v \in V; \forall v' \in \mathcal{S}, q(v', v) \in \mathfrak{o}_E\}$. C'est le $\mathfrak{o}_E$-réseau engendré par les e_i pour $i = 1, ..., n - n'/2$ et les $\varpi_E e_i$ pour $i = n - n'/2 + 1, ..., n$. Alors $\tilde{\mathfrak{k}}_s$ est le sous-ensemble des $X \in \tilde{\mathfrak{g}}(F)$ tels que $X(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ et on a $\mathfrak{k}_s = \mathfrak{g}(F) \cap \tilde{\mathfrak{k}}_s$. L'espace $\bar{V}' = \mathcal{S}/\varpi_E\mathcal{S}^\star$ sur $\mathbb{F}_q$ est de dimension h^2 et est naturellement muni d'une forme orthogonale. On note $\tilde{G}'_s$ son groupe spécial orthogonal. L'espace $\bar{V}'' = \mathcal{S}^\star/\mathcal{S}$ sur $\mathbb{F}_q$ est de dimension $k(k+1)$ et est naturellement muni d'une forme symplectique, qui est la réduction de $\varpi_E q$. On note $\tilde{G}''_s$ son groupe symplectique. L'extension E/F étant ramifiée, on a l'égalité $\tilde{\mathfrak{g}}_s = \mathfrak{g}_s$ et on obtient la décomposition $\mathfrak{g}_s = \tilde{\mathfrak{g}}'_s \oplus \tilde{\mathfrak{g}}''_s$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \times \mathcal{O}''$, où $\mathcal{O}'$ est paramétrée par la partition $(2h-1, ..., 3, 1)$ et $\mathcal{O}''$ est paramétrée par la partition $(2k, ..., 4, 2)$.

On pose $\eta = h - k \in \{0, 1\}$. Pour $m = 1, ..., h$, on pose $d_m = 4m - 1 - 2\eta$ et on introduit un élément $\alpha_m \in \bar{F}^\times$ tel que $\alpha_m^{d_m} = \varpi_E/2$. On pose $E_m = E(\alpha_m)$ et

$F_m = F(\alpha_m^2)$. On vérifie que E_m est la composée des deux extensions E et F_m de F. On munit E_m de la forme hermitienne q_m (relative à l'extension E/F) définie par $q_m(v,v') = (-1)^m \frac{1}{2d_m} trace_{E_m/E}(\bar{v}v')$, où $v \mapsto \bar{v}$ est la conjugaison galoisienne associée à l'extension E_m/F_m. On peut identifier convenablement (V,q) à la somme directe des (E_m, q_m) de sorte que $\mathcal{S}$ s'identifie à la somme des $\mathfrak{p}_{E_m}^{1-m}$. L'identification est un peu compliquée parce que les E_m sont de dimension impaire sur E. De nouveau, on regroupe les E_m deux-à-deux. Pour $m = 1, ..., h/2$, posons $n''_m = 8m-4$ et $n'_m = 8m-2-4\eta$. On décompose l'ensemble $\{1, ..., n\}$ en une suite croissante d'intervalles

$$I'_1 \cup ... \cup I'_{h/2} \cup I''_{h/2} \cup ... \cup I''_1 \cup J''_1 \cup ... \cup J''_{h/2} \cup J'_{h/2} \cup ... J'_1$$

de sorte que $|I''_m| = |J''_m| = n''_m$ et $|I'_m| = |J'_m| = n'_m$. On voit que l'on peut identifier $E_{2m-1} \oplus E_{2m}$ au sous-espace de V engendré par les e_i pour $i \in I'_m \cup I''_m \cup J''_m \cup J'_m$. On précisera ci-dessous l'identification pour $m = 1$. On note X^G l'élément de $\mathfrak{g}(F)$ qui conserve chaque E_m et y agit par multiplication par α_m, sauf dans le cas où $m = 1$ et $\eta = 1$. Dans ce cas, X^G annule $E_1 = E$.

Remarque. On fait cette exception pour que X^G appartienne à $\mathfrak{g}(F)$, c'est-à-dire soit de trace nulle.

Pour tout m, la multiplication par α_m conserve $\mathfrak{p}_{E_m}^{1-m}$ donc $X^G \in \tilde{k}_s$. On note N la réduction de X^G dans $\mathfrak{g}_s$. On voit comme toujours que $N \in \mathcal{O}$. On doit définir un élément X^H et prouver que N et X^H ont les propriétés requises. Notre élément X^H va être somme de ses composantes sur chaque $E_{m-1} \oplus E_m$. Avec nos identifications, $Ad(\omega)$ agit trivialement sur $E_{2m-1} \oplus E_{2m}$ dès que $m \geq 2$. Donc les composantes de X^G sur ces espaces appartiennent à $\mathfrak{h}(F)$ et les réductions de ces composantes dans $\mathfrak{g}_s$ sont fixées par $Ad(\omega)_s$. On impose $X^H = X^G$ sur $E_{2m-1} \oplus E_{2m}$. Il est clair que tout se passe bien sur ces composantes et que, pour achever la preuve, il reste à considérer le facteur $E_1 \oplus E_2$. On peut simplifier les notations en supposant que $h = 2$. On distingue les cas $k = 2$ ($\eta = 0$) et $k = 1$ ($\eta = 1$).

Supposons $k = 2$. On a $n = 10$. Introduisons les éléments suivants de $E_1 \oplus E_2$:

$$e'_1 = \alpha_1^0 + \alpha_2^0,\ e'_2 = \alpha_2^{-1},\ e'_3 = \alpha_2^{-2},\ e'_4 = -\alpha_1^{-1},\ e'_5 = \alpha_2^{-3},$$

$$e'_6 = -\alpha_2^{-4},\ e'_7 = \alpha_1^{-2},\ e'_8 = \alpha_2^{-5},\ e'_9 = \alpha_2^{-6},\ e'_{10} = \varpi_E^{-1}(-\alpha_1^0 + \alpha_2^0).$$

Comme en 4.3.6, α_1^0 et α_2^0 désignent clairement les unités, l'une de E_1, l'autre de E_2. On identifie $E_1 \oplus E_2$ à V par l'application qui envoie e'_i sur e_i pour tout $i = 1, ..., 10$, dont on vérifie qu'elle est une isométrie. Notons $E_1^\flat$ le sous-E-espace de E_1 engendré par α_1^{-1} et α_1^{-2}. On voit que ω agit par l'identité sur $E_1^\flat \oplus E_2$ et par multiplication par -1 sur $E\alpha_1^0$. Cette action ne fixe par X^G. Notons N la réduction de X^G dans $\mathfrak{g}_s$, que l'on décompose en $N = N' \oplus N''$, avec $N' \in \tilde{\mathfrak{g}}'_s$, $N'' \in \tilde{\mathfrak{g}}''_s$. On voit que ω se réduit en l'identité de $\bar{V}''_s$ et en l'automorphisme de $\bar{V}'_s$ qui agit par l'identité sur $\mathfrak{p}_{E_2}^{-1}/\mathfrak{p}_{E_2}^2$ et par multiplication par -1 sur $\mathfrak{o}_{E_1}/\mathfrak{p}_{E_1}$. Or N' conserve ces deux sous-espaces donc N est fixé par $Ad(\omega)_s$. Cela démontre que N appartient à $\mathfrak{r}(\mathbb{F}_q)$. Notons τ l'élément de $\tilde{G}$ qui agit par l'identité sur E_2 et par multiplication par -1 sur E_1. Il commute à X^G. D'après la description ci-dessus de ω, on a $\omega\tau = \tau\omega$ et cet élément agit par l'identité sur $F\alpha_1^0 \oplus E_2$ et par multiplication par -1 sur $E_1^\flat$. Autrement dit, $\omega\tau$ multiplie les vecteurs e_4 et e_7 par -1 et fixe les autres vecteurs de base. Donc $\omega\tau \in \tilde{T}(\mathfrak{o}_F)$. Par le théorème de Lang, on peut fixer $t \in \tilde{T}(\mathfrak{o}_{F^{nr}})$ tel que $t^{-1}Fr_H(t) = \omega\tau$. Posons $X^H = Ad(t^{-1})(X^G)$. Par le même calcul qu'en 4.3.6,

on voit que $Fr_H(X^H) = X^H$. Donc $X^H \in \mathfrak{h}(F)$. Puisque X^G et X^H sont conjugués, leurs classes de conjugaison stable se correspondent. L'assertion (ii) du lemme 4.3.5 pour X^G et le groupe $\tilde{G}$ est l'assertion 5.2(3) de [48]. Puisque $t \in K_s^{\tilde{P},nr}$, cette assertion pour X^G entraîne la même assertion pour X^H. Il reste à démontrer l'assertion (iii) du lemme 4.3.5. Notons N^H la réduction de X^H dans $\mathfrak{h}_s$. Par définition, $\mathbf{f}^G(X^G) = f^G(N) = 1$, $\mathbf{f}^H(X^H) = f^H(N^H)$ et $f^H(N) = -1$ car le terme ϵ défini en 4.3.4 vaut -1. Notons $\bar{t}$ la réduction de t dans $\tilde{G}_s$. On a $N^H = \bar{t}^{-1}N\bar{t}$, d'où $f^H(N^H) = \xi(\bar{z})f^H(N) = -\xi(\bar{z})$, où ξ est l'unique élément de Ξ et $\bar{z} = Fr_H(\bar{t})\bar{t}^{-1}$. Décomposons $\bar{z}$ en $\bar{z}' \times \bar{z}''$, où $\bar{z}' \in \tilde{G}'_s$ et $\bar{z}'' \in \tilde{G}''_s$. D'après la description ci-dessus de $t^{-1}Fr_H(t) = \omega\tau$, $\bar{z}'$ est l'élément neutre tandis que $\bar{z}''$ a quatre valeurs propres égale à 1 et deux valeurs propres égales à -1. L'élément N'' appartient à l'orbite nilpotente paramétrée par la partition $(4, 2)$. Son commutant dans $\tilde{G}''_s$ est produit d'un groupe unipotent et d'un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ engendré par deux éléments $\bar{z}_2$, resp. $\bar{z}_4$, possédant pour valeurs propres 1 avec multiplicités 4, resp. 2, et -1 avec multiplicités 2, resp. 4. On en déduit que $\bar{z}''$ est le produit de $\bar{z}_2$ par un élément unipotent. Or ξ vaut -1 sur $\bar{z}_2$, donc $\xi(\bar{z}) = -1$. On en déduit $\mathbf{f}^H(X^H) = 1 = \mathbf{f}^G(X^G)$, ce qui démontre le (iii) du lemme 4.3.5.

Supposons maintenant $k = 1$. On a $n = 6$. Introduisons les éléments suivants de $E_1 \oplus E_2$:

$$e'_1 = \alpha_1^0 + \alpha_2^0,\ e'_2 = \alpha_2^{-1},\ e'_3 = \alpha_2^{-2},\ e'_4 = \alpha_2^{-3},\ e'_5 = \alpha_2^{-4},\ e'_6 = \varpi_E^{-1}(-\alpha_1^0 + \alpha_2^0).$$

On identifie encore $E_1 \oplus E_2$ à l'aide de cette base. Alors ω agit par l'identité sur E_2 et par multiplication par -1 sur E_1. Donc X^G est fixe par ω. On pose $X^H = X^G$. On a $X^H \in \mathfrak{h}(F)$. Cette fois, on a $\epsilon = 1$. La preuve ci-dessus se trivialise et conduit au résultat cherché. $\square$

4.3.11 Isomorphismes canoniques d'espaces $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)$

Pour ce paragraphe, soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On suppose que G est adjoint, simple et quasi-déployé sur F. On fixe une paire de Borel épinglée $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ conservée par l'action galoisienne. Soit $H \in \mathcal{L}_F^{nr,st}$. On lui applique la construction de 2.3.5. Le groupe G étant quasi-déployé, on a $G^* = G$ et cette construction associe à H un F-Levi standard M de G qui est conjugué à H par un élément de $G(F^{nr})$. D'après le lemme 2.3.6, les espaces $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ et $FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC}(F))$ sont isomorphes. On se propose de définir un isomorphisme canonique $\iota_{M,H} : FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC}(F))$.

Puisque $FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC}(F)) \neq \{0\}$, le groupe M_{SC} est absolument quasi-simple, cf. 2.2.14(1). Si $M = T$, les deux espaces $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$ et $FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC}(F))$ s'identifient naturellement à $\mathbb{C}$ et on définit $\iota_{M,H}$ comme l'identité. Si $M = G$, on a $H = M$ et on définit $\iota_{M,H}$ comme l'identité. Suposons $M \neq T$, $M \neq G$. Alors M_{AD} vérifie l'hypothèse (1) de 4.1.1 imposée au groupe G de ce paragraphe. Supposons que M_{AD} n'est pas de type (A_{n-1}, ram). On applique la construction de 4.1.5 en y remplaçant la paire (H, G) par (H_{AD}, M_{AD}) : on définit $\iota_{H,M}$ comme l'isomorphisme défini dans ce paragraphe. Supposons maintenant que M_{AD} soit du type (A_{n-1}, ram). La même construction vaut pourvu que nous définissions un sous-ensemble canonique $\Phi \subset Isom'(H_{AD}, M_{AD}, F^{nr})$. Par construction, on peut fixer $g \in G(F^{nr})$ tel que $H = g^{-1}Mg$. L'automorphisme $Ad(g)$ se descend en un isomorphisme $\phi : H_{AD} \to M_{AD}$ qui est défini sur F^{nr}. L'automorphisme $\phi Fr(\phi)^{-1}$ de M_{AD} se déduit de l'élément $gFr(g)^{-1} \in Norm_{G(F^{nr})}(M)$. On a vu dans la preuve du lemme 2.3.9 que l'action sur M_{AD} d'un élément de $Norm_{G(F^{nr})}(M)$ était un automorphisme intérieur. Donc ϕ appartient à $Isom'(H_{AD}, M_{AD}, F^{nr})$. On choisit pour Φ la

classe $Ad(M_{AD}(F^{nr}))\phi$. Cela ne dépend pas du choix de g. En effet, on ne peut modifier g qu'en le multipliant à gauche par un élément de $Norm_{G(F^{nr})}(M)$ et, comme ci-dessus, cela ne change pas la classe $Ad(M_{AD}(F^{nr}))\phi$. Cela achève la construction.

Soit $H' \in \mathcal{L}_F^{nr,st}$, supposons que H et H' soient stablement conjugués. Le Levi M est aussi celui associé à H'. On a donc deux isomorphismes $\iota_{M,H} : FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC}(F))$ et $\iota_{M,H'} : FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC}(F))$. On a aussi défini en 2.3.9 un isomorphisme canonique $\iota_{H,H'} : FC^{st}(\mathfrak{h}'_{SC}(F)) \to FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))$.

Remarque. Dans le cas où $H = M$, nous avons défini de façon différente deux isomorphismes notés $\iota_{H,H'}$. Le lemme suivant dit qu'ils sont égaux.

Lemme. *On a l'égalité* $\iota_{M,H'} = \iota_{M,H} \circ \iota_{H,H'}$.

Preuve. De nouveau, le lemme est clair si $M = T$ ou $M = G$. Supposons $M \neq T$ et $M \neq G$. Fixons $g \in G(F^{nr})$ tel que $H' = g^{-1}Hg$ et $gFr(g)^{-1} \in H(F^{nr})$. Alors $Ad(g)$ définit un torseur intérieur $\psi : H' \to H$ et, par définition, on a $\iota_{H,H'} = transfert_\psi$. D'après les constructions, le lemme résulte du théorème 4.3.1, à condition que l'hypothèse (1) de ce théorème soit vérifiée. Supposons que cette hypothèse (1) ne soit pas vérifiée. C'est-à-dire que M_{AD} est de type (D_n, ram) donc H_{AD} et H'_{AD} aussi. On a alors

(1) H et H' sont quasi-déployés.

Admettons provisoirement cette propriété. Puisque H et H' sont formes intérieures l'un de l'autre, ils sont isomorphes. En fixant un tel isomorphisme, $\iota_{H,H'}$ est l'isomorphisme du transport de structure. C'est aussi l'isomorphisme construit en appliquant la construction de 4.1.5 où l'on remplace (G, H) par (H_{AD}, H'_{AD}). Alors l'égalité de l'énoncé est celle du lemme 4.3.2.

Il nous reste à prouver (1). D'après la description de 2.2.14, l'hypothèse que M est de type (D_n, ram) implique que n est un carré impair, donc $n \geq 9$, et que G est de type (D_m, ram) avec $m > n$. Fixons un élément $X_H \in \mathfrak{a}_H^{nr}(F)$ entier et de réduction régulière. Il est semi-simple. D'après [19] lemme 3.3, il existe un élément $X^* \in \mathfrak{g}(F)$ stablement conjugué à X_H tel que son commutant H^* soit quasi-déployé. D'après le lemme 2.3.4, la structure galoisienne de H est associée à un élément de $H^1(F, H^*_{sc})$, où H^*_{sc} est l'image réciproque de H^* dans G_{SC}. Pour prouver que H lui-même est quasi-déployé, il suffit de prouver que l'application naturelle de $H^1(F, H^*_{sc})$ dans $H^1(F, H^*_{AD})$ est nulle. Introduisons le groupe $\hat{G}_{AD}$ dual de G_{SC}. Le groupe dual de M_{sc} s'identifie à un Levi $\hat{M}_{ad}$ de $\hat{G}_{AD}$. Le groupe H^*_{sc} est isomorphe à M_{sc} sur F^{nr}. Son dual $\hat{H}^*_{ad}$ s'identifie à $\hat{M}^*_{ad}$, muni d'une action galoisienne tordue, mais les deux actions coïncident sur I_F. D'après [20] théorème 1.2, on a des isomorphismes $H^1(F, H^*_{sc}) \simeq \pi_0(Z(\hat{H}^*_{ad})^{\Gamma_F})^\vee$ et $H^1(F, H^*_{AD}) \simeq (Z(\hat{H}^*_{SC})^{\Gamma_F})^\vee$. Il suffit de prouver dualement que l'application $Z(\hat{H}^*_{SC})^{\Gamma_F} \to \pi_0(Z(\hat{H}^*_{ad})^{\Gamma_F})$ est nulle. Il suffit encore de prouver que l'image dans $\hat{G}_{AD}$ de $Z(\hat{H}^*_{SC})^{I_F} = Z(\hat{M}_{SC})^{I_F}$ est triviale. On fixe une paire de Borel de $\hat{G}_{AD}$ conservée par l'action galoisienne et on note $\{\hat{\alpha}_i; i = 1, ..., m\}$ l'ensemble de racines simples. On peut supposer que $\hat{M}_{ad}$ est le groupe standard correspondant à l'ensemble de racines $\{\hat{\alpha}_i; i = m - n + 1, ..., m\}$. Il y a un élément de I_F dont l'action sur l'ensemble de racines simples est l'automorphisme qui échange $\hat{\alpha}_{m-1}$ et $\hat{\alpha}_m$. On voit alors que $Z(\hat{M}_{SC})^{I_F}$ est réduit à $\{1, \check{\hat{\alpha}}_{m-1}(-1)\check{\hat{\alpha}}_m(-1)\}$ (en notant $\check{\hat{\alpha}}_i$ la coracine associée à la racine $\hat{\alpha}_i$). Mais cet ensemble est central dans $\hat{G}_{SC}$ donc s'envoie sur $\{1\}$ dans $\hat{G}_{AD}$. Cela achève la démonstration de (1) et du lemme. $\square$

4.4 Comparaison avec la construction de Lusztig

4.4.1 La situation

Soit G un groupe réductif connexe G défini sur F^{nr}, soit M un F^{nr}-Levi de G, soit s_M un sommet de $Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$ et soit $\mathcal{E}$ un élément de $\mathbf{FC}_{s_M}$. On impose

(1) M_{SC} est absolument quasi-simple ; $s_M \in S^{nr,st}(M)$, $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}_{s_M}$.

Remarque(2) Supposons que M n'est pas un tore. Décomposons G_{AD} en produit de composantes simples sur $\bar{F}$. L'hypothèse que M_{SC} est absolument quasi-simple implique qu'il existe une unique composante simple G' de G_{AD} telle que M_{ad} soit le produit d'un Levi M' de G' et de sous-tores maximaux des autres composantes. L'unicité de la composante G' implique que celle-ci est définie sur F^{nr}. Le produit des autres composantes est donc lui-aussi défini sur F^{nr}. Cette construction nous permettra souvent de nous ramener au cas où G lui-même est absolument quasi-simple.

On pose $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et on fixe un élément $N \in \mathcal{O}$.

Fixons une paire de Borel épinglée $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G conservée par l'action de I_F, telle que $T \subset M$ et que s_M appartienne à l'appartement de $Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$ associé à T^{nr}. Rappelons que $W^{I_F}(M) = Norm_{W^{I_F}}(M)/W^{M,I_F} \simeq Norm_{G(F^{nr})}(M)/M(F^{nr})$. Notons $\Sigma(G,M)^{nr}$ l'ensemble des racines de A^{nr}_M dans $\mathfrak{g}$ et $\Sigma_{ind}(G,M)^{nr}$ le sous-ensemble des racines indivisibles. Montrons que

(3) l'ensemble $\Sigma_{ind}(G,M)^{nr}$ est un système de racines, qui est irréductible si G_{SC} est absolument quasi-simple ; le groupe $W^{I_F}(M)$ est le groupe de Weyl de ce système.

L'ensemble des sous-groupes paraboliques de G, définis sur F^{nr} et de composantes de Levi M, forme une seule classe de conjugaison par le groupe W^{I_F}. En effet, la remarque (2) nous ramène aux deux cas : soit M est un tore, auquel cas cette propriété est bien connue ; soit G_{SC} est absolument quasi-simple, auquel cas elle résulte du (ii) de la proposition 2.2.13 et de l'hypothèse $\mathbf{FC}^{st}_{s_M} \neq \emptyset$. L'assertion (3) résulte de cette propriété, cf. [7] théorème 10.4.2 et proposition 10.10.2. Supposons que G_{SC} est absolument quasi-simple. Si $M = G$ ou si $M = T$, le système $\Sigma_{ind}(G,M)^{nr}$ est clairement irréductible. Si $M \neq G$ et $M \neq T$, on a décrit en 2.2.14 les différents M possibles. La structure du système de racines $\Sigma_{ind}(G,M)^{nr}$ est décrite par la proposition 10.10.3 de [7]. On vérifie cas par cas que $\Sigma_{ind}(G,M)^{nr}$ est irréductible (le cas des groupes exceptionnels est traité dans différentes tables, cf. [7] p. 479 à 484). Cela démontre (3).

Pour $n \in Norm_{G(F^{nr})}(M)$, $Ad(n)$ se restreint en un automorphisme de M qui se descend en un automorphisme $Ad(n)_{M_{AD}}$ de M_{AD}, lequel agit sur $Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$. On note $Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M)$ le sous-groupe des n tels que cet automorphisme fixe s_M. On note

$$b : Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M) \to W^{I_F}(M)$$

l'homomorphisme naturel. Montrons que

(4) l'homomorphisme b se quotiente en un isomorphisme $\underline{b} : Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M)/K^{M,\dagger,nr}_{s_M}$ sur $W^{I_F}(M)$.

Le seul point qui mérite démonstration est la surjectivité. La remarque (2) nous ramène encore au cas où G_{SC} est absolument quasi-simple. Si $M = G$, on a $W^{I_F}(M) = \{1\}$ et l'assertion est triviale. Supposons $M \neq G$. Soit $n \in Norm_{G(F^{nr})}(M)$. Posons $s'_M = Ad(n)_{AD}(s_M)$. On peut fixer une extension finie non ramifiée F' de F de degré n telle que s_M et s'_M soient deux sommets de $Imm_{F'}(M_{AD})$ tels que $FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC,s_M}(\mathbb{F}_{q^n})) \neq 0$ et $FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC,s'_M}(\mathbb{F}_{q^n})) \neq 0$. D'après le lemme 2.2.10, il existe $m \in M(F')$ tel que $ms'_M = s_M$.

Alors mn appartient à $Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M)$ et a même image que n dans $W^{I_F}(M)$. Cela prouve (4).

Pour un élément $n \in Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M)$, $Ad(n)_{M_{AD}}$ se descend en un automorphisme $Ad(n)_{M_{AD},s_M}$ de M_{s_M}. On note $Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$ le sous-groupe des $n \in Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M)$ tels que $Ad(n)_{M_{AD},s_M}$ fixe N. Remarquons qu'en notant $K^{M,\dagger,nr}_{s_M,N}$ le sous-groupe des $k \in K^{M,\dagger,nr}_{s_M}$ tels que $Ad(k)_{M_{AD},s_M}$ fixe N, on a l'égalité $Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M)/K^{M,\dagger,nr}_{s_M} = Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)/K^{M,\dagger,nr}_{s_M,N}$: cela résulte du fait que, pour tout élément $n \in Norm_{G(F^{nr}}(M, s_M)$, l'automorphisme $Ad(n)_{M_{AD},s_M}$ conserve $\mathcal{O}$. Alors $\underline{b}$ s'identifie à un isomorphisme $Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)/K^{M,\dagger,nr}_{s_M,N} \to W^{I_F}(M)$.

L'application $n \mapsto Ad(n)_{M_{AD}}$ est un homomorphisme de $Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M)$ dans $Aut_{s_M}(M_{AD}, F^{nr})$. Comme on l'a vu en 2.3.9, son image est contenue dans le sous-groupe $Aut'_{s_M}(M_{AD}, F^{nr})$ défini en 4.1.3 (le raisonnement de 2.3.9 supposait G absolument quasi-simple ; on se ramène aisément à ce cas à l'aide de la remarque (2)). Le groupe $Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$ est l'image réciproque de $Aut'_{s_M,N}(M_{AD}, F^{nr})$. On note

$$a : Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N) \to Aut'_{s_M,N}(M_{AD}, F^{nr})$$

l'homomorphisme $n \mapsto Ad(n)_{M_{AD}}$.

Soit $x \in Imm^G_{F^{nr}}(M_{ad})$ tel que $p_M(x) = s_M$. Pour $n \in K^{0,nr}_x \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M)$, la réduction $\bar{n} \in G_x$ appartient à $Norm_{G_x}(M_{s_M})$. On note

$$c_x : K^{0,nr}_x \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M) \to Norm_{G_x}(M_{s_M})$$

cet homomorphisme de réduction. Il envoie $K^{0,nr}_x \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$ dans $Norm_{G_x}(M_{s_M}, N)$. Remarquons que x appartient à l'appartement de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ associé à T^{nr}. Le tore T^{nr} définit par réduction un sous-tore maximal T_x de G_x. On note W_x le groupe de Weyl de G_x relatif à T_x, $W_x^{M_{s_M}}$ le sous-groupe de Weyl de M_{s_M} et $W_x(M_{s_M}) = W_x/W_x^{M_{s_M}}$. On a $W_x(M_{s_M}) \simeq Norm_{G_x}(M_{s_M})/M_{s_M}$. L'homomorphisme c_x se quotiente en un homomorphisme

$$\underline{c}_x : (K^{0,nr}_x \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M))/K^{M,0,nr}_{s_M} \to Norm_{G_x}(M_{s_M})/M_{s_M} \simeq W_x(M_{s_M}).$$

Montrons que

(5) c_x est surjectif et $\underline{c}_x$ est un isomorphisme.

L'image réciproque de M_{s_M} dans $K^{0,nr}_x$ est $K^{M,0,nr}_{s_M} K^{+,nr}_x$. Pour démontrer l'injectivité de $\underline{c}_x$, il suffit de prouver que $K^{M,0,nr}_{s_M} K^{+,nr}_x \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M) = K^{M,0,nr}_{s_M}$, ou encore que $K^{+,nr}_x \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M) = K^{M,+,nr}_{s_M}$. Soit $k \in K^{+,nr}_x \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M)$. Puisque $W^{I_F}(M)$ est fini d'ordre premier à p, il existe un entier $c \geq 1$ premier à p tel que $\underline{b}(k^c) = 1$. D'après (4), k^c appartient à $K^{M,\dagger,nr}_{s_M}$. Puisque $k \in K^{+,nr}_x$ par hypothèse, on a $k^c \in K^{+,nr}_x \cap M(F^{nr}) = K^{M,+,nr}_{s_M}$. Puisque k est topologiquement nilpotent et que c est premier à p, k appartient à l'adhérence du sous-groupe engendré par k^c, donc $k \in K^{M,+,nr}_{s_M}$. Cela démontre l'injectivité de $\underline{c}_x$. Pour démontrer sa surjectivité, il suffit de prouver que tout élément $\bar{k} \in Norm_{G_x}(T_x) \cap Norm_{G_x}(M_{s_M})$ appartient à l'image de c_x. Un tel élément se relève en un élément $k \in Norm_{G(F^{nr})}(T) \cap K^{0,nr}_x$. Puisque s_M est un sommet de $Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$, le plus grand tore central de M_{s_M} est le tore $A^{nr}_{M,x}$ déduit par réduction de A^{nr}_M. Puisque $Ad(\bar{k})$ conserve M_{s_M}, il conserve ce tore $A^{nr}_{M,x}$ donc $Ad(k)$ conserve A^{nr}_M et conserve son commutant M. Donc $k \in Norm_{G(F^{nr})}(M)$. Puisque $k \in K^{0,nr}_x$ fixe x, il fixe aussi $s_M = p_M(x)$, donc $k \in Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M)$. Cela prouve la surjectivité de $\underline{c}_x$. La surjectivité de c_x s'en déduit. Cela prouve (5).

De nouveau, on a

$$(K_x^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M))/K_{s_M}^{M,0,nr} = (K_x^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N))/K_{s_M,N}^{M,0,nr}$$

et $\underline{c}_x$ s'identifie à un isomorphisme de ce dernier groupe sur $W_x(M_{s_M})$.

De (4) et (5) se déduit un plongement $j_{W,W_x} : W_x(M_{s_M}) \to W^{I_F}(M)$, composé des homomorphismes injectifs

$$(6) \qquad W_x(M_{s_M}) \stackrel{\underline{c}_x^{-1}}{\to} (K_x^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M))/K_{s_M}^{M,0,nr} \to$$

$$Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M)/K_{s_M}^{M,\dagger,nr} \stackrel{b}{\to} W^{I_F}(M).$$

4.4.2 Comparaison des familles $(\epsilon_N)_{N\in\mathcal{O}}$ et $(\epsilon_N^\flat)_{N\in\mathcal{O}}$

On conserve la situation du paragraphe précédent. L'hypothèse 4.4.1(1) implique que M_{AD} n'est pas de type (A_{n-1}, nr). On impose de plus que

(1) M_{AD} n'est pas des types $(D_4, 3-ram)$, (E_6, ram), E_8, F_4, G_2.

Remarquons que, si G est absolument quasi-simple et si M est un Levi propre de G, cette condition est vérifiée.

Les constructions de la sous-section 4.2 définissent un caractère ϵ_N de $Aut'_{s_M,N}(M_{AD}, F^{nr})$.

Soit $x \in Imm_{F^{nr}}^G(M_{ad})$ tel que $p_M(x) = s_M$. L'hypothèse $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_{s_M}^{st}$ de 4.4.1(1) implique que la représentation ξ_N associée au faisceau $\mathcal{E}$ est un caractère. En 2.2.3, on a défini à la suite de Lusztig un homomorphisme $\epsilon_N^\flat : Norm_{G_x}(M_{s_M}, N) \to \mathbb{C}^\times$ que nous notons plus précisément $\epsilon_{x,N}^\flat$. Soit μ un caractère de $W^{I_F}(M)$ dans $\mathbb{C}^\times$. Introduisons la condition

$C(x,\mu)$: on a l'égalité $\epsilon_{x,N}^\flat \circ c_x(n) = \mu \circ b(n)\epsilon_N \circ a(n)$ pour tout $n \in K_x^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$.

Théorème. *(i) Il existe un unique caractère $\mu : W^{I_F}(M) \to \mathbb{C}^\times$ de sorte que, pour tout sommet $s \in Imm_{F^{nr}}^G(M_{ad})$ tel que $p_M(s) = s_M$, la condition $C(s,\mu)$ soit vérifiée.*

(ii) Pour ce caractère μ, la condition $C(x,\mu)$ est vérifiée pour tout élément $x \in Imm_{F^{nr}}^G(M_{ad})$ tel que $p_M(x) = s_M$.

(iii) Ce caractère est indépendant de $N \in \mathcal{O}$.

Prouvons tout de suite l'assertion (iii). Soit $N' \in \mathcal{O}$. Soit $x \in Imm_{F^{nr}}^G(M_{ad})$ tel que $p_M(x) = s_M$. En remplaçant N par N' dans l'assertion $C(x,\mu)$, on obtient une nouvelle assertion $C'(x,\mu)$. Il suffit de prouver que ces deux assertions sont équivalentes. Fixons $\bar{m} \in M_{s_M}$ tel que $N' = \bar{m}^{-1}N\bar{m}$. On relève $\bar{m}$ en un élément $m \in K_{s_M}^{M,0,nr}$. On a $Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N') = m^{-1}Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)m$. On note a', b' et c'_x les applications analogues à a, b et c_x quand on remplace N par N'. Soit $n \in K_x^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$. Posons $n' = m^{-1}nm$. Il résulte de l'hypothèse $Hyp(3, N, N')$ de 4.1.3 que $\epsilon_{N'} \circ a'(n') = \epsilon_N \circ a(n)$. Il résulte de 2.2.3(4) que $\epsilon_{N'}^{x,\flat} \circ c'_x(n') = \epsilon_{x,N}^\flat \circ c_x(n)$. Enfin, on a $b'(n') = b(n)$. L'égalité $\epsilon_{x,N}^\flat \circ c_x(n) = \mu \circ b(n)\epsilon_N \circ a(n)$ équivaut donc à $\epsilon_{x,N'}^\flat \circ c'_x(n') = \mu \circ b'(n')\epsilon_{N'} \circ a'(n')$. D'où l'indépendance du choix de N.

Cela nous permettra dans la suite de choisir convenablement l'élément N.

Considérons le cas où $M = T$. On $Aut'_{s_M,N}(M_{AD}, F^{nr}) = \{1\}$ et $\epsilon_N = 1$. Grâce à 2.2.3(9), on a aussi $\epsilon_{x,N}^\flat = 1$ pour tout $x \in Imm_{F^{nr}}^G(M_{ad})$. Alors $C(x,\mu)$ est vérifiée pour $\mu = 1$ pour tout $x \in Imm_{F^{nr}}^G(M_{ad})$ tel que $p_M(x) = s_M$. On a $W^{I_F}(M) = W^{I_F}$ et $Imm_{F^{nr}}^G(M_{ad})$ est l'appartement associé à T^{nr} dans $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$. Pour un sommet

spécial s de cet appartement, l'homomorphisme j_{W,W_x} de 4.4.1(6) est bijectif. Donc la restriction de b à $K_s^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$ est surjective. La relation $C(s, \mu)$ détermine le caractère μ donc seul $\mu = 1$ convient. Cela prouve les deux premières assertions du théorème.

On suppose désormais $M \neq T$. D'après l'hypothèse sur $\mathcal{E}$, ce faisceau est en fait un M_{AD,s_M}-faisceau, a fortiori un M_{ad,s_M}-faisceau. Toutes les définitions conservent un sens en remplaçant la paire (G, M) par (G_{AD}, M_{ad}). Nos applications pour (G, M) se déduisent par image réciproque des mêmes applications pour (G_{AD}, M_{ad}). Dans le cas de l'application $\epsilon_N^\flat$, c'est l'assertion 2.2.3(8). On voit que le théorème pour le couple (G, M) se déduit du même théorème pour (G_{AD}, M_{ad}). On peut donc supposer que G est adjoint.

Dans le paragraphe suivant, nous démontrerons l'assertion suivante :

(2) supposons que le (i) du théorème ci-dessus soit vérifié dans le cas particulier où G est adjoint et absolument simple et où M est un F^{nr}-Levi propre maximal de G ; alors le théorème est vérifié en général.

Dans les paragraphes 4.4.4 à 4.4.13, nous démontrerons cas par cas le (i) du théorème dans le cas particulier de (2).

4.4.3 Preuve de l'assertion 4.4.2(2)

On suppose G adjoint. On va d'abord prouver deux assertions préliminaires.

(1) le théorème est vérifié si $G = M$.

On a $W^{I_F}(M) = \{1\}$ et il y a un unique $x \in Imm_{F^{nr}}^G(M_{ad})$ tel que $p_M(x) = s_M$, à savoir $x = s_M$. Le théorème équivaut à l'assertion : on a l'égalité $\epsilon_{s_M,N} \circ c_{s_M}(k) = \epsilon_N \circ a(k)$ pour tout $k \in K_{s_M,N}^{0,nr}$. Mais il résulte de la condition $Hyp(1, N)$ de 4.1.3 et de 2.2.3(5) que ces deux termes valent $\xi_N(\bar{k})$. D'où (1).

Supposons que G n'est pas absolument simple. La remarque (2) de 4.4.1 entraîne que l'on a une décomposition $G = G' \times G''$ définie sur F^{nr} et une décomposition compatible $M = M' \times T''$ de sorte que T'' soit un sous-tore maximal de G''. On a $M_{AD} = M'_{AD}$ et le couple (G', M') vérifie les hypothèses de 4.4.2. Montrons que

(2) si le théorème 4.4.2 est vérifié pour le couple (G', M'), il l'est pour le couple (G, M).

Tous nos objets et toutes nos applications se décomposent selon la décomposition $G = G' \times G''$. Il est à peu près immédiat que la validité du théorème pour (G, M) est équivalente à sa validité pour les deux couples (G', M') et (G'', T''). Mais on a vu dans le paragraphe précédent qu'il l'est pour le couple (G'', T''). D'où (2).

L'assertion (2) nous autorise à supposer G absolument simple. On suppose pour la suite du paragraphe que

(3) l'assertion (i) du théorème 4.4.2 est vérifiée dans le cas particulier où M est un F^{nr}-Levi propre maximal de G.

Soit L un F^{nr}-Levi de G contenant M. On applique les définitions de 4.4.1 en remplaçant le couple (G, M) par (L, M) et on affecte les objets d'exposants L. Les applications a^L, b^L et, pour un élément $x \in Imm_{F^{nr}}^L(M_{ad})$ tel que $p_M(x) = s_M$, l'application c^L, sont les restrictions, en un sens facile à préciser, des applications a, b et c. On va prouver

(4) supposons que M est un F^{nr}-Levi propre maximal de L ; alors l'assertion (i) du théorème 4.4.2 est vérifiée pour le couple (L, M).

Comme on l'a dit à la fin du paragraphe précédent, on peut aussi bien remplacer (L, M) par (L_{AD}, M_{ad}) où ici, M_{ad} est l'image de M dans L_{AD}. Si L_{AD} est absolument simple, la conclusion de (4) résulte de l'hypothèse (3). Supposons que L_{AD} n'est pas

absolument simple. La remarque (2) de 4.4.1 entraîne que l'on a une décomposition $L_{AD} = L' \times L''$ définie sur F^{nr} et une décomposition compatible $M_{ad} = M' \times T''$ de sorte que T'' soit un sous-tore maximal de R. Puisque M_{ad} est un F^{nr}-Levi propre maximal, on a forcément $M' = L'$. D'après (1), le théorème 4.4.2 est vérifiée pour le couple (L', M'). D'après (2), il l'est pour le couple (L, M). D'où (4).

Puisqu'on suppose que G est absolument simple, le système de racines $\Sigma_{ind}(G, M)^{nr}$ est irréductible, cf. 4.4.1(3). Soit $\alpha \in \Sigma_{ind}(G, M)^{nr}$. Notons L_α le F^{nr}-Levi de G tel que $\mathfrak{l}_\alpha$ soit la somme de $\mathfrak{m}$ et des espaces radiciels pour l'action de A_M^{nr} associés aux multiples entiers positifs ou négatifs de α. Le groupe M est un F^{nr}-Levi propre et maximal de L_α. Les deux sous-groupes paraboliques définis sur F^{nr} de L_α de composante de Levi M sont conjugués d'après le (ii) de la proposition 2.2.13. Donc le groupe W^{L_α, I_F} a deux éléments. On note w_α l'élément non trivial de ce groupe. C'est la symétrie simple de $W^{I_F}(M)$ associée à α. L'assertion (i) du théorème 4.4.2 est connue pour le couple (L_α, M) d'après (4) et cette assertion nous fournit un caractère μ^{L_α} de $W^{L_\alpha, I_F}(M)$. Ce caractère est déterminé par le signe $\mu^{L_\alpha}(w_\alpha) \in \{\pm 1\}$. Montrons que

(5) soient $\alpha, \alpha' \in \Sigma_{ind}(G, M)^{nr}$ deux racines de même longueur ; alors $\mu^{L_\alpha}(w_\alpha) = \mu^{L_{\alpha'}}(w_{\alpha'})$.

En effet, les hypothèses impliquent qu'il existe un élément $w \in W^{I_F}(M)$ tel que $w(\alpha) = \alpha'$. Un tel w peut se représenter par un élément $n \in Norm_{G(F^{nr})}(M)$ et même par un élément $n \in Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$ d'après un raisonnement déjà fait. L'application $Ad(n)$ est alors un isomorphisme de L_α sur $L_{\alpha'}$ qui conserve M, s_M et N. L'assertion s'en déduit par simple transport de structure.

Montrons que

(6) il existe un unique caractère μ de $W^{I_F}(M)$ tel que $\mu(w_\alpha) = \mu^{L_\alpha}(w_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Sigma_{ind}(G, M)^{nr}$.

Fixons une base $\Delta(G, M)^{nr}$ de $\Sigma_{ind}(G, M)^{nr}$. Le groupe $W^{I_F}(M)$ est engendré par les w_α pour $\alpha \in \Delta(G, M)^{nr}$ et on connaît les relations entre ces éléments. Outre les égalités $w_\alpha^2 = 1$, il y a des relations $(w_\alpha w_{\alpha'})^{m(\alpha, \alpha')} = 1$ pour $\alpha, \alpha' \in \Delta(G, M)^{nr}$. Le terme $m(\alpha, \alpha')$ n'est impair que si α et α' ont même longueur. L'assertion (5) implique que les égalités $(\mu^{L_\alpha}(w_\alpha)\mu^{L_{\alpha'}}(w_{\alpha'}))^{m(\alpha, \alpha')} = 1$ sont vérifiées. Il y a donc un unique caractère μ de $W^{I_F}(M)$ tel que $\mu(w_\alpha) = \mu^{L_\alpha}(w_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta(G, M)^{nr}$. Pour $\alpha \in \Sigma_{ind}(G, M)^{nr}$, il existe $v \in W^{I_F}(M)$ tel que $v(\alpha) \in \Delta(G, M)^{nr}$. Posons $\alpha' = v(\alpha)$. On a $w_{\alpha'} = v w_\alpha v^{-1}$, donc $\mu(w_\alpha) = \mu(w_{\alpha'}) = \mu^{L_{\alpha'}}(w_{\alpha'})$. Mais α et α' vérifient l'hypothèse de (5), donc $\mu^{L_{\alpha'}}(w_{\alpha'}) = \mu^{L_\alpha}(w_\alpha)$ puis $\mu(w_\alpha) = \mu^{L_\alpha}(w_\alpha)$. Alors le caractère μ vérifie les conditions requises. Son unicité est évidente. Cela prouve (6).

On va prouver que ce caractère μ vérifie la condition (i) du théorème 4.4.2. Soit s un sommet de $Imm^G_{F^{nr}}(M_{ad})$ tel que $p_M(s) = s_M$. Notons $\Sigma_{ind}(G_s, M_{s_M})$ l'ensemble des racines indivisibles de $Z(M_{s_M})^0$ dans $\mathfrak{g}_s$. En utilisant 2.2.3(1), la même preuve qu'en 4.4.1(3) montre que $\Sigma_{ind}(G_s, M_{s_M})$ est un système de racines et que $W_s(M_{s_M})$ en est son groupe de Weyl. Par les constructions de 2.1.6, $\Sigma_{ind}(G_s, M_{s_M})$ s'identifie à un sous-ensemble de $\Sigma(G, M)^{nr}$, mais pas forcément de $\Sigma_{ind}(G, M)^{nr}$. A tout $\alpha' \in \Sigma_{ind}(G_s, M_{s_M})$ est associé un Levi $R_s^{\alpha'}$ de G_s contenant M_{s_M} et tel que M_{s_M} soit un Levi propre et maximal de $R_s^{\alpha'}$. On déduit de $R_s^{\alpha'}$ un F^{nr}-Levi de G : le plus grand sous-tore central dans $R_s^{\alpha'}$ se relève en un sous-tore de T^{nr} dont le Levi cherché est le commutant dans G. En fait, identifions α' à un élément de $\Sigma(G, M)^{nr}$ et notons α l'unique élément de $\Sigma_{ind}(G, M)^{nr}$ dont α' soit un multiple entier strictement positif. Alors ce Levi est L_α. On a $R_s^{\alpha'} = L_{\alpha, s}$. Le point s appartient à $Imm^G_{F^{nr}}(L_{\alpha, ad})$ et se projette en un point $s_L \in Imm_{F^{nr}}(L_{\alpha, AD})$. En fait, s_L est un sommet de cet immeuble, cf. 2.1.6(3). On a

$s_L \in Imm_{F^{nr}}^{L_{\alpha,AD}}(M_{ad})$ (où ici, M_{ad} est l'image de M dans $L_{\alpha,AD}$) et $p^{L_\alpha}(s_L) = s_M$. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
Norm_{L_{\alpha,s_L}}(M_{s_M},N) & & \rightarrow & & Norm_{G_s}(M_{s_M},N) \\
\uparrow c^{L_\alpha} & & & & \uparrow c \\
K_s^{L_\alpha,0,nr}\cap & & \rightarrow & & K_s^{0,nr}\cap \\
Norm_{L_\alpha(F^{nr})}(M,s_M,N) & & & & Norm_{G(F^{nr})}(M,s_M,N) \\
 & \searrow a^{L_\alpha} & & \swarrow a & \\
\downarrow b^{L_\alpha} & & Aut'_{s_M,N}(M_{AD},F^{nr}) & & \downarrow b \\
 & & & & \\
W^{L_\alpha,I_F}(M) & & \rightarrow & & W^{I_F}(M)
\end{array}$$

Il résulte de 2.2.3(6) que la restriction de $\epsilon_{s,N}^\flat$ à $Norm_{L_{\alpha,s_L}}(M_{s_M},N)$ est égale à l'application $\epsilon_{s_L,N}^{L_\alpha,\flat}$. Par construction, μ coïncide avec μ^{L_α} sur $W^{L_\alpha,I_F}(M)$. En appliquant l'assertion (i) du théorème 4.4.2 pour le couple (L_α, M), on obtient l'égalité

(7) $\epsilon_{s,N}^\flat \circ c(n) = \mu \circ b(n)\epsilon_N \circ a(n)$ pour tout $n \in K_s^{L_\alpha,0,nr} \cap Norm_{L_\alpha(F^{nr})}(M,s_M,N)$.

Toutes les applications intervenant ci-dessus sont des homomorphismes. L'égalité de (7) est donc vérifiée pour n appartenant au groupe Ξ engendré par les sous-groupes $K_s^{L_\alpha,0,nr} \cap Norm_{L_\alpha(F^{nr})}(M,s_M,N)$ quand α' décrit $\Sigma_{ind}(G_s,M_{s_M})$. Ce groupe Ξ est un sous-groupe de $K_s^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M,s_M,N)$. Il contient $K_{s_M,N}^{M,0,nr}$ car ce groupe est contenu dans chaque $K_s^{L_\alpha,0,nr} \cap Norm_{L_\alpha(F^{nr})}(M,s_M,N)$. Par l'homomorphisme $\underline{c}_s$, il se projette surjectivement sur $W_s(M_{s_M})$ puisque ce dernier groupe est le groupe de Weyl de $\Sigma_{ind}(G_s,M_{s_M})$. Alors 4.4.1(4) implique que Ξ est égal à $K_s^{0,nr}\cap Norm_{G(F^{nr})}(M,s_M,N)$ tout entier. Donc $\epsilon_{s,N}^\flat \circ c(n) = \mu\circ b(n)\epsilon_N\circ a(n)$ pour tout $n \in K_s^{0,nr}\cap Norm_{G(F^{nr})}(M,s_M,N)$. C'est-à-dire que μ vérifie la condition du (i) du théorème 4.4.2.

L'unicité de ce caractère μ est facile. En faisant varier les termes s et α' dans la construction ci-dessus, on voit que l'on obtient tout les couples (α, s_L) possibles. La commutativité du diagramme ci-dessus entraîne donc que, pour tout $\alpha \in \Sigma_{ind}(G,M)^{nr}$, μ coïncide forcément avec μ^{L_α} sur w_α. Cela démontre le (i) du théorème 4.4.2.

Démontrons l'assertion (ii). Soit $x \in Imm_{F^{nr}}^G(M_{ad})$ tel que $p_M(x) = s_M$. Notons $\mathcal{F}$ la facette de $Imm_{F^{nr}}(G_{AD})$ à laquelle appartient x et fixons un sommet s dans l'adhérence de $\mathcal{F}$. Puisque $p_M^{-1}(s_M)$ est union fermée de facettes, on a $p_M(s) = s_M$. Le groupe G_x s'identifie à un Levi de G_s. Il résulte de 2.2.3 (6) que $\epsilon_{x,N}^\flat$ est la restriction de $\epsilon_{s,N}^\flat$ à $Norm_{G_x}(M_{s_M},N)$. L'homomorphisme c_x est le composé de c_s et de l'inclusion naturelle $K_x^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M,s_M,N) \rightarrow K_s^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M,s_M,N)$. Alors l'égalité requise $\epsilon_{x,N}^\flat \circ c_x(n) = \mu\circ b(n)\epsilon_N\circ a(n)$ résulte de l'égalité analogue $\epsilon_{s,N}^\flat \circ c_s(n) = \mu\circ b(n)\epsilon_N\circ a(n)$. Cela démontre le (ii) du théorème 4.4.2.

Le (iii) a déjà été démontré en 4.4.2. Cela achève la preuve du théorème 4.4.2 sous l'hypothèse (3).

4.4.4 Le lemme clé

On conserve la situation de 4.4.2 et on suppose que G est adjoint et absolument simple et que M est un F^{nr}-Levi propre et maximal de G. D'après la description de 2.2.14, les cas possibles sont les suivants (on n'a indiqué qu'une partie des conditions) :

G est de type (A_{n-1}, ram), M est de type (A_{n-3}, ram) avec $n \geq 5$;

G est de type B_n, M est de type B_{n-1} avec $n \geq 3$;

G est de type C_n, M est de type C_{n-1} avec $n \geq 3$ et n est impair ;

G est de type (D_n, nr), M est de type D_{n-1} avec $n \geq 5$ et n est impair ;

G est de type (D_n, ram), M est de type D_{n-1} avec $n \geq 10$ et n est pair ;
G est de type (E_6, ram), M est de type (A_5, ram) ;
G est de type E_7, M est de type E_6 ;
G est de type E_8, M est de type E_7.

On a déjà fixé une paire de Borel épinglée $\mathfrak{E}$ de G et on construit comme en 2.1.9 un épinglage affine $(T^{nr}, (E_\beta)_{\beta \in \Delta_a^{nr}})$ défini sur F^{nr}. On en déduit les objets habituels C^{nr} etc... En 2.2.16, on a associé au couple (M, s_M) un sous-ensemble $\Lambda \subset \Delta_a^{nr}$. Son complémentaire a deux éléments. On veut démontrer l'assertion (i) du théorème 4.4.2. La relation $C(s, \mu)$ est clairement conservée par conjugaison par $G(F^{nr})$ du triplet (s, M, s_M). D'après la proposition 2.2.16, on peut donc supposer que $M = M_\Lambda$ et $s_M = s_\Lambda$ et que s est le sommet s_β associé à l'une des deux racines β de $\Delta_a^{nr} - \Lambda$. Le groupe $W^{I_F}(M)$ est réduit à deux éléments. On note $\{1, sgn\}$ son groupe de caractères. Le groupe $W_s(M_{s_M})$ a aussi deux éléments et l'homomorphisme $j_{W_s,W}$ est bijectif. Montrons que

(1) il existe un unique caractère $\mu_\beta : W^{I_F}(M) \to \mathbb{C}^\times$ de sorte que l'assertion $C(s, \mu_\beta)$ soit vérifiée.

Fixons un élément $n \in K_s^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$ tel que $\underline{c}_s(n)$ soit l'élément non trivial de $W_s(M_{s_M})$. Le groupe $K_s^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$ est engendré par n et $K_{s_M,N}^{M,0,nr}$. Pour $k \in K_{s_M,N}^{M,0,nr}$, on a $b(k) = 1$. D'après 2.2.3 (5) et la condition $Hyp(1, N)$ de 4.1.3, on a $\epsilon_{s,N}^\flat \circ c_s(k) = \xi_N(\bar{k}) = \epsilon_N \circ a(k)$. On a $n^2 \in K_{s_M,N}^{M,0,nr}$ donc $\epsilon_{s,N}^\flat \circ c_s(n^2) = \epsilon_N \circ a(n^2)$. Puisque $\epsilon_{s,N}^\flat \circ c_s$ et $\epsilon_N \circ a$ sont des homomorphismes, il existe un signe $\nu \in \{\pm 1\}$ tel que $\epsilon_{s,N}^\flat \circ c_s(n) = \nu \epsilon_N \circ a(n)$. On définit μ_β comme le caractère qui vaut ν sur l'unique élément non trivial de $W^{I_F}(M)$. Alors la conclusion de (1) est vérifiée et il est clair que ce caractère μ_β est uniquement déterminé. Cela prouve (1).

L'assertion (i) du théorème 4.4.2 équivaut à l'énoncé suivant.

Lemme. *On a l'égalité $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$ pour les deux éléments $\beta, \beta' \in \Delta_a^{nr} - \Lambda$.*

Commençons par traiter les cas les plus simples. On suppose que G est de type C_n ou (D_n, nr) ou (D_n, ram) ou E_7. Alors l'ensemble $\Delta_a^{nr} - \Lambda$ est respectivement $\{\alpha_{(n-1)/2}, \alpha_{(n+1)/2}\}$, $\{\alpha_{(n-1)/2}, \alpha_{(n+1)/2}\}$, $\{\beta_{n/2-1}, \beta_{n/2}\}$, $\{\alpha_3, \alpha_5\}$. On voit qu'il existe un élément $g \in \mathbf{\Omega}^{nr}$ qui échange les deux sommets de $\Delta_a^{nr} - \Lambda$. Alors $Ad(g)$ est un automorphisme de G qui conserve $M = M_\Lambda$, $s_M = s_\Lambda$, le faisceau $\mathcal{E}$ ainsi qu'on l'a dit plusieurs fois, mais qui échange les deux éléments β et β' de $\Delta_a^{nr} - \Lambda$. En multipliant g par un élément convenable de $K_{s_M}^{M,0,nr}$, on peut supposer que $Ad(g)_{s_M}$ conserve N. On a alors l'égalité $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$ par simple transport de structure, ce qui démontre le lemme dans ces cas.

Dans les sections suivantes, on démontre le lemme dans les cas restants. On a besoin de quelques préparatifs. On a fixé un épinglage affine $\mathfrak{E}_a$ de G. On doit en fixer un de M_{AD}. On a $T \subset M$ donc l'appartement associé à T^{nr} dans $Imm_{F^{nr}}(G)$ est contenu dans $Imm_{F^{nr}}^G(M_{ad})$. L'ensemble $p_M(C^{nr})$ est contenu dans une unique alcôve $C^{M,nr}$ de $Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$. Notons $T^M = T/Z(M)$. Alors de $T^{M,nr}$ et de $C^{M,nr}$ se déduit un ensemble de racines affines $\Delta_a^{M,nr}$. On connaît l'ensemble $S(\bar{C}^{M,nr})$ des sommets adhérents à $C^{M,nr}$: il est égal à $\{s_M\} \cup \{p_M(s_\beta); \beta \in \Lambda\}$. Autrement dit, $\Delta_a^{M,nr}$ s'identifie à la réunion de Λ et de l'ensemble réduit à la racine associée au sommet s_M, que l'on note β_{s_M}. Remarquons que, en numérotant les éléments de ces ensembles de racines affines comme dans [6], le numéro d'un élément de Λ n'est en général pas le même selon que l'on le considère comme un élément de Δ_a^{nr} ou de $\Delta_a^{M,nr}$. On a déjà fixé un élément E_β pour $\beta \in \Lambda$, qui appartient à $\mathfrak{m}$. On peut choisir un élément $E_{\beta_{s_M}}$ de sorte que

$(T^{M,nr},(E_\beta)_{\beta\in\Delta_a^{M,nr}})$ soit un épinglage affine pour M_{AD}. Rappelons que l'on a la relation

$$\sum_{\beta\in\Delta_a^{M,nr}} d(\beta)\beta = 0$$

de 2.1.9 (1). Cela détermine la racine

$$(2) \qquad \beta_{s_M} = -\sum_{\beta\in\Lambda} d(\beta)d(\beta_{s_M})^{-1}\beta.$$

4.4.5 Preuve du lemme 4.4.4 dans le cas (A_{n-1}, ram) avec n impair

On suppose que G est de type A_{n-1} avec n impair et $n\geq 5$ et que M est de type A_{n-3}. On suppose que G n'est pas déployé sur F^{nr} mais l'est sur l'extension quadratique ramifiée E de F^{nr}. L'hypothèse (1) de 4.4.1 entraîne que $n-2=h^2+k(k+1)$ avec $h,k\in\mathbb{N}$ et $h=k$ ou $h=k+1$. Remarquons que l'imparité de n entraîne celle de h. Le groupe G est le groupe adjoint d'un groupe unitaire que l'on note $\tilde{G}$.

On fixe une uniformisante ϖ_E de E telle que $\varpi_E^2\in F^{nr,\times}$. On introduit un espace V sur E de dimension n muni d'une base $(e_i)_{i=1,...,n}$ et d'une forme hermitienne q (relativement à l'extension E/F^{nr}) telle que $q(e_i,e_{n+1-i})=(-1)^i$ pour $i=1,...,n$ et $q(e_i,e_j)=0$ pour $i+j\neq n+1$. Grâce à cette base, on identifie $GL(V\otimes_E\bar{F})$ à $GL(n,\bar{F})$. On introduit l'épinglage de $GL(n,\bar{F})$ que l'on note ici $\tilde{\mathfrak{E}}=(\tilde{B},\tilde{T},(E_{\alpha_i})_{i=1,...,n-1})$ et l'automorphisme θ définis au début du paragraphe 4.3.6. En notant $\sigma\mapsto\sigma_{GL(n)}$ l'action naturelle de Γ_F sur $GL(n,\bar{F})$, on vérifie que le groupe unitaire $\tilde{G}$ de V s'identifie à $GL(n,\bar{F})$ muni de l'action $\sigma\mapsto\sigma_G$ telle que $\sigma_G=\sigma_{GL(n)}$ si $\sigma\in\Gamma_E$ et $\sigma_G=\theta\circ\sigma_{GL(n)}$ si $\sigma\in\Gamma_{F^{nr}}-\Gamma_E$. On construit avec ces données un épinglage affine $\tilde{\mathcal{E}}_a=(\tilde{T}^{nr},(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta_a^{nr}})$ de $\tilde{G}$ que nous n'avons pas besoin de préciser. Rappelons que $\Delta_a^{nr}=\{\beta_0,\beta_{1,n-1},...,\beta_{(n-1)/2,(n+1)/2}\}$. On déduit de cet épinglage affine un tel épinglage $\mathfrak{E}_a=(T^{nr},(E_\beta)_{\beta\in\Delta_a^{nr}})$ où T est l'image de $\tilde{T}$ dans $G=\tilde{G}_{AD}$. Remarquons que $\tilde{\mathfrak{g}}(F^{nr})\subset\mathfrak{gl}(n,E)$ et que $\mathfrak{g}(F^{nr})$ est le sous-espace des éléments de trace nulle dans $\tilde{\mathfrak{g}}(F^{nr})$.

L'ensemble $\Delta_a^{nr}-\Lambda$ est égal à $\{\beta_{k(k+1)/2,n-k(k+1)/2},\beta_{k(k+1)/2+1,n-1-k(k+1)/2}\}$. On pose $\beta^-=\beta_{k(k+1)/2,n-k(k+1)/2}$ et $\beta^+=\beta_{k(k+1)/2+1,n-1-k(k+1)/2}$ et on note s^- et s^+ les sommets associés. Considérons l'un de ces sommets s. Si $s=s^-$, on pose $n''=k(k+1)$ et $n'=h^2+2$. Si $s=s^+$, on pose $n''=k(k+1)+2$, $n'=h^2$. Notons $\mathcal{S}$ le $\mathfrak{o}_E$-réseau de V engendré par les e_i pour $i=1,...,n-n''/2$ et les ϖ_Ee_i pour $n-n''/2+1,...,n$ et notons $\mathcal{S}^\star$ son dual, c'est-à-dire $\mathcal{S}^\star=\{v\in V;\forall v'\in\mathcal{S},\ q(v',v)\in\mathfrak{o}_E\}$. C'est le réseau engendré par les $\varpi_E^{-1}e_i$ pour $i=1,...,n''/2$ et les e_i pour $i=n''/2+1,...,n$. Alors $\tilde{\mathfrak{k}}_s^{nr}$ est le sous-ensemble des $X\in\tilde{\mathfrak{g}}(F^{nr})$ tels que $X(\mathcal{S})\subset\mathcal{S}$ et on a $\mathfrak{k}_s^{nr}=\mathfrak{g}(F^{nr})\cap\tilde{\mathfrak{k}}_s^{nr}$. L'espace $\bar{V}'=\mathcal{S}/\varpi_E\mathcal{S}^\star$ sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ est de dimension n'. Il est naturellement muni d'une base $\{\bar{e}_i;i=n''/2+1,...,n-n''/2\}$ où $\bar{e}_i$ est la réduction de e_i, et d'une forme orthogonale. On note G'_s son groupe spécial orthogonal. L'espace $\bar{V}''=\mathcal{S}^\star/\mathcal{S}$ sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ est de dimension n''. Il est naturellement muni d'une base $\{\bar{e}_i;i\in\{1,...,n''/2\}\cup\{n+1-n''/2,...,n\}\}$, où $\bar{e}_i$ est la réduction de $\varpi_E^{-1}e_i$ pour $i\in\{1,...,n''/2\}$ et $\bar{e}_i$ est la réduction de e_i si $i\in\{n+1-n''/2,...,n\}$. L'espace $\bar{V}''$ est muni d'une forme symplectique réduction de ϖ_Eq. On note G''_s son groupe symplectique. On a l'égalité $G_s=G'_s\times G''_s$. Le groupe M_{s_M} se décompose conformément en $M'_{s_M}\times M''_{s_M}$. Si $s=s^-$, on a $M''_{s_M}=G''_s$ et M'_{s_M} est le Levi de G'_s formé des éléments de ce groupe qui conservent les droites $\bar{\mathbb{F}}_q\bar{e}_{n''/2+1}$ et $\bar{\mathbb{F}}_q\bar{e}_{n-n''/2}$. Si $s=s^+$, on a $M'_{s_M}=G'_s$ et M''_{s_M} est le Levi de G''_s formé des éléments de ce groupe qui conservent les droites $\bar{\mathbb{F}}_q\bar{e}_{n''/2}$ et $\bar{\mathbb{F}}_q\bar{e}_{n+1-n''/2}$. Dans les deux cas, le Levi $\tilde{M}$ qui relève M

dans $\tilde{G}$ est le sous-groupe des éléments de ce groupe qui conservent les droites $Ee_{k(k+1)/2+1}$ et $Ee_{n-k(k+1)/2}$. Son groupe dérivé $\tilde{M}_{der}$ est le groupe spécial unitaire du sous-espace V_M de V engendré par les vecteurs e_i pour $i = 1, ..., n$, $i \neq k(k+1)/2+1, n-k(k+1)/2$. On choisit un élément $N \in \mathcal{O}$, qui se décompose en $N' \oplus N''$.

Supposons $s = s^+$. On note n l'image dans G de l'élément de $\tilde{G}$ qui envoie $e_{k(k+1)/2+1}$ sur $\varpi_E e_{n-k(k+1)/2}$, $e_{n-k(k+1)/2}$ sur $-\varpi_E^{-1} e_{k(k+1)/2+1}$ et qui fixe e_i pour $i \in \{1, ..., n\}$, $i \neq k(k+1)/2+1, n-k(k+1)/2$. Cet élément appartient à $K_s^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$ et son image par $\underline{c}_s$ dans $W_s(M_{s_M})$ est l'élément non trivial de ce groupe. L'action de $Ad(n)$ sur M est triviale donc $\epsilon_N \circ a(n) = 1$. La réduction $\bar{n}$ se décompose en $(\bar{n}', \bar{n}'')$. On a $\bar{n}' = 1$ tandis que $\bar{n}''$ est l'élément de G''_s qui envoie $\bar{e}_{k(k+1)/2+1}$ sur $\bar{e}_{n-k(k+1)/2}$, $\bar{e}_{n-k(k+1)/2}$ sur $-\bar{e}_{k(k+1)/2+1}$ et qui fixe $\bar{e}_i$ pour les autres indices i. Dans [43] lemme VIII.9, on a calculé $\epsilon^\flat(\bar{n})$: ce terme vaut $(-1)^k$. On en déduit

(1) $\mu_{\beta^+} = sgn^k$.

Supposons $s = s^-$. Notons $\bar{V}'_M$ le sous-espace de $\bar{V}'$ engendré par les vecteurs $\bar{e}_i$ pour $i \in \{k(k+1)/2+2, ..., n-1-k(k+1)/2\}$ et notons $M'_{s_M,der}$ son groupe spécial orthogonal, qui est le groupe dérivé de M'_{s_M}. L'élément N' appartient à $\mathfrak{m}'_{s_M,der}$ et a pour partition associée $(2h-1, ..., 3, 1)$. Donc le sous-espace $\bar{V}'_M$ se décompose en somme directe orthogonale de sous-espaces $\bar{V}'_m$, pour $m = 1, ..., h$, de sorte que $dim(\bar{V}'_m) = 2m-1$, que $\bar{V}'_m$ soit conservé par N' et que la restriction de N' à $\bar{V}'_m$ soit un nilpotent régulier. Notons V'_M le sous-espace de V engendré par les vecteurs e_i pour $i = k(k+1)/2+2, ..., n-1-k(k+1)/2\}$. On peut relever la décomposition de $\bar{V}'_M$ en une décomposition orthogonale de V'_M en sous-espaces V'_m de sorte que $\mathcal{S} \cap V'_M = \oplus_{m=1,...,h} \mathcal{S} \cap V'_m$ et que $\bar{V}'_m$ soit la réduction de $\mathcal{S} \cap V'_m$. On note n l'image dans G de l'élément de $\tilde{G}$ qui permute $e_{k(k+1)/2+1}$ et $e_{n-k(k+1)/2}$, qui fixe e_i pour $i \in \{1, ..., k(k+1)/2\} \cup \{n+1-k(k+1)/2, ..., n\}$, qui conserve chaque V'_m et y agit par l'identité si $m = 1, ..., h-1$ et par multiplication par -1 pour $m = h$. Cet élément appartient à $K_s^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$ et son image par $\underline{c}_s$ dans $W_s(M_{s_M})$ est l'élément non trivial de ce groupe. La réduction $\bar{n}$ se décompose en $(\bar{n}', \bar{n}'')$. On a $\bar{n}'' = 1$ tandis que $\bar{n}'$ est l'élément de G'_s qui permute $\bar{e}_{k(k+1)/2}$ et $\bar{e}_{n-k(k+1)/2}$, qui conserve chaque $\bar{V}'_m$ et y agit par l'identité si $m \neq h$ et par multiplication par -1 pour $m = h$. Dans [43] lemme VIII.9, on a calculé $\epsilon^\flat(\bar{n})$: ce terme vaut 1. L'automorphisme $Ad(n)_{M_{AD}}$ est la conjugaison par la restriction de n à V_M. Pour calculer $\epsilon_N \circ a(n)$, on doit identifier $Ad(n)_{M_{AD}}$ à un élément de $Ad(K_{s_M,N}^{M_{AD},0,nr})$, cf. 4.2.6. Remarquons que $M_{AD,s_M} = M'_{s_M,der} \times M''_{s_M}$. La restriction de n à V_M n'appartient pas à $\tilde{M}_{der}$ car c'est un élément de déterminant -1. Il convient de la multiplier par la multiplication par -1 sur V_M tout entier. L'élément obtenu appartient alors à $K_{s_M,N}^{M_{AD},0,nr}$. Notons $\bar{k}$ sa réduction dans $Z_{M_{AD,s_M}}(N)$. Elle s'écrit de façon évidente $\bar{k} = (\bar{k}', \bar{k}'')$. On a $\bar{k}'' = -1$ et $\bar{k}'$ est l'élément de $M'_{s_M,der}$ qui agit trivialement sur $\bar{V}'_h$ et par multiplication par -1 sur $\bar{V}'_m$ pour $m = 1, ..., h-1$. On calcule facilement $\xi_N(\bar{k}) = (-1)^{[(k+1)/2]+(h-1)/2}$. En se rappelant que $h = k$ ou $k+1$, on vérifie que $(-1)^{[(k+1)/2]+(h-1)/2} = (-1)^k$. Par définition, on a $\epsilon_N \circ a(n) = \xi_N(\bar{k})$. On en déduit

(2) $\mu_{\beta^-} = sgn^k$.

Les assertions (1) et (2) prouvent le lemme 4.4.4.

4.4.6 Preuve du lemme 4.4.4 dans le cas (A_{n-1}, ram) avec n pair

On suppose que G est de type A_{n-1} avec n pair et $n \geq 6$ et que M est de type A_{n-3}. On suppose que G n'est pas déployé sur F^{nr} mais l'est sur l'extension quadratique ramifiée E de F^{nr}. L'hypothèse (1) de 4.4.1 entraîne que $n-2 = h^2 + k(k+1)$ avec

$h, k \in \mathbb{N}$ et $h = k$ ou $h = k+1$. Remarquons que la parité de n entraîne celle de h et que l'on a $n \geq 8$. Le groupe G est le groupe adjoint d'un groupe unitaire que l'on note $\tilde{G}$. En 4.3.10, on a réalisé ce groupe comme celui d'un espace (V, q) (le corps de base dans cette référence était F, on l'étend en F^{nr}). On reprend les définitions de ce paragraphe.

L'ensemble $\Delta_a^{nr} - \Lambda$ est égal à $\{\beta_{h^2/2, n-h^2/2}, \beta_{h^2/2+1, n-1-h^2/2}\}$. On pose $\beta^- = \beta_{h^2/2, n-h^2/2}$ et $\beta^+ = \beta_{h^2/2+1, n-1-h^2/2}$ et on note s^- et s^+ les sommets associés. Considérons l'un de ces sommets s. Si $s = s^-$, on pose $n' = h^2$ et $n'' = k(k+1) + 2$. Si $s = s^+$, on pose $n' = h^2 + 2$, $n'' = k(k+1)$. Notons $\mathcal{S}$ le $\mathfrak{o}_E$-réseau de V engendré par les e_i pour $i = 1, ..., n'/2$ et les $\varpi_E e_i$ pour $n'/2 + 1, ..., n$ et notons $\mathcal{S}^\star$ son dual, c'est-à-dire $\mathcal{S}^\star = \{v \in V; \forall v' \in \mathcal{S}, q(v', v) \in \mathfrak{o}_E\}$. C'est le réseau engendré par les $\varpi_E^{-1} e_i$ pour $i = 1, ..., n - n'/2$ et les e_i pour $i = n - n'/2 + 1, ..., n$. Alors $\tilde{\mathfrak{k}}_s^{nr}$ est le sous-ensemble des $X \in \tilde{\mathfrak{g}}(F^{nr})$ tels que $X(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ et on a $\mathfrak{k}_s^{nr} = \mathfrak{g}(F^{nr}) \cap \tilde{\mathfrak{k}}_s^{nr}$. L'espace $\bar{V}' = \mathcal{S}/\varpi_E \mathcal{S}^\star$ sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ est de dimension n'. Il est naturellement muni d'une base $\{\bar{e}_i; i \in \{1, ..., n'/2\} \cup \{n - n'/2 + 1, ..., n\}\}$ où $\bar{e}_i$ est la réduction de e_i si $i \in \{1, ..., n'/2\}$, de $\varpi_E e_i$ si $i \in \{n - n'/2 + 1, ..., n\}$, et d'une forme orthogonale. On note G'_s son groupe spécial orthogonal. L'espace $\bar{V}'' = \mathcal{S}^\star/\mathcal{S}$ sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ est de dimension n''. Il est naturellement muni d'une base $\{\bar{e}_i; i \in \{n'/2 + 1, ..., n - n'/2\}\}$, où $\bar{e}_i$ est la réduction de e_i. L'espace $\bar{V}''$ est muni d'une forme symplectique réduction de $\varpi_E q$. On note G''_s son groupe symplectique. On vérifie que $G_s = (G'_s \times G''_s)/\{\pm 1\}$, où $\{\pm 1\}$ s'envoie diagonalement dans le produit des centres des deux facteurs. Le groupe M_{s_M} se décompose conformément en $(M'_{s_M} \times M''_{s_M})/\{\pm 1\}$. Si $s = s^-$, on a $M'_{s_M} = G'_s$ et M''_{s_M} est le Levi de G''_s formé des éléments de ce groupe qui conservent les droites $\bar{\mathbb{F}}_q \bar{e}_{n'/2+1}$ et $\bar{\mathbb{F}}_q \bar{e}_{n-n'/2}$. Si $s = s^+$, on a $M''_{s_M} = G''_s$ et M'_{s_M} est le Levi de G'_s formé des éléments de ce groupe qui conservent les droites $\bar{\mathbb{F}}_q \bar{e}_{n'/2}$ et $\bar{\mathbb{F}}_q \bar{e}_{n+1-n'/2}$. Dans les deux cas, le Levi $\tilde{M}$ qui relève M dans $\tilde{G}$ est le sous-groupe des éléments de ce groupe qui conservent les droites $Ee_{h^2/2+1}$ et $Ee_{n-h^2/2}$. Son groupe dérivé $\tilde{M}_{der}$ est le groupe spécial unitaire du sous-espace V_M de V engendré par les vecteurs e_i pour $i = 1, ..., n$, $i \neq h^2/2 + 1, n - h^2/2$. On doit fixer un épinglage affine de M. Pour cela, on pose $e_i^M = e_i$ pour $i = 1, ..., h^2/2$, $e_i^M = -e_{i+1}$ pour $i = h^2/2 + 1, ..., n - h^2/2 - 2$, $e_i^M = e_{i+2}$ pour $i = n - h^2/2 - 1, ..., n - 2$. Alors la base $(e_i^M)_{i=1,...,n-2}$ de V_M vérifie les conditions de 4.3.10 et on construit l'épinglage affine de M comme dans ce paragraphe. Il vérifie les conditions de 4.4.4, c'est-à-dire que, pour $\beta \in \Lambda$, les E_β des épinglages affines de G et de M coïncident. Notons $M'_{s_M,der}$ et $M''_{s_M,der}$ les groupes dérivés de M'_{s_M} et M''_{s_M}. On vérifie que $M_{AD,s_M} = (M'_{s_M,der} \times M''_{s_M,der})/\{\pm 1\}$. D'après la description de l'élément $\omega \in \mathbf{\Omega}^{M,nr}$ que l'on a donnée en 4.3.10, l'action $Ad(\omega)$ se réduit en une action $\boldsymbol{\omega}$ sur le groupe M_{AD,s_M} qui est triviale sur $M''_{s_M,der}$ et qui coïncide sur $M'_{s_M,der}$ avec l'action adjointe de l'élément du groupe orthogonal de $\bar{V}'$ qui permute $\bar{e}_1$ et $\bar{e}_n$ et fixe les autres vecteurs de base. On choisit un élément $N \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{r}$, qui se décompose en $N' \oplus N''$. La condition que N appartienne à $\mathfrak{r}$ équivaut à ce que N' soit fixé par $\boldsymbol{\omega}$. On imposera plus loin à N une condition supplémentaire.

Supposons $s = s^-$. Notons n l'image dans G de l'élément de $\tilde{G}$ qui envoie $e_{h^2/2+1}$ sur $e_{n-h^2/2}$, $e_{n-h^2/2}$ sur $-e_{h^2/2+1}$ et qui fixe e_i pour $i \in \{1, ..., n\}$, $i \neq h^2/2 + 1, n - h^2/2$. Cet élément appartient à $K_s^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$ et son image par $\underline{c}_s$ dans $W_s(M_{s_M})$ est l'élément non trivial de ce groupe. L'action de $Ad(n)$ sur M est triviale donc $\epsilon_N \circ a(n) = 1$. La réduction $\bar{n}$ se décompose en $(\bar{n}', \bar{n}'')$. On a $\bar{n}' = 1$ tandis que $\bar{n}''$ est l'élément de G''_s qui envoie $\bar{e}_{h^2/2+1}$ sur $\bar{e}_{n-h^2/2}$, $\bar{e}_{n-h^2/2}$ sur $-\bar{e}_{h^2/2+1}$ et qui fixe $\bar{e}_i$ pour les autres indices i. Dans [43] lemme VIII.9, on a calculé $\epsilon_N^\flat(\bar{n})$: ce terme vaut $(-1)^k$. On en déduit

(1) $\mu_{\beta^-} = sgn^k$.

Supposons $s = s^+$. Notons $\bar{V}'_M$ le sous-espace de $\bar{V}'$ engendré par les vecteurs $\bar{e}_i$ pour $i \in \{1, ..., h^2/2\} \cup \{n+1-h^2/2, ..., n\}$. Le groupe $M'_{s_M,der}$ est son groupe spécial orthogonal. L'élément N' appartient à $\mathfrak{m}'_{s_M,der}$ et a pour partition associée $(2h-1, ..., 3, 1)$. Donc le sous-espace $\bar{V}'_M$ se décompose en somme directe orthogonale de sous-espaces $\bar{V}'_m$, pour $m = 1, ..., h$, de sorte que $dim(\bar{V}'_m) = 2m-1$, que $\bar{V}'_m$ soit conservé par N' et que la restriction de N' à $\bar{V}'_m$ soit un nilpotent régulier. Notons V'_M le sous-espace de V engendré par les vecteurs e_i pour $i \in \{1, ..., h^2/2\} \cup \{n+1-h^2/2, ..., n\}$. On peut relever la décomposition de $\bar{V}'_M$ en une décomposition orthogonale de V'_M en sous-espaces V'_m de sorte que $\mathcal{S} \cap V'_M = \oplus_{m=1,...,h} \mathcal{S} \cap V'_m$ et que $\bar{V}'_m$ soit la réduction de $\mathcal{S} \cap V'_m$. On note n l'image dans G de l'élément de $\tilde{G}$ qui permute $e_{h^2/2+1}$ et $\varpi_E e_{n-h^2/2}$, qui fixe e_i pour $i \in \{h^2/2+2, ..., n-1-h^2/2\}$, qui conserve chaque V'_m et y agit par l'identité si $m = 1, ..., h-1$ et par multiplication par -1 pour $m = h$. Cet élément appartient à $K_s^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$ et son image par $\underline{c}_s$ dans $W_s(M_{s_M})$ est l'élément non trivial de ce groupe. La réduction $\bar{n}$ se décompose en $(\bar{n}', \bar{n}'') \in G'_s \times G''_s$ (plus exactement, c'est l'image de ce couple dans G_s). On a $\bar{n}'' = 1$ tandis que $\bar{n}'$ est l'élément de G'_s qui permute $\bar{e}_{h^2/2+1}$ et $\bar{e}_{n-h^2/2}$, qui conserve chaque $\bar{V}'_m$ et y agit par l'identité si $m \neq h$ et par multiplication par -1 pour $m = h$. Dans [43] lemme VIII.9, on a calculé $\epsilon_N^\flat(\bar{n})$: ce terme vaut 1. L'automorphisme $Ad(n)_{M_{AD}}$ est la conjugaison par la restriction de n à V_M. Pour calculer $\epsilon_N \circ a(n)$, on doit identifier $Ad(n)_{M_{AD}}$ à un élément de $Ad(K_{s_M,N}^{M_{AD},0,nr})\mathbf{\Omega}^{M,nr}$, cf. 4.2.5. On a décrit ci-dessus l'élément $\boldsymbol{\omega}$. C'est une symétrie élémentaire qui fixe N'. On peut choisir N' de sorte que cette symétrie conserve les espaces $\bar{V}'_m$ pour tout m, y agisse par l'identite pour $m \geq 2$ et par multiplication par -1 pour $m = 1$. On voit alors que $Ad(n)_{M_{AD}}$ coïncide avec $Ad(k)\boldsymbol{\omega}$, où k est un élément de $K_{s_M,N}^{M_{AD},0,nr}$. Notons $\bar{k}$ sa réduction, qui est l'image dans M_{AD,s_M} d'un couple $(\bar{k}', \bar{k}'')$. On a $\bar{k}'' = 1$ tandis que $\bar{k}'$ est l'élément de $M'_{s_M,der}$ qui conserve les espaces $\bar{V}'_m$ et y agit par l'identité pour $m \neq 1, h$ et par multiplication par -1 pour $m = 1, h$. On calcule aisément $\xi_N(\bar{k}) = -1$. Par définition, on a $\epsilon_N \circ a(n) = \xi_N(\bar{k})\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\omega})$ et $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\omega}) = (-1)^{k+1}$, d'où $\epsilon_N \circ a(n) = (-1)^k$. On en déduit

(2) $\mu_{\beta^+} = sgn^k$.

Les relations (1) et (2) prouvent le lemme 4.4.4.

4.4.7 Preuve du lemme 4.4.4 dans le cas B_n

On suppose que G est de type B_n avec $n \geq 3$ et que M est de type B_{n-1}. L'hypothèse (1) de 4.4.1 implique que $2n-1 = k^2 + h^2$ avec $k, h \in \mathbb{N}$, k pair et $|k-h| = 1$. En 4.3.6, on a réalisé G comme le groupe spécial orthogonal d'un espace quadratique (V, q) (le corps de base dans cette référence était F, on l'étend en F^{nr}). On reprend les définitions de ce paragraphe.

L'ensemble $\Delta_a - \Lambda$ est égal à $\{\alpha_{k^2/2}, \alpha_{k^2/2+1}\}$. On pose $\alpha^- = \alpha_{k^2/2}$ et $\alpha^+ = \alpha_{k^2/2+1}$ et on note s^- et s^+ les sommets associés. Considérons l'un de ces sommets s. Si $s = s^-$, on pose $n' = (h^2+1)/2$ et $n'' = k^2/2$. Si $s = s^+$, on pose $n' = (h^2-1)/2$, $n'' = k^2/2+1$. Notons $\mathcal{S}$ le $\mathfrak{o}_{F^{nr}}$-réseau de V engendré par les e_i pour $i = 1, ..., 2n+1-n''$ et les $\varpi_F e_i$ pour $2n+2-n'', ..., n$ et notons $\mathcal{S}^\star$ son dual, c'est-à-dire $\mathcal{S}^\star = \{v \in V; \forall v' \in \mathcal{S}, q(v', v) \in \mathfrak{o}_{F^{nr}}\}$. C'est le réseau engendré par les $\varpi_F^{-1} e_i$ pour $i = 1, ..., n''/2$ et les e_i pour $i = n''+1, ..., 2n+1$. Alors $\mathfrak{k}_s^{nr}$ est le sous-ensemble des $X \in \mathfrak{g}(F^{nr})$ tels que $X(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$. L'espace $\bar{V}' = \mathcal{S}/\varpi_F \mathcal{S}^\star$ sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ est de dimension $2n'+1$. Il est naturellement muni d'une base $\{\bar{e}_i; i = n''+1, ..., 2n+1-n''\}$ où $\bar{e}_i$ est la réduction de e_i. Il est muni d'une forme quadratique. On note G'_s son groupe spécial orthogonal. L'espace $\bar{V}'' = \mathcal{S}^\star/\mathcal{S}$

sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ est de dimension $2n''$. Il est naturellement muni d'une base $\{\bar{e}_i; i \in \{1, ..., n''\} \cup \{2n-n''+2, ..., 2n+1\}\}$, où $\bar{e}_i$ est la réduction de $\varpi_F^{-1} e_i$ pour $i \in \{1, ..., n''\}$ et de e_i pour $i \in \{2n-n''+2, ..., 2n+1\}$. L'espace $\bar{V}''$ est muni d'une forme quadratique réduction de $\varpi_F q$. On note G''_s son groupe spécial orthogonal. On vérifie que $G_s = G'_s \times G''_s$. Le groupe M_{s_M} se décompose conformément en $M'_{s_M} \times M''_{s_M}$. Si $s = s^-$, on a $M''_{s_M} = G''_s$ et M'_{s_M} est le Levi de G'_s formé des éléments de ce groupe qui conservent les droites $\bar{\mathbb{F}}_q \bar{e}_{n''+1}$ et $\bar{\mathbb{F}}_q \bar{e}_{2n+1-n''}$. Si $s = s^+$, on a $M'_{s_M} = G'_s$ et M''_{s_M} est le Levi de G''_s formé des éléments de ce groupe qui conservent les droites $\bar{\mathbb{F}}_q \bar{e}_{n''}$ et $\bar{\mathbb{F}}_q \bar{e}_{2n+2-n''}$. Dans les deux cas, le Levi M est le sous-groupe des éléments de ce groupe qui conservent les droites $F^{nr} e_{k^2/2+1}$ et $F^{nr} e_{2n+1-k^2/2}$. Son groupe dérivé $\tilde{M}_{der}$ est le groupe spécial orthogonal du sous-espace V_M de V engendré par les vecteurs e_i pour $i = 1, ..., 2n+1$, $i \neq k^2/2+1, 2n+1-k^2/2$. On doit fixer un épinglage affine de M. Pour cela, on pose $e_i^M = e_i$ pour $i = 1, ..., k^2/2$, $e_i^M = e_{i+1}$ pour $i = k^2/2+1, ..., 2n-1-k^2/2$, $e_i^M = e_{i+2}$ pour $i = 2n-k^2/2, ..., 2n-1$. Alors la base $(e_i^M)_{i=1,...,2n-1}$ de V^M vérifie la condition de 4.3.6 et on construit l'épinglage affine comme dans ce paragraphe. Il vérifie la condition imposée en 4.4.4, à savoir que pour $\alpha \in \Lambda$, les éléments E_α des épinglages de G et M coïncident. Notons $M'_{s_M,der}$ et $M''_{s_M,der}$ les groupes dérivés de M'_{s_M} et M''_{s_M}. On vérifie que $M_{AD,s_M} = M'_{s_M,der} \times M''_{s_M,der}$.

On choisit un élément $N \in \mathcal{O}$, qui se décompose en $N' \oplus N''$. On imposera ci-dessous une condition supplémentaire à N''. Notons $\bar{V}'_M$ le sous-espace de $\bar{V}'$ engendré par les vecteurs $\bar{e}_i$ pour $i \in \{k^2/2+2, ..., 2n-k^2/2\}$. Le groupe $M'_{s_M,der}$ est son groupe spécial orthogonal. L'élément N' appartient à $\mathfrak{m}'_{s_M,der}$ et a pour partition associée $(2h-1, ..., 3, 1)$. Donc le sous-espace $\bar{V}'_M$ se décompose en somme directe orthogonale de sous-espaces $\bar{V}'_m$, pour $m = 1, ..., h$, de sorte que $dim(\bar{V}'_m) = 2m-1$, que $\bar{V}'_m$ soit conservé par N' et que la restriction de N' à $\bar{V}'_m$ soit un nilpotent régulier. Notons $\bar{V}''_M$ le sous-espace de $\bar{V}''$ engendré par les vecteurs $\bar{e}_i$ pour $i \in \{1, ..., k^2/2\} \cup \{2n+2-k^2/2, ..., 2n+1\}$. Le groupe $M''_{s_M,der}$ est son groupe spécial orthogonal. L'élément N'' appartient à $\mathfrak{m}''_{s_M,der}$ et a pour partition associée $(2k-1, ..., 3, 1)$. Donc le sous-espace $\bar{V}''_M$ se décompose en somme directe orthogonale de sous-espaces $\bar{V}''_m$, pour $m = 1, ..., k$, ayant des propriétés analogues à ci-dessus. On peut imposer et on impose à N'' la condition : $\bar{V}''_1$ est la droite portée par $\bar{e}_1 - \bar{e}_{2n+1}$. On peut relever ces décompositions de $\bar{V}'_M$ et $\bar{V}''_M$ en une décomposition orthogonale de V_M en sous-espaces V'_m et V''_m de sorte que $\mathcal{S} \cap V_M = (\oplus_{m=1,...,h} \mathcal{S} \cap V'_m) \oplus (\oplus_{m=1,...,k} \mathcal{S} \cap V''_m)$, que $\bar{V}'_m$ soit la réduction de $\mathcal{S} \cap V'_m$ et que $\bar{V}''_m$ soit la réduction de $\mathcal{S}^\star \cap V''_m$. On peut imposer et on impose la condition : V''_1 est la droite portée par $e_1 - \varpi_F e_{n+1}$. D'après la description de l'élément $\omega \in \mathbf{\Omega}^M$ que l'on a donnée en 4.3.6, cet élément conserve les sous-espaces V'_m et V''_m et y agit par multiplication par -1, sauf sur V''_1 où il agit par l'identité. L'action $Ad(\omega)$ se réduit en une action $\boldsymbol{\omega}$ sur le groupe M_{AD,s_M} qui est triviale sur $M'_{s_M,der}$ et qui coïncide sur $M''_{s_M,der}$ avec l'action adjointe de l'élément du groupe orthogonal de $\bar{V}''$ qui conserve chaque $\bar{V}''_m$ et y agit par l'identité pour $m \geq 2$ et par multiplication par -1 pour $m = 1$. Cet élément fixe N donc $N \in \mathfrak{r}$.

Supposons $s = s^-$. Notons n l'élément de G qui permute $e_{k^2/2+1}$ sur $e_{2n+1-k^2/2}$, conserve chaque espace V'_m et V''_m et y agit par l'identité, sauf sur V'_h où il agit par multiplication par -1. Cet élément appartient à $K_s^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$ et son image naturelle dans $W_s(M_{s_M})$ est l'élément non trivial de ce groupe. La réduction $\bar{n}$ se décompose en $(\bar{n}', \bar{n}'')$. On a $\bar{n}'' = 1$ tandis que $\bar{n}'$ est l'élément de G'_s qui permute $\bar{e}_{k^2/2+1}$ et $\bar{e}_{2n+1-k^2/2}$, conserve les $\bar{V}'_m$ et y agit par l'identité sauf sur $\bar{V}'_h$ où il agit par multiplication par -1. Dans [43] lemme VIII.9, on a calculé $\epsilon_N^\flat(\bar{n})$: ce terme vaut 1. Comme dans le paragraphe précédent, pour calculer $\epsilon_N \circ a(n)$,on doit exprimer $Ad(n)_{M_{AD}}$

comme un élément de $Ad(K_{s_M,N}^{M_{AD},0,nr})\boldsymbol{\Omega}^M$. Mais la restriction de n à V_M est de déterminant -1. Il convient d'en faire le produit par la multiplication par -1 de V_M. L'élément obtenu appartient à $K_{s_M,N}^{M_{AD},0,nr}$. Notons $\bar{k}$ sa réduction, qui se décompose en $(\bar{k}', \bar{k}'')$. L'élément $\bar{k}''$ est la multiplication par -1. L'élément $\bar{k}'$ connserve les $\bar{V}'_m$ et y agit par multiplication par -1 sauf pour $m = h$ où il agit par l'identité. On calcule aisément $\xi_N(\bar{k}) = (-1)^{(k+h-1)/2}$. Par définition $\epsilon_N \circ a(n) = \epsilon_N \circ a(Ad(k)) = \xi_N(\bar{k})$. On en déduit

(1) $\mu_{\alpha^-} = sgn^{(k+h-1)/2}$.

Supposons $s = s^+$. On note n l'élément de G qui permute $e_{k^2/2+1}$ et $\varpi_F e_{2n+1-k^2/2}$, conserve chaque espace V'_m et V''_m et y agit par l'identité, sauf sur V''_k où il agit par multiplication par -1. Cet élément appartient à $K_s^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$ et son image naturelle dans $W_s(M_{s_M})$ est l'élément non trivial de ce groupe. La réduction $\bar{n}$ se décompose en $(\bar{n}', \bar{n}'')$. On a $\bar{n}' = 1$ tandis que $\bar{n}''$ est l'élément de G''_s qui permute $\bar{e}_{k^2/2+1}$ et $\bar{e}_{2n+1-k^2/2}$, conserve les $\bar{V}''_m$ et y agit par l'identité sauf sur $\bar{V}''_k$ où il agit par multiplication par -1. Dans [43] lemme VIII.9, on a calculé $\epsilon_N^\flat(\bar{n})$: ce terme vaut 1. Pour calculer $\epsilon_N \circ a(n)$,on doit exprimer $Ad(n)_{M_{AD}}$ comme un élément de $Ad(K_{s_M,N}^{M_{AD},0,nr})\boldsymbol{\Omega}^M$. De nouveau la restriction de n à V_M est de déterminant -1. On la multiplie à droite par $-\omega$. L'élément obtenu appartient à $K_{s_M,N}^{M_{AD},0,nr}$. Notons $\bar{k}$ sa réduction, qui se décompose en $(\bar{k}', \bar{k}'')$. L'élément $\bar{k}'$ est l'élément neutre de $M'_{s_M,der}$. L'élément $\bar{k}''$ conserve les $\bar{V}''_m$ et y agit par l'identité sauf pour $m = 1, k$ où il agit par multiplication par -1. On calcule aisément $\xi_N(\bar{k}) = -1$. Par définition, on a $\epsilon_N \circ a(n) = \xi_N(\bar{k})\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\omega}) = -(-1)^{(k+h+1)/2}$. On en déduit

(2) $\mu_{\alpha^+} = sgn^{(k+h-1)/2}$.

Les relations (1) et (2) prouvent le lemme 4.4.4.

4.4.8 Début de la preuve du lemme 4.4.4 pour G de type E_8

On suppose G de type E_8 et M de type E_7. On note $(\alpha_i)_{i=0,...,8}$ les éléments de Δ_a et $(\beta_i)_{i=0,...,7}$ ceux de Δ_a^M. L'ensemble Λ est $\Delta_a - \{\alpha_3, \alpha_6\}$, cf. 2.2.16. La racine β_{s_M} est β_4 donc Λ est aussi $\Delta_a^M - \{\beta_4\}$. L'ensemble Λ détermine deux diagrammes de Dynkin, en considérant Λ comme un sous-ensemble de Δ_a ou de Δ_a^M. Ces diagrammes doivent être les mêmes. Cela entraîne que $\beta_2 = \alpha_1$ et que les familles $(\beta_0, \beta_1, \beta_3)$, resp. $(\beta_5, \beta_6, \beta_7)$, sont égales à l'une des deux familles suivantes : $(\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)$, $(\alpha_5, \alpha_4, \alpha_2)$, $(\alpha_7, \alpha_8, \alpha_0)$, $(\alpha_0, \alpha_8, \alpha_7)$. Identifions l'appartement associé à T dans $Imm_{F^{nr}}(G)$ à $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Pour $i = 3, 6$, le sommet s_{α_i} vérifie les égalités $\alpha_j(s_{\alpha_i}) = 0$ pour $j \in \{1, ..., 8\} - \{i\}$ et $\alpha_0(s_{\alpha_i}) = 1$. Sa projection $p_M(s_{\alpha_i}) = s_{\beta_4}$ doit vérifier $\beta_j(s_{\beta_4}) = 0$ pour $j \in \{1, ..., 7\} - \{4\}$ et $\beta_0(s_{\beta_4}) = 1$. Cela force l'égalité $\beta_0 = \alpha_0$, d'où $(\beta_0, \beta_1, \beta_3) = (\alpha_0, \alpha_8, \alpha_7)$. L'égalité 4.4.4(1) est

$$(1) \qquad \beta_4 = -\frac{1}{4}(\beta_0 + 2\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 3\beta_5 + 2\beta_6 + \beta_7).$$

La racine β_4 doit s'identifier à une racine de G. En testant les deux possibilités $(\beta_5, \beta_6, \beta_7) = (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)$ ou $(\beta_5, \beta_6, \beta_7) = (\alpha_5, \alpha_4, \alpha_2)$, on voit que le membre de droite de (1) ne peut être une racine que si $(\beta_5, \beta_6, \beta_7) = (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)$. On a alors $\beta_4 = -(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6)$. Le groupe $\boldsymbol{Aut}(\mathcal{D}_a^M) = \boldsymbol{\Omega}^M$ a deux éléments. L'élément non trivial $\boldsymbol{\omega}$ fixe E_{β_2} et E_{β_4} et permute E_{β_0} et E_{β_7}, E_{β_1} et E_{β_6}, E_{β_3} et E_{β_5}.

On choisit $N = \sum_{\beta \in \Lambda} \bar{E}_\beta$, où les $\bar{E}_\beta$ sont les réductions des E_β dans $\mathfrak{m}_{AD,s_M}$. Cet élément est fixe par la réduction de $\boldsymbol{\omega}$ donc appartient à $\mathfrak{r}$. On a calculé le groupe M_{AD,s_M} en [48] 8.14. On a $M_{AD,s_M} = (SL(4) \times SL(4) \times SL(2))/\bar{\zeta}_{1/4}$, où $\bar{\zeta}_{1/4}$ est le groupe des

racines 4-ièmes de l'unité dans $\bar{\mathbb{F}}_q$. Fixons un générateur $\underline{i}$ de ce groupe. Posons $z_1 = \check{\beta}_0(\underline{i})\check{\beta}_1(\underline{i}^2)\check{\beta}_3(\underline{i}^3)$, $z_2 = \check{\beta}_7(\underline{i})\check{\beta}_6(\underline{i}^2)\check{\beta}_5(\underline{i}^3)$. Le plongement $\bar{\zeta}_{1/4} \to SL(4) \times SL(4) \times SL(2)$ est

$$\underline{i} \mapsto (z_1, z_2, \check{\beta}_2(-1)).$$

Le groupe $Z_{M_{AD,s_M}}(N)/Z_{M_{AD,s_M}}(N)^0$ s'identifie au centre de M_{AD,s_M}, lequel est engendré par z_1, z_2 et $\check{\beta}_2(-1)$ (ou seulement z_1 et $\check{\beta}_2(-1)$ puisque $z_1 z_2 \check{\beta}_2(-1)$ se projette sur 1 dans M_{AD,s_M}). Il y a deux faisceaux-caractères cuspidaux à support dans l'orbite $\mathcal{O}$ de N et $\mathcal{E}$ est l'un d'eux. En notant ici i l'élément habituel de $\mathbb{C}^\times$, il existe $\eta = \pm 1$ tel que le caractère ξ_N vérifie $\xi_N(z_1) = \xi_N(z_2) = \eta i$, $\xi_N(\check{\beta}_2(-1)) = -1$.

On traitera successivement les deux sommets s_{α_6} et s_{α_3} dans les deux paragraphes suivants. Rappelons la notion suivante, que nous utiliserons plusieurs fois : à toute racine $\alpha \in \Sigma$ est associé le sous-groupe de G dont l'algèbre de Lie est engendrée par $\mathfrak{u}_\alpha$, $\mathfrak{u}_{-\alpha}$ et par l'élément $\check{\alpha} \in X_*(T) \subset \mathfrak{t}$. Ce sous-groupe est en général isomorphe à un quotient de $SL(2)$. Ici, puisque G est simplement connexe, il est isomorphe à $SL(2)$. On l'appelle le groupe $SL(2)$ associé à α. Soit g un élément de ce groupe et soit $\beta \in \Sigma$. Supposons que α et β sont orthogonales. Parce que toutes les racines de G sont de même longueur, $Ad(g)$ fixe tout élément de $\mathfrak{u}_\beta$.

4.4.9 Sommet s_{α_6} pour G de type E_8

Posons $s = s_{\alpha_6}$. On a $G_s = (Spin(10) \times SL(4))/\bar{\zeta}_{1/4}$, où le plongement de $\bar{\zeta}_{1/4}$ dans $Spin(10) \times SL(4)$ est

$$\underline{i} \mapsto (\check{\alpha}_1(-1)\check{\alpha}_4(-1)\check{\alpha}_2(-\underline{i})\check{\alpha}_5(\underline{i}), \check{\alpha}_7(-\underline{i})\check{\alpha}_8(-1)\check{\alpha}_0(\underline{i})).$$

Notons $G_* = Spin(10)$ et $G_{**} = SL(4)$ les deux composantes de $G_{s,SC}$. La paire de Borel (B_s, T_s) de G_s se relève en le produit de deux telles paires de G_* et G_{**} que l'on note (B_*, T_*) et (B_{**}, T_{**}). L'image réciproque de M_{s_M} dans $G_{s,SC} = G_* \times G_{**}$ est $M_* \times G_{**}$, où $M_{*,SC} = SL(2) \times Spin(6)$; l'élément N s'écrit $N_* \oplus N_{**}$ où $N_* = \sum_{i=1,2,4,5} \bar{E}_{\alpha_i}$ et $N_{**} = \sum_{i=0,7,8} \bar{E}_{\alpha_i}$. Il est commode de réindexer les racines simples de la composante G_* selon la numérotation habituelle pour un groupe $Spin(10)$. On note $(\gamma_i)_{i=1,...,5}$ ces racines simples, définies par $\gamma_1 = \alpha_1$, $\gamma_2 = \alpha_3$, $\gamma_3 = \alpha_4$, $\gamma_4 = \alpha_5$, $\gamma_5 = \alpha_2$. On peut identifier le groupe de Weyl W_* de G_* au groupe des permutations w de $\{1, ..., 10\}$ telles que $w(11 - i) = 11 - w(i)$ pour tout i et que l'ensemble des $i \in \{1, ..., 5\}$ tels que $wi \geq 6$ a un nombre pair d'éléments. La symétrie élémentaire w_i associée à la racine γ_i pour $i = 1, ..., 4$ permute i et $i + 1$ ainsi que $11 - i$ et $10 - i$. La symétrie élémentaire w_5 associée à γ_5 permute 4 et 6 ainsi que 5 et 7. On note $l : W^* \to \mathbb{N}$ la longueur relative à ces générateurs. Introduisons l'élément w_* de W_* qui permute 1 et 9 ainsi que 2 et 10. Complétons-le par l'identité de la deuxième composante G_{**}. On obtient un élément du groupe de Weyl W_s de G_s qui normalise M_{s_M} et dont l'image dans $W_s(M_{s_M})$ est non triviale. Introduisons le sous-groupe H de G engendré par les $\check{\alpha}_i$ et les $E_{\pm\alpha_i}$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Il est isomorphe à $Spin(10)$ (cette fois, il s'agit d'un groupe sur F^{nr}) et est muni d'un épinglage $\mathfrak{E}^H = (B^H, T^H, (E_{\alpha_i})_{i=1,2,3,4,5})$, où $B^H = B \cap H$ et $T^H = T \cap H$. Introduisons la section de Springer S relative à cet épinglage. En fait, H est le revêtement simplement connexe du groupe dérivé d'un Levi standard de G et S est simplement la restriction de la section de Springer de W relative à $\mathfrak{E}$. Le groupe W_* est aussi le groupe de Weyl de H. Les générateurs $S(w_i)$ de la section de Springer appartiennent par construction à $K_s^{0,nr}$ donc l'image de S est contenue dans ce groupe. Posons

$n = \check{\varpi}_6(-1)S(w_*)^{-1}$.

Alors $n \in K_s^{0,nr}$. Puisque w_* conserve M_{s_M}, $Ad(n)$ conserve M. Montrons que

(1) $Ad(n)$ fixe l'épinglage affine $\mathfrak{E}_a^M$.

Pour $i = 0, 7, 8$, il est clair que $Ad(S(w_*))$ fixe E_{α_i}. Pour $i = 1, 2, 4, 5$, il résulte de la définition de w_* que $w_*(\alpha_i) = \alpha_i$. La propriété 2.1.8(5) entraîne que $Ad(S(w_*))$ fixe E_{α_i}. D'autre part $\check{\varpi}_6(-1)$ agit trivialement sur E_{α_i} pour $i \in \{1, ..., 8\} - \{6\}$ et il agit aussi trivialement sur E_{α_0} car $< \alpha_0, \check{\varpi}_6 >= -4$. Donc $Ad(n)$ fixe E_α pour tout $\alpha \in \Lambda$. Il reste à prouver qu'il fixe aussi le dernier élément E_{β_4} de l'épinglage affine $\mathfrak{E}_a^M$. Introduisons l'élément $\delta \in W_*$ qui est la permutation $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \mapsto (4, 5, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 6, 7)$. On constate que $w_* = \delta^{-1}w_5\delta$ et que $l(w_*) = l(\delta^{-1})+l(w_5)+l(\delta)$. Il en résulte que $S(w_*) = S(\delta^{-1})S(w_5)S(\delta)$. A l'aide de la relation 2.1.8(4), on calcule $S(\delta^{-1}) = tS(\delta)^{-1}$, où $t = \prod_{\gamma>0;\omega(\gamma)<0} \check{\gamma}(-1)$. L'ensemble des $\gamma > 0$ tels que $\omega(\gamma) < 0$ est $\{\gamma_1+\gamma_2, \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3, \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4, \gamma_2, \gamma_2+\gamma_3, \gamma_2+\gamma_3+\gamma_4\}$. D'où $t = \check{\gamma}_1(-1) = \check{\alpha}_1(-1)$. Par construction, $S(w_5)$ est contenu dans le groupe $SL(2)$ (de H ou G) associé à la racine γ_5. Il en résulte que $S(\delta)^{-1}S(w_5)S(\delta)$ est contenu dans le groupe $SL(2)$ associé à la racine $\delta^{-1}(\gamma_5)$. Cette racine est la plus grande racine positive de H, c'est-à-dire $\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5$, autrement dit $\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_2$. On constate que cette racine est orthogonale à $\beta_4 = -(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6)$. Il en résulte que le groupe $SL(2)$ associé à $\delta^{-1}(\gamma_5)$ fixe E_{β_4}. Par contre, $Ad(t)$ multiplie E_{β_4} par -1, d'où l'égalité $Ad(S(w_*))(E_{\beta_4}) = -E_{\beta_4}$. Mais on a aussi $Ad(\check{\varpi}_6(-1))(E_{\beta_4}) = -E_{\beta_4}$, donc $Ad(n)$ fixe E_{β_4}. Cela prouve (1).

D'après (1), $Ad(n)_{M_{AD}}$ appartient au groupe $\mathbf{\Omega}^M$. Puisque l'élément N appartient à l'ensemble $\mathfrak{r}$, la définition de ϵ_N implique

(2) $\epsilon_N \circ a(n) = 1$.

Pour calculer $\epsilon_N^\flat \circ c_s(n)$, remarquons que $\check{\varpi}_6(-1)$ appartient à $K_{s_M,N}^{0,nr}$. On a donc $\epsilon_N^\flat \circ c_s(n) = \xi_N(\overline{\check{\varpi}_6(-1)})\epsilon_N^\flat \circ c_s(S(w_*)^{-1})$. On a l'égalité $\check{\varpi}_6 = -\check{\alpha}_7 - 2\check{\alpha}_8 - 3\check{\alpha}_0$ et on en déduit l'égalité $\overline{\check{\varpi}_6(-1)} = z_2^2$. D'où

(3) $\epsilon_N^\flat \circ c_s(n) = -\epsilon_N^\flat \circ c_s(S(w_*)^{-1})$.

On va calculer $\epsilon_N^\flat \circ c_s(S(w_*)^{-1})$ selon la méthode expliquée en 2.2.4. Le calcul se concentre dans l'image dans G_s de la composante G_* de $G_{s,SC}$ et on peut aussi bien remplacer cette image par G_* lui-même. On note S_* la section de Springer de G_* relative à l'épinglage fixé. L'élément $c_s(S(w*))$ est l'image dans G_s de $S_*(w_*)$. Le groupe M_* est un Levi standard de G_*. Notons P_* le sous-groupe parabolique standard de G_* de composante de Levi M_*. On choisit l'élément $\underline{N}_* == \sum_{i=1,...,5} \bar{E}_{\alpha_i}$. Il appartient à $\mathfrak{u}_{B_*}$ et à l'orbite induite de la M_*-orbite de N_*. Fixons un élément $Z \in \mathfrak{z}(M_*)_{reg}$ que l'on précisera ci-dessous. Soit $\nu \in \bar{\mathbb{F}}_q^\times$. On doit calculer l'élément $u_\nu \in U_{P_*}$ tel que

$$(4) \qquad u_\nu^{-1}(\nu Z + \underline{N}_*)u_\nu = \nu Z + N_*.$$

Notons B_*^{opp} le sous-groupe de Borel de G_* contenant T_* et opposé à B_*. Quitte à exclure un nombre fini de valeurs de ν, on a une égalité

$$(5) \qquad u_\nu S_*(w_*) = \underline{v}_\nu t_\nu v_\nu$$

où $\underline{v}_\nu \in U_{B_*^{opp}}$, $t_\nu \in T_*$, $v_\nu \in U_{B_*}$. On note $\mathbf{t}_\nu$ l'image de t_ν dans $T_*/Z(M_*)^0$. Alors les applications algébriques $\nu \mapsto \underline{v}_\nu$ et $\nu \mapsto \mathbf{t}_\nu$ se prolongent en $\nu = 0$. On a $\underline{v}_0 = 1$ et $\mathbf{t}_0 = \mathbf{z}$, où $\mathbf{z}$ est l'image dans $T_*/Z(M_*)^0$ d'un élément $z \in Z(M_*)$. D'après 2.2.4(4) , on a alors

(6) $\epsilon_N^\flat(S_*(w_*)^{-1}) = \xi_N(z)^{-1}$.

Si G_* était un groupe $SO(10)$, tous les termes ci-dessus se calculeraient par de fastidieux mais simples calculs matriciels. Mais G_* est le groupe $Spin(10)$. Sans entrer dans le détail des calculs, indiquons-en la méthode. Introduisons un espace V de dimension 10 sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, muni d'une base $(e_i)_{i=1,...,10}$ et de la forme quadratique q définie par $q(e_i, e_{11-i}) = (-1)^i$ et $q(e_i, e_j) = 0$ si $i + j \neq 11$. Notons $\tilde{G}_*$ son groupe spécial orthogonal. Le groupe G_* est le revêtement spinoriel de $\tilde{G}_*$. L'espace $\mathfrak{g}_* = \tilde{\mathfrak{g}}_*$ s'identifie à celui des éléments $X \in End(V)$ tels que $(Xv, v') + (v, Xv') = 0$ pour tous $v, v' \in V$. Avec les notations de 4.3.6, on peut identifier $\bar{E}_{\gamma_1} = E_{1,2} + E_{9,10}$, $\bar{E}_{\gamma_2} = E_{2,3} + E_{8,9}$, $\bar{E}_{\gamma_3} = E_{3,4} + E_{7,8}$, $\bar{E}_{\gamma_4} = E_{4,5} + E_{6,7}$, $\bar{E}_{\gamma_5} = E_{4,6} + E_{5,7}$. On choisit pour Z l'élément $Z = E_{1,1} + E_{2,2} - E_{9,9} - E_{10,10}$. On note $\pi = G_* \to \tilde{G}_*$ la projection. Posons $\tilde{S}_* = \pi \circ S_*$. C'est la section de Springer de $\tilde{G}_*$. Dans [43] lemme X.4, on a calculé explicitement la section de Springer $\tilde{S}_*$. Pour $w \in W_*$ et $i \in \{1, ..., 10\}$, posons $r(i, w) = |\{k \in \mathbb{N}; i < k \leq 10; w(i) > w(k), i + k \neq 11\}$. Alors $\tilde{S}(w)(e_i) = (-1)^{r(i,w)} e_{wi}$. Remarquons que la projection π se restreint en une bijection entre les sous-ensembles des éléments unipotents des deux groupes G_* et $\tilde{G}_*$. En particulier l'élément u_ν vérifiant (4) est déterminé par un calcul matriciel dans $\tilde{G}_*$. Introduisons le sous-groupe de Levi standard L_* de G_* tel que $\Delta^{L_*} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$. Son groupe dérivé $L_{*,der}$ est isomorphe à $SL(5)$. Notons Q_* le sous-groupe parabolique standard de composante de Levi L_*. Pour simplifier la notation, fixons ν et abandonnons les indices ν : on pose $u = u_\nu$. On écrit $u = v_1 v_2$ avec $v_1 \in U_{B_* \cap L_*}$ et $v_2 \in U_{Q_*}$. Ces éléments se déterminent par un calcul matriciel dans $\tilde{G}_*$. On a $uS_*(\delta^{-1}) = v_1 S_*(\delta^{-1}) v_3$, où $v_3 = S_*(\delta^{-1})^{-1} v_2 S_*(\delta^{-1})$. Le terme v_3 se calcule aussi dans $\tilde{G}_*$: on peut remplacer $S_*(\delta^{-1})$ par $\tilde{S}_*(\delta^{-1})$ dans la définition de v_3. Les deux termes v_1 et $S_*(\delta^{-1})$ appartiennent à $L_{*,der}$. La restriction à $W_*^{L_*}$ de S_* est la section de Springer du groupe $L_{*,der} \simeq SL(5)$. Un calcul matriciel dans $SL(5)$ calcule $v_1 S_*(\delta^{-1})$ sous la forme $v_1 S_*(\delta^{-1}) = \underline{v}_1 t_1 v_4$, où $\underline{v}_1 \in U_{B_*^{opp} \cap L_*}$, $t_1 \in T_*$, $v_4 \in U_{B_* \cap L_*}$. On obtient $uS_*(\delta^{-1}) = \underline{v}_1 t_1 v_5$, où $v_5 = v_4 v_3 \in U_{B_*}$. Notons L'_* le groupe de Levi standard tel que $\Delta^{L'_*} = \{\gamma_5\}$. Son groupe dérivé $L'_{*,der}$ est isomorphe à $SL(2)$. Notons Q'_* le sous-groupe parabolique standard de composante de Levi L'_*. Par un calcul matriciel dans $\tilde{G}_*$, on écrit $v_5 = v_6 v_7$ où $v_6 \in U_{B_* \cap L'_*}$ et $v_7 \in U_{Q'_*}$. On a $v_5 S_*(w_5) = v_6 S_*(w_5) v_8$, où $v_8 = S_*(w_5)^{-1} v_7 S_*(w_5)$. Comme ci-dessus, v_8 se calcule dans $\tilde{G}_*$. Les termes v_6 et $S_*(w_5)$ appartiennent à $L'_{*,der}$. Dans ce groupe isomorphe à $SL(2)$, on calcule $v_6 S_*(w_5) = \underline{v}_2 t_2 v_9$, avec $\underline{v}_2 \in U_{B_*^{opp} \cap L'_*}$, $t_2 \in T_*$ et $v_9 \in U_{B_* \cap L'_*}$. En posant $v_{10} = v_9 v_8 \in U_{B_*}$, on obtient $uS(\delta^{-1}) S(w_5) = \underline{v}_1 t_1 \underline{v}_2 t_2 v_{10}$. Ecrivons $v_{10} = v_{11} v_{12}$, avec $v_{11} \in U_{B_* \cap L_*}$ et $v_{12} \in U_{Q_*}$. On a $v_{10} S_*(\delta) = v_{11} S_*(\delta) v_{13}$, où $v_{13} = S(\delta)^{-1} v_{12} S(\delta)$. Tous ces éléments se calculent dans $\tilde{G}_*$. Comme dans la première étape du calcul, on calcule dans le groupe $L_{*,der}$ une égalité $v_{11} S_*(\delta) = \underline{v}_3 t_3 v_{14}$, où $\underline{v}_3 \in U_{B_*^{opp} \cap L_*}$, $t_3 \in T_*$ et $v_{14} \in U_{B_* \cap L_*}$. En posant $v_{15} = v_{14} v_{13} \in U_{B_*}$, on obtient $uS_*(\delta^{-1}) S_*(w_5) S_*(\delta) = \underline{v}_1 t_1 \underline{v}_2 t_2 \underline{v}_3 t_3 v_{15}$. Ou encore, en posant $\underline{v}_4 = \underline{v}_1 t_1 \underline{v}_2 t_2 \underline{v}_3 t_2^{-1} t_1^{-1}$ et $t = t_1 t_2 t_3$,

$$u_\nu S_*(w_*) = \underline{v}_4 t v_{15}.$$

En comparant avec (5), on a $t_\nu = t$. En explicitant les calculs ci-dessus, on trouve

$$t_\nu = \left(\check{\gamma}_1(2\nu^7)\check{\gamma}_2(4\nu^{14})\check{\gamma}_3(4\nu^{14})\check{\gamma}_4(2\nu^7)\check{\gamma}_5(2\nu^7)\right)^{-1}.$$

Mais le groupe $X_*(Z(M_*)^0$ est engendré par l'élément $\check{\gamma}_1 + 2\check{\gamma}_2 + 2\check{\gamma}_3 + \check{\gamma}_4 + \check{\gamma}_5$. Donc $t_\nu \in Z(M_*)^0$ et $\mathbf{t}_\nu = 1$. D'après (6), on a donc $\epsilon_N^\flat(S_*(w_*)^{-1}) = 1$, puis, d'après (3), $\epsilon_N^\flat \circ c_s(n) = -1$.

En comparant avec (2), on en déduit

(7) μ_{α_6} est le caractère non trivial de $W^{I_F}(M)$.

4.4.10 Sommet s_{α_3} pour G de type E_8

Posons $s = s_{\alpha_3}$. On a $G_s = (SL(8) \times SL(2))/\bar{\zeta}_{1/4}$, où le plongement de $\bar{\zeta}_{1/4}$ dans $SL(8) \times SL(2)$ est

$$\underline{i} \mapsto (\check{\alpha}_2(-\underline{i})\check{\alpha}_4(-1)\check{\alpha}_5(\underline{i})\check{\alpha}_7(-\underline{i})\check{\alpha}_8(-1)\check{\alpha}_0(\underline{i}), \check{\alpha}_1(-1)).$$

On note $G_* = SL(8)$ et $G_{**} = SL(2)$ les deux composantes de $G_{s,SC}$. L'image réciproque de M_{s_M} dans $G_{s,SC}$ est $M_* \times G_{**}$, où $M_{*,SC} = SL(4) \times SL(4)$; l'élément N s'écrit $N_* \oplus N_{**}$ où $N_* = \sum_{i=2,4,5,7,8,0} \bar{E}_{\alpha_i}$ et $N_{**} = \bar{E}_{\alpha_1}$.

Notons H le sous-groupe de G engendré par les $\check{\alpha}_i$ et les $E_{\pm\alpha_i}$ pour $i = 2, 4, 5, 6, 7, 8, 0$. Introduisons un espace V de dimension 8 sur F muni d'une base $(e_i)_{i=1,...,8}$. On identifie H à $SL(V)$ de sorte que $T \cap H$ s'identifie au groupe diagonal de $SL(V)$ et les éléments E_{α_i} pour $i = 2, 4, 5, 6, 7, 8, 0$ s'identifient respectivement aux éléments de l'épinglage habituel $E_{1,2}$, $E_{2,3}$ etc... Notons n l'élément de H tel que $n(e_i) = -e_{i+4}$ pour $i = 1, ..., 4$ et $n(e_i) = e_{i-4}$ pour $i = 5, ..., 8$. L'action de n sur l'appartement $App_{F^{nr}}(T)$ conserve le sous-groupe de racines affines engendré par les α_i^{aff} pour $i = 0, ..., 8$, $i \neq 3$. Puisque le sommet s est l'élément de cet appartement défini par les égalites $\alpha_i^{aff}(s) = 0$ pour $i \neq 3$, l'action de n fixe s. Donc $n \in K_s^{0,nr}$. L'action $Ad(\bar{n})$ conserve M_{s_M} donc $Ad(n)$ conserve M par un raisonnement déjà fait plusieurs fois. Montrons que

(1) $Ad(n)$ conserve l'épinglage affine $\mathfrak{E}_a^M$ et y agit par $\boldsymbol{\omega}$.

Par construction, l'automorphisme $Ad(n)$ permute les couples E_{α_2} et E_{α_7}, E_{α_4} et E_{α_8}, E_{α_5} et E_{α_0}. Puisque α_1 est orthogonale aux racines α_i pour $i = 2, 4, 5, 6, 7, 8, 0$, tout élément de H fixe E_{α_1}. Donc $Ad(n)$ fixe E_{α_1}. Par la traduction entre les racines dans G et dans M que l'on a expliquée en 4.4.8, il reste à démontrer que $Ad(n)$ fixe le dernier élément E_{β_4} de $\mathfrak{E}_a^M$. Par construction, on a $n = n_1 n_2 n_3 n_4$ où, pour $i = 1, ..., 4$, $n_i(e_i) = -e_{i+4}$, $n_i(e_{i+4}) = e_i$ et $n_i(e_j) = e_j$ pour $j = 1, ..., 8$, $j \neq i, i+4$. L'élément n_i appartient au groupe $SL(2)$ associé à la racine γ_i, où $\gamma_1 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$, $\gamma_2 = \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7$, $\gamma_3 = \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8$, $\gamma_4 = \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_0$. On constate que les γ_i sont orthogonales à $\beta_4 = -(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6)$. Il en résulte que ces groupes $SL(2)$ fixent E_{β_4}. Donc $Ad(n)$ fixe aussi E_{β_4}. Cela démontre (1).

Comme en 4.4.9, on déduit de (1) l'égalité

(2) $\epsilon_N \circ a(n) = 1$.

On calcule $\epsilon_N^\flat \circ c_s(n)$ par la même méthode qu'en 4.4.9 et on utilise les mêmes notations. De nouveau, le calcul se concentre dans la composante G_*. On pose $\underline{N}_* = \sum_{i=2,4,5,6,7,8,0} \bar{E}_{\alpha_i}$. Notons L le $\mathfrak{o}_{F^{nr}}$-réseau de V engendré par la base $(e_i)_{i=1,...,8}$ et posons $\bar{V} = L/\mathfrak{p}_{F^{nr}}L$. L'espace $\bar{V}$ est muni de la base réduite $(\bar{e}_i)_{i=1,...,8}$ et le groupe G_* s'identifie à $SL(\bar{V})$. Avec des notations évidentes, on a $N_* = \sum_{i=1,...,7, i\neq 4} \bar{E}_{i,i+1}$ et $\underline{N}_* = \sum_{i=1,...,7} \bar{E}_{i,i+1}$. On choisit $Z = \sum_{i=1,...,4} E_{i,i} - \sum_{i=5,...,8} E_{i,i}$. Pour $\nu \in \bar{\mathbb{F}}_q^\times$, des calculs matriciels faciles dans $G_* = SL(8)$ permettent de calculer l'élément $u_\nu \in U_{P_*}$ tel que $u_\nu^{-1}(\nu Z + \underline{N}_*)u_\nu = \nu Z + N_*$, puis d'écrire $u_\nu \bar{n}^{-1} = \underline{v}_\nu t_\nu v_\nu$ avec $\underline{v}_\nu \in U_{B_*^{opp}}$, $t_\nu \in T_*$ et $v_\nu \in U_{B_*}$. On obtient

$$t_\nu = \left(\check{\alpha}_2(2\nu)^4\check{\alpha}_4(2\nu)^8\check{\alpha}_5(2\nu)^{12}\check{\alpha}_6(2\nu)^{16}\check{\alpha}_7(-(2\nu)^{12})\check{\alpha}_8(2\nu)^8\check{\alpha}_0(-(2\nu)^4)\right)^{-1}.$$

L'élément

$$\check{\alpha}_2 + 2\check{\alpha}_4 + 3\check{\alpha}_5 + 4\check{\alpha}_6 + 3\check{\alpha}_7 + 2\check{\alpha}_8 + \check{\alpha}_0$$

appartient à $X_*(Z(M_*)^0)$. Donc $t_\nu \in zZ(M_*)^0$, où $z = \check{\alpha}_7(-1)\check{\alpha}_0(-1)$. On a $z \in Z(M_*)$ et son image dans $Z(M_{s_M})$ est égale à z_1^2, cf. 4.4.8. D'après 2.2.4(4), on obtient $\epsilon_N^\flat \circ c_s(n) = \xi_N(z_1^{-2}) = -1$. En comparant avec (2), on en déduit

(3) μ_{α_3} est le caractère non trivial de $W^{I_F}(M)$.

Cette relation et 4.4.9 (7) prouvent le lemme 4.4.4 dans le cas où G est de type E_8.

4.4.11 Début de la preuve du lemme 4.4.4 dans le cas (E_6, ram)

On suppose que G est de type E_6, que M de type A_5 et que G n'est pas déployé sur F^{nr} mais l'est sur l'extension quadratique ramifiée E de F^{nr}. On note $(\alpha_i)_{i=1,\dots,6}$ les éléments de Δ. Un élément de $\Gamma_{F^{nr}} - \Gamma_E$ agit sur Δ par l'automorphisme non trivial θ de cet ensemble. On a $\Delta_a^{nr} = \{\beta_0, \beta_{1,6}, \beta_{3,5}, \beta_4, \beta_2\}$. La racine β_0 est égale à la restriction commune de α_0' et α_0'' où $\alpha_0' = -(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)$ et $\alpha_0'' = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6)$. On prolonge la famille $(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ en une famille de Chevalley $(\dot{E}_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$. On suppose $\dot{E}_{\theta(\alpha)} = \theta(\dot{E}_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. On définit l'épinglage affine $(E_\beta)_{\beta\in\Delta_a^{nr}}$ par $E_{\beta_2} = E_{\alpha_2}$, $E_{\beta_4} = E_{\alpha_4}$, $E_{\beta_{1,6}} = E_{\alpha_1} + E_{\alpha_6}$, $E_{\beta_{3,5}} = E_{\alpha_3} + E_{\alpha_5}$, $E_{\beta_0} = \varpi_E(\dot{E}_{\alpha_0'} - \dot{E}_{\alpha_0''})$, où ϖ_E est une uniformisante de E telle que $trace_{E/F^{nr}}(\varpi_E) = 0$.

On note en les soulignant les racines et racines affines de M. Ainsi $\Delta^M = \{\underline{\alpha}_i; i = 1, ..., 5\}$ et $\Delta_a^{M,nr} = \{\underline{\beta}_0, \underline{\beta}_{1,5}, \underline{\beta}_{2,4}, \underline{\beta}_3\}$. La racine $\underline{\beta}_0$ est la restriction commune de $\underline{\alpha}_0'$ et $\underline{\alpha}_0''$ où $\underline{\alpha}_0' = -(\underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2 + \underline{\alpha}_3 + \underline{\alpha}_4)$ et $\underline{\alpha}_0'' = -(\underline{\alpha}_2 + \underline{\alpha}_3 + \underline{\alpha}_4 + \underline{\alpha}_5)$. La racine β_{s_M} est $\underline{\beta}_{2,4}$.

L'ensemble Λ est égal à $\{\beta_0, \beta_{3,5}, \beta_2\}$ et est aussi $\{\underline{\beta}_0, \underline{\beta}_{1,5}, \underline{\beta}_3\}$. Le même argument qu'en 4.4.8 entraîne l'égalité $\beta_0 = \underline{\beta}_0$. Par comparaison des longueurs, on a ensuite $\beta_{3,5} = \underline{\beta}_{1,5}$ et $\beta_2 = \underline{\beta}_3$. L'égalité 4.4.4(2) est ici

$$\underline{\beta}_{2,4} = -\frac{1}{2}(\underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{1,5} + \underline{\beta}_3),$$

c'est-à-dire

$$\underline{\beta}_{2,4} = -\frac{1}{2}(\beta_0 + \beta_{3,5} + \beta_2).$$

On voit que l'on peut identifier $\underline{\alpha}_1 = \alpha_3$, $\underline{\alpha}_2 = \alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$, $\underline{\alpha}_3 = \alpha_2$, $\underline{\alpha}_4 = \alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$, $\underline{\alpha}_5 = \alpha_5$. On a déjà défini les éléments $E_{\underline{\beta}_0} = E_{\beta_0}$, $E_{\underline{\beta}_{1,5}} = E_{\beta_{3,5}}$ et $E_{\underline{\beta}_3} = E_{\beta_2}$ et on complète cet ensemble en un épinglage affine $\mathfrak{E}_a^{M,nr}$ pour M en choisissant $E_{\underline{\beta}_{2,4}} = \dot{E}_{\underline{\alpha}_2} + \dot{E}_{\underline{\alpha}_4}$ (rappelons que $\dot{E}_{\underline{\alpha}_4} = \theta(\dot{E}_{\underline{\alpha}_2})$). Le groupe $\mathbf{\Omega}^{M,nr}$ a deux éléments. L'élément non trivial permute $\underline{\beta}_0$ et $\underline{\beta}_{1,5}$ et fixe $\underline{\beta}_{2,4}$ et $\underline{\beta}_3$. Les entiers h et k de 4.2.5 valent 2 et 1. Le caractère $\boldsymbol{\epsilon}$ de $\mathbf{\Omega}^{M,nr}$ défini dans ce paragraphe est donc trivial.

On choisit $N = \sum_{\beta\in\Lambda} \bar{E}_\beta$. Notons $\{\pm1\}_1^3$ le sous-groupe des $(z_1, z_2, z_3) \in \{\pm1\}^3$ tels que $z_1z_2z_3 = 1$. On a $M_{AD,s_M} = (SL(2)\times SL(2)\times SL(2))/\{\pm1\}_1^3$, où $\{\pm1\}^3$ est identifié au produit des centres des trois composantes $SL(2)$. Le groupe $Z_{M_{AD,s_M}}(N)/Z_{M_{AD,s_M}}(N)^0$ a deux éléments et ξ_N est son caractère non trivial.

L'ensemble $\Delta_a^{nr} - \Lambda$ a deux éléments : $\beta_{1,6}$ et β_4. Dans les paragraphes suivants, nous traiterons successivement les sommets s_β associés à ces deux éléments β.

4.4.12 Sommet $s_{\beta_{1,6}}$ pour G de type (E_6, ram)

Posons $s = s_{\beta_{1,6}}$. On a $G_s = (Spin(7) \times SL(2))/\{\pm1\}$, le groupe $\{\pm1\}$ s'identifiant aux centres des deux composantes. Notons $G_* == Spin(7)$ et $G_{**} = SL(2)$ les deux composantes de $G_{s,SC}$. De la paire de Borel (B_s, T_s) de G_s se déduisent de telles paires (B_*, T_*) et (B_{**}, T_{**}) de G_* et G_{**}. On note W_* et W_{**} les groupes de Weyl de G_* et G_{**}. L'image réciproque de M_{s_M} dans ce groupe est $M_* \times G_{**}$ où $M_{*,SC} = SL(2) \times SL(2)$. L'élément N s'écrit $N_* \oplus N_{**}$, où $N_* = \bar{E}_{\beta_{3,5}} + \bar{E}_{\beta_2}$ et $N_{**} = \bar{E}_{\beta_0}$. On réindexe les racines de

G_* selon la numérotation habituelle pour un groupe $Spin(7)$ en posant $\gamma_1 = \beta_2$, $\gamma_2 = \beta_4$ et $\gamma_3 = \beta_{3,5}$. Le groupe de Weyl W_* de G_* s'identifie au groupe de permutations w de l'ensemble $\{1, ..., 7\}$ telles que $w(8-i) = 8 - w(i)$ pour tout i. La symétrie élémentaire $w_{*,i}$ associée à γ_i pour $i = 1, 2$ permute i et $i+1$ ainsi que $8-i$ et $7-i$, tandis que la symétrie élémentaire $w_{*,3}$ associée à γ_3 permute 3 et 5. Pour $i = 1, ..., 6$, notons w_i la symétrie élémentaire de W associée à α_i. Introduisons la section de Springer de G associée à notre épinglage $\mathfrak{E}$. On voit que les éléments $S(w_2)$, $S(w_4)$ et $S(w_3)S(w_5)$ appartiennent à $K_s^{0,nr}$. Ils se réduisent en des éléments de G_s qui normalisent T_s et définissent donc des éléments de $W_* \times W_{**}$. Les images dans W_{**} des trois éléments ci-dessus sont 1 tandis que leurs images dans W_* sont respectivement $w_{*,1}$, $w_{*,2}$, $w_{*,3}$.

Introduisons l'élément $w_* \in W_*$ qui permute 1 et 6, 2 et 7 et fixe $3, 4, 5$. On le complète par l'identité de la seconde composante G_{**}. L'élément obtenu conserve M_{s_M} et son image dans $W_s(M_{s_M})$ est l'élément non trivial de ce groupe. On a l'égalité

$$w_* = w_{*,2}w_{*,3}w_{*,2}w_{*,1}w_{*,2}w_{*,3}w_{*,2}.$$

Introduisons l'élément $w \in W$ défini par

$$w = w_4w_3w_5w_4w_2w_4w_5w_3w_4.$$

On vérifie que c'est une décomposition de longueur minimale, c'est-à-dire qu'en notant l la longueur de W relative aux générateurs $(w_i)_{i=1,...,6}$, on a $l(w) = 9$. Posons $n = S(w)^{-1}$. D'après ce qui précède, n appartient à $K_s^{0,nr}$ et se réduit en un élément $\bar{n}$ de $Norm_{G_s}(T_s)$ dont l'image dans $W_* \times W_{**}$ est $(w_*, 1)$. L'action $Ad(\bar{n})$ conserve M_{s_M} donc $Ad(n)$ conserve M. Montrons que

(1) $Ad(n)$ fixe l'épinglage affine $\mathfrak{E}_a^{M,nr}$.

On vérifie que $w(\alpha_i) = \alpha_i$ pour $i = 2, 3, 5$. D'après 2.1.8 (5), $S(w)$ fixe E_{α_i} pour ces i, donc fixe $E_{\underline{\beta}_3} = E_{\beta_2} = E_{\alpha_2}$ et $E_{\underline{\beta}_{1,5}} = E_{\beta_{3,5}} = E_{\alpha_3} + E_{\alpha_5}$. Posons $\omega = w_4w_5w_3w_4$. On a $\omega^2 = 1$ et $w = \omega w_2 \omega$. On a $l(w) = l(\omega) + l(w_2) + l(\omega)$. On en déduit $S(w) = S(\omega)S(w_2)S(\omega)$. A l'aide de 2.1.8 (4), on calcule $S(\omega) = tS(\omega)^{-1}$, où $t = \prod_{\alpha>0,\omega(\alpha)<0} \check{\alpha}(-1)$. L'ensemble des $\alpha > 0$ tels que $\omega(\alpha) < 0$ est $\{\alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5\}$. D'où $t = 1$. On obtient $S(w) = S(\omega)^{-1}S(w_2)S(\omega)$. Par construction, $S(w_2)$ est contenu dans le sous-groupe $SL(2)$ de G associé à la racine α_2. Donc $S(w)$ est contenu dans le groupe $SL(2)$ associé à la racine $\omega(\alpha_2) = \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5$. On constate que cette racine est orthogonale à α_0', α_0'', $\underline{\alpha}_2$ et $\underline{\alpha}_4$. Donc $S(w)$ fixe les espaces radiciels associés à ces racines. Les éléments $E_{\underline{\beta}_0} = E_{\beta_0}$, resp. $E_{\underline{\beta}_{2,4}}$ appartiennent à la somme des espaces radiciels associés aux racines α_0' et α_0'', resp. $\underline{\beta}_2$ et $\underline{\beta}_4$. Donc $Ad(n)$ fixe $E_{\underline{\beta}_0}$ et $E_{\underline{\beta}_{2,4}}$. Cela prouve (1).

D'après (1) et parce que $Ad(n)$ définit un automorphisme intérieur de M_{AD}, $Ad(n)_{M_{AD}}$ appartient au groupe $\mathbf{\Omega}^{M,nr}$. L'élément N appartient à $\mathfrak{r}$. En conséquence

(2) $\epsilon_N \circ a(n) = 1$.

Calculons $\epsilon_N^\flat \circ c_s(n)$. Introduisons un espace V de dimension 7 sur $\bar{\mathbb{F}}_q$, muni d'une base $(e_i)_{i=1,...,7}$ et de la forme quadratique définie par $q(e_i, e_{8-i}) = (-1)^{i+1}$ pour tout $i \neq 4$, $q(e_4, e_4) = -2$. On note $\tilde{G}_*$ son groupe spécial orthogonal. On peut identifier G_* à son revêtement spinoriel de sorte que T_* s'identifie à l'image réciproque du tore diagonal et $\bar{E}_{\beta_2}$, $\bar{E}_{\beta_4}$ et $\bar{E}_{\beta_{3,5}}$ s'identifient respectivement à $E_{1,2} + E_{6,7}$, $E_{2,3} + E_{5,6}$, $E_{3,4} + E_{4,5}$, avec les notations de 4.3.6. On note $\pi : G_* \to \tilde{G}_*$ la projection. Introduisons la section de Springer S_* de W_* à valeurs dans G_* associée à l'épinglage que l'on vient de décrire. Il résulte des constructions que les réductions dans G_s de $S(w_4)$, resp. $S(w_3)S(w_5)$, $S(w_2)$,

sont les images dans ce groupe des éléments $S_*(w_{*,2})$, resp. $S_*(w_{*,3})$, $S(w_{*,1})$, de G_*. Donc $c_s(n)$ est l'image dans G_s de l'élément $S_*(w_*)$ de G_*. On peut aussi bien remplacer G_s par G_* et calculer $\epsilon_N^\flat(S_*(w_*))$. On effectue le calcul comme en 4.4.9. On choisit $\underline{N}_* = \bar{E}_{\beta_{3,5}} + \bar{E}_{\beta_4} + \bar{E}_{\beta_2}$ et $Z = E_{1,1} + E_{2,2} - E_{6,6} - E_{7,7}$. Pour $\nu \in \bar{\mathbb{F}}_q^\times$, un calcul matriciel permet de calculer l'élément $u_\nu \in U_{B_*}$ tel que

$$u_\nu^{-1}(\nu Z + \underline{N}_*)u_\nu = \nu Z + N_*.$$

On calcule ensuite le produit $u_\nu S_*(w_*)$ sous la forme $\underline{v}_\nu t_\nu v_\nu$, cf. 4.4.9(5) en calculant successivement

$$u_\nu S_*(w_{*,2}),\ u_\nu S_*(w_{*,2})S(w_{*,3}),\ u_\nu S_*(w_{*,2})S(w_{*,3})S(w_{*,2})S(w_{*,1})S(w_{*,2}),$$

$$u_\nu S_*(w_{*,2})S(w_{*,3})S(w_{*,2})S(w_{*,1})S(w_{*,2})S(w_{*,3}),$$

$$u_\nu S_*(w_{*,2})S(w_{*,3})S(w_{*,2})S(w_{*,1})S(w_{*,2})S(w_{*,3})S(w_{*,2}).$$

A chaque fois, le calcul se passe soit dans le groupe $\tilde{G}_*$, soit dans un groupe $SL(2)$ ou $SL(3)$ pour le terme central. On obtient

$$t_\nu = \left(\check{\gamma}_1(2\nu^5)\check{\gamma}_2(4\nu^{10})\check{\gamma}_3(2\nu^5)\right)^{-1}.$$

Mais $\check{\gamma}_1 + 2\check{\gamma}_2 + \check{\gamma}_3$ appartient à $X_*(Z(M_*)^0)$. Donc $t_\nu \in Z(M_*)^0$. D'après 4.4.9(7), on en déduit

$$\epsilon_N^\flat \circ c_s(n) = \epsilon_N^\flat(S_*(w_*)) = 1.$$

Avec (2), on obtient

(3) $\mu_{\beta_{1,6}} = 1$.

4.4.13 Sommet s_{β_4} pour G de type (E_6, ram)

Posons $s = s_{\alpha_4}$. On a $G_s = (SL(4) \times SL(2))/\bar{\zeta}_{1/4}$, le groupe $\bar{\zeta}_{1/4}$ s'envoyant dans $SL(4) \times SL(2)$ par

$$\underline{i} \mapsto (\check{\alpha}_0(\underline{i})\check{\alpha}_{1,6}(-1)\check{\alpha}_{3,5}(-\underline{i}), \check{\alpha}_2(-1)).$$

Notons $G_* = SL(4)$ et $G_{**} = SL(2)$ les deux composantes de $G_{s,SC}$. On note (B_*, T_*) et (B_{**}, T_{**}) les paires de Borel de G_* et G_{**} qui se déduisent de (B_s, T_s) et on note W_* et W_{**} les groupes de Weyl. L'image réciproque dans ce groupe de M_{s_M} est $M_* \times G_{**}$, où $M_{*,SC} = SL(2) \times SL(2)$. L'élément N s'écrit $N_* \oplus N_{**}$, où $N_* = \bar{E}_{\beta_0} + \bar{E}_{\beta_{3,5}}$ et $N_{**} = \bar{E}_{\beta_2}$. On identifie le groupe W_* au groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, les symétries élémentaires associées aux racines $\beta_0, \beta_{1,6}, \beta_{3,5}$ s'identifiant respectivement aux permutations $w_{*,1}$ de 1 et 2, $w_{*,2}$ de 2 et 3, $w_{*,3}$ de 3 et 4. Introduisons le sous-groupe H de G engendré par les $\check{\beta}$, E_β et $E_{-\beta}$ pour $\beta = \beta_0, \beta_{1,6}, \beta_{3,5}$. Il est isomorphe à $SL(4)$ (cette fois,c'est un groupe sur F^{nr}). Le groupe G_* apparaît comme la réduction du modèle entier de H relatif à l'épinglage $\mathfrak{E}^H = (B \cap H, T \cap H, (E_{\beta_0}, E_{\beta_{1,6}}, E_{\beta_{3,5}}))$ de H. Ce modèle n'est autre que $H(F^{nr}) \cap K_s^{0,nr}$. Le groupe W_* s'identifie au groupe de Weyl de H. On note S^H, resp. S_*, la section de Springer de H, resp. G_*, associée aux épinglages que l'on a décrits. Par construction, l'image de S^H est incluse dans $K_s^{0,nr} \cap H(F^{nr})$ et S_* est la composée de S^H et de la réduction de $K_s^{0,nr} \cap H(F^{nr})$ dans G_*. Introduisons l'élément $w_* \in W_*$ qui envoie $(1, 2, 3, 4)$ sur $(3, 4, 1, 2)$. Complété par l'élément neutre de W_{**}, on obtient

un élément de $W_* \times W_{**}$ dont l'image dans W_s normalise M_{s_M} et s'envoie elle-même sur l'élément non trivial de $W_s(M_{s_M})$. On a l'égalité $w_* = w_{*,2}w_{*,1}w_{*,3}w_{*,2}$.

Posons $n = S^H(w_*)$. Alors $n \in K_s^{0,nr}$ et $\bar{n}$ est un élément de $Norm_{G_s}(T_s)$ dont l'image dans W_s est $(w_*, 1)$. Montrons que

(1) $Ad(n)$ conserve M et l'épinglage affine $\mathfrak{E}_a^{M,nr}$.

L'élément w_* permute les racines β_0 et $\beta_{3,5}$. D'après 2.1.8(5), $S^H(w_*)$ permute $E_{\beta_0} = E_{\underline{\beta}_0}$ et $E_{\beta_{3,5}} = E_{\underline{\beta}_{1,5}}$. Par construction, $S^H(w_{*,1})$, resp. $S^H(w_{*,2})$, $S^H(w_{*,3})$, appartient au produit des sous-groupes $SL(2)$ de G associées aux racines α_0' et α_0'', resp. α_1 et α_6, α_3 et α_5. Toutes ces racines sont orthogonales à $\alpha_2 = \underline{\beta}_3$ donc tous ces sous-groupes $SL(2)$ fixent $E_{\underline{\beta}_3}$. A fortiori, $S^H(w_*)$ fixe $E_{\underline{\beta}_3}$. Le cas de $E_{\underline{\beta}_{2,4}}$ est plus compliqué. On a l'égalité $S^H(w_{*,2})^2 = t$, où $t = \check{\alpha}_1(-1)\check{\alpha}_6(-1)$. Posons $\tau_1 = S^H(w_{*,2})S^H(w_{*,1})S^H(w_{*,2})^{-1}$ et $\tau_3 = S^H(w_{*,2})S^H(w_{*,3})S^H(w_{*,2})^{-1}$. On a les égalités $n = S^H(w_*) = \tau_1\tau_3 t$. Puisque $\underline{\alpha}_2(t) = \underline{\alpha}_4(t) = -1$ et que $E_{\underline{\beta}_{2,4}} = E_{\underline{\alpha}_2} + E_{\underline{\alpha}_4}$, le fait que $Ad(n)$ fixe $E_{\underline{\beta}_{2,4}}$ résulte des assertions suivantes, que nous allons prouver :

(2) $Ad(\tau_3)(E_{\underline{\beta}_{2,4}}) = -E_{\underline{\beta}_{2,4}}$;

(3) $Ad(\tau_1)$ fixe $E_{\underline{\beta}_{2,4}}$.

Pour $\alpha \in \Delta$, posons $\sigma_\alpha = exp(E_\alpha)exp(-E_{-\alpha})exp(E_\alpha)$. Il resulte des définitions que $S^H(w_{*,2}) = \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_6}$ et $S^H(w_{*,3}) = \sigma_{\alpha_3}\sigma_{\alpha_5}$. Il est clair que σ_{α_1} commute à σ_{α_6} et σ_{α_5} et que σ_{α_6} commute à σ_{α_3}. On en déduit $\tau_3 = \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_3}\sigma_{\alpha_1}^{-1}\sigma_{\alpha_6}\sigma_{\alpha_5}\sigma_{\alpha_6}^{-1}$. Posons $\sigma_{\alpha_1+\alpha_3} = \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_3}\sigma_{\alpha_1}^{-1}$ et $\sigma_{\alpha_5+\alpha_6} = \sigma_{\alpha_6}\sigma_{\alpha_5}\sigma_{\alpha_6}^{-1}$. Alors $\tau_3 = \sigma_{\alpha_1+\alpha_3}\sigma_{\alpha_5+\alpha_6}$. On a $\sigma_{\alpha_5+\alpha_6} = \theta(\sigma_{\alpha_1+\alpha_3})$. On a déjà introduit les racines $\underline{\alpha}_2 = \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ et $\underline{\alpha}_4 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4$. Posons $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$. Le groupe $SL(2)$ associé à la racine $\alpha_1 + \alpha_3$ conserve les plans $\mathfrak{u}_{\underline{\alpha}_2} \oplus \mathfrak{u}_\delta$ et $\mathfrak{u}_{\underline{\alpha}_4} \oplus \mathfrak{u}_{\alpha_4}$. L'automorphisme $Ad(\sigma_{\alpha_1+\alpha_3})$ appartient à ce groupe $SL(2)$ et agit sur ces plans en permutant les deux droites indiquées. Le carré de cet automorphisme agit par multiplication par -1 sur les deux plans. Posons $E'_\delta = Ad(\sigma_{\alpha_1+\alpha_3})(\dot{E}_{\underline{\alpha}_2})$ et $E'_{\alpha_4} = Ad(\sigma_{\alpha_1+\alpha_3})(\dot{E}_{\underline{\alpha}_4})$. On a donc $E'_\delta \in \mathfrak{u}_\delta$ et $E'_{\alpha_4} \in \mathfrak{u}_{\alpha_4}$. On a aussi $Ad(\sigma_{\alpha_1+\alpha_3})(E'_\delta) = -\dot{E}_{\underline{\alpha}_2}$ et $Ad(\sigma_{\alpha_1+\alpha_3})(E'_{\alpha_4}) = -\dot{E}_{\underline{\alpha}_4}$. Appliquons l'automorphisme θ aux égalités précédentes. Cet automorphisme permute $\sigma_{\alpha_1+\alpha_6}$ et $\sigma_{\alpha_5+\alpha_6}$ et permute $\dot{E}_{\underline{\alpha}_2}$ et $\dot{E}_{\underline{\alpha}_4}$. Les racines α_4 et δ sont fixées par θ, donc θ agit par l'identité sur $\mathfrak{u}_{\alpha_4}$ et $\mathfrak{u}_\delta$. On obtient $E'_\delta = Ad(\sigma_{\alpha_5+\alpha_6})(\dot{E}_{\underline{\alpha}_4})$, $E'_{\alpha_4} = Ad(\sigma_{\alpha_5+\alpha_6})(\dot{E}_{\underline{\alpha}_2})$, $Ad(\sigma_{\alpha_5+\alpha_6})(E'_\delta) = -\dot{E}_{\underline{\alpha}_4}$ et $Ad(\sigma_{\alpha_5+\alpha_6})(E'_{\alpha_2}) = -\dot{E}_{\underline{\alpha}_2}$. On a alors

$$Ad(\tau_3)(\dot{E}_{\underline{\alpha}_2}) = Ad(\sigma_{\alpha_1+\alpha_3})Ad(\sigma_{\alpha_5+\alpha_6})(\dot{E}_{\underline{\alpha}_2}) = Ad(\sigma_{\alpha_1+\alpha_3})(E'_{\alpha_4}) = -\dot{E}_{\underline{\alpha}_4}.$$

De même, $Ad(\tau_3)(\dot{E}_{\underline{\alpha}_4}) = -\dot{E}_{\underline{\alpha}_2}$. L'assertion (2) en résulte puisque $E_{\underline{\beta}_{2,4}} = \dot{E}_{\underline{\alpha}_2} + \dot{E}_{\underline{\alpha}_4}$.

La preuve de (3) est similaire. Elle est un peu plus compliquée car $E_{\underline{\beta}_0} = E_{\beta_0}$ n'est pas égal à $\dot{E}_{\alpha_0'} + \dot{E}_{\alpha_0''}$ mais à $\varpi_E(\dot{E}_{\alpha_0'} - \dot{E}_{\alpha_0''})$. Pour $\alpha = \alpha_0'$ ou α_0'', posons $\sigma_\alpha = exp(\dot{E}_\alpha)exp(-\dot{E}_{-\alpha})exp(\dot{E}_\alpha)$. Soient $x', x'' \in \bar{F}^\times$ tels que $x'^2 = \varpi_E$ et $x''^2 = -\varpi_E$. Posons $t_0' = \check{\alpha}_0'(x')$ et $t_0'' = \check{\alpha}_0''(x'')$. Alors $S^H(w_{*,1}) = t_0'\sigma_{\alpha_0'}t_0'^{-1}t_0''\sigma_{\alpha_0''}t_0''^{-1}$. On en déduit comme dans la preuve de (2) l'égalité $\tau_1 = t'\sigma_{\alpha_6}\sigma_{\alpha_0'}\sigma_{\alpha_6}^{-1}t'^{-1}t''\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_0''}\sigma_{\alpha_1}^{-1}t''^{-1}$, où $t' = Ad(\sigma_{\alpha_6})(t_0')$ et $t'' = Ad(\sigma_{\alpha_1})(t_0'')$. Posons $\delta' = \alpha_0' + \alpha_6$, $\delta'' = \alpha_0'' + \alpha_1$, $\sigma_{\delta'} = \sigma_{\alpha_6}\sigma_{\alpha_0'}\sigma_{\alpha_6}^{-1}$ et $\sigma_{\delta''} = \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_0''}\sigma_{\alpha_1}^{-1}$. On a $t' = \check{\delta}'(x')$, $t'' = \check{\delta}''(x'')$ et $\tau_1 = t'\sigma_{\delta'}t'^{-1}t''\sigma_{\delta''}t''^{-1}$. Posons $\gamma' = -(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$ et $\gamma'' = -(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)$. Le groupe $SL(2)$ associé à δ' conserve les plans $\mathfrak{u}_{\underline{\alpha}_2} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma'}$ et $\mathfrak{u}_{\underline{\alpha}_4} \oplus \mathfrak{u}_{\gamma''}$. L'élément $Ad(\sigma_{\delta'})$ appartient à ce groupe $SL(2)$ et permute les deux droites indiquées. Posons $E'_{\gamma'} = Ad(\sigma_{\delta'})(\dot{E}_{\underline{\alpha}_2})$ et $E'_{\gamma''} = Ad(\sigma_{\delta'})(\dot{E}_{\underline{\alpha}_4})$. Alors $E'_{\gamma'} \in \mathfrak{u}_{\gamma'}$ et $E'_{\gamma''} \in \mathfrak{u}_{\gamma''}$. On a aussi $Ad(\sigma_{\delta'})(E'_{\gamma'}) = -\dot{E}_{\underline{\alpha}_2}$ et

$Ad(\sigma_{\delta''})(E'_{\gamma''}) = -\dot{E}_{\underline{\alpha}_4}$. On a $< \underline{\alpha}_2, \check{\delta}' >=< \gamma'', \check{\delta}' >= 1$ et $< \underline{\alpha}_4, \check{\delta}' >=< \gamma', \check{\delta}' >= -1$. Donc $Ad(t')$ multiplie $\dot{E}_{\underline{\alpha}_2}$ et $E'_{\gamma''}$ par x'^2 et multiplie $\dot{E}_{\underline{\alpha}_4}$ et $E'_{\gamma'}$ par x'^{-2}. On en déduit

$$Ad(t'\sigma_{\delta'}t'^{-1})(\dot{E}_{\underline{\alpha}_2}) = x'^{-2}E'_{\gamma'},\ Ad(t'\sigma_{\delta'}t'^{-1})(E'_{\gamma'}) = -x'^2\dot{E}_{\underline{\alpha}_4},$$

$$Ad(t'\sigma_{\delta'}t'^{-1})(\dot{E}_{\underline{\alpha}_4}) = x'^2E'_{\gamma''},\ Ad(t'\sigma_{\delta'}t'^{-1})(E'_{\gamma''}) = -x'^{-2}\dot{E}_{\underline{\alpha}_4}.$$

Comme dans la preuve de (2), l'action de $t''\sigma_{\delta''}t''^{-1}$ se déduit essentiellement des formules précédentes en appliquant l'automorphisme θ. Celui-ci fixe $E'_{\gamma'}$ et $E'_{\gamma''}$ car les racines γ' et γ'' sont fixées par θ. Toutefois, ici, $t''\sigma_{\delta''}t''^{-1}$ ne se déduit pas de $t'\sigma_{\delta'}t'^{-1}$ en appliquant θ, mais aussi en changeant x' en x''. On obtient

$$Ad(t''\sigma_{\delta''}t''^{-1})(\dot{E}_{\underline{\alpha}_2}) = x''^2E'_{\gamma''},\ Ad(t''\sigma_{\delta''}t''^{-1})(E'_{\gamma''}) = -x''^{-2}\dot{E}_{\underline{\alpha}_2},$$

$$Ad(t''\sigma_{\delta''}t''^{-1})(\dot{E}_{\underline{\alpha}_4}) = x''^{-2}E'_{\gamma'},\ Ad(t''\sigma_{\delta''}t''^{-1})(E'_{\gamma'}) = -x''^2\dot{E}_{\underline{\alpha}_4}.$$

D'où

$$\begin{aligned} Ad(\tau_1)(\dot{E}_{\underline{\alpha}_2}) &= Ad(t'\sigma_{\delta'}t'^{-1})Ad(t''\sigma_{\delta''}t''^{-1})(\dot{E}_{\underline{\alpha}_2}) \\ &= x''^2Ad(t'\sigma_{\delta'}t')-^{-1})(E'_{\gamma''}) = -x''^2x'^{-2}\dot{E}_{\underline{\alpha}_4}. \end{aligned}$$

Mais $-x''^2x'^{-2} = 1$, d'où $Ad(\tau_1)(\dot{E}_{\underline{\alpha}_2}) = \dot{E}_{\underline{\alpha}_4}$. On prouve de même l'égalité $Ad(\tau_1)(\dot{E}_{\underline{\alpha}_4}) = \dot{E}_{\underline{\alpha}_2}$. Cela démontre (3), d'où (1).

En conséquence de (1), et parce que $\boldsymbol{\epsilon} = 1$, on a

(4) $\epsilon_N \circ a(n) = 1$.

Il est clair que $\epsilon_N^\flat \circ c_s(n)$ est égal au terme $\epsilon_N^\flat(S_*(w_*))$ calculé dans G_*. On utilise la même méthode qu'en 4.4.9, en posant $\underline{N}_* = \bar{E}_{\beta_0} + \bar{E}_{\beta_{1,6}} + \bar{E}_{\beta_{3,5}}$ et $Z = \check{\beta}_0 + 2\check{\beta}_{1,6} + \check{\beta}_{3,5} \in \mathfrak{t}_s$. Le calcul matriciel dans $G_* \simeq SL(4)$ est facile. Avec les notations de 4.4.9 (5), on trouve

$$t_\nu = (\check{\beta}_0 + 2\check{\beta}_{1,6} + \check{\beta}_{3,5})(2\nu)^{-2}.$$

Mais $\check{\beta}_0 + 2\check{\beta}_{1,6} + \check{\beta}_{3,5}$ appartient à $X_*(Z(M_*)^0)$. Conformément à 4.4.9(6), on en déduit $\epsilon_N^\flat \circ c_s(n) = 1$. En comparant avec (4), on obtient $\mu_{\beta_4} = 1$. Avec 4.4.12(3), cela démontre le lemme 4.4.4 dans le cas où G est de type (E_6, ram) et cela achève la preuve de ce lemme.

4.4.14 La situation sur F

Soit G un groupe réductif connexe défini sur F, que l'on suppose adjoint, absolument simple et quasi-déployé. Soient M un F-Levi propre de G, s_M un sommet de $Imm(M_{AD})$ et $\mathcal{E}$ un élément de $\mathbf{FC}^{st}_{s_M,\mathbb{F}_q}$. On fixe $N \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. Puisque M est un F-Levi, le groupe Γ_F^{nr} agit sur $W^{I_F}(M)$. On se rappelle la condition $C(x,\mu)$ de 4.4.2.

Lemme. *(i) Il existe un unique caractère $\mu : W^{I_F}(M) \to \mathbb{C}^\times$ de sorte que, pour tout sommet $s \in Imm^G(M)$ tel que $p_M(s) = s_M$, la condition $C(s,\mu)$ soit vérifiée.*

(ii) Ce caractère est fixé par l'action de Γ_F^{nr}.

Preuve. Les hypothèses de 4.4.1 et 4.4.2 sont vérifiées. Le théorème 4.4.2 nous fournit un caractère μ tel que $C(x,\mu)$ soit vérifiée pour tout $x \in Imm^G_{F^{nr}}(M_{ad})$ tel que $p_M(x) = s_M$. A fortiori, $C(s,\mu)$ est vérifiée pour tout sommet $s \in Imm^G(M)$ tel que $p_M(s) = s_M$. D'où l'existence de μ vérifiant la condition du (i) de l'énoncé. On doit

démontrer son unicité. Supposons d'abord que M soit un tore. Alors $Imm^G(M)$ est un appartement de $Imm(G)$ et la condition $p_M(s) = s_M$ est vérifiée pour tout sommet de cet appartement. Considérons un sommet spécial de cet appartement. Alors l'homomorphisme $j_{W,W_s} : W_s \to W^{I_F}$ est bijectif. La condition $C(s,\mu)$ détermine μ sur l'image de cet homomorphisme, donc détermine entièrement μ, ce qui prouve l'unicité de ce caractère. Supposons maintenant que M ne soit pas un tore. Notons $\mathcal{S}^{nr}$ l'ensemble des sommets $s \in Imm^G_{F^{nr}}(M)$ tels que $p_M(s) = s_M$. Considérons un sous-ensemble $\underline{\mathcal{S}}^{nr} \subset \mathcal{S}^{nr}$ vérifiant la condition suivante : pour tout $s \in \mathcal{S}^{nr}$, il existe $g \in G(F^{nr})$ et $\underline{s} \in \underline{\mathcal{S}}^{nr}$ de sorte que l'action de g transporte (s, M, s_M) sur $(\underline{s}, M, s_M)$. Comme on l'a remarqué en 4.4.4, la condition $C(s,\mu)$ est invariante par conjugaison par $G(F^{nr})$ du triplet (s, M, s_M). Donc l'unicité affirmée dans l'assertion (i) du théorème 4.4.2 reste vraie si on s'y limite aux sommets $s \in \underline{\mathcal{S}}^{nr}$. Introduisons un épinglage de G et un épinglage affine, tous deux conservés par l'action galosienne, dont on déduit les objets de 2.1.9. Introduisons le sous-ensemble $\Lambda \subset \Delta_a^{nr}$ associé en 2.2.16 au couple (M, s_M). On peut supposer que $(M, s_M) = (M_\Lambda, s_\Lambda)$. D'après 2.2.16(5), l'ensemble Λ est conservé par l'action de $\mathbf{\Omega}^{nr}$. Introduisons un sous-ensemble de représentants Ξ des orbites pour l'action de $\mathbf{\Omega}^{nr}$ dans $\Delta_a^{nr} - \Lambda$. La proposition 2.2.16 entraîne que l'on peut prendre pour $\underline{\mathcal{S}}^{nr}$ l'ensemble des sommets s_α associés aux $\alpha \in \Xi$. Pour en déduire l'unicité du (i) de l'énoncé, il suffit de prouver que l'on peut choisir Ξ de sorte que $s_\alpha \in Imm^G(M_\Lambda)$ pour tout $\alpha \in \Xi$, autrement dit de sorte que l'action de Γ_F^{nr} sur Ξ soit triviale. Si G n'est pas déployé sur F^{nr} ou si G est déployé sur F, l'action de Γ_F^{nr} sur Δ_a^{nr} est triviale et l'assertion s'ensuit. Supposons que G est déployé sur F^{nr} mais pas sur F. Les hypothèses que M n'est pas un tore et que l'ensemble $\mathbf{FC}^{st}_{s_M,\mathbb{F}_q}$ est non vide excluent le cas où G est de type A_{n-1}. Supposons que G soit de type D_n avec $n \geq 4$ et que le Frobenius Fr agisse sur $\mathcal{D}$ par l'automorphisme θ d'ordre 2 habituel qui permute α_{n-1} et α_n. On a vu en 2.2.16 que ces deux racines sont contenues dans Λ. Donc Γ_F^{nr} agit trivialement sur $\Delta_a^{nr} - \Lambda$. Supposons que G soit de type D_4 et que Fr agisse sur $\mathcal{D}$ par un automorphisme θ_3 d'ordre 3. On a vu en 2.2.16 que $\Delta_a - \Lambda = \{\alpha_2\}$. Mais α_2 est fixe par θ_3, donc Γ_F^{nr} agit trivialement sur $\Delta_a^{nr} - \Lambda$. Supposons enfin que G soit de type E_6 et que Fr agisse sur $\mathcal{D}$ par l'unique automorphisme non trivial θ de ce diagramme. D'après 2.2.16, on a $\Delta_a - \Lambda = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$. L'automorphisme θ fixe α_2 et permute α_3 et α_5. Mais le groupe $\mathbf{\Omega}$ permute cycliquement les trois racines. On peut donc choisir $\underline{\mathcal{S}}^{nr} = \{\alpha_2\}$ et cet ensemble vérifie la condition requise. Cela prouve (i).

Soit $s \in Imm^G(M)$ un sommet tel que $p_M(s) = s_M$. Le groupe Γ_F^{nr} agit sur tous les groupes intervenant dans la définition de la condition $C(s,\mu)$, par exemple sur $K_s^{0,nr} \cap Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M, N)$. Les homomorphismes c_s, b et a sont équivariants pour ces actions. Les caractères ϵ_N et $\epsilon_N^\flat$ sont invariants par cette action, cf. $Hyp(4, N)$ et 2.2.5(2). Il en résulte immédiatement que les conditions $C(s, \mu \circ Fr)$ et $C(s,\mu)$ sont équivalentes. L'unicité de μ démontrée au (i) entraîne l'égalité $\mu \circ Fr = \mu$. Cela prouve (ii). $\square$

4.4.15 Le théorème principal

Soit G un groupe réductif connexe défini sur F, que l'on suppose adjoint, absolument simple et quasi-déployé. Soient M un F-Levi propre de G, s_M un sommet de $Imm(M_{AD})$ et $\mathcal{E}$ un élément de $\mathbf{FC}^{st}_{s_M,\mathbb{F}_q}$.

Soit s un sommet de $Imm^G(M)$ et tel que $p_M(s) = s_M$. Soit $g \in K_s^{0,nr}$ un élément tel que $Fr(g)g^{-1} \in Norm_{G(F^{nr})}(M)$. Parce que $g \in K_s^{0,nr}$, l'élément $Fr(g)g^{-1}$ ap-

partient à $Norm_{G(F^{nr})}(M, s_M)$, on note $w_g = b(Fr(g)g^{-1})$ son image dans $W^{I_F}(M)$. Posons $H = g^{-1}Mg$. Le groupe H appartient à $\mathcal{L}_F^{nr,st}$. La restriction de $Ad(g)$ à H est un isomorphisme de H sur M défini sur F^{nr}, dont on déduit un isomorphisme $Imm_{F^{nr}}(H_{AD}) \to Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$. On note s_H l'image réciproque de s_M par cet isomorphisme. Puisque g fixe s, le sommet s appartient à $Imm^G(H)$ et on a $p_H(s) = s_H$. Il s'en déduit que $s_H \in Imm(H_{AD})$. En notant $\bar{g}$ la réduction de g dans G_s, on a $H_{s_H} = \bar{g}^{-1}M_{s_M}\bar{g}$. L'automorphisme $Ad(\bar{g})^{-1}$ transporte le faisceau-caractère $\mathcal{E}$ sur un faisceau-caractère $\mathcal{E}_H \in \mathbf{FC}^{st}_{s_H,\mathbb{F}_q}$. Notons $\mathcal{O}_H$ l'orbite nilpotente de $\mathfrak{h}_{s_H,SC}$ supportant le faisceau $\mathcal{E}_H$ et fixons $N_H \in \mathcal{O}_H^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. Fixons une action de Frobenius sur $\mathcal{E}$. Il y a deux façons d'en déduire une action de Frobenius sur $\mathcal{E}_H$. L'une est la méthode de Lusztig expliquée en 2.2.5 appliquée à l'élément $\bar{g}$. Elle fournit une action de Frobenius déterminée par un scalaire que l'on note $r^\flat_{N_H}$. L'autre est celle de 4.1.5. Elle fournit une action de Frobenius déterminée par un scalaire que l'on note r_{N_H}. Le lemme 4.4.14 nous fournit un caractère μ de W^{I_F}.

Théorème. *Pour g et N_H comme ci-dessus, on a l'égalité $r^\flat_{N_H} = \mu(w_g)r_{N_H}$.*

Preuve. Fixons $N \in \mathcal{O}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. L'action de Frobenius sur $\mathcal{E}$ est déterminée par un scalaire r_N. On peut multiplier g à gauche par un élément de $K^{M,0,nr}_{s_M}$ de sorte que $gFr(g)^{-1} \in Norm_{G(F^{nr}}(M, s_M, N)$. Cela ne change pas w_g et cela ne change rien aux constructions des actions de Frobenius sur $\mathcal{E}_H$. L'élément $Ad(\bar{g})^{-1}(N)$ est un élément de $\mathcal{O}_H^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. D'après 2.2.5(1), l'égalité de l'énoncé ne dépend pas du choix de N_H.On peut donc supposer que $N_H = Ad(\bar{g})^{-1}(N)$. Il résulte des définitions qu'alors $r_{N_H} = r_N\epsilon_N \circ a(Fr(g)g^{-1})$ et $r^\flat_{N_H} = r_N\epsilon^\flat_{s,N} \circ c_s(Fr(g)g^{-1})$. L'assertion du théorème résulte alors de la propriété $C(s, \mu)$ vérifiée d'après le lemme 4.4.14. □

5 Relation avec les faisceaux-caractères unipotents sur un groupe fini

5.1 Quelques constructions

5.1.1 Le groupe G

Dans cette section, notre objet d'étude est le groupe $\mathbf{G}$ introduit en 2.1.10. Il est plus commode d'oublier la provenance p-adique de ce groupe et de le considérer directement comme un groupe défini sur $\mathbb{F}_q$. Toutefois, pour certains points, il est utile de réintroduire de façon occulte le groupe p-adique initial. C'est la raison des constructions de ce premier paragraphe.

Soit G un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$. On impose l'hypothèse $(Hyp)_1(p)$.

Pour cette première sous-section , on suppose que G est adjoint et absolument simple. On fixe une paire de Borel épinglée $\mathfrak{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ définie sur $\mathbb{F}_q$. On complète l'épinglage en un épinglage affine $\mathfrak{E}_a = (T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta_a})$ lui-aussi défini sur $\mathbb{F}_q$, c'est-à-dire que l'on fixe un élément non nul $E_{\alpha_0} \in \mathfrak{u}_{\alpha_0}$ fixé par $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$.

Introduisons le groupe réductif connexe G_F défini et quasi-déployé sur F qui a même données de racines que G. Cela signifie que l'on peut fixer une paire de Borel épinglée $\mathfrak{E}_F = (B_F, T_F, (E_{F,\alpha})_{\alpha\in\Delta})$ de G_F définie sur F et des isomorphismes duaux $X_*(T_F) \to X_*(T)$ et $X^*(T_F) \to X^*(T)$ qui transportent les racines et racines simples, resp. coracines et coracines simples, de T_F sur celles de T. De plus, G_F est déployé sur F^{nr} et les

isomorphismes ci-dessus sont équivariants pour les actions de $\Gamma_F^{nr} \simeq \Gamma_{\mathbb{F}_q}$. En 2.1.10, on a associé à ces données un groupe $\mathbf{G}$ muni d'un épinglage et il est clair que $\mathbf{G}$ s'identifie à G, l'épinglage en question s'identifiant à $\mathfrak{E}$. L'espace $\mathfrak{g}$ s'identifie à $\mathfrak{g}_{F,s_0}$. On peut relever E_{α_0} en un élément de $E'_{F,\alpha_0} \in \mathfrak{k}_{F,s_0}^{nr} \cap \mathfrak{u}_{F,\alpha_0}(F)$. On fixe une uniformisante ϖ_F de F et on pose $E_{F,\alpha_0} = \varpi_F E'_{F,\alpha_0}$. Alors $\mathfrak{E}_{F,a} = (T_F, (E_{F,\alpha})_{\alpha\in\Delta_a})$ est un épinglage affine de G_F défini sur F.

Cette construction nous permet d'utiliser les définitions de 2.1.9 et 2.1.10. En particulier, on dispose de l'alcôve $C^{nr} \subset App_{F^{nr}}(T_F) \subset Imm_{F^{nr}}(G_F)$, du groupe $\mathbb{T}$, de son plongement $a_T : \mathbb{T} \to App_{F^{nr}}(T_F)$ et de l'homomorphisme surjectif $j_T : \mathbb{T} \to T$. Puisque G_F est adjoint, le plongement a_T est injectif et, comme en 3.2.1, on note $\mathbf{j}_T : a_T(\mathbb{T}) \to T$ l'application $j_T \circ a_T^{-1}$. Les groupes G et G_F ont même groupe de Weyl W. Notons $\tilde{W}$ le groupe de transformations de $App_{F^{nr}}(T_F)$ engendré par W et le groupe des translations par $X_*(T)$. Il respecte le sous-ensemble $a_T(\mathbb{T})$ et, pour tout $x \in a_T(\mathbb{T})$, il existe $\tilde{w} \in \tilde{W}$ tel que $\tilde{w}(x) \in a_T(\mathbb{T}) \cap \bar{C}^{nr}$. On fait agir $\tilde{W}$ sur T : l'action de W est l'action naturelle et les translations par $X_*(T)$ agissent trivialement. L'homomorphisme $\mathbf{j}_T$ est équivariant pour les actions de $\tilde{W}$. Donc

(1) pour tout $t \in T$, il existe $x \in \bar{C}^{nr} \cap a_T(\mathbb{T})$ et $w \in W$ de sorte que $\mathbf{j}_T(x) = w(t)$.

Soit $x \in \bar{C}^{nr} \cap a_T(\mathbb{T})$. On note $\Lambda(x)$ l'ensemble des $\alpha \in \Delta_a$ telles que $\alpha^{aff}(x) = 0$. Posons $t = \mathbf{j}_T(x)$. Montrons que

(2) le système de racines de G_t relatif au tore T a pour base $\Lambda(x)$.

En effet, notons $\mathcal{F}$ la facette de $Imm_{F^{nr}}(G_F)$ à laquelle appartient x. Le système de racines du groupe $G_{F,\mathcal{F}}$ a pour base $\Lambda(x)$. On a introduit en 2.1.11 un plongement $\iota_{x,\mathcal{F}} : G_{F,\mathcal{F}} \to G$. Son image est justement le groupe G_t. Le plongement étant déduit d'une conjugaison par un élément de T_F, il identifie les ensembles de racines de ces groupes. L'assertion (2) s'ensuit.

Pour $\alpha \in \Delta_a$, le sommet s_α associé à α appartient à $\mathbb{T}$. On pose $t_\alpha = \mathbf{j}_T(s_\alpha)$. Introduisons la base $(\check{\varpi}_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ de $X_*(T)$ duale de Δ. On se rappelle la relation

$$(3) \qquad \sum_{\alpha\in\Delta_a} d(\alpha)\alpha = 0$$

où $d(\alpha_0) = 1$. On cacule aisément $t_{\alpha_0} = 1$ et $t_\alpha = \check{\varpi}_\alpha(\bar{\zeta}_{1/d(\alpha)})$ pour $\alpha \in \Delta$.

5.1.2 Conjugaison des éléments t_α

Soient $\alpha, \alpha' \in \Delta_a$. Notons $Aut(G, t_\alpha \mapsto t_{\alpha'})$ l'ensemble des automorphismes de G qui envoient t_α sur $t_{\alpha'}$ (cet ensemble peut être vide). Posons $Int(G, t_\alpha \mapsto t_{\alpha'}) = Ad(G) \cap Aut(G, t_\alpha \mapsto t_{\alpha'})$ (rappelons que, puisque G est adjoint, l'homomorphisme Ad identifie G au sous-groupe $Ad(G)$ de $Aut(G)$). On a introduit un sous-groupe $\mathbf{\Omega}$ de G en 2.1.8. Notons $\mathbf{\Omega}(\alpha \mapsto \alpha')$ l'ensemble des éléments $\omega \in \mathbf{\Omega}$ tels que $\omega(\alpha) = \alpha'$. Si G n'est pas de type A_{n-1} avec n impair, on a introduit un groupe $\mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a)$ en 2.1.8. Notons $\mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a, \alpha \mapsto \alpha')$ l'ensemble des $\delta \in \mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a)$ tels que $\delta(\alpha) = \alpha'$. Dans le cas où $\alpha = \alpha'$, on a simplement $Int(G, t_\alpha \mapsto t_\alpha) = Z_G(t_\alpha)$ et on simplifie les autres notations en $Aut(G, t_\alpha)$, $\mathbf{\Omega}(\alpha)$ et $\mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a, \alpha)$.

Lemme. *Soient $\alpha, \alpha' \in \Delta_a$.*

(i) Soit $\delta \in Aut(G, t_\alpha \mapsto t_{\alpha'})$. Supposons que δ conserve T et envoie l'ensemble de racines $\Delta_a - \{\alpha\}$ sur $\Delta_a - \{\alpha'\}$. Alors δ envoie α sur α'.

(ii) L'application produit $Ad(Z_G(t_{\alpha'})^0) \times \mathbf{\Omega}(\alpha \mapsto \alpha') \to Aut(G)$ est injective et son image est $Int(G, t_\alpha \mapsto t_{\alpha'})$.

(iii) Supposons que G n'est pas de type A_{n-1} avec n impair. L'application produit $Ad(Z_G(t_{\alpha'})^0) \times \mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a, \alpha \mapsto \alpha') \to Aut(G)$ est injective et son image est $Aut(G, t_\alpha \mapsto t_{\alpha'})$.

Preuve. Soit δ vérifiant les conditions de (i). Puisque t_α, resp. $t_{\alpha'}$, est un élément de G d'ordre $d(\alpha)$, resp. $d(\alpha')$, l'égalité $\delta(t_\alpha) = t_{\alpha'}$ implique $d(\alpha) = d(\alpha')$. Supposons d'abord $d(\alpha') = d(\alpha) = 1$. Il existe alors $\omega, \omega' \in \mathbf{\Omega}$ tels que $\omega(\alpha_0) = \alpha$ et $\omega'(\alpha') = \alpha_0$, cf. 2.1.8(2). L'automorphisme $\omega'\delta\omega$ conserve T et l'ensemble $\Delta_a - \{\alpha_0\} = \Delta$. Donc il conserve le sous-ensemble Σ^+ des racines positives, donc conserve la plus grande racine $-\alpha_0$. Cela entraîne que δ envoie α sur α'. Supposons maintenant que $d(\alpha') = d(\alpha) \neq 1$, a fortiori $\alpha, \alpha' \neq \alpha_0$. Appliquons δ à la relation 5.1.1(3). On obtient

$$d(\alpha)\delta(\alpha) + \sum_{\gamma \in \Delta_a - \{\alpha\}} d(\gamma)\delta(\gamma) = 0,$$

ou encore

$$\delta(\alpha) = -\sum_{\gamma \in \Delta_a - \{\alpha'\}} d(\alpha)^{-1} d(\delta^{-1}(\gamma))\gamma.$$

Dans le deuxième membre, on exprime la racine $\alpha_0 \in \Delta_a - \{\alpha'\}$ grâce à 5.1.1(3). En tenant compte de l'égalité $d(\alpha) = d(\alpha')$, on obtient

$$(1) \qquad \delta(\alpha) = d(\delta^{-1}(\alpha_0))\alpha' + \sum_{\gamma \in \Delta - \{\alpha'\}} d(\alpha)^{-1}(d(\delta^{-1}(\alpha_0))d(\gamma) - d(\delta^{-1}(\gamma)))\gamma.$$

C'est l'écriture de la racine $\delta(\alpha)$ dans la base Δ. Donc les coefficients du membre de droite sont entiers, tous de même signe, et la valeur absolue du coefficient d'une racine $\gamma \in \Delta$ est majorée par $d(\gamma)$. En appliquant cela au coefficient de α', on obtient $d(\delta^{-1}(\alpha_0)) \leq d(\alpha')$. Puisque δ transporte (α, t_α) sur $(\delta(\alpha), t_{\alpha'})$, on a $\delta(\alpha)(t_{\alpha'}) = \alpha(t_\alpha) = \bar{\zeta}_{1/d(\alpha)} = \bar{\zeta}_{1/d(\alpha')}$. D'après (1), on a $< \delta(\alpha), \check{\varpi}_{\alpha'} >= d(\delta^{-1}(\alpha_0))$. De la définition de $t_{\alpha'}$ résulte l'égalité $\delta(\alpha)(t_{\alpha'}) = \bar{\zeta}_{d(\delta^{-1}(\alpha_0))/d(\alpha')}$. En comparant les deux égalités précédentes, on obtient $d(\delta^{-1}(\alpha_0)) \equiv 1 \ mod \ d(\alpha')\mathbb{Z}$. Avec l'inégalité $d(\delta^{-1}(\alpha_0)) \leq d(\alpha')$, cela entraîne $d(\delta^{-1}(\alpha_0)) = 1$. Pour $\gamma \in \Delta - \{\alpha'\}$, le coefficient de γ dans l'expression (1) est donc $d(\alpha)^{-1}(d(\gamma) - d(\delta^{-1}(\gamma)))$. Montrons que

(2) la somme de ces coefficients est nulle.

Parce que $d(\delta^{-1}(\alpha_0)) = 1 = d(\alpha_0)$, on a

$$\sum_{\gamma \in \Delta - \{\alpha'\}} (d(\gamma) - d(\delta^{-1}(\gamma))) = \sum_{\gamma \in \Delta_a - \{\alpha'\}} (d(\gamma) - d(\delta^{-1}(\gamma)))$$

$$= (\sum_{\gamma \in \Delta_a - \{\alpha'\}} d(\gamma)) - (\sum_{\gamma \in \Delta_a - \{\alpha'\}} d(\delta^{-1}(\gamma)))$$

$$(\sum_{\gamma \in \Delta_a - \{\alpha'\}} d(\gamma)) - (\sum_{\gamma \in \Delta_a - \{\alpha\}} d(\gamma)) = (\sum_{\gamma \in \Delta_a} d(\gamma)) - d(\alpha') - (\sum_{\gamma \in \Delta_a} d(\gamma)) + d(\alpha).$$

Ceci est nul puisque $d(\alpha) = d(\alpha')$. Cela prouve (2).

Puisque tous les coefficients sont de même signe, (2) entraîne qu'ils sont nuls. Alors (1) se simplifie en $\delta(\alpha) = \alpha'$, ce qui prouve l'assertion (i) de l'énoncé.

Soit $\omega \in \mathbf{\Omega}(\alpha \mapsto \alpha')$. Alors ω conserve T et Δ_a et envoie α sur α' donc aussi $\Delta_a - \{\alpha\}$ sur $\Delta_a - \{\alpha'\}$. D'après 2.1.8 (3), on a $d(\alpha) = d(\alpha')$. On voit alors que $\omega(t_\alpha)$ vérifie

les relations : $\alpha'(\omega(t_\alpha)) = \bar{\zeta}_{1/d(\alpha')}$ et $\gamma(\omega(t_\alpha)) = 1$ pour $\gamma \in \Delta_a - \{\alpha'\}$. Ces relations caractérisent $t_{\alpha'}$ donc $\omega(t_\alpha) = t_{\alpha'}$. Cela prouve que $\omega \in Int(G, t_\alpha \mapsto t_{\alpha'})$. Il en résulte que l'image de l'application de (ii) est contenue dans cet ensemble. Inversement, soit $g \in G$ tel que $Ad(g) \in Int(G, t_\alpha \mapsto t_{\alpha'})$. Alors $Ad(g)$ envoie $Z_G(t_\alpha)^0$ sur $Z_G(t_{\alpha'})^0$. Cet automorphisme transporte T en un sous-tore maximal T' de $Z_G(t_{\alpha'})^0$ et transporte la base $\Delta_a - \{\alpha\}$ du système de racines de $Z_G(t_\alpha)^0$ relatif à T en une base $\Delta(\alpha')$ du système de racines de $Z_G(t_{\alpha'})^0$ relatif à T'. D'après 5.1.1(2), il existe $h \in Z_G(t_{\alpha'})^0$ tel que $Ad(h)$ transporte T en T' et $\Delta_a - \{\alpha'\}$ en $\Delta(\alpha')$. Alors $Ad(h^{-1}g)$ conserve T et envoie $\Delta_a - \{\alpha\}$ sur $\Delta_a - \{\alpha'\}$. Cet automorphisme envoie t_α sur $t_{\alpha'}$ d'après l'hypothèse sur g. D'après (i), il envoie α sur α' . Son image dans le groupe de Weyl appartient donc à Ω. Introduisons l'élément $\omega \in \mathbf{\Omega}$ qui a la même image dans le groupe de Weyl. On a $\omega \in \mathbf{\Omega}(\alpha \mapsto \alpha')$. Posons $t = h^{-1}g\omega^{-1}$. Alors $Ad(t)$ conserve T et agit trivialement sur Δ_a. A fortiori, il agit trivialement sur Δ donc conserve B. Alors $t \in T \subset Z_G(t_{\alpha'})^0$. On a $Ad(g) = Ad(ht\omega) \in Ad(Z_G(t_{\alpha'})^0)\mathbf{\Omega}(\alpha \mapsto \alpha')$, ce qui démontre la première assertion de (ii). Soient $z_1, z_2 \in Z_G(t_{\alpha'})^0$ et $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{\Omega}(\alpha \mapsto \alpha')$. Supposons $z_1\omega_1 = z_2\omega_2$. Posons $g = z_2^{-1}z_1 = \omega_2\omega_1^{-1}$. Alors $g \in Z_G(t_{\alpha'})^0 \cap \mathbf{\Omega}(\alpha')$. L'automorphisme $Ad(g)$ conserve T, Δ_a et α'. Donc cet automorphisme conserve $\Delta_a - \{\alpha'\}$. Puisque $g \in Z_G(t_{\alpha'})^0$, $Ad(g)$ se restreint à $Z_G(t_{\alpha'})^0$ en un automorphisme intérieur. Puisque $\Delta_a - \{\alpha'\}$ est une base du système de racines de ce groupe, $Ad(g)$ agit par l'identité sur $\Delta_a - \{\alpha'\}$, donc aussi sur Δ_a. Puisque $g \in \mathbf{\Omega}$, cela entraîne $g = 1$. Cela démontre (ii).

La preuve de (iii) est similaire. □

Dans le cas où $\alpha = \alpha'$, les assertions (ii) et (iii) deviennent

(3) on a les égalités $Z_G(t_\alpha) = Z_G(t_\alpha)^0\mathbf{\Omega}(\alpha)$ et $Z_G(t_\alpha)^0 \cap \mathbf{\Omega}(\alpha) = \{1\}$;

(4) si G n'est pas de type A_{n-1} avec n impair, on a les égalités $Aut(G, t_\alpha) = Ad(Z_G(t_\alpha)^0)\mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a, \alpha)$ et $Ad(Z_G(t_\alpha)^0) \cap \mathbf{Aut}(\mathcal{D}_a, \alpha) = \{1\}$.

5.1.3 Construction de Levi

Soit Λ un sous-ensemble de Δ_a tel que $\Lambda \neq \Delta_a$. Notons A_Λ la composante neutre du sous-groupe des $t \in T$ tels que $\alpha(t) = 1$ pour tout $\alpha \in \Lambda$. C'est un sous-tore de T. Le groupe $X_*(A_\Lambda)$ est celui des $x_* \in X_*(T)$ tels que $< \alpha, x_* >= 0$ pour tout $\alpha \in \Lambda$. Notons M_Λ le commutant de A_Λ. C'est un Levi de G dont le centre est égal à A_Λ. Notons $\mathbb{Z}[\Lambda]$ le sous-$\mathbb{Z}$-module de $X^*(T)$ engendré par Λ et notons $\mathbb{Q}[\Lambda]$ le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $X^*_{\mathbb{Q}}(T)$ engendré par Λ. L'ensemble Σ^{M_Λ} des racines de T dans M_Λ est $\Sigma \cap \mathbb{Q}[\Lambda]$. Notons aussi L_Λ le sous-groupe connexe de G contenant T tel que l'ensemble de racines Σ^{L_Λ} de T dans L_Λ soit $\Sigma \cap \mathbb{Z}[\Lambda]$. L'ensemble Λ est une base de Σ^{L_Λ}. Le groupe L_Λ est un sous-groupe de M_Λ de même rang semi-simple $|\Lambda|$. La composante neutre du centre de L_Λ est A_Λ.

Lemme. *Pour tout $x \in \bar{C}^{nr}$ tel que $\Lambda \subset \Lambda(x)$, on a l'égalité $L_\Lambda = Z_G(\mathbf{j}_T(x))^0 \cap M_\Lambda$. Il existe un unique élément $t_\Lambda \in M_{\Lambda,AD}$ tel que, pour tout x comme ci-dessus, la projection de $\mathbf{j}_T(x)$ dans $M_{\Lambda,AD}$ soit t_Λ. On a $L_\Lambda = Z_{M_\Lambda}(t_\Lambda)^0$.*

La preuve est similaire à celle de 2.2.15(2). □

5.2 Faisceaux-caractères unipotents

5.2.1 Rappels sur la représentation de Springer généralisée

Dans cette section, on lève l'hypothèse que G est adjoint et absolument simple.

On note $\mathcal{I}(G)$ l'ensemble des couples $(\mathcal{O},\mathcal{L})$, où $\mathcal{O}\in\mathfrak{g}_{nil}/conj$ et $\mathcal{L}$ est un système local irréductible sur $\mathcal{O}$. Il s'identifie à celui des classes de conjugaison par G de couples (N,ξ), où $N\in\mathfrak{g}_{nil}$ et ξ est une représentation irréductible de $Z_G(N)/Z_G(N)^0$.

Notons $\mathcal{I}_0^{FC}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison par G de couples $(M,\mathcal{E})$, où M est un Levi de G et $\mathcal{E}\in\mathbf{FC}^M(\mathfrak{m}_{SC})$. Le groupe G agit par conjugaison sur l'ensemble des triplets $(M,\mathcal{E},\rho)$ où M et $\mathcal{E}$ sont comme ci-dessus et $\rho\in Irr(W(M))$. On note $\mathcal{I}^{FC}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison. La représentation de Springer généralisée établit une bijection

$$Spr:\mathcal{I}^{FC}(G)\to\mathcal{I}(G).$$

Le groupe $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ agit naturellement sur les ensembles $\mathcal{I}(G)$, $\mathcal{I}_0^{FC}(G)$ et $\mathcal{I}^{FC}(G)$. On note $\mathcal{I}_{\mathbb{F}_q}(G)$, $\mathcal{I}_{0,\mathbb{F}_q}^{FC}(G)$ et $\mathcal{I}_{\mathbb{F}_q}^{FC}(G)$ ces ensembles de points fixes. Fixons une paire de Borel (B,T) définie sur $\mathbb{F}_q$. Un élément de $\mathcal{I}_{0,\mathbb{F}_q}^{FC}(G)$ est représenté par un couple $(M,\mathcal{E})$ tel que M soit un $\mathbb{F}_q$-Levi standard de G et que $\mathcal{E}$ soit conservé par l'action de Frobenius. D'après 2.2.3(1), un $\mathbb{F}_q$-Levi standard M tel que $\mathbf{FC}^M(\mathfrak{m}_{SC})$ est non vide n'est conjugué à aucun autre $\mathbb{F}_q$-Levi standard que lui-même et tout élément de $Norm_G(M)$ fixe l'ensemble $\mathbf{FC}^M(\mathfrak{m}_{SC})$. Il en résulte que deux couples $(M,\mathcal{E})$ vérifiant les conditions ci-dessus ne sont conjugués que s'ils sont égaux. Donc $\mathcal{I}_{0,\mathbb{F}_q}^{FC}(G)$ s'identifie à l'ensemble de ces couples $(M,\mathcal{E})$. L'ensemble $\mathcal{I}_{\mathbb{F}_q}^{FC}(G)$ est celui des triplets $(M,\mathcal{E},\rho)$ tels que $(M,\mathcal{E})\in\mathcal{I}_{0,\mathbb{F}_q}^{FC}(G)$ et que la classe de ρ soit conservée par $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. Comme en 2.2.5, on note $Irr_{\mathbb{F}_q}(W(M))$ cet ensemble de représentations et, pour $\rho\in Irr_{\mathbb{F}_q}(W(M))$, on fixe un prolongement continu $\rho^\flat$ de ρ au produit semi-direct $W(M)\rtimes\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. On a défini en loc. cit. la fonction caractéristique $\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho}$. La bijection Spr est équivariante pour les actions galoisiennes. En particulier, elle se restreint en une bijection de $\mathcal{I}_{\mathbb{F}_q}^{FC}(G)$ sur $\mathcal{I}_{\mathbb{F}_q}(G)$.

Soit $(M,\mathcal{E},\rho)\in\mathcal{I}_{\mathbb{F}_q}^{FC}(G)$. Notons $(\mathcal{O},\mathcal{L})$ son image par la représentation de Springer généralisée. Elle est conservée par l'action galoisienne. Munissons $\mathcal{L}$ d'une action de Frobenius dont l'action sur chaque fibre définie sur $\mathbb{F}_q$ est d'ordre fini. Introduisons le prolongement d'intersection du système local $\mathcal{L}[dim(\mathcal{O})]$ sur $\mathcal{O}$. Il est encore muni d'une action de Frobenius, notons $\chi_{M,\mathcal{E},\rho}$ sa fonction caractéristique. Posons

$$b(M,\mathcal{E},\rho)=\frac{1}{2}(dim(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})-dim(\mathcal{O})+dim(\mathfrak{g})-dim(\mathfrak{m})).$$

D'après [26] 6.3, il existe alors un unique choix de l'action de Frobenius sur $\mathcal{L}$ de sorte que l'on ait l'égalité

(1) $\chi_{M,\mathcal{E},\rho}(X)=(-1)^{dim(Z(M)^0)}q^{-b(M,\mathcal{E},\rho)}\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho}(X)$ pour tout $X\in\mathfrak{g}_{nil}(\mathbb{F}_q)$.

On fixe cette normalisation. De la formule ci-dessus et de 2.2.5(1) et (2), on déduit

(2) $\chi_{M,\mathcal{E},\rho}=q^{-b(M,\mathcal{E},\rho)}|W(M)|^{-1}\sum_{w\in W(M)}trace(\rho^\flat(w^{-1}Fr))Q_{M,\mathcal{E},w}$.

On note $\mathcal{Y}_{\mathcal{O},\mathcal{L}}$ la restriction à $\mathcal{O}$ de $\chi_{M,\mathcal{E},\rho}$. C'est la fonction caractéristique de $\mathcal{L}$.

On note aussi $\chi_{M,\mathcal{E},\rho}^\natural$ la fonction caractéristique de l'inverse de l'action de Frobenius du prolongement d'intersection du système local $\mathcal{L}[dim(\mathcal{O})]$ sur $\mathcal{O}$. Sa restriction à $\mathcal{O}$ est la conjuguée $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{O},\mathcal{L}}$. Pour $w\in W(M)$, il existe une unique fonction $Q_{M,\mathcal{E},w}^\natural$ sur $\mathfrak{g}_{nil}(\mathbb{F}_q)$ de sorte que, pour tout $\rho\in Irr_{\mathbb{F}_q}(W(M))$, on ait l'égalité

(3) $\chi_{M,\mathcal{E},\rho}^\natural=q^{b(M,\mathcal{E},\rho)}|W(M)|^{-1}\sum_{w\in W(M)}trace(\rho^\flat(wFr^{-1}))Q_{M,\mathcal{E},w}^\natural$.

5.2.2 Faisceaux-caractères unipotents cuspidaux sur G

Lusztig a défini la notion de faisceau-caractère unipotent cuspidal sur G. Signalons que "unipotent" se réfère à la classification de ces faisceaux en termes de groupe dual

de G, cela ne signifie nullement qu'ils sont à support unipotent. Un tel faisceau $\mathcal{E}$ est porté par une classe de conjugaison $\mathcal{X}_{\mathcal{E}}$ dans G. Fixons un élément de cette classe, que l'on écrit tu, t étant sa composante semi-simple et u sa composante unipotente. Il y a alors un caractère $\xi_{\mathcal{E},tu}$, ou simplement ξ_{tu}, de $Z_G(tu)/Z_G(tu)^0$ tel que $\mathcal{E}$ se restreigne à $\mathcal{X}$ en le système local $G/Z_G(tu)^0 \times_{\xi_{tu}} \mathbb{C}$ défini comme en 2.2.2. On a l'égalité $Z_{G_t}(u)^0 = Z_G(tu)^0$ d'où l'inclusion $Z_{G_t}(u)/Z_{G_t}(u)^0 \subset Z_G(tu)/Z_G(tu)^0$. La classe de conjugaison $\mathcal{X}$ peut porter plusieurs faisceaux-caractères unipotents et cuspidaux, correspondant à plusieurs caractères ξ_{tu}. Deux tels caractères distincts ont des restrictions distinctes à $Z_{G_t}(u)/Z_{G_t}(u)^0$. On a la propriété suivante, cf. [24] proposition 2.7 et [25] proposition 7.11 :

(1) soit t la partie semi-simple d'un élément de $\mathcal{X}_{\mathcal{E}}$; alors l'ensemble des éléments unipotents $u \in G_t$ tels que $tu \in \mathcal{X}_{\mathcal{E}}$ est une unique classe de conjugaison par G_t ; t est élément isolé de G, c'est-à-dire que la composante neutre de $Z(G_t)$ est $Z(G)^0$.

On note $\mathbf{FC}_u(G)$ l'ensemble des faisceaux-caractères unipotents cuspidaux sur G. Notons $\underline{\pi} : G \to G_{AD}$ l'homomorphisme naturel. L'application image réciproque par $\underline{\pi}$ identifie $\mathbf{FC}_u(G_{AD})$ et $\mathbf{FC}_u(G)$. En particulier les caractères ξ_{tu} ci-dessus sont triviaux sur $Z(G)$.

Supposons G adjoint et absolument simple et introduisons les objets de 5.1.1. L'ensemble $\mathbf{FC}_u(G)$ est partiellement décrit dans [13] p. 495 à 509. On voit que, pour tout $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_u(G)$, il existe une racine $\alpha \in \Delta_a$ telle que $\mathcal{X}_{\mathcal{E}}$ contienne un élément de partie semi-simple t_α. De plus, cette racine α est fixée par tout élément de $Aut(\mathcal{D}_a)$. Il résulte du lemme 5.1.2 que cette racine α est unique : le lemme 5.1.2 implique que deux éléments t_α et $t_{\alpha'}$ sont conjugués dans G si et seulement si α et α' sont conjugués par l'action du groupe $\mathbf{\Omega}$. On dira que α est associée à $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_u(G)$ et soit $\alpha \in \Delta_a$ sa racine associée. Notons $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ l'ensemble des $N \in \mathfrak{g}_{t_\alpha,nil}$ tel que $t_\alpha exp(N) \in \mathcal{X}_{\mathcal{E}}$. D'après (1), c'est une unique orbite pour l'action de G_{t_α}. Pour $N \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, le groupe $Z_{G_{t_\alpha}}(N)/Z_{G_{t_\alpha}}(N)^0$ s'identifie à $Z_{G_{t_\alpha}}(exp(N))/Z_{G_{t_\alpha}}(exp(N))^0$. Via cette identification, le caractère $\xi_{t_\alpha exp(N)}$ se restreint en un caractère de $Z_{G_{t_\alpha}}(N)/Z_{G_{t_\alpha}}(N)^0$ qui définit un système local $\mathcal{E}_{t_\alpha}$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Comme on l'a dit dans la preuve de 5.1.1(2), le groupe G_{t_α} s'identifie à G_{F,s_α}. On peut identifier $\mathcal{E}_{t_\alpha}$ à un système local sur $\mathfrak{g}_{F,s_\alpha,nil}$. En comparant la classification de [48] paragraphe 9 avec les résultats de [13], on obtient les résultats suivants :

(2) pour tout $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_u(G)$, le système local $\mathcal{E}_{t_\alpha}$ appartient à $\mathbf{FC}^{st}(\mathfrak{g}_{F,s_\alpha})$, où $\alpha \in \Delta_a$ est la racine associée à $\mathcal{E}$;

(3) l'application $\mathcal{E} \mapsto (s_\alpha, \mathcal{E}_{t_\alpha})$ est une bijection de $\mathbf{FC}_u(G)$ sur l'ensemble des couples $(s, \tilde{\mathcal{E}})$ où $s \in S^{nr,st}(\bar{C}^{nr})$ et $\tilde{\mathcal{E}} \in \mathbf{FC}^{st}(\mathfrak{g}_{F,s})$.

Tout élément de $\mathbf{FC}_u(G)$ est conservé par l'action galoisienne. La correspondance (3) n'est pas équivariante pour les actions galoisiennes (parce qu'en général, t_α n'est pas fixé par l'action galoisienne).

Pour des raisons de récurrence, on doit considérer le groupe $G = \{1\}$. Dans ce cas $\mathbf{FC}_u(G)$ est réduit au système local trivial de rang 1 sur G.

5.2.3 Faisceaux-caractères unipotents sur G

Soit M un Levi de G et $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_u(M_{AD})$. On simplifie les notations en supprimant les termes $\mathcal{E}$ des notations du paragraphe précédent : $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathcal{E}}$ etc... Fixons $x = tu \in \mathcal{X} \subset M_{AD}$. Notons $Z_M(x)$ l'image réciproque dans M de $Z_{M_{AD}}(x)$. On a la suite exacte

$$1 \to Z(M) \to Z_M(x) \to Z_{M_{AD}}(x) \to 1.$$

On relève le caractère ξ_x en un caractère de $Z_M(x)$ trivial sur $Z(M)$. Notons S_x l'image réciproque de x dans M et $S_{x,reg}$ le sous-ensemble des éléments de S_x dont le commutant dans G est contenu dans M.

Dans la suite de ce paragraphe, comme en 2.2.2, on devrait pour être corrects introduire un corps $\bar{\mathbb{Q}}_l$ pour un nombre premier $l \neq p$, travailler avec des $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux puis identifier par un isomorphisme $\bar{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$ les fonctions construites à des fonctions à valeurs complexes. Puisqu'on se contente de rappeler des définitions, on préfère se dispenser d'introduire ce corps $\bar{\mathbb{Q}}_l$ et présenter les objets comme s'ils étaient à valeurs complexes.

Posons $\mathcal{V}_{reg} = \{(y, gZ_M(x)) \in G \times G/Z_M(x); g^{-1}yg \in S_{x,reg}\}$. On note $p_{reg} : \mathcal{V}_{reg} \to G$ la projection $(y, gZ_M(x)) \mapsto y$, on note ∇_{reg} son image et ∇ l'adhérence de ∇_{reg}. Posons $\tilde{\mathcal{V}}_{reg} = \{(y, gZ_M(x)^0) \in G \times G/Z_M(x)^0; g^{-1}yg \in S_{x,reg}U_P\}$. Le groupe $Z_M(x)/Z_M(x)^0$ agit par multiplication à droite sur $\tilde{\mathcal{V}}_{reg}$ et le quotient de $\tilde{\mathcal{V}}_{reg}$ par cette action est $\mathcal{V}_{reg}$. On définit le système local $\mathcal{C}_{reg} = \tilde{\mathcal{V}}_{reg} \otimes_{\xi_x} \mathbb{C}$ sur $\mathcal{V}_{reg}$ comme en 2.2.2. On introduit le système local $p_{reg,*}(\mathcal{C}_{reg})$ sur ∇_{reg}. On note K le complexe prolongement d'intersection de $p_{reg,*}(\mathcal{C}_{reg})[dim(\nabla)]$. C'est un faisceau pervers sur G à support dans ∇.

Le groupe $Norm_G(M)$ agit sur M_{AD} en conservant le faisceau $\mathcal{E}$. Lusztig et Shoji ont prouvé que l'algèbre d'endomorphismes du complexe K était isomorphe à l'algèbre du groupe $W(M)$. Concrètement, cela signifie ce qui suit. Notons $Norm_G(M, x)$ le sous-groupe des $n \in Norm_G(M)$ tels que $nxn^{-1} = x$. Un élément de $n \in Norm_G(M)$ conserve $\mathcal{E}$ comme on vient de le dire, donc conserve $\mathcal{X}$. Il existe donc $m \in M$ tel que $nm \in Norm_G(M, x)$. Donc l'inclusion $Norm_G(M, x) \to Norm_G(M)$ se quotiente en une bijection $Norm_G(M, x)/Z_M(x) \simeq W(M)$. Alors il existe un caractère ϵ_x de $Norm_G(M, x)$ dont la restriction à $Z_M(x)$ est égale à ξ_x. Fixons un tel caractère. On définit alors l'action de $W(M)$ sur K comme en 2.2.3.

Pour tout $\rho \in Irr(W(M))$, fixons une réalisation de ρ dans un espace V_ρ. Il existe un unique faisceau pervers irréductible $K_{M,\mathcal{E},\rho}$ de sorte que

$$K \simeq \oplus_{\rho \in Irr(W(M))} V_\rho \otimes K_{M,\mathcal{E},\rho},$$

l'isomorphisme entrelaçant l'action de $W(M)$ sur K en l'action évidente sur le membre de droite. Les faisceaux-caractères unipotents sur G sont les faisceaux pervers $K_{M,\mathcal{E},\rho}$ quand on fait varier M, $\mathcal{E}$ et ρ.

Le caractère ϵ_x n'est pas unique, on peut le multiplier par un caractère de $W(M)$. Cela modifie l'indexation par ρ des faisceaux-caractères. Soit x' un autre point de $\mathcal{X}$. Fixons m tel que $x' = m^{-1}xm$. Alors $Norm_G(M, x') = m^{-1}Norm_G(M, x)m$. Le caractère ϵ_x étant fixé, définissons le caractère $\epsilon_{x'}$ de $Norm_G(M, x')$ par $\epsilon_{x'}(m^{-1}nm) = \epsilon_x(n)$ pour tout $n \in Norm_G(M)$. Cette définition ne dépend pas du choix de m. En effectuant les mêmes constructions où l'on remplace x et ϵ_x par x' et $\epsilon_{x'}$, on obtient un complexe K' muni d'une action de $W(M)$ et il existe un isomorphisme $W(M)$-équivariant de K' sur K.

On appellera famille admissible (pour M et $\mathcal{E}$) une famille $(\epsilon_x)_{x \in \mathcal{X}}$ telle que :

pour tout $x \in \mathcal{X}$, ϵ_x est un caractère de $Norm_G(M, x)$ dont la restriction à $Z_M(x)$ est égale à ξ_x ;

pour tous $x, x' \in \mathcal{X}$ et tout $m \in M$ tels que $x' = m^{-1}xm$, on a l'égalité $\epsilon_{x'} = \epsilon_x \circ Ad(m)$.

Supposons que M soit un $\mathbb{F}_q$-Levi et que $\mathcal{E}$ soit conservé par l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ (comme on l'a dit en 5.2.2, cette deuxième condition est automatique si M_{AD} est absolument simple). Soit $(\epsilon_x)_{x \in \mathcal{X}}$ est une famille admissible. Pour $x \in \mathcal{X}$, posons ${}^{Fr}\epsilon_x = \epsilon_{Fr(x)} \circ Fr$. Alors $({}^{Fr}\epsilon_x)_{x \in \mathcal{X}}$ est une famille admissible. Les conditions suivantes sont équivalentes :

${}^{Fr}\epsilon_x = \epsilon_x$ pour tout $x \in \mathcal{X}$;
il existe $x \in \mathcal{X}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$ tel que $\epsilon_x \circ Fr = \epsilon_x$;
pour tout $x \in \mathcal{X}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$, on a $\epsilon_x \circ Fr = \epsilon_x$.

Si elles sont vérifiées, on dira que la famille admissible $(\epsilon_x)_{x\in\mathcal{X}}$ est définie sur $\mathbb{F}_q$. Supposons donnée une telle famille. Soit $x \in \mathcal{X}^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. Munissons le faisceau $\mathcal{E}$ d'une action de Frobenius, c'est-à-dire d'un isomorphisme $Fr^*(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$. Comme en 2.2.5, cet isomorphisme est de la forme

$$\begin{array}{ccc} Fr^*(M/Z_M(x)^0 \times_{\xi_x} \mathbb{C}) & \to & M/Z_M(x)^0 \times_{\xi_x} \mathbb{C} \\ (mZ_M(x)^0, v) & \mapsto & (Fr^{-1}(m)Z_M(x)^0, r_x v), \end{array}$$

où r_x est un nombre complexe que l'on suppose de valeur absolue 1. On en déduit une action de Frobenius sur K. Pour tout $\rho \in Irr_{\mathbb{F}_q}(W(M))$, on choisit un prolongement continu $\rho^\flat$ de ρ à $W(M) \rtimes \Gamma_{\mathbb{F}_q}$. Evidemment, si $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ agit trivialement sur $W(M)$, on suppose que $\rho^\flat$ est triviale sur $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. Comme en 2.2.5, on récupère une action de Frobenius sur $K_{M,\mathcal{E},\rho}$. On note $\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho}$ la fonction caractéristique de $K_{M,\mathcal{E},\rho}$.

Pour $w \in W(M)$, fixons un représentant n de w dans $Norm_G(M,x)$ et un élément $g \in G$ tel que $gFr(g)^{-1} = n^{-1}$. On pose $M_w = g^{-1}Mg$, $\mathcal{X}_w = g^{-1}\mathcal{X}g$, $x_w = g^{-1}xg$. Comme en 2.2.5, on définit le faisceau-caractère unipotent et cuspidal $\mathcal{E}_w$ sur $M_{w,AD}$. Il est muni de l'action de Frobenius associé comme ci-dessus au scalaire $r_{x_w} = r_x\epsilon_x(n)$. On reprend les constructions ci-dessus en remplaçant M et $\mathcal{E}$ par M_w et $\mathcal{E}_w$. On obtient un complexe K_w muni d'un Frobenius. On note $\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},w}$ sa fonction caractéristique. Pour $\rho \in Irr_{\mathbb{F}_q}(W(M))$, on a alors l'égalité

(1) $\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho} = |W(M)|^{-1}\sum_{w\in W(M)} trace(\rho^\flat(w^{-1}Fr))\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},w}$.

Remarques.(2) Les définitions ci-dessus dépendent du choix de la famille admissible $(\epsilon_x)_{x\in\mathcal{X}}$ définie sur $\mathbb{F}_q$. Nous verrons en 5.3.2 qu'une telle famille existe et que l'on peut en définir une canoniquement.

5.2.4 L'ensemble Λ associé à un couple $(M,\mathcal{E})$

Dans ce paragraphe, on suppose que G est adjoint et absolument simple. A tout sous-ensemble propre $\Lambda \subset \Delta_a$, on a associé en 5.1.3 un Levi M_Λ et un élément semi-simple $t_\Lambda \in M_{\Lambda,AD}$.

Proposition. *Soient M un Levi de G et $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_u(M_{AD})$.*

(i) Il existe un unique sous-ensemble propre $\Lambda \subset \Delta_a$ tel qu'il existe $g \in G$ de sorte que $gMg^{-1} = M_\Lambda$ et que $Ad(g)$ transporte $\mathcal{X}_\mathcal{E}$ en un sous-ensemble de $M_{\Lambda,AD}$ contenant un élément de partie semi-simple t_Λ.

(ii) Soit t un élément de M dont l'image dans M_{AD} est la partie semi-simple d'un élément de $\mathcal{X}_\mathcal{E}$. Alors il existe $g \in G$ et $x \in \bar{C}^{nr} \cap \mathbb{T}$ tels que $gtg^{-1} = \mathbf{j}_T(x)$, $\Lambda \subset \Lambda(x)$, $gMg^{-1} = M_\Lambda$ et que l'image de gtg^{-1} dans $M_{\Lambda,AD}$ soit t_Λ.

Preuve. Les classes de conjugaison de Levi de G correspondent bijectivement aux classes de conjugaison de Levi de G_F. Il résulte de 5.2.2(3) que les classes de conjugaison de couples $(M,\mathcal{E})$ formés d'un Levi de G et d'un faisceau $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_u(M_{AD})$ correspondent bijectivement aux les classes de conjugaison de triplets $(M_F, s_{M_F}, \mathcal{E}_F)$, où M_F est un Levi de G_F, $s_{M_F} \in S^{nr,st}(M_F)$ et $\mathcal{E}_F \in \mathbf{FC}^{st}(M_{F,s_{M_F},SC})$. La proposition est alors l'exact analogue de la proposition 2.2.16. Elle se démontre par les mêmes arguments. On laisse la mise au point au lecteur. $\square$

Remarques. (1) De même qu'en 2.2.16, l'ensemble Λ ne dépendait que de M_F et s_{M_F} et pas de $\mathcal{E}_F$, de même l'ensemble Λ de la proposition ne dépend que de M et de l'orbite $\mathcal{X}_{\mathcal{E}}$.

(2) L'ensemble Λ se décrit cas par cas par les mêmes formules qu'en 2.2.16.

5.2.5 Le caractère μ_t

Soient M un Levi de G et $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_u(M_{AD})$. On simplifie les notations en posant $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathcal{E}}$ etc.... Soit t un élément de M dont l'image dans M_{AD} est la partie semi-simple d'un élément de $\mathcal{X}$. Le groupe $G_t \cap M$ est un Levi de G_t : c'est le commutant de $Z(M)^0$ dans G_t. On a évidemment $M_t = Z_M(t)^0 \subset G_t \cap M \subset Z_M(t)$. Puisque $G_t \cap M$ est un Levi, il est connexe donc $G_t \cap M = M_t$. Notons t_{ad} l'image de t dans M_{AD} et notons $Z_M(t_{ad})$ le sous-groupe des $m \in M$ tels que $mt_{ad}m^{-1} = t_{ad}$. Alors $M_t = Z_M(t_{ad})^0$. En particulier, on peut fixer un élément unipotent $u \in M_t$ tel que $t_{ad}u \in \mathcal{X}$ (on identifie les éléments unipotents de M et M_{ad}). On note N l'élément de $\mathfrak{m}_{t,SC}$ tel que $u = exp(N)$. Le caractère $\xi_{t_{ad}u}$ de $Z_M(t_{ad}u)$ se restreint en un caractère ξ_N de $Z_{M_t}(N) = Z_{M_t}(u)$. On en déduit un système local $\mathcal{E}_t$ porté par l'orbite $\mathcal{O}_N$ de N dans $\mathfrak{m}_{t,SC}$. Ce système local est cuspidal. On peut appliquer les constructions de 2.2.3 au groupe G_t, à son Levi M_t et au système local $\mathcal{E}_t$. En particulier, on définit le groupe $Norm_{G_t}(M_t, N)$. En posant $W_t(M_t) = Norm_{G_t}(M_t)/M_t$, on a l'isomorphisme $Norm_{G_t}(M_t, N)/Z_{M_t}(N) \simeq W_t(M_t)$. Montrons que

(1) $Norm_{G_t}(M_t, N) \subset Norm_G(M, t_{ad}u)$ et cette inclusion se quotiente en un homomorphisme injectif $\iota_t : W_t(M_t) \to W(M)$.

Soit $n \in Norm_{G_t}(M_t, N)$. Alors $Ad(n)$ conserve M_t donc aussi $Z(M_t)^0$. Mais t_{ad} est un élément isolé de M_{AD}, ce qui entraîne $Z(M_t)^0 = Z(M)^0$. Donc $Ad(n)$ conserve $Z(M)^0$ et aussi M, c'est-à-dire $n \in Norm_G(M)$. L'action de $Ad(n)$ dans M_{AD} conserve t_{ad} et $u = exp(N)$, donc conserve $t_{ad}u$. Cela prouve la première assertion de (1). L'inclusion se quotiente évidemment en un homomorphisme injectif de $Norm_{G(t)}(M_t, N)/Norm_{G_t}(M_t, N) \cap M$ dans $Norm_G(M, t_{ad}u)/Norm_G(M, t_{ad}u) \cap M$. Mais le premier quotient est $W_t(M_t)$ et le second est $W(M)$. Cela prouve (1).

Fixons une famille admissible $(\epsilon_x)_{x \in \mathcal{X}}$ pour $(M, \mathcal{E})$. Le caractère $\epsilon_{t_{ad}u}$ de $Norm_G(M, t_{ad}u)$ se restreint en un caractère de $Norm_{G_t}(M_t, N)$. On dispose aussi du caractère canonique $\epsilon_N^\flat$ de $Norm_{G_t}(M_t, N)$, cf. 2.2.3. Ces deux caractères coïncident avec ξ_N sur $Z_{M_t}(N)$. Il y a donc un unique caractère μ_t de $W_t(M_t)$ tel que $\epsilon_N^\flat(n) = \mu_t(n)\epsilon_{t_{ad}u}(n)$ pour tout $n \in Norm_{G_t}(M_t, N)$, où, par abus de notation, on a identifié μ_t à un caractère de $Norm_{G_t}(M_t, N)$. On vérifie que ce caractère μ_t est indépendant du choix de l'élément u.

5.2.6 Restriction au commutant d'un élément semi-simple

On suppose que G est adjoint, absolument simple et déployé sur $\mathbb{F}_q$. Soit M un $\mathbb{F}_q$-Levi de G et soit $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_u(M_{AD})$. On simplifie les notations en abandonnant les indices $\mathcal{E}$ des objets associés à ce faisceau. Soit t un élément semi-simple de $M(\mathbb{F}_q)$, notons t_{ad} son image dans M_{AD}, soit u un élément unipotent de $M_{AD,t_{ad}}(\mathbb{F}_q)$, supposons $t_{ad}u \in \mathcal{X}$. On suppose que le groupe G_t est déployé sur $\mathbb{F}_q$.

On utilise les constructions de 5.2.5. Pour $\rho \in Irr(W(M))$, posons $\rho_t = \rho \circ \iota_t$. Cette représentation se décompose en somme de représentations irréductibles de $W_t(M_t)$. Pour $\rho' \in Irr(W_t(M_t))$, on note $< \rho_t, \rho' >$ la multiplicité de ρ' dans ρ_t.

Fixons une famille admissible $(\epsilon_x)_{x \in \mathcal{X}}$ pour $(M, \mathcal{E})$, que l'on suppose définie sur $\mathbb{F}_q$. On fixe une action de Frobenius sur $\mathcal{E}$, dont on déduit une telle action sur $\mathcal{E}_t$, puis diverses

fonctions caractéristiques, cf. 2.2.3 et 5.2.3.

Proposition. *Pour $\rho \in Irr(W(M))$ et $N' \in \mathfrak{g}_{t,nil}(\mathbb{F}_q)$, on a l'égalité*

$$\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho}(t\,exp(N')) = \sum_{\rho' \in Irr(W_t(M_t))} < \rho_t, \mu_t \rho' > \boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E}_t,\rho'}(N').$$

Preuve. La preuve est due à Lusztig (voir aussi [1] théorème 6.8). On la reprend pour faire apparaître clairement le caractère μ_t. On note S l'image réciproque dans M du support de $\mathcal{E}$ et S_{ss} l'ensemble des parties semi-simples d'éléments de S. On note $\pi^M : M \to M_{AD}$ la projection naturelle. Pour tout $w' \in W_t(M_t)$, on choisit un représentant $\nu_{w'} \in Norm_{G_t}(M_t, N)$ de w' et un élément $\gamma_{w'} \in G_t$ tel que $\gamma_{w'} Fr(\gamma_{w'})^{-1} = \nu_{w'}^{-1}$. On construit le Levi $M_{t,w'} = \gamma_{w'}^{-1} M_t \gamma_{w'}$ de G_t et le faisceau $\mathcal{E}_{t,w'}$ sur $\mathfrak{m}_{t,w',SC}$. D'où une fonction $\boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E}_t,w'}$ sur $\mathfrak{g}_t(\mathbb{F}_q)$. Cette fonction ne dépend que de la classe de conjugaison de w'. De même, pour $w \in W(M)$, on choisit un représentant $n_w \in Norm_G(M, t_{ad}u)$ de w et un élément $g_w \in G$ tel que $g_w Fr(g_w)^{-1} = n_w^{-1}$. On construit le Levi $M_w = g_w^{-1} M g_w$ de G et le faisceau $\mathcal{E}_w$ sur $M_{w,AD}$. D'où une fonction $\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},w}$. On note S_w l'image réciproque dans M_w du support de $\mathcal{E}_w$ et $S_{w,ss}$ l'ensemble des parties semi-simples d'éléments de S_w. Notons $\mathcal{K}_w$ l'ensemble des $k \in G(\mathbb{F}_q)$ tels que $ktk^{-1} \in S_{w,ss}$. Pour $k \in \mathcal{K}_w$, posons $M[k] = k^{-1} M_w k \cap G_t$. C'est un Levi de G_t défini sur $\mathbb{F}_q$ (c'est le commutant dans G_t du sous-tore $k^{-1} Z(M_w)^0 k$ de G_t). Notons $\mathcal{O}[k]$ l'ensemble des $Y \in \mathfrak{m}[k]_{nil}$ tels que $kt\,exp(Y)k^{-1} \in S_w$. C'est une unique orbite nilpotente dans $\mathfrak{m}[k]_{nil}$. Elle se plonge dans S_w par l'application $Y \mapsto kt\,exp(Y)k^{-1} \in S_w$. On munit $\mathcal{O}[k]$ d'un système local muni d'une action de Frobenius : c'est l'image réciproque de $\mathcal{E}_w$ par l'application $Y \mapsto \pi^{M_w}(kt\,exp(Y)k^{-1})$. On en déduit comme en 2.2.5 un complexe $K[k]$ sur G_t et sa fonction caractéristique que l'on note $\boldsymbol{\chi}[k]$. D'après [25] théorème 8.5, pour $N' \in \mathfrak{g}_{t,nil}(\mathbb{F}_q)$, on a l'égalité

$$(1) \qquad \boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},w}(t\,exp(N')) = |G_t(\mathbb{F}_q)|^{-1} |M_w(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{k \in \mathcal{K}_w} |M[k](\mathbb{F}_q)| \boldsymbol{\chi}[k](N').$$

Montrons que :

(2) pour tout $k \in \mathcal{K}_w$, il existe $m \in M$ et $\gamma \in G_t$ tels que $M[k] = \gamma M_t \gamma^{-1}$ et que $m g_w k \gamma \in Norm_G(M, t_{ad}u)$.

Soit $k \in \mathcal{K}_w$. Alors $ktk^{-1} \in S_{w,ss}$, d'où $g_w ktk^{-1} g_w \in S_{ss}$. L'ensemble S_{ss} est celui des $t' \in M$ dont l'image t'_{ad} dans M_{AD} est conjugué à t_{ad}. On peut donc fixer $m \in M$ tel qu'en posant $h = m g_w k$ et $t' = hth^{-1}$, on ait $t' \in M$ et $t'_{ad} = t_{ad}$. Posons $M_{t'} = G_{t'} \cap M$. Comme on l'a dit en 5.2.5, on a $M_{t'} = Z_M(t_{ad})^0$ et ce groupe est un Levi de $G_{t'}$. On a $Ad(h)^{-1}(M_{t'}) = M[k]$ d'après les définitions de h et t'. Introduisons le sous-ensemble $\Lambda \subset \Delta_a$ associé à M et $\mathcal{E}$, cf. 5.2.4. D'après la proposition 5.2.4, on peut conjuguer la situation par un élément de G de sorte que $M = M_\Lambda$, $t_{ad} = t_\Lambda$ et qu'il existe $x \in \bar{C}^{nr} \cap a_T(\mathbb{T})$ de sorte que $t = \mathbf{j}_T(x) \in T$ et $\Lambda \subset \Lambda(x)$. Le système de racines de G_t a pour base $\Lambda(x)$. Le Levi $M[k]$ est conjugué par un élément de G_t à un Levi standard de G_t. C'est-à-dire qu'il existe $\Lambda' \subset \Lambda(x)$ et $\gamma \in G_t$ tels que $Ad(\gamma^{-1}h^{-1})(M_{t'}) = L_{\Lambda'}$. Autrement dit, puisque $M_{t'} = Z_M(t_{ad})^0 = L_\Lambda$, on a $Ad(\gamma^{-1}h^{-1})(L_\Lambda) = L_{\Lambda'}$. Donc $Ad(\gamma^{-1}h^{-1})$ envoie la composante neutre du centre de L_Λ sur la composante neutre du centre de $L_{\Lambda'}$. Ces composantes neutres A_Λ et $A_{\Lambda'}$ sont aussi celles des centres de M_Λ et $M_{\Lambda'}$. Donc $Ad(\gamma^{-1}h^{-1})(M_\Lambda) = M_{\Lambda'}$. D'autre part, par construction, $Ad(\gamma^{-1}h^{-1})$ envoie t' sur t, donc l'image $t'_{ad} = t_{ad} = t_\Lambda$ de t' dans M_Λ sur l'image de t dans $M_{\Lambda',AD}$, c'est-à-dire $t_{\Lambda'}$. L'unicité de la proposition 5.2.4 implique l'égalité $\Lambda' = \Lambda$. En conséquence, on a $L_{\Lambda'} = L_\Lambda = M_t$ et $M[k] = \gamma M_t \gamma^{-1}$. L'élément $h\gamma = m g_w k \gamma$ normalise M. Par

construction, son action dans M_{AD} fixe t_{ad}. Puisque tout élément de $Norm_G(M)$ conserve $\mathcal{X}$, $Ad(h\gamma)$ envoie $t_{ad}u$ sur un élément $t_{ad}v \in \mathcal{X}$. D'après 5.2.2(1), v est alors conjugué à u par un élément de $Z_M(t_{ad})^0 = M_t$. Quitte à multiplier m à gauche par un tel élément, on peut supposer $mg_wk\gamma \in Norm_G(M, t_{ad}u)$. Cela prouve (2).

Fixons un ensemble $\mathcal{W}_t$ de représentants des classes de conjugaison dans $W_t(M_t)$. Montrons que

(3) pour tout $k \in \mathcal{K}_w$, il existe un unique $w' \in \mathcal{W}_t$ et il existe $\kappa \in G_t(\mathbb{F}_q)$ tels que $k^{-1}M_wk = \kappa^{-1}\gamma_{w'}^{-1}M\gamma_{w'}\kappa$.

Soit $k \in \mathcal{K}_w$. Fixons m et γ vérifiant (2). Puisque $Ad(\gamma)$ conjugue M_t en $M[k]$ et que ces Levi sont définis sur $\mathbb{F}_q$, on voit aisément qu'il existe $w' \in \mathcal{W}_t$, $\nu \in Norm_{G_t}(M_t)$ et $\kappa \in G_t(\mathbb{F}_q)$ de sorte que $\gamma = \kappa^{-1}\gamma_{w'}^{-1}\nu^{-1}$. La relation $mg_wk\gamma \in Norm_G(M, t_{ad}u)$ implique $g_wk\kappa^{-1}\gamma_{w'}^{-1} \in Norm_G(M)$, donc $Ad(\kappa^{-1}\gamma_{w'}^{-1})(M) = Ad(k^{-1}g_w^{-1})(M)$, ou encore $k^{-1}M_wk = \kappa^{-1}\gamma_{w'}^{-1}M\gamma_{w'}\kappa$. D'où l'existence de w' et κ vérifiant les conditions de (3). Soient $\underline{w}' \in \mathcal{W}_t$ et $\underline{\kappa} \in G_t(\mathbb{F}_q)$ tels que $k^{-1}M_wk = \underline{\kappa}^{-1}g_{\underline{w}'}Mg_{\underline{w}'}\underline{\kappa}$. On a alors $\kappa^{-1}\gamma_{w'}^{-1}M\gamma_{w'}\kappa \cap G_t = \underline{\kappa}^{-1}g_{\underline{w}'}Mg_{\underline{w}'}\underline{\kappa} \cap G_t$, c'est-à-dire $\kappa^{-1}M_{t,w'}\kappa = \underline{\kappa}^{-1}M_{t,\underline{w}'}\underline{\kappa}$. Par définition de $\mathcal{W}_t$, les Levi $M_{t,w'}$ et $M_{t,\underline{w}'}$ ne peuvent être conjugués par un élément de $G_t(\mathbb{F}_q)$ que si $w' = \underline{w}'$. Cela démontre l'unicité de w', d'où (3).

Pour tout $w' \in \mathcal{W}_t$, notons $\mathcal{K}_{w,w'}$ le sous-ensemble des $k \in \mathcal{W}_t$ tels que $k^{-1}M_wk$ et $\gamma_{w'}^{-1}M\gamma_{w'}$ soient conjugués par un élément de $G_t(\mathbb{F}_q)$. D'après (3), $\mathcal{K}_w$ est union disjointe des $\mathcal{K}_{w,w'}$ quand w' parcourt $\mathcal{W}_t$. Montrons que

(4) soient $w' \in \mathcal{W}_t$ et $k \in \mathcal{K}_{w,w'}$; alors on a l'égalité $\boldsymbol{\chi}[k] = \mu_t(w')\boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E}_t,w'}$.

Fixons $\kappa \in G_t(\mathbb{F}_q)$ tel que $k^{-1}M_wk = \kappa^{-1}\gamma_{w'}^{-1}M\gamma_{w'}\kappa$. Comme ci-dessus, en coupant par G_t, on a $M[k] = \kappa^{-1}M_{t,w'}\kappa$. Posons $n = \gamma_{w'}\kappa k^{-1}g_w^{-1}$. L'égalité $k^{-1}M_wk = \kappa^{-1}\gamma_{w'}^{-1}M\gamma_{w'}\kappa$ équivaut à $n \in Norm_G(M)$. L'orbite $\mathcal{O}[k]$ est l'ensemble des $Y \in \mathfrak{m}[k]_{nil}$ tels que $kt\,exp(Y)k^{-1} \in S_w$ et $\mathcal{E}[k]$ est l'image réciproque de $\mathcal{E}_w$ par l'application $Y \mapsto \pi^{M_w}(kt\,exp(Y)k^{-1})$. Il revient au même de dire que $\mathcal{O}[k]$ est l'ensemble des $Y \in \mathfrak{m}[k]_{nil}$ tels que $g_wkt\,exp(Y)k^{-1}g_w^{-1} \in S$ et $\mathcal{E}[k]$ est l'image réciproque de $\mathcal{E}$ par l'application $Y \mapsto \pi^M(g_wkt\,exp(Y)k^{-1}g_w^{-1})$. Le couple $(S, \mathcal{E})$ est invariant par conjugaison par $Norm_G(M)$. Dans les relations précédentes, on peut donc multiplier g_wk à gauche par n, ce qui remplace cet élément par $\gamma_{w'}\kappa$. On obtient que $\mathcal{O}[k]$ est l'ensemble des $Y \in \mathfrak{m}[k]_{nil}$ tels que $\gamma_{w'}\kappa t\,exp(Y)\kappa^{-1}\gamma_{w'}^{-1} \in S$ et $\mathcal{E}[k]$ est l'image réciproque de $\mathcal{E}$ par l'application $Y \mapsto \pi^M(\gamma_{w'}\kappa t\,exp(Y)\kappa^{-1}\gamma_{w'}^{-1})$. Les automorphismes $Ad(\gamma_{w'})$ et $Ad(\kappa)$ fixent t. On peut supprimer le t des relations précédentes et on obtient que $\mathcal{O}[k]$ est l'ensemble des $Y \in \mathfrak{m}[k]_{nil}$ tels que $\gamma_{w'}\kappa Y\kappa^{-1}\gamma_{w'}^{-1} \in \mathcal{O}_N$ et $\mathcal{E}[k]$ est l'image réciproque de $\mathcal{E}_t$ par l'application $Y \mapsto \gamma_{w'}\kappa Y\kappa^{-1}\gamma_{w'}^{-1}$. Autrement dit, $\mathcal{O}[k]$ est l'ensemble des $Y \in \mathfrak{m}[k]_{nil}$ tels que $\kappa Y\kappa^{-1} \in \mathcal{O}_{N_{w'}}$ et $\mathcal{E}[k]$ est l'image réciproque de $\mathcal{E}_{t,w'}$ par l'application $Y \mapsto \kappa Y\kappa^{-1}$. Puisque $\kappa \in G_t(\mathbb{F}_q)$, l'automorphisme $Ad(\kappa)$ conserve toute fonction invariante sur $\mathfrak{g}_t(\mathbb{F}_q)$. Il en résulte que les fonctions $\boldsymbol{\chi}[k]$ et $\boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E}_t,w'}$ sont proportionnelles. Pour calculer la constante de proportionnalité, on doit comparer l'action de Frobenius que l'on a définie sur $\mathcal{E}[k]$ (on l'appelle ci-dessous la première action) et celle qui se déduit de l'action sur $\mathcal{E}_{t,w'}$ par $Ad(\kappa^{-1})$ (on l'appelle ci-dessous la seconde action). Posons $x = tu$. L'action de Frobenius initiale sur $\mathcal{E}$ est déterminée par un scalaire $r_{x_{ad}} \in \mathbb{C}^\times$. L'action de Frobenius sur $\mathcal{E}_t$ est déterminée par le scalaire $r_N = r_{x_{ad}}$. Posons $N_{w'} = \gamma_{w'}^{-1}N\gamma_{w'}$. L'action de Frobenius sur $\mathcal{E}_{t,w'}$ est déterminée par le scalaire $r_{N_{w'}} = r_{x_{ad}}\epsilon_N^\flat(Fr(\gamma_{w'})\gamma_{w'}^{-1})$. Posons $N[k] = \kappa^{-1}N_{w'}\kappa$. La seconde action de Frobenius sur $\mathcal{E}[k]$ est déterminée par le scalaire $r_{N[k],2} = r_{N_{w'}}$. Posons $x_w = g_w^{-1}xg_w$. L'action de Frobenius sur $\mathcal{E}_w$ est déterminée par le scalaire $r_{x_{w,ad}} = r_{x_{ad}}\epsilon_{x_{ad}}(Fr(g_w)g_w^{-1})$ (où $x_{w,ad}$ est l'image de x_w dans $M_{w,AD}$). Posons $x'_w = ktexp(N[k])k^{-1}$. Les deux éléments x_w et x'_w appartiennent à $S_w(\mathbb{F}_q)$. On peut fixer

$m_w \in M_w$ tel que $x'_{w,ad} = m_w^{-1} x_{w,ad} m_w$. On a $m_w Fr(m_w)^{-1} \in Z_{M_w}(x_{w,ad})$ et l'action de Frobenius sur $\mathcal{E}_w$ est aussi déterminée par le scalaire $r_{x'_{w,ad}} = r_{x_{w,ad}} \xi_{x_{w,ad}}(Fr(m_w)m_w^{-1})$. Par définition, la première action de Frobenius sur $\mathcal{E}[k]$ est déterminée par le scalaire $r_{N[k],1} = r_{x'_{w,ad}}$. En résumé, on a

$$r_{N[k],1} = r_{x_{ad}} \chi_{x_{w,ad}}(Fr(m_w)^{-1} m_w^{-1}) \epsilon_{x_{ad}}(Fr(g_w) g_w^{-1}),\ r_{N[k],2} = r_{x_{ad}} \epsilon_N^\flat(Fr(\gamma_{w'})\gamma_{w'}^{-1}).$$

Par construction de m_w, l'élément $x''_w = Ad(m_w k \kappa^{-1} \gamma_{w'}^{-1})(x)$ appartient à S_w et vérifie $x''_{w,ad} = x_{w,ad}$. Posons $n'' = g_w m_w k \kappa^{-1} \gamma_{w'}^{-1}$. Alors l'élément $x'' = Ad(n'')(x)$ appartient à S et vérifie $x''_{ad} = x_{ad}$. On a aussi $n'' = g_w m_w g_w^{-1} n^{-1}$, où $n = \gamma_{w'} \kappa k^{-1} g_w^{-1}$ a été défini ci-dessus. Cet élément n appartient à $Norm_G(M)$ et $g_w m_w g_w^{-1}$ appartient à M. Donc $n'' \in Norm_G(M)$ et finalement $n'' \in Norm_G(M, x_{ad})$. Par définition, $\chi_{x_{w,ad}}(Fr(m_w)m_w^{-1}) = \chi_{x_{ad}}(g_w Fr(m_w) m_w^{-1} g_w^{-1})$. On a l'égalité

$$g_w Fr(m_w) m_w^{-1} g_w^{-1} = g_w Fr(g_w)^{-1} Fr(n'' \gamma_{w'} \kappa k^{-1})(n'' \gamma_{w'} \kappa k^{-1})^{-1}.$$

Puisque $\kappa k^{-1} \in G(\mathbb{F}_q)$, c'est aussi

$$g_w Fr(m_w) m_w^{-1} g_w^{-1} = g_w Fr(g_w)^{-1} Fr(n'') Fr(\gamma_{w'}) \gamma_{w'}^{-1} n''^{-1}.$$

D'où

$$\chi_{x_{w,ad}}(Fr(m_w)m_w^{-1}) = \chi_{x_{ad}}(g_w Fr(m_w) m_w^{-1} g_w^{-1}) = \epsilon_{x_{ad}}(g_w Fr(m_w) m_w^{-1} g_w^{-1})$$
$$= \epsilon_{x_{ad}}(g_w Fr(g_w)^{-1}) \epsilon_{x_{ad}}(Fr(n'')) \epsilon_{x_{ad}}(Fr(\gamma_{w'})\gamma_{w'}^{-1}) \epsilon_{x_{ad}}(n'')^{-1}.$$

Puisque la famille admissible $(\epsilon_{x'})_{x' \in \mathcal{X}}$ est définie sur $\mathbb{F}_q$, $\epsilon_{x_{ad}}$ est invariant par l'action de Frobenius. Les termes $\epsilon_{x_{ad}}(n'')^{-1}$ et $\epsilon_{x_{ad}}(Fr(n''))$ disparaissent. On peut remplacer $\epsilon_{x_{ad}}(Fr(\gamma_{w'})\gamma_{w'}^{-1})$ par $\mu_t(w')^{-1} \epsilon_N^\flat(Fr(\gamma_{w'})\gamma_{w'}^{-1})$, ou encore par $\mu_t(w') \epsilon_N^\flat(Fr(\gamma_{w'})\gamma_{w'}^{-1})$ puisqu'un caractère d'un groupe de Weyl est toujours égal à son inverse. En mettant ces calculs bout-à-bout, on obtient l'égalité $r_{N[k],1} = \mu_t(w') r_{N[k],2}$. Alors $\boldsymbol{\chi}[k] = \mu_t(w') \boldsymbol{\chi}_{M_t, \mathcal{E}_t, w'}$. Cela démontre (4).

Prouvons que

(5) soit $w' \in \mathcal{W}_t$; alors $\mathcal{K}_{w,w'}$ est l'ensemble des éléments $k \in G(\mathbb{F}_q)$ tels que $k^{-1} M_w k$ soit conjugué à $\gamma_{w'}^{-1} M \gamma_{w'}$ par un élément de $G_t(\mathbb{F}_q)$.

Notons $\mathcal{K}'_{w,w'}$ l'ensemble des éléments $k \in G(\mathbb{F}_q)$ tels que $k^{-1} M_w k$ soit conjugué à $\gamma_{w'}^{-1} M \gamma_{w'}$ par un élément de $G_t(\mathbb{F}_q)$. Par définition de $\mathcal{K}_{w,w'}$, on a l'inclusion $\mathcal{K}_{w,w'} \subset \mathcal{K}'_{w,w'}$. Inversement, toujours par définition de $\mathcal{K}_{w,w'}$, pour démontrer que $\mathcal{K}'_{w,w'}$ est contenu dans $\mathcal{K}_{w,w'}$, il suffit de démontrer qu'il est contenu dans $\mathcal{K}_w$. Soit $k \in \mathcal{K}'_{w,w'}$, fixons $\kappa \in G_t(\mathbb{F}_q)$ tel que $k^{-1} M_w k = \kappa^{-1} \gamma_{w'}^{-1} M \gamma_{w'} \kappa$. Alors $g_w k \kappa^{-1} \gamma_{w'}^{-1}$ normalise M, donc $Ad(g_w k \kappa^{-1} \gamma_{w'}^{-1})$ conserve S. Donc $Ad(g_w k \kappa^{-1} \gamma_{w'}^{-1})(t) \in S_{ss}$ et $Ad(k \kappa^{-1} \gamma_{w'}^{-1})(t) \in S_{w,ss}$. Mais $Ad(\kappa)$ et $Ad(\gamma_{w'})$ fixent t donc $Ad(k)(t) \in S_{w,ss}$. Par définition, cela signifie que $x \in \mathcal{K}_w$. D'où (5).

Notons $W_t(M_t)[w]$ l'ensemble des $w' \in W_t(M_t)$ tels que $\gamma_{w'}^{-1} M \gamma_{w'}$ soit conjugué à M_w par un élément de $G(\mathbb{F}_q)$ et posons $\mathcal{W}_t[w] = \mathcal{W}_t \cap W_t(M_t)[w]$. Si $w' \in \mathcal{W}_t - \mathcal{W}_t[w]$, l'ensemble $\mathcal{K}_{w,w'}$ est vide. Soit $w' \in \mathcal{W}_t[w]$. Fixons $k_0 \in G(\mathbb{F}_q)$ tel que $k_0^{-1} M_w k_0 = \gamma_{w'}^{-1} M \gamma_{w'}$. Alors $\mathcal{K}_{w,w'} = Norm_{G(\mathbb{F}_q)}(M_w) k_0 G_t(\mathbb{F}_q)$. L'intersection $k_0^{-1} Norm_{G(\mathbb{F}_q)}(M_w) k_0 \cap G_t(\mathbb{F}_q)$ est égale à $Norm_{G_t(\mathbb{F}_q)}(\gamma_{w'}^{-1} M \gamma_{w'})$. Par le même raisonnement qu'en 5.2.5(1), ce groupe est égal à $Norm_{G_t(\mathbb{F}_q)}(M_{t,w'})$. On obtient

$$|\mathcal{K}_{w,w'}| = |Norm_{G(\mathbb{F}_q)}(M_w)| |G_t(\mathbb{F}_q)| |Norm_{G_t(\mathbb{F}_q)}(M_{t,w'})|^{-1}.$$

Pour tout $k \in \mathcal{K}_{w,w'}$, on a $|M[k](\mathbb{F}_q)| = |M_{t,w'}(\mathbb{F}_q)|$ et $\boldsymbol{\chi}[k] = \mu_t(w')\boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E}_t,w'}$. L'égalité (1) devient

$$(6) \qquad \boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},w}(t\,exp(N')) = |Norm_{G(\mathbb{F}_q)}(M_w)||M_w(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{w' \in \mathcal{W}_t[w]} |M_{t,w'}(\mathbb{F}_q)|$$

$$|Norm_{G_t(\mathbb{F}_q)}(M_{t,w'})|^{-1}\mu_t(w')\boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E}_t,w'}(N').$$

Par le théorème de Lang, on a l'égalité

$$Norm_{G(\mathbb{F}_q)}(M_w)/M_w(\mathbb{F}_q) = (Norm_G(M_w)/M_w)^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}.$$

L'application $Ad(g_w)$ identifie $Norm_G(M_w)/M_w$ muni de son action de Frobenius à $W(M)$ muni de l'action $v \mapsto w^{-1}vw$. Il en résulte que $|Norm_{G(\mathbb{F}_q)}(M_w)/M_w(\mathbb{F}_q)| = Z_{W(M)}(w)$. De même $|Norm_{G_t(\mathbb{F}_q)}(M_{t,w'})/M_{t,w'}(\mathbb{F}_q)| = Z_{W_t(M_t)}(w')$. Dans la formule (6), on peut remplacer la sommation sur $w' \in \mathcal{W}_t[w]$ par une sommation sur $W_t(M_t)[w]$, à condition de multiplier le terme indexé par w' par l'inverse du nombre d'éléments de l'orbite de w', c'est-à-dire $|W_t(M_t)|^{-1}|Z_{W_t(M_t)}(w')|$. Cette formule devient

$$(7) \qquad \boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},w}(t\,exp(N')) = |Z_{W(M)}(w)||W_t(M_t)|^{-1} \sum_{w' \in W_t(M_t)[w]} \mu_t(w')\boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E}_t,w'}(N').$$

D'après 5.2.3(1), on a l'égalité

$$\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho}(t\,exp(N')) = |W(M)|^{-1} \sum_{w \in W(M)} trace(\rho(w)^{-1})\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},w}(N').$$

En utilisant (7), on obtient

$$\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho}(t\,exp(N')) = |W(M)|^{-1} \sum_{w \in W(M)} trace(\rho(w)^{-1})|Z_{W(M)}(w)||W_t(M_t)|^{-1}$$

$$\sum_{w' \in W_t(M_t)[w]} \mu_t(w')\boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E}_t,w'}(N').$$

Pour $w' \in W_t(M_t)$, l'ensemble des $w \in W$ tels que $w' \in W_t(M_t)[w]$ est égal à la classe de conjugaison par $W(M)$ de $\iota_t(w')$. Notons-la $Cl_{W(M)}(w')$. On obtient

$$\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho}(t\,exp(N')) = |W_t(M_t)|^{-1} \sum_{w' \in W_t(M_t)} \mu_t(w')\boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E}_t,w'}(N')$$

$$\sum_{w \in Cl_{W(M)}(w')} |W(M)|^{-1}|Z_{W(M)}(w)|trace(\rho(w)^{-1}).$$

Pour $w' \in W_t$ et $w \in Cl_W(w')$, on a $trace(\rho(w)^{-1}) = trace(\rho_t(w')^{-1})$ et $|W(M)|^{-1}|Z_{W(M)}(w)| = |Cl_{W(M)}(w')|^{-1}$. La dernière somme de la formule ci-dessus vaut donc $trace(\rho_t(w')^{-1})$. D'où

$$\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho}(t\,exp(N')) = |W_t(M_t)|^{-1} \sum_{w' \in W_t(M_t)} \mu_t(w')trace(\rho_t(w')^{-1})\boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E}_t,w'}(N').$$

En décomposant ρ_t en composantes simples, on obtient

$$\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho}(t\,exp(N')) = \sum_{\rho' \in Irr(W_t(M_t))} < \rho_t, \rho' > |W_t(M_t)|^{-1} \sum_{w' \in W_t} \mu_t(w')trace(\rho'(w')^{-1})\boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E}_t,w'}(N').$$

Puis, en utilisant 2.2.5(1),

$$\boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho}(t\,exp(N')) = \sum_{\rho' \in Irr(W_t(M_t))} < \rho_t, \rho' > \boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E},\rho'\mu_t^{-1}}.$$

Par le changement de variables $\rho' \mapsto \rho'\mu_t$, la formule ci-dessus devient celle de l'énoncé. $\square$

5.3 Paramétrages

5.3.1 L'orbite spéciale associée à un triplet $(M, \mathcal{E}, \rho)$

Pour tout couple $(M, \mathcal{E})$ formé d'un Levi M de G et d'un faisceau $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_u(M_{AD})$, fixons une famille admissible $(\epsilon_x)_{x \in \mathcal{X}_\mathcal{E}}$.

On note $\mathcal{A}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison par G de triplets $(M, \mathcal{E}, \rho)$ où M est un Levi de G, $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_u(M_{AD})$ et $\rho \in Irr(W(M))$. Ainsi qu'on l'a déjà fait, nous noterons une classe de conjugaison par un triplet la représentant. On a défini le faisceau-caractère $K_{M,\mathcal{E},\rho}$.

Lusztig a défini la notion d'orbite unipotente spéciale. Notons $\mathcal{U}_{sp}$ l'ensemble de ces orbites. A tout faisceau-caractère unipotent sur G, il associe une telle orbite (c'est une conséquence de [27] corollaire 16.7). Pour $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_{sp}$, notons $\mathcal{A}(G, \mathcal{O})$ le sous-ensemble des $(M, \mathcal{E}, \rho)$ tels que l'orbite associée à $K_{M,\mathcal{E},\rho}$ soit $\mathcal{O}$.

Théorème. *Soient $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_{sp}$, $(M, \mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{A}(G, \mathcal{O})$ et $x = tu \in G$, t étant la partie semi-simple de x et u sa partie unipotente. Notons $\mathcal{O}_u$ l'orbite de u dans G. Supposons que la fibre de $K_{M,\mathcal{E},\rho}$ en x soit non nulle ; alors $dim(\mathcal{O}_u) < dim(\mathcal{O})$ ou $\mathcal{O}_u = \mathcal{O}$.*

Cf. [26] théorème 10.7.

5.3.2 Calcul de l'orbite spéciale associée à un triplet $(M, \mathcal{E}, \rho)$

On suppose ici que G est déployé sur $\mathbb{F}_q$. Notons $Unip(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations unipotentes irréductibles de $G(\mathbb{F}_q)$. Notons $Unip_{cusp}(G)$ le sous-ensemble des représentations dans $Unip(G)$ qui sont cuspidales. Remarquons que l'application image réciproque par l'application $\pi : G(\mathbb{F}_q) \to G_{AD}(\mathbb{F}_q)$ est une bijection de $Unip(G_{AD})$ sur $Unip(G)$, resp. $Unip_{cusp}(G_{AD})$ sur $Unip_{cusp}(G)$. Notons $\mathcal{A}Unip(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison par G de triplets (M, π_{cusp}, ρ), où M est un $\mathbb{F}_q$-Levi de G, $\pi_{cusp} \in Unip_{cusp}(M_{AD})$ et $\rho \in Irr(W(M))$. Soit $(M, \pi_{cusp}, \rho) \in \mathcal{A}Unip(G)$. La représentation π_{cusp} se relève en une représentation de $M(\mathbb{F}_q)$ encore notée π_{cusp}. Soit P un sous-groupe parabolique de G de composante de Levi M. On introduit la représentation induite $Ind_P^G(\pi_{cusp})$ de $G(\mathbb{F}_q)$. Son algèbre d'entrelacements est canoniquement isomorphe à l'algèbre du groupe $W(M)$. La représentation $Ind_P^G(\pi_{cusp})$ se décompose selon les représentations irréductibles de ce groupe. Ainsi, à la représentation ρ, on associe une composante irréductible $\pi_{M,\pi_{cusp},\rho}$ de la représentation induite. C'est une représentation unipotente de $G(\mathbb{F}_q)$. On sait que l'application $(M, \pi_{cusp}, \rho) \mapsto \pi_{M,\pi_{cusp},\rho}$ est une bijection de $\mathcal{A}Unip(G)$ sur $Unip(G)$.

A toute représentation $\pi \in Unip(G)$, Lusztig a associé une orbite unipotente spéciale. D'où par composition une application $\mathcal{A}Unip(G) \to \mathcal{U}_{sp}$. Pour toute $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_{sp}$, on note $\mathcal{A}Unip(G, \mathcal{O})$ la fibre de cette application au-dessus de $\mathcal{O}$. On sait décrire ces ensembles $\mathcal{A}Unip(G, \mathcal{O})$. Pour cela, on se ramène immédiatement au cas où G est adjoint et absolument simple. Dans le cas ces groupes classiques, ces ensembles se décrivent à l'aide de

"symboles", cf. [7] 13.8. Dans le cas des groupes exceptionnels, ils sont décrits dans les tables de [7], p. 478-488.

Remarque. (1) Dans ces tables, Curtis regroupe les représentations selon leur orbite associée mais ne désigne pas cette orbite. On récupère cette orbite de la façon suivante. Dans la description par Curtis d'un ensemble $\mathcal{A}Unip(G,\mathcal{O})$, le premier terme est de la forme $(T,\mathbf{1},\rho)$, où T est un tore déployé maximal, $\mathbf{1}$ est l'unique représentation de $T_{AD}(\mathbb{F}_q)=\{1\}$ et $\rho\in Irr(W)$. La représentation ρ est spéciale. Notons $\mathcal{E}$ l'unique élément de $\mathbf{FC}^T(\mathfrak{t}_{SC})$. Le triplet $(T,\mathcal{E},\rho)$ appartient à $\mathcal{I}^{FC}(G)$. Son image par la représentation de Springer est le couple $(\mathcal{O},\mathcal{L}_1)$, où $\mathcal{L}_1$ est le système local trivial sur $\mathcal{O}$. La représentation de Springer étant décrite dans les tables de [7], p. 427-433, cela permet le calcul de $\mathcal{O}$.

En [32] théorèmes 3.3 et 3.7, Lusztig définit une bijection $\tau_{cusp}:Unip_{cusp}(G)\to\mathbf{FC}_u(G)$. Remarquons que, puisque G est déployé, il n'y a pas de différence entre les classes de conjugaison de Levi et de $\mathbb{F}_q$-Levi. On définit une bijection $\tau:\mathcal{A}Unip(G)\to\mathcal{A}(G)$ en envoyant un triplet (M,π_{cusp},ρ) sur $(M,\tau_{cusp}^{M_{AD}}(\pi_{cusp}),\rho)$. Cela étant, le corollaire 3.9 et les assertions 3.10 de [32] affirment la propriété suivante. Pour tout couple $(M,\mathcal{E})$ formé d'un Levi M de G et d'un faisceau $\mathcal{E}\in\mathbf{FC}_u(M_{AD})$, il existe une unique famille admissible $(\epsilon_x)_{x\in\mathcal{X}_\mathcal{E}}$ de sorte qu'en utilisant celle-ci pour construire les faisceaux-caractères $K_{M,\mathcal{E},\rho}$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{A}Unip(G) & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{A}(G)\\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{U}_{sp} & \end{array}$$

Désormais, nous utiliserons exclusivement ces familles admissibles. Puisqu'on a dit ci-dessus que l'application $\mathcal{A}Unip(G)\to\mathcal{U}_{sp}$ était connue, il en est de même de l'application $\mathcal{A}(G)\to\mathcal{U}_{sp}$.

Remarques. (2) Dans [32], Lusztig ne dit pas comment il caractérise l'unique famille admissible. Mais, comme il a bien voulu me l'indiquer, la définition est donnée dans [31] 1.4. On peut la traduire ainsi. Soit $(M,\mathcal{E})$ comme ci-dessus. Notons $\dot{\mathcal{E}}$ le faisceau sur M image réciproque de $\mathcal{E}$ par la projection $\pi^M:M\to M_{AD}$. Autrement dit $\dot{\mathcal{E}}=K^M_{M,\mathcal{E},1}$, où 1 est l'unique représentation de $W^M(M)=\{1\}$. Soit $\mathcal{O}^M$ l'image de $\dot{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{U}^M_{sp}$. Notons $\underline{\mathcal{O}}^G$ l'orbite unipotente de G induite de $\mathcal{O}^M$. Quelle que soit la famille admissible utilisée, il existe une unique représentation $\rho\in W(M)$ telle que l'orbite associée à $K_{M,\mathcal{E},\rho}$ soit $\underline{\mathcal{O}}^G$ et cette représentation est de dimension 1. Alors la famille canonique est celle pour laquelle cette représentation ρ est triviale.

(3) Les assertions ci-dessus résultent aussi de la preuve par Shoji de la conjecture de Lusztig, cf. [36] et [37]. En effet, modulo un bon choix de familles admissibles (il est vrai un peu confus), Shoji montre que, pour $(M,\pi_{cusp},\rho)\in\mathcal{A}Unip(G)$, dont on note $(M,\mathcal{E},\rho)$ l'image par τ, la fonction caractéristique de $K_{M,\mathcal{E},\rho}$ est égale à une constante près au caractère "fantôme" asocié à (M,π_{cusp},ρ). On peut en déduire que les orbites spéciales associées aux deux triplets sont égales.

(4) On a supposé que G était déployé sur $\mathbb{F}_q$. Mais, pour calculer l'application $\mathcal{A}(G)\to\mathcal{U}_{sp}$, qui est indépendante du corps de base, on peut étendre ce corps de base en un corps $\mathbb{F}_{q^n}$ sur lequel G est déployé.

Considérons le cas d'un faisceau-caractère unipotent cuspidal $\mathcal{E}$ de G_{AD}. Comme ci-dessus, notons $\dot{\mathcal{E}}$ son image réciproque sur G. Soit $x=tu$ un élément de G au-dessus duquel la fibre de $\dot{\mathcal{E}}$ est non nulle. Alors

(5) l'orbite unipotente spéciale associée à $\dot{\mathcal{E}}$ est l'orbite de u.

Preuve. Cela résulte immédiatement du théorème 5.3.5 ci-dessous mais on peut donner une preuve dès maintenant. On peut supposer G adjoint et absolument simple. Notons $\mathcal{O}'_{\mathcal{E}}$ l'orbite de u et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ l'orbite spéciale associée à $\dot{\mathcal{E}}$. Enumérons tous les faisceaux-caractères unipotents cuspidaux de G_{AD} : $\mathcal{E}_1$,...,$\mathcal{E}_n$. Ils sont décrits explicitement, on connaît donc les orbites $\mathcal{O}'_{\mathcal{E}_1}$,...,$\mathcal{O}'_{\mathcal{E}_n}$. On est resté évasifs sur la bijection τ_{cusp} mais son existence implique que la famille $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_1}$,...,$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_n}$ est égale, à permutation près, à la famille des orbites spéciales associées aux éléments de $Unip_{cusp}(G)$. Cette famille est elle-aussi connue. On constate alors cas par cas que les familles $\mathcal{O}'_{\mathcal{E}_1}$,...,$\mathcal{O}'_{\mathcal{E}_n}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_1}$,...,$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_n}$ sont égales à permutation près. Le théorème 5.3.1 implique que $dim(\mathcal{O}'_{\mathcal{E}_i}) < dim(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_i})$ ou $\mathcal{O}'_{\mathcal{E}_i} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}_i}$ pour tout $i = 1, ..., n$. De ces deux propriétés résulte immédiatement l'égalité $\mathcal{O}'_{\mathcal{E}_i} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}_i}$ pour tout i.

5.3.3 Une propriété des familles admissibles canoniques

Soient M un Levi de G et $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_u(M_{AD})$. On simplifie les notations en posant $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathcal{E}}$ etc.... Notons S_{ss} l'ensemble des éléments de M dont l'image dans M_{AD} est la partie semi-simple d'un élément de $\mathcal{X}$. Comme on l'a dit, on utilise la famille admissible canonique dans toutes les constructions précédentes.

Proposition. *(i) Pour tout $t \in S_{ss}$, le caractère μ_t de 5.2.5 est égal à 1.*

(ii) Supposons que M soit un $\mathbb{F}_q$-Levi et que $\mathcal{E}$ soit conservé par l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. Alors la famille admissible canonique est définie sur $\mathbb{F}_q$.

Preuve. Pour la première assertion, on se ramène aisément au cas où G est adjoint et absolument simple. On peut supposer que M est un Levi propre et que $W_t(M_t) \neq \{1\}$ sinon l'assertion est vide. Notons $\dot{\mathcal{E}}$ l'image réciproque de $\mathcal{E}$ dans M, soit $\mathcal{O}^M \in \mathcal{U}^M_{sp}$ l'orbite unipotente dans M associée à $\dot{\mathcal{E}}$. Notons $\mathcal{O}^G$ l'orbite de G engendrée par $\mathcal{O}^M$ (et non pas l'orbite induite). En général, l'orbite engendrée par une orbite spéciale de M ne reste pas spéciale dans G. Mais, dans notre cas où $\mathcal{O}^M$ est associée à un faisceau-caractère cuspidal, on vérifie cas par cas que $\mathcal{O}^G$ est spéciale. Identifions par l'exponentielle les orbites unipotentes dans un groupe à des orbites nilpotentes dans son algèbre de Lie. Par définition de S_{ss}, $\mathfrak{m}_t$ contient un élément N tel que le faisceau $\dot{\mathcal{E}}$ soit non nul en $t\,exp(N)$. Notons $\mathcal{O}^M_t$ l'orbite de N dans $\mathfrak{m}_t$. D'après 5.3.2(5), l'orbite $\mathcal{O}^M$ (descendue en une orbite nilpotente) contient N, autrement dit, $\mathcal{O}^M$ est l'image de $\mathcal{O}^M_t$ par l'application naturelle $\mathfrak{m}_{t,nil}/conj \to \mathfrak{m}_{nil}/conj$. Notons $\mathcal{O}^G_t$ l'orbite de $\mathfrak{g}_t$ engendrée par $\mathcal{O}^M_t$. Alors $\mathcal{O}^G$ est l'image de $\mathcal{O}^G_t$ par l'application naturelle $\mathfrak{g}_{t,nil}/conj \to \mathfrak{g}_{nil}/conj$. Pour $\rho' \in W_t(M_t)$, notons $(\mathcal{O}_{t,\rho'}, \mathcal{L}_{t,\rho'}) \in \mathcal{I}(G_t)$ l'image de $(M_t, \mathcal{E}_t, \rho')$ par la correspondance de Springer généralisée. Notons $\mathcal{O}_{\rho'}$ l'orbite nilpotente de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathcal{O}_{t,\rho'}$. Une propriété générale de la correspondance de Springer généralisée est que $\mathcal{O}^G_t \leq \mathcal{O}_{t,\rho'}$ pour l'ordre usuel des orbites, avec égalité si et seulement si ρ' est le caractère signature sgn_t de $W_t(M_t)$. Puisque l'application $\mathfrak{g}_{t,nil}/conj \to \mathfrak{g}_{nil}/conj$ est strictement croissante, on en déduit $\mathcal{O}^G \leq \mathcal{O}_{\rho'}$ avec égalité si et seulement si $\rho' = sgn_t$.

Notons sgn le caractère signature de $W(M)$. D'après 5.3.2, on sait calculer l'orbite spéciale associée au triplet $(M, \mathcal{E}, sgn)$. On constate cas par cas que c'est $\mathcal{O}^G$. Appliquons la proposition 5.2.6 à $(M, \mathcal{E}, sgn)$. Quitte à étendre le corps de base $\mathbb{F}_q$ en un corps $\mathbb{F}_{q^n}$, on peut supposer vérifiées les hypothèses de cette proposition : ces hypothèses se résumaient à l'invariance par l'action de Frobenius de divers objets, ce que l'on peut assurer par changement de base. La restriction à $W_t(M_t)$ du caractère sgn est le caractère sgn_t. Il

y a une seule représentation $\rho' \in Irr(W_t(M_t))$ telle que $< sgn_t, \mu_t\rho' > \neq 0$, à savoir $\rho' = \mu_t sgn_t$. Puisque $\boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E}_t,\mu_t sgn_t}$ est non nulle sur $\mathcal{O}_{t,\mu_t sgn_t}$, cette proposition implique que la fonction $N' \mapsto \boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho}(t\, exp(N'))$ est non nulle sur $\mathcal{O}_{\mu_t sgn_t}$. Puisque l'orbite spéciale associée à $(M, \mathcal{E}, sgn)$ est $\mathcal{O}^G$, le théorème 5.3.1 implique que $dim(\mathcal{O}_{\mu_t sgn_t}) \leq dim(\mathcal{O}^G)$. D'après les rappels ci-dessus, cela entraîne $\mu_t = 1$. Cela prouve le (i) de l'énoncé.

Remarquons que la propriété (i) caractérise la famille admissible canonique. En effet, deux familles admissibles diffèrent par un caractère de $W(M)$. Si ces deux familles vérifient (i), ce caractère est trivial sur l'image de l'homomorphisme $\iota_t : W_t(M_t) \to W(M)$, cela pour tout $t \in S_{ss}$. On montre en comme en 4.4.3 que, quand t varie dans S_{ss}, ces images engendrent le groupe $W(M)$. Donc le caractère est trivial et les deux familles sont égales.

Prouvons l'assertion (ii). On suppose donc que M est un $\mathbb{F}_q$-Levi et que $\mathcal{E}$ est conservé par l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. On considère la famille admissible canonique $(\epsilon_x)_{x\in\mathcal{X}}$, qui vérifie (i). On a défini en 2.2.3 la famille admissible ${}^{Fr}\epsilon_x)_{x\in\mathcal{X}}$. Il s'agit de démontrer que ces deux familles sont égales. D'après l'unicité affirmée ci-dessus, il suffit de vérifier que la famille ${}^{Fr}\epsilon_x)_{x\in\mathcal{X}}$ vérifie encore la propriété (i). Soit $t \in S_{ss}$. Choisissons un élément unipotent $u \in M_t$ tel que $t_{ad}u \in \mathcal{X}$ et définissons $N \in \mathfrak{m}_{t,nil}$ par $exp(N) = u$. Avec les notations de 5.2.5, on doit prouver que ${}^{Fr}\epsilon_{t_{ad}u}(n) = \epsilon^\flat_N(n)$ pour tout $n \in Norm_{G_t}(M_t, N)$. On a ${}^{Fr}\epsilon(t_{ad}u)(n) = \epsilon_{Fr(t_{ad}u)}(Fr(n))$. L'élément $Fr(t)$ appartient à S_{ss}. En utilisant (i) pour cet élément, on a $\epsilon_{Fr(t_{ad}u)}(Fr(n)) = \epsilon^\flat_{Fr(N)}(Fr(n))$, où $\epsilon^\flat_{Fr(N)}$ est le caractère canonique de $Norm_{G_{Fr(t)}}(M_{Fr(t)}, Fr(N))$. La canonicité des caractères $\epsilon^\flat_N$ et $\epsilon^\flat_{Fr(N)}$ implique par simple transport de structure l'égalité $\epsilon^\flat_{Fr(N)}(Fr(n)) = \epsilon^\flat_N(n)$. D'où l'égalité cherchée ${}^{Fr}\epsilon_{t_{ad}u}(n) = \epsilon^\flat_N(n)$, ce qui démontre la seconde assertion de la proposition. □

5.3.4 Majoration d'orbites

Pour la fin de la section 5, on suppose G adjoint et absolument simple. Soient $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_{sp}$ et $(M, \mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{A}(G, \mathcal{O})$ On note $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathcal{E}}$ et S_{ss} l'ensemble des éléments de M dont l'image dans M_{AD} est la partie semi-simple d'un élément de $\mathcal{X}$. Soit $t \in S_{ss}$. On définit la représentation $\rho_t = \rho \circ \iota_t$ de $W_t(M_t)$ comme en 5.2.6. Soit $\rho' \in Irr(W_t(M_t))$. Par la correspondance de Springer généralisée, le triplet $(M_t, \mathcal{E}_t, \rho')$ correspond à un couple $(\mathcal{O}_{t,\rho'}, \mathcal{L}_{t,\rho'}) \in \mathcal{I}(G_t)$. On note $\mathcal{O}_{M_t,\mathcal{E}_t,\rho'}$ ou simplement $\mathcal{O}_{\rho'}$ l'orbite nilpotente de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathcal{O}_{t,\rho'}$. On identifie par l'exponentielle les orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}$ et les orbites unipotentes de G.

Proposition. *Supposons* $< \rho_t, \rho' >> 0$. *Alors* $dim(\mathcal{O}_{\rho'}) < dim(\mathcal{O})$ *ou* $\mathcal{O}_{\rho'} = \mathcal{O}$.

Preuve. Comme on l'a déjà dit, quitte à remplacer le corps de base $\mathbb{F}_q$ par $\mathbb{F}_{q^n}$ pour un entier n assez grand, on peut supposer vérifiées les hypothèses de 5.2.6. Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des $\rho'' \in Irr(W_t(M_t))$ telles que $< \rho_t, \rho'' >> 0$ et munissons-le de l'ordre défini par $\rho''_1 \leq \rho''_2$ si et seulement si $\mathcal{O}_{t,\rho''_1}$ est incluse dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}_{t,\rho''_2}$. Remarquons que cette condition implique que $\mathcal{O}_{\rho''_1}$ est incluse dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}_{\rho''_2}$. Soit ρ'' un élément maximal de $\mathcal{R}$ tel que $\rho' \leq \rho''$. On voit que la conclusion du théorème pour ρ'' implique la même conclusion pour ρ'. On peut donc supposer que $\rho' = \rho''$, autrement dit que ρ' est maximale. Notons $\mathcal{R}'$ le sous-ensemble des $\rho'' \in \mathcal{R}$ telles que $\mathcal{O}_{t,\rho''} = \mathcal{O}_{t,\rho'}$. Pour $\rho'' \in \mathcal{R} - \mathcal{R}'$, la restriction à $\mathcal{O}_{t,\rho'}$ de la fonction $\boldsymbol{\chi}_{M_t,\mathcal{E}_t,\rho''}$ est nulle. Pour $\rho'' \in \mathcal{R}'$, cette restriction est proportionnelle à $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_{t,\rho'},\mathcal{L}_{t,\rho''}}$. Quand ρ'' parcourt

$\mathcal{R}'$, ces fonctions sont linéairement indépendantes. Il en résulte que la fonction

$$\sum_{\rho'' \in Irr(W_t(M_t))} < \rho_t, \rho'' > \boldsymbol{\chi}_{M_t, \mathcal{E}_t, \rho''}$$

est non nulle sur $\mathcal{O}_{t,\rho'}$. La proposition 5.2.6 (où $\mu_t = 1$ d'après la proposition 5.3.3) entraîne que la fonction $N' \mapsto \boldsymbol{\chi}_{M,\mathcal{E},\rho}(t\, exp(N'))$ n'est pas nulle sur $\mathcal{O}_{t,\rho'}$. Le théorème 5.3.1 entraîne alors la conclusion de la proposition. □

5.3.5 Paramétrage de $\mathcal{A}(G, \mathcal{O})$

Soit $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_{sp}$. Considérons les triplets (N, d, μ) où $N \in \mathcal{O}$, $d \in \bar{A}(N)$ et μ est une représentation irréductible de $Z_{\bar{A}(N)}(d)$. Le groupe G agit par conjugaison sur ces triplets. On note $\mathcal{M}(G, \mathcal{O})$ l'ensemble des classes de conjugaison. Soit (N, d, μ) comme ci-dessus. Soit $t \in Z_G(N)$ dont l'image dans $\bar{A}(N)$ est égale à d. On a la suite d'homomorphismes

$$Z_{G_t}(N)/Z_{G_t}(N)^0 \to Z_G(N)/Z_G(N)^0 = A(N) \to \bar{A}(N),$$

et l'image de $Z_{G_t}(N)/Z_{G_t}(N)^0$ dans $\bar{A}(N)$ est contenue dans $Z_{\bar{A}(N)}(d)$. Ainsi μ se relève en une représentation de $Z_{G_t}(N)/Z_{G_t}(N)^0$. Cette représentation n'est pas forcément irréductible puisque l'homomorphisme de $Z_{G_t}(N)/Z_{G_t}(N)^0$ dans $Z_{\bar{A}(N)}(d)$ n'est pas forcément surjectif. Posons $u = exp(N)$ et notons $\mathcal{X}_{t,u}$ la classe de conjugaison par G_t de tu. De la représentation précédente se déduit un système local pas forcément irréductible sur $\mathcal{X}_{t,u}$ que l'on note $\mathcal{E}_{t,\mu}$.

Disons que $\mathcal{O}$ est exceptionnelle dans les cas suivants :

G est de type E_7 et $\mathcal{O}$ est de type $A_4 + A_1$;

G est de type E_8 et $\mathcal{O}$ est de type $A_4 + A_1$ ou $E_6(a_1) + A_1$.

Théorème. *Supposons que $\mathcal{O}$ ne soit pas exceptionnelle. Il existe une unique application $\nabla : \mathcal{A}(G, \mathcal{O}) \to \mathcal{M}(G, \mathcal{O})$ vérifiant les conditions suivantes. Soit $(M, \mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{A}(G, \mathcal{O})$, posons $\nabla(M, \mathcal{E}, \rho) = (N, d, \mu)$. Soit $t \in Z_G(N)$, notons d_t son image dans $\bar{A}(N)$. On a*

(i) si d_t n'est pas conjugué à d par un élément de $\bar{A}(N)$, la restriction à $\mathcal{X}_{t,u}$ de $K_{M,\mathcal{E},\rho}$ est nulle ;

(ii) supposons $d_t = d$; alors la restriction à $\mathcal{X}_{t,u}$ de $K_{M,\mathcal{E},\rho}$ est égale au système local $\mathcal{E}_{t,\mu}$ à un décalage près.

L'application ∇ est bijective.

Cf. [30] théorème 2.4.

Remarque. Ce théorème de Lusztig pose problème. D'abord Lusztig n'en donne pas de vraie démonstration, il se contente d'en donner quelques indications. Ensuite l'énoncé de Lusztig est erroné. Il oublie l'hypothèse que $\mathcal{O}$ n'est pas exceptionnelle (l'énoncé est faux pour les orbites exceptionnelles). Même dans le cas d'une orbite qui n'est pas exceptionnelle, Lusztig écrit un énoncé plus fort où les groupes G_t sont remplacés par $Z_G(t)$. Il ne nous semble pas que la démonstration esquissée par Lusztig permet d'atteindre cet énoncé plus fort et il ne nous semble pas que cet énoncé plus fort soit juste. Dans le cas des groupes classiques, l'énoncé ci-dessus est une conséquence de la proposition XI.29 de [43]. Nous n'expliquerons pas ici comment il se déduit de ce résultat car cela deviendra clair en 6.2.10 et 6.2.11 lorsque nous reprendrons les méthodes de [43] pour démontrer un énoncé analogue à celui ci-dessus dans le cas des groupes classiques ramifiés. Pour les groupes exceptionnels, la méthode indiquée par Lusztig ramène à des

calculs de restrictions de représentations de groupes de Weyl et de correspondances de Springer généralisées. Pour ces calculs, on dispose de tables. Les calculs sont trop longs pour être traités "à la main" mais peuvent certainement l'être par ordinateur. L'auteur en est incapable.

Supposons que $\mathcal{O}$ soit exceptionnelle. On définit encore une bijection $\nabla : \mathcal{A}(G,\mathcal{O}) \to \mathcal{M}(G,\mathcal{O})$ par les formules imitant la classification des représentations unipotentes de $G(\mathbb{F}_q)$, que l'on va rappeler. On fixe $N \in \mathcal{O}$. Alors $\bar{A}(N) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On note $1, d_2$ les deux éléments de ce groupe et $1, sgn$ ses deux caractères.

Supposons que G soit de type E_7 et que $\mathcal{O}$ soit de type $A_4 + A_1$. L'ensemble $\mathcal{A}(G,\mathcal{O})$ a quatre éléments. Deux sont associés à des triplets $(M,\mathcal{E},\rho)$ pour lesquels M est un tore, $\mathcal{E}$ est le système trivial (qui est l'unique système unipotent cuspidal pour un tore) et ρ est l'une des deux représentations $\rho_{512,11}$ et $\rho_{512,12}$ de $W = W(M)$. On note simplement ces triplets $\rho_{512,11}$ et $\rho_{512,12}$ (avec les notations de [7] p. 483 et, ci-dessous, p. 485 et 486). Deux autres éléments sont associés à des triplets $(M,\mathcal{E},\rho)$ où $M = G$, $\mathcal{E}$ est l'un des deux éléments de $\mathbf{FC}_u(G)$ et ρ est la représentation triviale de $W(M) = \{1\}$. Nous noterons ces deux éléments $E_7[i]$ et $E_7[-i]$, sans nous soucier de savoir exactement à quel faisceau-caractère cuspidal ils correspondent. Alors ∇ est défini par les formules :

$$\nabla(\rho_{512,11}) = (N,1,1),\ \nabla(\rho_{512,12}) = (N,1,sgn),$$

$$\nabla(E_7[i]) = (N,d_2,1),\ \nabla(E_7[-i]) = (N,d_2,sgn).$$

Supposons que G soit de type E_8 et que $\mathcal{O}$ soit de type $A_4 + A_1$. L'ensemble $\mathcal{A}(G,\mathcal{O})$ a quatre éléments. Deux sont associés à des triplets $(M,\mathcal{E},\rho)$ pour lesquels M est un tore, $\mathcal{E}$ est le système trivial et ρ est l'une des deux représentations $\rho_{4096,26}$ et $\rho_{4096,27}$ de $W = W(M)$. On note simplement ces triplets $\rho_{4096,26}$ et $\rho_{4096,27}$. Deux autres éléments sont associés à des triplets $(M,\mathcal{E},\rho)$ où M_{AD} est de type E_7, $\mathcal{E}$ est l'un des deux éléments de $\mathbf{FC}_u(M_{AD})$ et ρ est la représentation non triviale de $W(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous noterons ces deux éléments $(E_7[i], sgn)$ et $(E_7[-i], sgn)$. L'application ∇ est définie par les formules :

$$\nabla(\rho_{4096,26}) = (N,1,1),\ \nabla(\rho_{4096,27}) = (N,1,sgn),$$

$$\nabla(E_7[i],sgn) = (N,d_2,1),\ \nabla(E_7[-i],sgn) = (N,d_2,sgn).$$

Supposons que G soit de type E_8 et que $\mathcal{O}$ soit de type $E_6(a_1) + A_1$. L'ensemble $\mathcal{A}(G,\mathcal{O})$ a quatre éléments. Deux sont associés à des triplets $(M,\mathcal{E},\rho)$ pour lesquels M est un tore, $\mathcal{E}$ est le système trivial et ρ est l'une des deux représentations $\rho_{4096,11}$ et $\rho_{4096,12}$ de $W = W(M)$. On note simplement ces triplets $\rho_{4096,11}$ et $\rho_{4096,12}$. Deux autres éléments sont associés à des triplets $(M,\mathcal{E},\rho)$ où M_{AD} est de type E_7, $\mathcal{E}$ est l'un des deux éléments de $\mathbf{FC}_u(M_{AD})$ et ρ est la représentation triviale de $W(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous noterons ces deux éléments $(E_7[i],1)$ et $(E_7[-i],1)$. L'application ∇ est définie par les formules :

$$\nabla(\rho_{4096,11}) = (N,1,1),\ \nabla(\rho_{4096,12}) = (N,1,sgn),$$

$$\nabla(E_7[i],1) = (N,d_2,1),\ \nabla(E_7[-i],1) = (N,d_2,sgn).$$

5.3.6 Relèvement d'éléments de $\bar{A}(N)$

Le groupe $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ agit sur $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ en conservant le sous-ensemble des orbites spéciales. Cette action est triviale, sauf dans le cas où G est de type D_n et n'est pas déployé,

cf. 3.1.7. D'autre part, soit $\alpha \in \Delta_a$, supposons que α est fixée par l'action galoisienne. L'élément t_α défini en 5.1.2 n'est pas forcément fixé par cette action : il l'est si $\alpha = \alpha_0$ mais, si $\alpha \in \Delta$, on a $t_\alpha = \check{\varpi}_\alpha(\bar{\zeta}_{1/d(\alpha)})$ d'où $Fr(t_\alpha) = \check{\varpi}_\alpha(Fr(\bar{\zeta}_{1/d(\alpha)}))$. Toutefois, on a l'égalité $G_{Fr(t_\alpha)} = G_{t_\alpha}$ donc G_{t_α} est conservé par l'action galoisienne.

Soit N un élément de $\mathfrak{g}_{nil}$ appartenant à une orbite spéciale. Soit $d \in \bar{A}(N)$.

Lemme. *(i) Il existe une racine $\alpha \in \Delta_a$, un élément $N' \in \mathfrak{g}_{t_\alpha,nil}$ et un élément $g_d \in G$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(a) on a $g_d N' g_d^{-1} = N$ et l'image de $g_d t_\alpha g_d^{-1}$ dans $\bar{A}(N)$ est égale à d ;

(b) posons $t = g_d t_\alpha g_d^{-1}$; l'homomorphisme composé de

$$Z_{G_{t_\alpha}}(N')/Z_{G_{t_\alpha}}(N')^0 \overset{Ad(g_d)}{\to} Z_{G_t}(N)/Z_{G_t}(N)^0 \to Z_{\bar{A}(N)}(d)$$

est surjectif.

(ii) Supposons que l'orbite de N soit conservée par l'action galoisienne. Alors on peut imposer de plus que α et l'orbite de N' dans $\mathfrak{g}_{t_\alpha,nil}$ sont fixées par cette action.

Preuve. On utilise le groupe G_F, cf. 5.1.1. On peut supposer que N appartient à l'ensemble $\mathcal{N}$ défini en 3.2.4, lequel est ici égal à $\mathcal{N}(I_F)$. Posons $\bar{R} = Z_{\bar{A}(N)}(d)$. Le triplet $(N, d, \bar{R})$ appartient à l'ensemble $\bar{\mathcal{R}}_{max}$ défini en 3.2.7. D'après le (ii) du lemme de 3.2.7, on peut fixer $\alpha \in \Delta_a$ et une orbite $\mathcal{O}' \in \mathfrak{g}_{F,s_\alpha,nil}/conj$ de sorte que $\bar{r}_{s_\alpha}(\mathcal{O}') = (N, d, \bar{R})$. On se rappelle que $\iota_{s_\alpha}(G_{F,s_\alpha}) = G_{t_\alpha}$. On prend pour N' un élément de $\iota_{s_\alpha}(\mathcal{O}')$. Il résulte de la définition de l'application $\bar{r}_{s_\alpha}$ qu'il existe g_d tel que le triplet (α, N', g_d) vérifie les conditions (a) et (b) de l'énoncé. Cela prouve l'assertion (i).

On peut conjuguer le couple (α, N') par un élément de $\mathbf{\Omega}$. Il suffit de vérifier que, sous les hypothèses de (ii), une telle conjugaison transforme le couple (α, N') en un couple satisfaisant la conclusion de cette assertion. C'est exactement la démonstration que l'on a faite dans la preuve de 3.2.8. □

5.3.7 Séparation des éléments de $\mathcal{A}(G)$

On a défini en 5.3.1 l'ensemble $\mathcal{A}(G)$ formé de classes de conjugaison de triplets $(M, \mathcal{E}, \rho)$. A tout couple $(M, \mathcal{E})$ intervenant dans un tel triplet, on a associé en 5.2.4 un sous-ensemble $\Lambda \subset \Delta_a$. Notons $\mathbf{\Lambda}$ l'ensemble de ces sous-ensembles Λ images de couples $(M, \mathcal{E})$. Notons $\mathcal{A}'(G)$ l'ensemble des triplets $(\Lambda, \mathcal{E}, \rho)$ où $\Lambda \in \mathbf{\Lambda}$, $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}_u(M_{\Lambda,AD})$ et $\rho \in Irr(W(M_\Lambda))$. Cet ensemble s'identifie à un sous-ensemble de l'ensemble des triplets précédent par l'application $(\Lambda, \mathcal{E}, \rho) \mapsto (M_\Lambda, \mathcal{E}, \rho)$. Ce sous-ensemble est un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans l'ensemble des triplets. Donc $\mathcal{A}'(G)$ s'identifie à $\mathcal{A}(G)$. Modulo cette bijection, on peut remplacer $\mathcal{A}(G)$ par $\mathcal{A}'(G)$ dans diverses définitions.

En particulier, soit $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_{sp}$. On dispose d'un sous-ensemble $\mathcal{A}'(G, \mathcal{O}) \subset \mathcal{A}'(G)$ et une bijection $\nabla : \mathcal{A}'(G, \mathcal{O}) \to \mathcal{M}(G, \mathcal{O})$. Fixons $N \in \mathcal{O}$. Notons $\bar{A}(N)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison dans $\bar{A}(N)$. On a une application $(N, d, \mu) \mapsto d$ de $\mathcal{M}(G, \mathcal{O})$ dans $\bar{A}(N)/conj$, d'où par composition avec ∇, une application $\mathcal{A}'(G, \mathcal{O}) \to \bar{A}(N)/conj$. Pour $d \in \bar{A}(N)/conj$, on note $\mathcal{A}'(G, \mathcal{O}, d)$ l'image réciproque de d.

Notons $\mathcal{J}$ l'ensemble des couples $(\alpha, \mathcal{O}')$ tels que $\alpha \in \Delta_a$ et $\mathcal{O}' \in \mathfrak{g}_{t_\alpha,nil}/conj$.

Théorème. *Il existe une application injective $b : \bar{A}(N)/conj \to \mathcal{J}$ telle que les propriétés suivantes soient vérifiées. Soit $d \in \bar{A}(N)/conj$, posons $b(d) = (\alpha, \mathcal{O}')$.*

(i) L'orbite de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathcal{O}'$ est égale à $\mathcal{O}$.

(ii) Si $\mathcal{O}$ est conservée par l'action galoisienne, α et $\mathcal{O}'$ le sont aussi.

(iii) Soit $(\Lambda, \mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{A}'(G, \mathcal{O}, d)$. Alors $\alpha \notin \Lambda$. Il existe une unique représentation $\rho' \in Irr(W_{t_\alpha}(M_{\Lambda,t_\alpha}))$ telle que $< \rho_{t_\alpha}, \rho' >> 0$ et que son image $Spr(M_{\Lambda,t_\alpha}, \mathcal{E}_{t_\alpha}, \rho')$ par la correspondance de Springer généralisée soit portée par $\mathcal{O}'$. Pour cette représentation ρ', on a $< \rho_{t_\alpha}, \rho' >= 1$. Posons $Spr(M_{\Lambda,t_\alpha}, \mathcal{E}_{t_\alpha}, \rho') = (\mathcal{O}', \mathcal{L}_{\alpha;\Lambda,\mathcal{E},\rho})$. L'application $(\Lambda, \mathcal{E}, \rho) \mapsto \mathcal{L}_{\alpha;\Lambda,\mathcal{E},\rho}$ définie sur $\mathcal{A}'(G, \mathcal{O}, d)$ est injective.

(iv) Soit $(\Lambda, \mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{A}'(G, \mathcal{O}) - \mathcal{A}'(G, \mathcal{O}, d)$. Supposons $\alpha \notin \Lambda$. Alors il n'existe pas de représentation $\rho' \in Irr(W_{t_\alpha}(M_{\Lambda,t_\alpha}))$ telle que $< \rho_{t_\alpha}, \rho' >> 0$ et que son image $Spr(M_{\Lambda,t_\alpha}, \mathcal{E}_{t_\alpha}, \rho')$ par la correspondance de Springer généralisée soit portée par $\mathcal{O}'$.

Preuve. Supposons d'abord que $\mathcal{O}$ n'est pas exceptionnelle. Identifions $\bar{A}(N)/conj$ à un ensemble de représentants $\mathcal{T} \subset \bar{A}(N)$. Pour tout $d \in \mathcal{T}$, on fixe un triplet (α, N', g_d) vérifiant les conditions du lemme 5.3.6. On note $\mathcal{O}'$ l'orbite de N' pour l'action de G_{t_α}. On pose $b(d) = (\alpha, \mathcal{O}')$ et cela définit l'application b. Montrons que

(1) cette application est injective.

Soient $d, \underline{d} \in \mathcal{T}$, effectuons les constructions ci-dessus, en soulignant les objets attachés à $\underline{d}$, et supposons que $(\underline{\alpha}, \underline{\mathcal{O}}') = (\alpha, \mathcal{O}')$. Alors il existe $h \in G_{t_\alpha}$ tel que $Ad(h)(\underline{N}') = N'$. L'automorphisme $Ad(g_d h g_{\underline{d}}^{-1})$ envoie $(N, g_{\underline{d}} t_\alpha g_{\underline{d}}^{-1})$ sur $(N, g_d t_\alpha g_d^{-1})$. Donc $g_d h g_{\underline{d}}^{-1}$ appartient à $Z_G(N)$ et l'action de l'image dans $\bar{A}(N)$ de cet élément envoie l'image $\underline{d}$ de $g_{\underline{d}} t_\alpha g_{\underline{d}}^{-1}$ sur l'image d de $g_d t_\alpha g_d^{-1}$. Puisque $\underline{d}$ et d appartiennent à notre ensemble de représentants $\mathcal{T}$, on a $\underline{d} = d$. Cela prouve (1).

L'assertion (i) de l'énoncé est vérifiée par construction et le (ii) du lemme 5.3.6 dit que l'on peut assurer l'assertion (ii).

Soient $d \in \mathcal{T}$ et $(\Lambda, \mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{A}(G, \mathcal{O}, d)$. On note comme ci-dessus (α, N', g_d) le triplet associé à d. Ecrivons $\nabla(\Lambda, \mathcal{E}, \rho) = (N, d, \mu)$. Par l'homomorphisme du (b) du lemme 5.3.6, la représentation μ se relève en une représentation μ_α de $Z_{G_{t_\alpha}}(N')/Z_{G_{t_\alpha}}(N')^0$ qui est encore irréductible puisque l'homomorphisme est surjectif. Cette représentation détermine un système local irréductible sur $\mathcal{O}_\alpha$ que l'on note $\mathcal{L}_{\alpha;\Lambda,\mathcal{E},\rho}$. Puisque ∇ est injective, l'application $(\Lambda, \mathcal{E}, \rho) \mapsto \mu$ est injective sur $\mathcal{A}(G, \mathcal{O}, d)$ et il en est de même de l'application $(\Lambda, \mathcal{E}, \rho) \mapsto \mathcal{L}_{\alpha;\Lambda,\mathcal{O},\rho}$. Posons $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\alpha;\Lambda,\mathcal{E},\rho}$, $u = exp(N')$ et notons $\mathcal{X}_{t_\alpha,u}$ l'orbite de $t_\alpha u$ pour l'action de G_{t_α}. L'assertion (ii) du théorème 5.3.5 et la construction disent que la restriction du complexe $K_{M_\Lambda,\mathcal{E},\rho}$ à $\mathcal{X}_{t_\alpha,u}$ est, à un décalage près, le système local déduit de $\mathcal{L}$ par l'exponentielle. Il en résulte que $t_\alpha u$ appartient au support de $K_{M_\Lambda,\mathcal{E},\rho}$. Par construction de ce complexe, la partie semi-simple t_α de $t_\alpha u$ est donc conjuguée à un élément de M_Λ dont l'image dans $M_{\Lambda,AD}$ appartient au support de $\mathcal{E}$. D'après la proposition 5.2.4, il existe $x \in \bar{C}^{nr} \cap a_T(\mathbb{T})$ tel que $\Lambda \subset \Lambda(x)$ et que t_α soit conjugué à $\mathbf{j}_T(x)$. Les groupes G_{t_α} et $G_{\mathbf{j}_T(x)}$ sont conjugués. Leurs ensembles de racines ont pour ensembles de racines simples $\Delta_a - \{\alpha\}$ et $\Lambda(x)$. Ces ensembles ont donc même nombre d'éléments et cela entraîne que $x = s_\beta$ pour une racine $\beta \in \Delta_a$. La condition $\Lambda \subset \Lambda(x)$ entraîne que $\beta \notin \Lambda$. Puisque t_α et $\mathbf{j}_T(x) = t_\beta$ sont conjugués, le lemme 5.1.2 entraîne que α et β sont conjugués par l'action du groupe $\mathbf{\Omega}$. Or ce groupe conserve Λ, cf. 2.2.16(6). Donc $\alpha \notin \Lambda$.

Quitte à étendre le corps de base $\mathbb{F}_q$ on peut supposer que les hypothèses de 5.2.6 sont vérifiées. En particulier, on dispose de la fonction caractéristique $\boldsymbol{\chi}_{M_\Lambda,\mathcal{E},\rho}$. Puisque la restriction du complexe $K_{M_\Lambda,\mathcal{E},\rho}$ à $\mathcal{X}_{t_\alpha,u}$ est, à un décalage près, le système local déduit de $\mathcal{L}$, il existe un nombre complexe c de module 1 tel que l'on ait l'égalité

(2) $\boldsymbol{\chi}_{M_\Lambda,\mathcal{E},\rho}(t_\alpha exp(N'')) = c\mathcal{Y}_{\mathcal{O}',\mathcal{L}}$ pour tout $N'' \in (\mathcal{O}')^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$.

D'après la proposition 5.2.6, on a aussi

$$(3) \qquad \boldsymbol{\chi}_{M_\Lambda,\mathcal{E},\rho}(t_\alpha exp(N'')) = \sum_{\rho' \in Irr(W_{t_\alpha}(M_{\Lambda,t_\alpha}))} < \rho_t, \rho' > \boldsymbol{\chi}_{M_{\Lambda,t_\alpha},\mathcal{E}_{t_\alpha},\rho'}(N'').$$

Pour $\rho' \in Irr(W_{t_\alpha}(M_{\Lambda,t_\alpha}))$, notons $(\mathcal{O}'_{\rho'}, \mathcal{L}_{\rho'})$ l'image de $(M_{\Lambda,t_\alpha}, \mathcal{E}_{t_\alpha}, \rho')$ par la représentation de Springer généralisée et notons $\mathcal{O}_{\rho'}$ l'orbite de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathcal{O}'_{\rho'}$. Le support de $\boldsymbol{\chi}_{M_{\Lambda,t_\alpha},\mathcal{E}_{t_\alpha},\rho'}$ est contenu dans l'adhérence de $\mathcal{O}'_{\rho'}$. Pour $N'' \in \mathcal{O}'$, on peut donc restreindre l'ensemble de sommation de (3) à l'ensemble $\mathcal{R}$ des $\rho' \in Irr(W_{t_\alpha}(M_{\Lambda,t_\alpha}))$ tels que $< \rho_t, \rho' >> 0$ et que l'adhérence de $\mathcal{O}'_{\rho'}$ contienne $\mathcal{O}'$. Prouvons que

(4) pour $\rho' \in \mathcal{R}$, on a $\mathcal{O}'_{\rho'} = \mathcal{O}'$.

Supposons que $\mathcal{O}'_{\rho'} \neq \mathcal{O}'$. Puisque $\mathcal{O}'$ est contenue dans l'adhérence de $\mathcal{O}'_{\rho'}$ et que $\mathcal{O}$ est l'orbite de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathcal{O}'$, il résulte de 3.1.3 que $\mathcal{O}$ est contenue dans l'adhérence de $\mathcal{O}_{\rho'}$ et que $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}_{\rho'}$. Ces deux propriétés contredisent la proposition 5.3.4. Cela prouve (4).

En conséquence, pour $\rho' \in \mathcal{R}$, la restriction de $\boldsymbol{\chi}_{M_{\Lambda,t_\alpha},\mathcal{E}_{t_\alpha},\rho'}$ à $\mathcal{O}'$ est égale à $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}',\mathcal{L}_{\rho'}}$. L'égalité (3) devient

$$(5) \qquad \boldsymbol{\chi}_{M_\Lambda,\mathcal{E},\rho}(t_\alpha exp(N'')) = \sum_{\rho' \in \mathcal{R}} < \rho_t, \rho' > \mathcal{Y}_{\mathcal{O}',\mathcal{L}_{\rho'}}(N'').$$

En comparant avec (2), on obtient que $\mathcal{R}$ est réduit à un unique élément. Pour cet élément ρ', on a $\mathcal{L}_{\rho'} = \mathcal{L}$ et $< \rho_t, \rho' >= 1$. Cela démontre le (iii) de l'énoncé.

Soit $(\Lambda, \mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{A}(G, \mathcal{O})$. Supposons $\alpha \notin \Lambda$ et supposons qu'il existe une représentation $\rho' \in Irr(W_{t_\alpha}(M_{\Lambda,t_\alpha}))$ telle que $< \rho_{t_\alpha}, \rho' >> 0$ et que son image par la correspondance de Springer généralisée soit portée par $\mathcal{O}'$. On définit l'ensemble $\mathcal{R}$ comme ci-dessus. L'hypothèse précédente entraîne que $\mathcal{R}$ n'est pas vide. On prouve comme ci-dessus les assertions (4) et (5). Il en résulte que la fonction $N'' \mapsto \boldsymbol{\chi}_{M_\Lambda,\mathcal{E},\rho}(t_\alpha exp(N''))$ est non nulle sur $\mathcal{O}'$. A fortiori, la restriction à $\mathcal{X}_{t_\alpha,u}$ du complexe $K_{M_\Lambda,\mathcal{E},\rho}$ est non nulle. En conjuguant par g_d, on obtient que $K_{M_\Lambda,\mathcal{E},\rho}$ est non nul sur un élément $texp(N)$ tel que $t \in Z_G(N)$ et que l'image de t dans $\bar{A}(N)$ soit d. Le théorème 5.3.5 dit que $\nabla(\Lambda, \mathcal{E}, \rho)$ est de la forme (N, d, μ). Par définition, on a alors $(\Lambda, \mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{A}(G, \mathcal{O}, d)$. Cela prouve (iv).

Il reste à traiter le cas des orbites exceptionnelles. Pour une telle orbite $\mathcal{O}$, on fixe encore un élément $N \in \mathcal{O}$. On a $\bar{A}(N) = A(N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on utilise les mêmes notations qu'en 5.3.5 On note $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_{sgn}$ les systèmes locaux sur $\mathcal{O}$ correspondant aux deux caractères 1 et sgn de $A(N)$.

Supposons que G soit de type E_7 et que $\mathcal{O}$ soit de type $A_4 + A_1$. D'après 5.3.5, on a $\mathcal{A}(G, \mathcal{O}, 1) = \{\rho_{512,11}, \rho_{512,12}\}$ et $\mathcal{A}(G, \mathcal{O}, d_2) = \{E_7[i], E_7[-i]\}$. Remarquons que $t_{\alpha_0} = 1$ donc $G_{t_{\alpha_0}} = G$ et $\mathcal{O}$ est aussi une orbite de $\mathfrak{g}_{t_{\alpha_0},nil}$. On pose $b(1) = (\alpha_0, \mathcal{O})$. Le groupe $G_{t_{\alpha_4}}$ est de type $A_3 \times A_3 \times A_1$. Notons $\mathcal{O}'$ l'orbite nilpotente régulière de $\mathfrak{g}_{t_{\alpha_4}}$. On pose $b(d_2) = (\alpha_4, \mathcal{O}')$. Les assertions (i) et (ii) de l'énoncé sont immédiates. Il résulte de [7] p. 430 que les images de $\rho_{512,11}$ et $\rho_{512,12}$ par la correspondance de Springer sont $(\mathcal{O}, \mathcal{L}_1)$ et $(\mathcal{O}, \mathcal{L}_{sgn})$. L'assertion (iii) pour $d = 1$ en résulte. Fixons un élément $N' \in \mathcal{O}'$. Les éléments $E_7[i]$ et $E_7[-i]$ sont des faisceaux cuspidaux portés par l'orbite de $t_{\alpha_4} exp(N')$. On en déduit par restriction et via l'exponentielle des systèmes locaux sur $\mathcal{O}'$. Ces systèmes locaux sont distincts comme on l'a dit en 5.2.2. L'assertion (iii) pour $d = d_2$ en résulte. Pour $d = 1$, l'assertion (iv) est vide : les éléments de $A(G, \mathcal{O}, d_2)$ ont pour ensemble Λ associé l'ensemble $\Delta_a - \{\alpha_4\}$, qui contient α_0. Il reste à prouver cette assertion (iv) pour $d = d_2$. Il s'agit de prouver ce qui suit. Soit $\rho = \rho_{512,11}$ ou $\rho = \rho_{512,12}$.

Notons $\rho_{t_{\alpha_4}}$ la restriction de ρ au groupe de Weyl $W_{t_{\alpha_4}}$ de $G_{t_{\alpha_4}}$. Soit ρ' une composante irréductible de $\rho_{t_{\alpha_4}}$. Alors l'image de ρ' par la correspondance de Springer est portée par une orbite distincte de $\mathcal{O}'$. En fait, pour notre groupe $G_{t_{\alpha_4}}$ de type $A_3 \times A_3 \times A_1$, l'unique représentation irréductible de $W_{t_{\alpha_4}}$ dont l'image par la correspondance de Springer est portée par $\mathcal{O}'$ est la représentation triviale. On doit donc prouver que la représentation triviale n'intervient pas dans $\rho_{t_{\alpha_4}}$. Mais $\rho_{t_{\alpha_4}}$ est calculé en [3] table 32 et on voit que cette propriété est vérifiée.

Supposons que G soit de type E_8 et que $\mathcal{O}$ soit de type $A_4 + A_1$. On a $\mathcal{A}(G, \mathcal{O}, 1) = \{\rho_{4096,26}, \rho_{4096,27}\}$ et $\mathcal{A}(G, \mathcal{O}, d_2) = \{(E_7[i], sgn), (E_7[-i], sgn)\}$. On pose $b(1) = (\alpha_0, \mathcal{O})$. Le groupe $G_{t_{\alpha_3}}$ est de type $A_1 \times A_7$. On note $\mathcal{O}'$ l'orbite nilpotente de $\mathfrak{g}_{t_{\alpha_3}}$ qui est le produit de l'orbite régulière du facteur A_1 et de l'orbite du facteur A_7 paramétrée par la partition (4^2). On pose $b(d_2) = (\alpha_3, \mathcal{O}')$. Les assertions (i) et (ii) de l'énoncé sont immédiates. Les images par la correspondance de Springer de $\rho_{4096,26}$ et $\rho_{4096,27}$ sont $(\mathcal{O}, \mathcal{L}_1)$ et $(\mathcal{O}, \mathcal{L}_{sgn})$. L'assertion (iii) pour $d = 1$ en résulte. Les termes $(E_7[\pm i], sgn)$ sont de la forme $(\Lambda, \mathcal{E}, sgn)$ où $\Lambda = \Delta_a - \{\alpha_3\}$, M_Λ est de type E_7, $\mathcal{E}$ est l'un des deux éléments de $\mathbf{FC}_u(M_{\Lambda,AD})$ et sgn est le caractère non trivial de $W(M_\Lambda) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La représentation $sgn_{t_{\alpha_3}}$ est le caractère non trivial de $W_{t_{\alpha_3}}(M_{\Lambda,t_{\alpha_3}}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les images par la correspondance de Springer généralisée des deux triplets $(M_{\Lambda,t_{\alpha_3}}, \mathcal{E}_{t_{\alpha_3}}, sgn_{t_{\alpha_3}})$ sont portées par $\mathcal{O}'$ et associées à deux systèmes locaux distincts sur cette orbite. L'assertion (iii) pour $d = d_2$ en résulte. De nouveau, l'assertion (iv) est vide pour $d = 1$. Pour $d = d_2$, elle équivalente à l'assertion suivante. Soit $\rho = \rho_{4096,26}$ ou $\rho = \rho_{4096,27}$. Notons $\rho_{t_{\alpha_3}}$ la restriction de ρ au groupe de Weyl $W_{t_{\alpha_3}}$ de $G_{t_{\alpha_3}}$. Soit ρ' une composante irréductible de $\rho_{t_{\alpha_3}}$. Alors l'image de ρ' par la correspondance de Springer est portée par une orbite distincte de $\mathcal{O}'$. Cela résulte de [3] table 42, où les représentations $\rho_{4096,26}$ et $\rho_{4096,27}$ sont notées respectivement 4096^*_x et 4096^*_z.

Supposons que G soit de type E_8 et que $\mathcal{O}$ soit de type $E_6(a_1)+A_1$. On a $\mathcal{A}(G, \mathcal{O}, 1) = \{\rho_{4096,11}, \rho_{4096,12}\}$, $\mathcal{A}(G, \mathcal{O}, d_2) = \{(E_7[i], 1), (E_7[-i], 1)\}$. On pose $b(1) = (\alpha_0, \mathcal{O})$. Notons $\mathcal{O}''$ le produit des deux orbites nilpotentes régulières des composantes de $G_{t_{\alpha_3}}$ de type A_1 et A_7. On pose $b(d_2) = (\alpha_3, \mathcal{O}'')$. Les assertions (i) et (ii) de l'énoncé sont immédiates. Les images par la correspondance de Springer de $\rho_{4096,11}$ et $\rho_{4096,12}$ sont $(\mathcal{O}, \mathcal{L}_1)$ et $(\mathcal{O}, \mathcal{L}_{sgn})$. L'assertion (iii) pour $d = 1$ en résulte. Les termes $(E_7[\pm i], 1)$ sont de la forme $(\Lambda, \mathcal{E}, 1)$ où $\Lambda = \Delta_a - \{\alpha_3\}$, M_Λ est de type E_7, $\mathcal{E}$ est l'un des deux éléments de $\mathbf{FC}_u(M_{\Lambda,AD})$ et 1 est le caractère trivial de $W(M_\Lambda) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La représentation $1_{t_{\alpha_3}}$ est le caractère trivial de $W_{t_{\alpha_3}}(M_{\Lambda,t_{\alpha_3}}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les images par la correspondance de Springer généralisée des deux triplets $(M_{\Lambda,t_{\alpha_3}}, \mathcal{E}_{t_{\alpha_3}}, 1)$ sont portées par $\mathcal{O}''$ et associées à deux systèmes locaux distincts sur cette orbite. L'assertion (iii) pour $d = d_2$ en résulte. L'assertion (iv) est vide pour $d = 1$. Pour $d = d_2$, elle se déduit encore de [3] table 42, où $\rho_{4096,11}$ et $\rho_{4096,12}$ sont notées respectivement 4096_z et 4096_x. Cela achève la preuve du théorème. $\square$

Remarque. Nous n'utiliserons le théorème 5.3.5 que via le théorème ci-dessus dont il est une conséquence. Mais ce dernier théorème est beaucoup plus faible que le théorème 5.3.5 et beaucoup plus simple à prouver. Par exemple, supposons que $A(G, \mathcal{O})$ est réduit à un seul élément (ce qui est souvent les cas pour les groupes exceptionnels). Cet élément est alors de la forme $(M, \mathcal{E}, \rho)$ où $M = T$, $\mathcal{E}$ est le système local trivial sur M_{AD} et ρ est une représentation irréductible spéciale de W. L'image de ρ par la représentation de Springer est $(\mathcal{O}, \mathcal{L}_1)$, où $\mathcal{L}_1$ est le système local trivial sur $\mathcal{O}$. On pose alors $b(1) = (\alpha_0, \mathcal{O})$ et toutes les assertions du théorème sont vérifiées. Pour les autres orbites des groupes exceptionnels, la démonstration du théorème devrait résulter comme dans le cas ci-dessus des orbites exceptionnelles des tables de [3] mais nous n'avons pas eu la patience de traiter

toutes les orbites.

6 L'espace des combinaisons linéaires stables d'intégrales orbitales nilpotentes

6.1 Intégrales orbitales nilpotentes et espace $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$

6.1.1 Normalisation des intégrales orbitales nilpotentes

Dans cette section finale, on suppose que G est un groupe réductif connexe défini sur F, adjoint, absolument simple et quasi-déployé. On impose l'hypothèse $(Hyp)_2(p)$ de 2.1.2.

On fixe un épinglage $\mathfrak{E}$ et un épinglage affine $\mathfrak{E}_a$ comme en 2.1.7 et 2.1.9, tous deux conservés par l'action galoisienne. On utilise les constructions de ces paragraphes.

Rappelons qu'en 2.2.6, on a fixé un caractère ψ de F, une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $< .,. >$ sur $\mathfrak{g}(F)$ et la transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ qui s'en déduit. . Soit $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$. Pour $N \in \mathcal{O}$, l'espace tangent à $\mathcal{O}$ au point N s'identifie à $\mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(N)$. Cet espace est muni de la forme symplectique $(X,Y) \mapsto < N, [X,Y] >$. De ψ et de cette forme se déduit une mesure autoduale sur $\mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(N)$. La collection de ces mesures sur les espaces tangents en tout point de $\mathcal{O}$ définit une mesure $d_{\mathcal{O}}$ sur cette orbite $\mathcal{O}$. Elle est invariante par conjugaison par $G(F)$. On définit l'intégrale orbitale $I_{\mathcal{O}}$ sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par

$$I_{\mathcal{O}}(f) = \int_{\mathcal{O}} f(N)\, d_{\mathcal{O}}N$$

pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. La famille $(I_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O}\in\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj}$ est une base de l'espace $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ des distributions invariantes à support nilpotent.

Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ et $\lambda \in F^\times$, notons f^λ la fonction définie par $f^\lambda(X) = f(\lambda X)$. Soit $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$. L'orbite $\mathcal{O}$ est invariante par l'homothétie $N \mapsto \lambda^2 N$. On a l'égalité

(2) $I_{\mathcal{O}}(f^{\lambda^2}) = |\lambda|_F^{-dim(\mathcal{O})} I_{\mathcal{O}}(f)$.

Pour $d \in \mathbb{N}$, notons $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}[d]$ le sous-espace de $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ engendré par les $I_{\mathcal{O}}$ pour les orbites $\mathcal{O}$ telles que $dim(\mathcal{O}) = d$. L'espace $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ est somme directe des sous-espaces $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}[d]$. Pour $J \in I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$, notons $J[d]$ sa composante sur $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}[d]$. Montrons que

(3) J est stable si et seulement si $J[d]$ l'est pour tout $d \in \mathbb{Z}$.

L'assertion (2) montre que, pour $f \in I(\mathfrak{g}(F))$, $J[d](f)$ se calcule par interpolation des valeurs $J(f^{\lambda^2})$ pour $\lambda \in F^\times$. L'espace $I^{inst}(\mathfrak{g}(F))$ défini en 2.4.1 est conservé par l'application $f \mapsto f^\lambda$. Si J est stable et que $f \in I^{inst}(\mathfrak{g}(F))$, on a $J(f^{\lambda^2}) = 0$ pour tout λ, donc $J[d](f) = 0$. Cela prouve (3).

6.1.2 La fonction-test associée à un couple $(s, \mathcal{O}')$

Soit s un sommet de l'immeuble $Imm(G)$ et soit $\mathcal{O}' \in \mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)/conj$. Si $\mathcal{O}' = \{0\}$, notons $\underline{h}_{s,\mathcal{O}'}$ la fonction constante sur $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$ de valeur 1. Supposons que $\mathcal{O}' \neq \{0\}$. Fixons un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (f,h,e) de $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$ tel que $e \in \mathcal{O}'$. Remarquons que $-f$ appartient aussi à $\mathcal{O}'$ (le $\mathfrak{sl}(2)$-triplet détermine un homomorphisme $SL(2) \to G_s$ défini sur $\mathbb{F}_q$ et $-f$ est conjugué à e par un élément de l'image de $SL(2,\mathbb{F}_q)$). Au triplet est associé une

graduation $(\mathfrak{g}_{s,i})_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathfrak{g}_s$: $\mathfrak{g}_{s,i} = \{X \in \mathfrak{g}_s; [h,X] = iX\}$. On pose $\mathfrak{g}_{s,\geq i} = \oplus_{j\geq i}\mathfrak{g}_{s,j}$. Notons $\underline{h}'_{s,\mathcal{O}'}$ la fonction caractéristique de $-f + \mathfrak{g}_{s,\geq -1}$ et posons

$$\underline{h}_{s,\mathcal{O}'} = q^{-dim(\mathfrak{g}_{s,1})/2)}|G_s(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{x\in G_s(\mathbb{F}_q)} {}^x\underline{h}'_{s,\mathcal{O}'}.$$

Cette fonction ne dépend pas du choix du $\mathfrak{sl}(2)$-triplet. Que $\mathcal{O}'$ soit nulle ou pas, on relève $\underline{h}_{s,\mathcal{O}'}$ en une fonction sur $\mathfrak{k}_s$ invariante par translations par $\mathfrak{k}_s^+$, que l'on étend en une fonction sur $\mathfrak{g}(F)$ nulle hors de $\mathfrak{k}_s$. On note $h_{s,\mathcal{O}'}$ cette dernière fonction.

On a introduit en 2.4.1 le sous-espace $\mathcal{H} \subset I(\mathfrak{g}(F))$.

Proposition. *(i) La fonction $h_{s,\mathcal{O}'}$ appartient à $\mathcal{H}$.*

(ii) Soit $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$. Si $rel_{s,F}(\mathcal{O}')$ n'est pas incluse dans l'adhérence de $\mathcal{O}$ pour la topologie p-adique, alors $I_{\mathcal{O}}(h_{s,\mathcal{O}'}) = 0$.

(iii) Soit $\mathcal{O} = rel_{s,F}(\mathcal{O}')$. Alors $I_{\mathcal{O}}(h_{s,\mathcal{O}'}) = 1$.

Preuve. La fonction $h_{s,\mathcal{O}'}$ appartient à $\mathcal{H}$ parce qu'elle est invariante par l'image réciproque dans $\mathfrak{k}_s$ de $\mathfrak{g}_{s,\geq 0}$ et que cet ensemble contient une sous-algèbre d'Iwahori. Cf. [11] lemme 7.3.1 pour les assertions (ii) et (iii). □

Quand s décrit les sommets de $Imm(G)$ et $\mathcal{O}'$ décrit $\mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)/conj$, les orbites $rel_{s,F}(\mathcal{O}')$ décrivent $\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$ tout entier, cf. 3.3.1(8). Il résulte de la proposition que les fonctions $h_{s,\mathcal{O}'}$ séparent les intégrales orbitales nilpotentes.

6.1.3 Calcul de la fonction $\underline{h}_{s,\mathcal{O}}$

On conserve les données du paragraphe précédent. On a défini l'ensemble $\mathcal{I}^{FC}_{0,\mathbb{F}_q}(G_s)$ en 5.2.1. Pour $(M,\mathcal{E}) \in \mathcal{I}^{FC}_{0,\mathbb{F}_q}(G_s)$, on note $W_s(M) = Norm_{G_s}(M)/M$.

Proposition. *Pour tout $X \in \mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)$, on a l'égalité*

$$\underline{h}_{s,\mathcal{O}}(X) = |G_s(\mathbb{F}_q)|^{-1} q^{dim(\mathfrak{g}_s)-dim(\mathcal{O})/2} \sum_{(M,\mathcal{E})\in\mathcal{I}^{FC}_{0,\mathbb{F}_q}(G_s)} |W_s(M)|^{-1} q^{-dim(Z(M)^0)}$$

$$\sum_{w\in W_s(M)} |Z^0_{M_w}(\mathbb{F}_q)| Q^\natural_{M,\mathcal{E},w}(e) Q_{M,\mathcal{E},w}(-X).$$

Preuve. La proposition est conséquence de la proposition 6.12 de [26]. On applique les constructions de cette référence au $\mathfrak{sl}(2)$-triplet $(-f,h,-e)$. Lusztig introduit en [26] 2.4 une fonction $\mathbf{\Gamma}_\phi$ sur $\mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)$ définie par

$$\mathbf{\Gamma}_\phi(X) = q^{dim(\mathfrak{g}_{s,1})/2-dim(\mathfrak{g}_{s,\geq 1})} \sum_{g\in G_s(\mathbb{F}_q)} \psi(<-f, gXg^{-1}>)\mathbf{1}_{\mathfrak{g}_{s,\geq 1}}(gXg^{-1})$$

pour $X \in \mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)$, où $\mathbf{1}_{\mathfrak{g}_{s,\geq 1}}$ est la fonction caractéristique de $\mathfrak{g}_{s,\geq 1}(\mathbb{F}_q)$. En appliquant nos définitions, on a

$$\hat{\underline{h}}'_{s,\mathcal{O}'}(X) = q^{dim(\mathfrak{g}_{s,\geq -1})-dim(\mathfrak{g}_s)/2}\psi(<-f,X>)\mathbf{1}_{\mathfrak{g}_{s,\geq 1}}(X),$$

puis

$$\hat{\underline{h}}_{s,\mathcal{O}'}(X) = q^{-dim(\mathfrak{g}_{s,1})/2+dim(\mathfrak{g}_{s,\geq -1})-dim(\mathfrak{g}_s)/2}|G_s(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{g\in G_s(\mathbb{F}_q)} \psi(<-f,gXg^{-1}>)\mathbf{1}_{\mathfrak{g}_{s,\geq 1}}(gXg^{-1}).$$

D'où

$$(1) \qquad \hat{\underline{h}}_{s,\mathcal{O}'}(X) = c\mathbf{\Gamma}_\phi(X)$$

pour $X \in \mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)$, où

$$c = q^{-dim(\mathfrak{g}_{s,1})+dim(\mathfrak{g}_{s,\geq -1})+dim(\mathfrak{g}_{s,\geq 1})-dim(\mathfrak{g}_s)/2}|G_s(\mathbb{F}_q)|^{-1},$$

ou encore

$$c = q^{dim(\mathfrak{g}_s)/2}|G_s(\mathbb{F}_q)|^{-1}.$$

Les fonctions $\hat{\underline{h}}_{s,\mathcal{O}'}$ et $\mathbf{\Gamma}_\phi$ sont toutes deux à support nilpotent, l'égalité (1) est donc vérifiée pour tout $X \in \mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$. Par inversion de Fourier, on en déduit

$$(2) \qquad \underline{h}_{s,\mathcal{O}'}(X) = c\hat{\mathbf{\Gamma}}_\phi(-X)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$.

La proposition 6.12 de [26] calcule la restriction de $\hat{\mathbf{\Gamma}}_\phi$ à $\mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)$ sous la forme

$$(3) \qquad \hat{\mathbf{\Gamma}}_\phi(X) = \sum_{(M,\mathcal{E})\in\mathcal{I}^{FC}_{0,\mathbb{F}_q}(G_s)} \mathbf{\Psi}_{M,\mathcal{E}}(X)$$

pour $X \in \mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)$. On doit prendre garde à quelques points techniques. Lusztig ne normalise pas la transformation de Fourier comme nous, la sienne est la nôtre multipliée par $q^{dim(\mathfrak{g}_s)/2}$. Comme on l'a dit, son triplet est $(-f, h, -e)$, le terme $-N$ apparaissant dans sa formule est e pour nous. Il suppose que le groupe G_s est déployé. Ses arguments valent dans le cas général, mais il apparaît des Frobenius dans les formules. Enfin, on peut simplifier la somme en ι' apparaissant dans sa formule en vertu de l'égalité 6.6(b) de [26]. En tenant compte de ces remarques et en traduisant les notations de Lusztig en les nôtres, on obtient la formule suivante. Soit $(M, \mathcal{E}) \in \mathcal{I}^{FC}_{0,\mathbb{F}_q}(G_s)$. Pour $X \in \mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)$, on a l'égalité

$$(4) \qquad \mathbf{\Psi}_{M,\mathcal{E}}(X) = \sum_{\rho,\rho_1\in Irr_{\mathbb{F}_q}(W_s(M))} q^{b(M,\mathcal{E},\rho_1)-b(M,\mathcal{E},\rho)-dim(\mathcal{O}')/2+dim(\mathfrak{g}_s)/2-dim(Z(M)^0)}|W_s(M)|^{-1}$$

$$\sum_{w\in W_s(M)} trace(\rho^\flat(w^{-1}Fr))trace(\rho_1^\flat(Fr^{-1}w))|Z^0_{M_w}(\mathbb{F}_q)|\chi^\natural_{M,\mathcal{E},\rho}(e)\chi_{M,\mathcal{E},\rho_1}(X).$$

Fixons $w \in W_s(M)$. Dans la formule ci-dessus apparaissent les deux sommes

$$(5) \qquad \sum_{\rho\in Irr_{\mathbb{F}_q}(W_s(M))} q^{-b(M,\mathcal{E},\rho)}trace(\rho^\flat(w^{-1}Fr))\chi^\natural_{M,\mathcal{E},\rho}(e)$$

et

$$(6) \qquad \sum_{\rho_1\in Irr_{\mathbb{F}_q}(W_s(M))} q^{b(M,\mathcal{E},\rho_1)}trace(\rho_1^\flat(Fr^{-1}w))\chi_{M,\mathcal{E},\rho_1}(X).$$

Dans la première, utilisons la formule 5.2.1(3). Cette somme devient

$$|W_s(M)|^{-1}\sum_{v\in W_s(M)} Q^\natural_{M,\mathcal{E},v}(e)\sum_{\rho\in Irr_{\mathbb{F}_q}(W_s(M))} trace(\rho^\flat(vFr^{-1}))trace(\rho^\flat(w^{-1}Fr)).$$

Notons $Cl_{Fr}(w)$ la classe de Fr-conjugaison de w. Fixons $v \in W_s(M)$. Selon les formules d'orthogonalité pour le groupe $W_s(M)\rtimes\Gamma_{\mathbb{F}_q}$, la somme en ρ vaut 0 si $v \notin Cl_{Fr}(w)$ et vaut

$|W_s(M)||Cl_{Fr}(w)|^{-1}$ si $v \in Cl_{Fr}(w)$. Dans ce dernier cas, on a $Q^\natural_{M,\mathcal{E},v}(e) = Q^\natural_{M,\mathcal{E},w}(e)$ et la somme de ces termes sur $v \in Cl_{Fr}(w)$ vaut $|Cl_{Fr}(w)|Q^\natural_{M,\mathcal{E},w}(e)$. La somme (5) vaut donc $Q^\natural_{M,\mathcal{E},w}(e)$. Un calcul analogue utilisant la formule 5.2.1(2) prouve que la somme (6) vaut $Q_{M,\mathcal{E},w}(X)$. Alors la formule (4) devient

$$\mathbf{\Psi}_{M,\mathcal{E}}(X) = q^{-dim(\mathcal{O}')/2+dim(\mathfrak{g}_s)/2-dim(Z(M)^0)}|W_s(M)|^{-1} \sum_{w\in W_s(M)} |Z^0_{M_w}(\mathbb{F}_q)|Q^\natural_{M,\mathcal{E},w}(e)Q_{M,\mathcal{E},w}(X).$$

L'énoncé résulte de cette égalité et de (2) et (3). $\square$

6.1.4 Description de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$

On a introduit en 2.4.1 un espace $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$ et une application antilinéaire $D^G : \mathcal{D}(\mathfrak{g}(F)) \to I(\mathfrak{g}(F))^*$. On a note $\hat{D}^G$ la composée de cette application et de la transformation de Fourier dans $I(\mathfrak{g}(F))^*$. D'après le lemme 2.4.1, l'application $d \mapsto res_{\mathcal{H}}(\hat{D}^G(d))$ est injective. Il en est de même de l'application $J \mapsto res_{\mathcal{H}}(J)$ de $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ dans $\mathcal{H}^*$. De plus, ces deux applications ont même image dans $\mathcal{H}^*$: cette assertion est équivalente par transformation de Fourier à la proposition 5.5 de [46]. Il existe donc un unique isomorphisme antilinéaire $\delta : I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil} \to \mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$ de sorte que $res_{\mathcal{H}}(J) = res_{\mathcal{H}}(\hat{D}^G(\delta(J))$ pour tout $J \in I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$. On a défini le sous-espace $\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$ de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$. On note $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil} = I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil} \cap SI(\mathfrak{g}(F))^*$ l'espace des distributions stables à support nilpotent.

Lemme. *L'isomorphisme δ se restreint en un isomorphisme (antilinéaire) de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ sur $\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$.*

Preuve. Notons $S\mathcal{H}^*$ l'image de $SI(\mathfrak{g}(F))^*$ par $res_{\mathcal{H}}$. D'après le lemme 2.4.1, pour $d \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}(F))$, $res_{\mathcal{H}}(\hat{D}^G(d))$ appartient à $S\mathcal{H}^*$ si et seulement si d appartient à $\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$. Il suffit donc de prouver que, pour $J \in I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$, on a $res_{\mathcal{H}}(J) \in S\mathcal{H}^*$ si et seulement si J est stable. Le sens "si" est évident. Supposons $res_{\mathcal{H}}(J) \in S\mathcal{H}^*$. Fixons $\mathbf{J} \in SI(\mathfrak{g}(F))^*$ tel que $res_{\mathcal{H}}(J) = res_{\mathcal{H}}(\mathbf{J})$. Soit $f \in I^{inst}(\mathfrak{g}(F))$. Il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f^\lambda \in \mathcal{H}$ pour tout λ tel que $val_F(\lambda) \geq n$. Pour un tel λ, on a $J(f^\lambda) = \mathbf{J}(f^\lambda)$ et ceci est nul puisque $\mathbf{J}$ est stable. La distribution J est somme d'intégrales orbitales nilpotentes, lesquelles vérifient la propriété 6.1.1(2) : la fonction $\lambda \mapsto J(f^{\lambda^2})$ est combinaison linéaire de fonctions $\lambda \mapsto |\lambda|^d_F$ où $d \in \mathbb{Z}$. Une telle fonction qui est nulle pour tout λ tel que $val_F(\lambda^2) \geq n$ est nulle pour tout λ. Donc $J(f^{\lambda^2}) = 0$ pour tout $\lambda \in F^\times$. En particulier, pour $\lambda = 1$, $J(f) = 0$. Donc J annule $I^{inst}(\mathfrak{g}(F))$ et J est stable. $\square$.

6.1.5 L'ensemble $\mathcal{B}(G)$

Soient M un F-Levi de G et s_M un sommet de $Imm(M_{AD})$ tel que $FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC,s_M}(\mathbb{F}_q)) \neq \{0\}$. Cet espace $FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC,s_M}(\mathbb{F}_q))$ a pour base les fonctions caractéristiques des éléments de $\mathbf{FC}^{st}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{m}_{SC,s_M})$, c'est-à-dire des faisceaux-caractères cuspidaux sur $\mathfrak{m}_{SC,s_M}$, à support nilpotent et conservés par l'action de Frobenius. On fixe une telle base $\mathcal{B}(M, s_M)$. Pour $\varphi \in \mathcal{B}(M, s_M)$, on note $\mathcal{E}_\varphi$ le faisceau-caractère associé. Il est muni d'une action de Frobenius. On note $\mathcal{O}_\varphi$ l'orbite nilpotente de $\mathfrak{m}_{SC,s_M}$ supportant $\mathcal{E}_\varphi$ et on en fixe un élément N_φ. Au faisceau $\mathcal{E}_\varphi$ est associé un caractère ξ_φ de $Z_{M_{AD,s_M}}(N)/Z_{M_{AD,s_M}}(N)^0$. De φ est issue une fonction sur $\mathfrak{m}_{SC}(F)$. On la notera encore φ si cela ne crée pas de confusion, ou φ^M s'il paraît utile de distinguer les deux fonctions. Par cette application de relèvement, $\mathcal{B}(M, s_M)$ s'identifie à un sous-ensemble de $FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC}(F))$. Ce

dernier ensemble a pour base la réunion des $\mathcal{B}(M,s_M)$ quand s_M parcourt un ensemble de représentants des orbites de l'action de $M(F)$ dans l'ensemble des sommets s_M tels que $FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC,s_M}(\mathbb{F}_q))\neq\{0\}$.

Remarquons que, pour un élément $g\in G(F)$ tel que l'action $Ad(g)$ conserve le couple (M,s_M), cette action est triviale sur $FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC,s_M}(\mathbb{F}_q))$, cf. 2.3.9. On peut donc supposer que, si deux couples (M,s_M) et $(M',s_{M'})$ vérifient tous deux les hypothèses précédentes et s'ils sont conjugués par un élément de $G(F)$, cette conjugaison envoie $\mathcal{B}(M,s_M)$ sur $\mathcal{B}(M',s_{M'})$. On note $\mathcal{B}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ de triplets (M,s_M,φ), où M et s_M vérifient les hypothèses ci-dessus et $\varphi\in\mathcal{B}(M,s_M)$.

Une variante de cet ensemble nous sera utile. On a vu en 2.2.16 que l'ensemble des classes de conjugaison de couples (M,s_M) vérifiant les hypothèses ci-dessus était en bijection avec un sous-ensemble de l'ensemble des sous-ensembles propres $\Lambda\subset\Delta_a^{nr}$. Notons $\mathbf{\Lambda}$ ce sous-ensemble et $\mathcal{B}'(G)$ l'ensemble des couples (Λ,φ), où $\Lambda\in\mathbf{\Lambda}$ et $\varphi\in\mathcal{B}(M_\Lambda,s_\Lambda)$. Alors l'application $(M,s_M)\mapsto\Lambda$ définit une bijection de $\mathcal{B}(G)$ sur $\mathcal{B}'(G)$.

Pour (M,s_M) comme ci-dessus, on a défini en 2.3.7 l'ensemble $W^{I_F}(M)/Fr-conj$. On note $Irr_F(W^{I_F}(M))$ l'ensemble des représentations irréductibles de $W^{I_F}(M)$ qui sont conservées par l'action de Γ_F^{nr}. Pour tout $\rho\in Irr_F(W^{I_F}(M))$, on fixe un prolongement continu $\rho^\flat$ de ρ au produit semi-direct $W^{I_F}(M)\rtimes\Gamma_F^{nr}$. On note $\mathcal{B}_W(G)$, resp. $\mathcal{B}_{Irr}(G)$, l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ de quadruplets (M,s_M,φ,w), où M et s_M vérifient les hypothèses ci-dessus, $\varphi\in\mathcal{B}(M,s_M)$ et $w\in W^{I_F}(M)/Fr-conj$, resp. $\rho\in Irr_F(W^{I_F}(M)$. On a de nouveau les variantes évidentes $\mathcal{B}'_W(G)$, resp. $\mathcal{B}'_{Irr}(G)$, formés de classes de triplets (Λ,φ,w), resp. (Λ,φ,ρ).

6.1.6 Deux bases de $\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$

Soit $(M,s_M,\varphi,w)\in\mathcal{B}_W(G)$. D'après la proposition 2.2.13, M est conjugué par un élément de $G(F)$ à un unique Levi standard et on ne perd rien à supposer que M est ce Levi. Au couple (M,w), on a associé en 2.3.8 une classe de conjugaison stable dans $\mathcal{L}_F^{nr,st}$ (le passage au groupe G^* de cette référence disparaît puisque G est quasi-déployé). Soit H un élément de cette classe. On a défini un isomorphisme canonique $\iota_{M,H}$: $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC}(F))\to FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC}(F))$ en 4.3.11. On note $\varphi_H=\iota_{M,H}^{-1}(\varphi)$. Par définition de l'isomorphisme $\iota_{M,H}$, on peut fixer un sommet $s_H\in Imm(H_{AD})$ de sorte que les couples (H,s_H) et (M,s_M) soient conjugués par un élément de $G(F^{nr})$ et que φ_H provienne d'un élément de $FC^{st}(\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q))$. On a défini la distribution $D^G_{X_H,\varphi_H}$ en 2.4.12.

On peut considérer φ_H comme un élément de $\mathcal{K}^{st}(\mathfrak{g}(F))$, cf. 2.4.13. La proposition 2.4.15 équivaut à dire que, quand (M,s_M,φ,w) décrit $\mathcal{B}_W(G)$, les distributions $k^{G,st}(\varphi_H)$ décrivent une base de $D^G(\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

Rappelons que l'on note $W^{nr}(H)=H(F^{nr})\backslash Norm_{G(F^{nr})}(H)$ et $W_F(H)=H(F)\backslash Norm_{G(F)}(H)$. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{L}_F^{nr,st}(M,w)$ des classes de conjugaison par $G(F)$ dans la classe de conjugaison stable dans $\mathcal{L}_F^{nr,st}$ associée à (M,w). Pour $H\in\mathcal{L}_F^{nr,st}$, on a défini en 2.4.5 une mesure $m(H)$ dont on a prouvé qu'elle ne dépendait que de la classe de conjugaison stable de H. Elle est donc constante sur $\mathcal{L}_F^{nr,st}(M,w)$, on note $m(w)$ cette valeur constante. On a aussi introduit en 4.4.2 un caractère μ de $W^{I_F}(M)$. Ce caractère est fixé par l'action de Γ_F^{nr} donc est constant sur toute classe de Fr-conjugaison. Posons

$$c(w)=m(w)^{-1}\mu(w)|M_{AD,s_M}(\mathbb{F}_q)|q^{dim(M_{SC,s_M})-dim(\mathcal{O}_\varphi)/2}.$$

Introduisons la distribution

$$D(M,s_M,\varphi,w)=c(w)\sum_{H\in\mathcal{L}_F^{nr,st}(M,w)}|W^{nr}(H)^{\Gamma_F^{nr}}||W_F(H)|^{-1}D^G_{X_H,\varphi_H}.$$

Notons $k(M,s_M,\varphi,w)$ la restriction à $\mathfrak{g}_{tn}(F)$ de la transformée de Fourier de $D(M,s_M,\varphi,w)$. Il résulte des définitions de 2.4.13 que, pour $H\in\mathcal{L}_F^{nr,st}(M,w)$, on a l'égalité $k^{G,st}(\varphi_H)=c(w)^{-1}k(M,s_M,\varphi,w)$. Donc $(k(M,s_M,\varphi,w))_{(M,s_M,\varphi,w)\in\mathcal{B}_W(G)}$ est une base de $D^G(\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

Soit $(M,s_M,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}_{Irr}(G)$. On définit la distribution

$$k(M,s_M,\varphi,\rho)=|W^{I_F}(M)|^{-1}\sum_{w\in W^{I_F}(M)}trace(\rho^\flat(wFr^{-1}))k(M,s_M,\varphi,w).$$

La famille $(k(M,s_M,\varphi,\rho))_{(M,s_M,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}_{Irr}(G)}$ est encore une base de $D^G(\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F))$.

De nouveau, on peut remplacer dans ces définitions le couple (M,s_M) par (M_Λ,s_Λ) où Λ est le sous-ensemble de Δ_a^{nr} associé à (M,s_M). On notera aussi $D(\Lambda,\varphi,w)$, $k(\Lambda,\varphi,w)$ et $k(\Lambda,\varphi,\rho)$ les distributions $D(M,s_M,\varphi,w)$, $k(M,s_M,\varphi,w)$ et $k(M,s_M,\varphi,\rho)$ ci-dessus, modulo cette correspondance $(M,s_M)\leftrightarrow\Lambda$.

6.1.7 Evaluation de la distribution $\hat{k}(\Lambda,\varphi,w)$

Soit $(\Lambda,\varphi,w)\in\mathcal{B}'_W(G)$. Pour simplifier la notation, on pose $M=M_\Lambda$. On note $Cl_{Fr}(w)$ la classe de Fr-conjugaison de w dans $W^{I_F}(M)$. On pose

$$c(\Lambda,\varphi)=q^{dim(M_{s_\Lambda})/2-dim(\mathcal{O}_\varphi)/2}.$$

Soit $s\in S(\bar{C})$. On affecte d'indices s les objets relatifs au groupe G_s. Le sommet s est associé à une orbite de l'action de Γ_F^{nr} sur Δ_a^{nr}. C'est le complémentaire de l'ensemble $\Lambda(s)$, cf. 2.2.15. Rappelons que Λ est conservé par cette action, on a donc $\Lambda\subset\Lambda(s)$ ou $\Lambda\cup\Lambda(s)=\Delta_a^{nr}$. Si $\Lambda\subset\Lambda(s)$, on a $s\in Imm^G(M_{ad})$ et $p_M(s)=s_\Lambda$. Le groupe M_{s_Λ} est alors un $\mathbb{F}_q$-Levi de G_s. On a défini une injection $j_s:W_s(M_{s_\Lambda})\to W^{I_F}(M)$ en 4.4.1(6), qui est compatible aux actions de Frobenius. Pour $w'\in W_s(M_{s_\Lambda})$, on note $w'\sim w$ si et seulement si $j_s(w')\in Cl_{Fr}(w)$.

On rappelle que pour toute fonction f sur $\mathfrak{g}(F)$ ou $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$, on note f^- la fonction définie par $f^-(X)=f(-X)$.

Soit $f\in\mathbf{C}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$. On déduit de f une fonction sur $\mathfrak{g}(F)$ que l'on a souvent encore notée f. Pour plus de précision, notons-la ici f^G.

Proposition. *On suppose que $\hat{f}$ est à support nilpotent.*
(i) Si $\Lambda\cup\Lambda(s)=\Delta_a^{nr}$, $\hat{k}(\Lambda,\varphi,w)(f^G)=0$.
(ii) Si $\Lambda\subset\Lambda(s)$,

$$\hat{k}(\Lambda,\varphi,w)(f^G)=c(\Lambda,\varphi)mes(K_s^0)|W_s(M_{s_\Lambda})|^{-1}|W^{I_F}(M)||Cl_{Fr}(w)|^{-1}$$

$$\sum_{w'\in W_s(M_{s_\Lambda});w'\sim w}(Q^-_{M_{s_\Lambda},\varphi,w'},f).$$

Preuve. Posons $f^{inv}=|G_s(\mathbb{F}_q)|^{-1}\sum_{g\in G_s(\mathbb{F}_q)}{}^gf$. Remplacer f par f^{inv} ne change pas les assertions de l'énoncé. En conséquence, on peut supposer f invariante par conjugaison par $G_s(\mathbb{F}_q)$. Posons $k=k(\Lambda,\varphi,w)$ et $D=D(\Lambda,\varphi,w)$. Par définition, $\hat{k}(f^G)=k(\hat{f}^G)$.

Puisque $\hat{f}$ est à support nilpotent, $\hat{f}^G$ est à support topologiquement nilpotent. Par définition de k, on a $k(\hat{f}^G) = \hat{D}(\hat{f}^G) = D(f^{-,G})$. D'où

$$(1) \qquad \hat{k}(f^G) = c(w) \sum_{H \in \mathcal{L}_F^{nr,st}(M,w)} |W^{nr}(H)^{\Gamma_F^{nr}}| |W_F(H)|^{-1} D^G_{X_H,\varphi_H}(f^{-,G}).$$

Fixons H intervenant dans cette somme. Par définition,

$$D^G_{X_H,\varphi_H}(f^{-,G}) = \int_{H(F)\backslash G(F)} X(g)\, dg,$$

où

$$X(g) = \int_{A_H(F)\backslash H(F)} \int_{\mathfrak{h}_{SC}(F)} {}^g(f^{-,G})(X_H + h^{-1}Zh)\bar{\varphi}_H^{H_{SC}}(Z)\, dZ\, dh.$$

Notons $\mathcal{X}$ l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $gs \in Imm^G(H)$ et $p_H(gs) = s_H$. On va montrer

(2) pour $g \in G(F) - H(F)\mathcal{X}$, on a $X(g) = 0$.

Fixons $g \in G(F)$ et supposons $X(g) \neq 0$. L'application $Ad(g)$ transporte la fonction f en une fonction ${}^g f \in C(\mathfrak{g}_{gs}(\mathbb{F}_q))$ et on a ${}^g(f^{-G}) = ({}^g f)^{-G}$. On note simplement ${}^g f^{-G}$ cette fonction. Puisque $\varphi_H^{H_{SC}}$ est à support topologiquement nilpotent et que $X(g) \neq 0$, le support de la fonction ${}^g f^{-,G}$ coupe $X_H + \mathfrak{h}_{SC,tn}(F)$. A fortiori, $\mathfrak{k}_{gs}$ couple $X_H + \mathfrak{h}_{SC,tn}(F)$. D'après le lemme 2.3.3, gs appartient à $Imm^G(H)$. Le sommet gs se projette en un point $(gs)^H \in Imm(H_{AD})$ qui appartient à une facette $\mathcal{F}_g^H$ de cet immeuble. On a les inclusions $\mathfrak{h}_{SC,\mathcal{F}_g^H} \subset \mathfrak{h}_{\mathcal{F}_g^H} \subset \mathfrak{g}_{gs}$. Notons $\bar{X}_H$ la projection de X_H dans $\mathfrak{g}_{gs}$ et définissons une fonction $f_1 \in C(\mathfrak{h}_{SC,\mathcal{F}_g^H})$ par $f_1(Z) = {}^g f^-(\bar{X}_H + Z)$ pour tout $Z \in \mathfrak{h}_{SC,\mathcal{F}_g^H}(\mathbb{F}_q)$. On a alors l'égalité ${}^g f^{-,G}(X_H + Z) = f_1^{H_{SC}}(Z)$ pour tout $Z \in \mathfrak{h}_{SC,tn}(F)$. On en déduit

$$X(g) = \int_{A_H(F)\backslash H(F)} \int_{\mathfrak{h}_{SC}(F)} f_1^{H_{SC}}(h^{-1}Zh)\bar{\varphi}_H^{H_{SC}}(Z)\, dZ\, dh.$$

Pour $h \in H(F)$, définissons une fonction $f_{2,h}$ sur $\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)$ par

$$f_{2,h}(Z) = \int_{\mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC},+}} f_1^{H_{SC}}(h^{-1}(\dot{Z} + Z')h)\, dZ',$$

où $\dot{Z}$ est un relèvement de Z dans $\mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC}}$. On a l'égalité

$$\int_{\mathfrak{h}_{SC}(F)} f_1^{H_{SC}}(h^{-1}Zh)\bar{\varphi}_H^{H_{SC}}(Z)\, dZ = \sum_{Z \in \mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)} f_{2,h}(Z)\bar{\varphi}_H(Z).$$

Posons $\mathcal{F}' = h(\mathcal{F}_g^H)$. Par construction, la fonction $f_{2,h}$ est supportée par l'image dans $\mathfrak{h}_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)$ de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}'}^{H_{SC}} \cap \mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC}}$ et est invariante par l'image de $\mathfrak{k}_{\mathcal{F}'}^{H_{SC}} \cap \mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC}}$. Si $\mathcal{F}'$ n'est pas égale à $\{s_H\}$, il existe un sous-groupe parabolique propre P défini sur $\mathbb{F}_q$ de H_{SC,s_H} tel que ces deux ensembles soient respectivement $P(\mathbb{F}_q)$ et $U_P(\mathbb{F}_q)$. La cuspidalité de φ_H entraîne la nullité de la somme ci-dessus. Puisque $X(g) \neq 0$ par hypothèse, il existe $h \in H(F)$ tel que cette somme soit non nulle, donc tel que $h(\mathcal{F}_g^H) = s_H$. Mais alors $hg \in \mathcal{X}$. Cela prouve (2).

Puisque l'application $g \mapsto X(g)$ est invariante à gauche par $H(F)$, il nous suffit de calculer $X(g)$ pour $g \in \mathcal{X}$. Soit donc $g \in \mathcal{X}$. Posons $H' = g^{-1}Hg$ et notons $s_{H'}$

l'image de s_H dans $Imm(H'_{AD})$ par $Ad(g)^{-1}$. Alors $s \in Imm^G(H')$ et la projection de s dans $Imm(H'_{AD})$ est $s_{H'}$. Les hypothèses du lemme 2.3.10 sont vérifiées. Le (i) de ce lemme dit que $\Lambda \subset \Lambda(s)$. Si cette condition n'est pas vérifiée, on a donc $\mathcal{X} = \emptyset$, d'où $\hat{k}(\Lambda, \varphi, w)(f^G) = 0$ grâce à (2). Cela démontre le (i) de l'énoncé.

Supposons $\Lambda \subset \Lambda(s)$. Le (ii) du lemme 2.3.10 affirme l'existence de $k \in K_s^{nr,0}$ tel que $Ad(k)$ transporte $(H', s_{H'})$ sur $(M_\Lambda, s_\Lambda) = (M, s_\Lambda)$. En notant $\bar{k}$ la réduction de k dans G_s, on a aussi $Ad(\bar{k})(H'_{s_{H'}}) = M_{s_\Lambda}$. Fixons un tel k. L'élément $Fr(\bar{k})\bar{k}^{-1}$ de G_s normalise M_{s_Λ} et définit un élément $w' \in W_s(M_{s_\Lambda})$. Cet élément dépend de l'élément k choisi mais sa classe de Fr-conjugaison n'en dépend pas. Posons $x = kg^{-1}$. On a $xHx^{-1} = M$. Puisque H est paramétré par l'image de w dans $W^{I_F}(M)/Fr{-}conj$, l'image de $Fr(x)x^{-1}$ dans $W^{I_F}(M)$ est Fr-conjugué à w. Cela équivaut à la relation $w' \sim w$. L'isomorphisme $Ad(g)^{-1}$ transporte φ_H en $\varphi_{H'} \in C(\mathfrak{h}'_{SC,s_{H'}}(\mathbb{F}_q))$. Posons $X_{H'} = g^{-1}X_H g$. C'est un élément de $A_{H'}^{nr}(F)$ entier et de réduction régulière. Un changement de variables évident conduit à l'égalité

$$X(g) = \int_{A_{H'}(F)\backslash H'(F)} \int_{\mathfrak{h}'_{SC}(F)} f^{-,G}(X_{H'} + h^{-1}Zh)\bar{\varphi}_{H'}^{H'_{SC}}(Z)\, dZ\, dh.$$

En reprenant la preuve de (2), on voit que l'intégrale intérieure est supportée sur le groupe des $h' \in H'(F)$ tels que $h's_{H'} = s_{H'}$, c'est-à-dire sur $K_{s_{H'}}^{H',\dagger}$. Cette intégrale est constante sur cet ensemble car la fonction $\varphi_{H'}$ est invariante par ce groupe. On obtient

$$X(g) = mes(A_{H'}(F)\backslash K_{s_{H'}}^{H',\dagger}) \int_{\mathfrak{h}'_{SC}(F)} f^{-,G}(X_{H'} + Z)\bar{\varphi}_{H'}^{H'_{SC}}(Z)\, dZ$$

$$= mes(A_{H'}(F)\backslash K_{s_{H'}}^{H',\dagger}) mes(k_{s_{H'}}^{H'_{SC},+}) \sum_{\bar{Z} \in \mathfrak{h}'_{SC,s_{H'}}(\mathbb{F}_q)} f^-(\bar{X}_{H'} + \bar{Z})\bar{\varphi}_{H'}(\bar{Z}),$$

où $\bar{X}_{H'}$ est la réduction de $X_{H'}$.

La fonction φ est la fonction caractéristique du faisceau caractère $\mathcal{E}_\varphi$ sur $\mathfrak{m}_{SC,s_\Lambda}$. Il correspond à ce faisceau un tel faisceau $\mathcal{E}_{\varphi,H'}$ sur $\mathfrak{h}'_{SC,s_{H'}}$ muni d'une action de Frobenius définie comme en 4.1.5. Notons $\varphi_{H'}^{car}$ sa fonction caractéristique. D'après la définition de 4.1.5, on a $\varphi_{H'} = |M_{AD,s_\Lambda}(\mathbb{F}_q)||H'_{AD,s_{H'}}(\mathbb{F}_q)|^{-1}\varphi_{H'}^{car}$. D'autre part, $\mathcal{E}_{\varphi,H'}$ peut être muni d'une autre action de Frobenius définie par Lusztig. Notons $\varphi_{w'}$ sa fonction caractéristique pour cette action. D'après le théorème 4.4.15, on a l'égalité $\varphi_{H'}^{car} = \mu^{-1} \circ j_s(w')\varphi_{w'} = \mu^{-1}(w)\varphi_{w'}$. En introduisant la fonction $\varphi^\flat_{w',\bar{X}_{H'}}$ de 2.2.5 associée à l'élément $\bar{X}_{H'}$, on obtient

$$X(g) = c_1(H') \sum_{\bar{X} \in \mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)} f^-(\bar{X})\bar{\varphi}^\flat_{w',\bar{X}_{H'}}(\bar{X}),$$

où

$$c_1(H') = \mu(w)^{-1} mes(A_{H'}(F)\backslash K_{s_{H'}}^{H',\dagger}) mes(k_{s_{H'}}^{H'_{SC},+})|M_{AD,s_\Lambda}(\mathbb{F}_q)||H'_{AD,s_{H'}}(\mathbb{F}_q)|^{-1}.$$

Puisqu'on a supposé f invariante par $G_s(\mathbb{F}_q)$, on peut aussi bien moyenner $\varphi^\flat_{w',\bar{X}_{H'}}$ par ce groupe. Cela remplace cette fonction par $|H'_{s_{H'}}(\mathbb{F}_q)||G_s(\mathbb{F}_q)|^{-1}\varphi_{w',\bar{X}_{H'}}$, où $\varphi_{w',\bar{X}_{H'}}$ est définie en 2.2.5. On obtient alors

$$X(g) = c_2(H')(\varphi_{w',\bar{X}_{H'}}, f^-).$$

où

$$(3) \qquad c_2(H') = |H'_{s_{H'}}(\mathbb{F}_q)|c_1(H') = \mu(w)^{-1}mes(A_{H'}(F)\backslash K^{H',\dagger}_{s_{H'}})mes(k^{H'_{SC},+}_{s_{H'}})$$

$$|M_{AD,s_\Lambda}(\mathbb{F}_q)||H'_{AD,s_{H'}}(\mathbb{F}_q)|^{-1}|H'_{s_{H'}}(\mathbb{F}_q)|.$$

Notons simplement $Q_{w'}$ la fonction $Q_{M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,w'}$. Puisque $\hat{f}$ est à support nilpotent par hypothèse, la relation 2.2.5(5) implique la deuxième égalité ci-après

$$(\varphi_{w',\bar{X}_{H'}}, f^-) = (\hat{\varphi}_{w',\bar{X}_{H'}}, \hat{f}^-) = (\hat{Q}_{w'}, \hat{f}^-) = (Q_{w'}, f^-) = (Q^-_{w'}, f).$$

D'où

$$(4) \qquad X(g) = c_2(H)(Q^-_{w'}, f).$$

Notons plus précisément w'_g l'élément w' de la construction ci-dessus. Pour $w' \in W_s(M_{s_\Lambda})$, notons $\mathcal{X}(w')$ l'ensemble des $g \in \mathcal{X}$ tels que w'_g soit Fr-conjugué dans $W_s(M_{s_\Lambda})$ à w'. On a vu que, si $\mathcal{X}(w')$ n'est pas vide, alors $w' \sim w$. L'ensemble $\mathcal{X}$ est réunion disjointe des $\mathcal{X}(w')$ quand w' décrit $W_s(M_{s_\Lambda})/Fr-conj$. On remarque que, pour $g \in \mathcal{X}$ et $h \in H(F)$ tel que $hg \in \mathcal{X}$, les éléments w'_g et w'_{hg} sont Fr-conjugués : ils ne dépendent que du groupe H' qui ne change pas quand on remplace g par hg (on a $H' = g^{-1}Hg$). Donc $H(F)\mathcal{X}$ est aussi l'union disjointe des ensembles $H(F)\mathcal{X}(w')$. D'après sa définition, l'ensemble $\mathcal{X}$ est invariant par multiplication à droite par K^0_s. Une telle multiplication remplace $H'_{s_{H'}}$ par un ensemble conjugué par un élément de $G_s(\mathbb{F}_q)$ et ne modifie pas l'élément w'. En conséquence, $\mathcal{X}(w')$ est invariant par multiplication à droite par K^0_s. Il en résulte que $H(F)\mathcal{X}(w')$ est ouvert et fermé. Pour tout élément $g \in H(F)\mathcal{X}(w')$, $X(g)$ est calculé par la formule (4). On obtient

$$(5) \qquad D_{X_H,\varphi^G_H}(f^{-,G}) = c_2(H) \sum_{w' \in W_s(M_{s_\Lambda})/Fr-conj} mes(H(F)\backslash H(F)\mathcal{X}(w'))(Q^-_{w'}, f).$$

Fixons un élément $w' \in W_s(M_{s_\Lambda})$. Fixons un $\bar{\mathbb{F}}_q$-Levi $M_{s_\Lambda,w'}$ de G_s, défini sur $\mathbb{F}_q$, conjugué à M_{s_Λ} et paramétré par la classe de Fr-conjugaison de w'. On relève $M_{s_\Lambda,w'}$ en un F^{nr}-Levi de G que l'on note $H_{w'}$. Notons $Cl_{s,Fr}(w')$ la classe de Fr-conjugaison de w'. On va prouver la relation

(6) si $H_{w'}$ n'est pas conjugué à H par un élément de $G(F)$, $\mathcal{X}(w') = \emptyset$; si $H_{w'}$ est conjugué à H par un élément de $G(F)$,

$$mes(H(F)\backslash H(F)\mathcal{X}(w')) = |W_F(H)||W_s(M_{s_\Lambda})|^{-1}|Cl_{s,Fr}(w')||H_{s_H}(\mathbb{F}_q)|^{-1}q^{dim(M_{s_M})/2}mes(K^0_s).$$

Le sommet s détermine un sommet de $Imm(H_{w',AD})$ que l'on note $s_{H_{w'}}$. On a $H_{w',s_{H_{w'}}} = M_{s_\Lambda,w'}$. Notons $\mathcal{Y}(w')$ l'ensemble des $g \in G(F)$ tels qu'il existe $y \in K^0_s$ de sorte que $Ad(gy)(H_{w'}) = H$. Montrons qu'on a l'égalité

(7) $H(F)\mathcal{X}(w') = \mathcal{Y}(w')$.

Supposons $g \in \mathcal{X}(w')$ et reprenons les constructions précédentes, en particulier celle du groupe H'. Alors $H'_{s_{H'}}$ est conjugué à $H_{w',s_{H_{w'}}}$ par un élément de $G_s(\mathbb{F}_q)$. Par un procédé de relèvement déjà plusieurs fois utilisé, il existe $y \in K^0_s$ tel que $Ad(y)(H_{w'}) = H'$. Puisque $Ad(g)(H') = H$, cela entraîne que $g \in \mathcal{Y}(w')$. D'autre part, $\mathcal{Y}(w')$ est invariant à gauche par $H(F)$. Donc $H(F)\mathcal{X}(w') \subset \mathcal{Y}(w')$. Inversement, soit $g \in \mathcal{Y}(w')$. Fixons $y \in K^0_s$ de sorte que $Ad(gy)(H_{w'}) = H$. Posons $H'_{w'} = Ad(y)(H_{w'})$, qui vérifie les mêmes conditions que $H_{w'}$. On a $s \in Imm^G(H'_{w'})$. Notons $s_{H'_{w'}}$ l'image de s dans $Imm(H'_{w',AD})$

et s'_H l'image de $s_{H'_{w'}}$ dans $Imm(H_{AD})$ par $Ad(g)$. Les couples suivants sont conjugués par un élément de $G(F^{nr})$:

(H, s_H), (M, s_Λ), $(H'_{w'}, s_{H'_{w'}})$, (H, s'_H).

Il existe donc un élément $n \in Norm_{G(F^{nr})}(H)$ tel que l'action de n sur $Imm_{F^{nr}}(H_{AD})$ envoie s_H sur s'_H. D'après le lemme 2.2.10 appliqué au groupe H_{SC}, il existe $h \in H(F)$ (en fait provenant d'un élément de $H_{SC}(F)$) tel que $hs'_H = s_H$. Posons $g' = hgy$. Alors $Ad(g')$ transporte le couple $(H_{w'}, s_{H_{w'}})$ sur (H, s_H). Puisque $s \in Imm^G(H_{w'})$ et $p_{H_{w'}}(s) = s_{H_{w'}}$, on a $g's \in Imm^G(H)$ et $p_H(s) = s_H$. Donc $g' \in \mathcal{X}$. Le groupe H' de notre construction associé à cet élément g' est $H_{w'}$. Donc $g' \in \mathcal{X}(w')$. On a déjà remarqué que cet ensemble était invariant par multiplication à droite par K_s^0. Donc $g = h^{-1}g'y^{-1} \in H(F)\mathcal{X}(w')$. Cela prouve (7).

Si $H_{w'}$ n'est pas conjugué à H par un élément de $G(F)$, $\mathcal{Y}(w')$ est vide donc $\mathcal{X}(w')$ aussi, ce qui démontre la première assertion de (6). Supposons que $H_{w'}$ soit conjugué à H par un élément de $G(F)$, fixons $x \in G(F)$ tel que $Ad(x)(H_{w'}) = H$. Par définition, on a $\mathcal{Y}(w') = Norm_{G(F)}(H)xK_s^0$. Alors $H(F)\backslash\mathcal{Y}(w') = H(F)\backslash Norm_{G(F)}(H)xK_s^0 \simeq H_{w'}(F)\backslash Norm_{G(F)}(H_{w'})K_s^0$. L'ensemble de doubles classes $H_{w'}(F)\backslash Norm_{G(F)}(H_{w'})K_s^0/K_s^0$ s'identifie à $W_F(H_{w'})/W_{s,\mathbb{F}_q}(H_{w',s_{H_{w'}}})$, où $W_F(H_{w'}) = H_{w'}(F)\backslash Norm_{G(F)}(H_{w'})$ et

$$W_{s,\mathbb{F}_q}(H_{w',s_{H_{w'}}}) = H_{w',s_{H_{w'}}}(\mathbb{F}_q)\backslash Norm_{G_s(\mathbb{F}_q)}(H_{w',s_{H_{w'}}}) \simeq (H_{w'}(F)\cap K_s^0))\backslash(Norm_{G(F)}(H_{w'})\cap K_s^0).$$

Chaque double classe est isomorphe à $(K_s^0 \cap H_{w'}(F))\backslash K_s^0 = K_{s_{H_{w'}}}^{H_{w'},0}\backslash K_s^0$. On a $W_F(H_{w'}) \simeq W_F(H)$ puisque H et $H_{w'}$ sont conjugués par un élément de $G(F)$. On obtient

$$mes(H(F)\backslash\mathcal{Y}(w')) = |W_F(H)||W_{s,\mathbb{F}_q}(H_{w',s_{H_{w'}}})|^{-1}mes(K_{s_{H_{w'}}}^{H_{w'},0})^{-1}mes(K_s^0).$$

Le théorème de Lang appliqué à $H_{w',s_{H_{w'}}}$ entraîne que $W_{s,\mathbb{F}_q}(H_{w',s_{H_{w'}}})$ s'identifie à l'ensemble de points fixes de l'action de Fr dans $H_{w',s_{H_{w'}}}\backslash Norm_{G_s}(H_{w',s_{H_{w'}}})$. Ce quotient s'identifie à $W_s(M_{s_\Lambda})$ muni d'une action de Frobenius tordue par w'. On voit alors que $W_{s,\mathbb{F}_q}(H_{w',s_{H_{w'}}})$ s'identifie au groupe des $u \in W_s(M_{s_\Lambda})$ tels que $Fr(u)w'u^{-1} = w'$. Notons $Z_{W_s(M_{s_\Lambda}),Fr}(w')$ ce groupe. L'application $u \mapsto Fr(u)w'u^{-1}$ est une bijection de $W_s(M_{s_\Lambda})/Z_{W_s(M_{s_\Lambda}),Fr}(w')$ sur $Cl_{s,Fr}(w')$. On en déduit

$$(8) \qquad |W_{s,\mathbb{F}_q}(H_{w',s_{H_{w'}}})| = |W_s(M_{s_\Lambda})||Cl_{s,Fr}(w')|^{-1}.$$

D'autre part, on a $K_{s_{H_{w'}}}^{H_{w'},0} \simeq K_{s_H}^{H,0}$ et

$$mes(K_{s_H}^{H,0}) = |H_{s_H}(\mathbb{F}_q)|q^{-dim(H_{s_H})/2} = |H_{s_H}(\mathbb{F}_q)|q^{-dim(M_{s_\Lambda})/2}.$$

D'où

$$mes(H(F)\backslash\mathcal{Y}(w')) = |W_F(H)||W_s(M_{s_\Lambda})|^{-1}||Cl_{s,Fr}(w')|H_{s_H}(\mathbb{F}_q)|^{-1}q^{dim(M_{s_M})/2}mes(K_s^0).$$

Cela démontre la deuxième assertion de (6).

Notons $W_s(M_{s_\Lambda})[H]$ l'ensemble des $w' \in W_s(M_{s_\Lambda})$ tels que $H_{w'}$ soit conjugué à H par un élément de $G(F)$. Posons

$$(9) \qquad c_3(H) = c_2(H)|W_s(M_{s_\Lambda})|^{-1}|H_{s_H}(\mathbb{F}_q)|^{-1}q^{dim(M_{s_M})/2}mes(K_s^0).$$

En utilisant (6), l'égalité (5) se transforme en

$$D_{X_H,\varphi_H^G}(f^{-,G}) = c_3(H)|W_F(H)| \sum_{w' \in W_s(M_{s_\Lambda})[H]/Fr-conj} |Cl_{s,Fr}(w')|(Q_{w'}^-, f).$$

Sommer sur les classes de Fr-conjugaison de w' un terme affecté du coefficient $|Cl_{s,Fr}(w')|$ revient à sommer sur w' le même terme où l'on supprime ce coefficient. D'où

$$(10) \qquad D_{X_H,\varphi_H^G}(f^{-,G}) = c_3(H)|W_F(H)| \sum_{w'\in W_s(M_{s_\Lambda})[H]} (Q_{w'}^-, f).$$

Posons

$$c_3 = \mu(w)^{-1}m(w)|M_{AD,s_\Lambda}(\mathbb{F}_q)||W_s(M_{s_\Lambda})|^{-1}q^{dim(M_{s_\Lambda})/2-dim(M_{SC,s_\Lambda})}mes(K_s^0).$$

Montrons que

(11) $c_3(H) = c_3$.

Notons $\pi : H_{SC} \to H$ l'homomorphisme naturel. Montrons d'abord que

(12) $\pi(H_{SC}(F))K_{s_H}^{H,\dagger} = H(F)$.

Soit $h \in H(F)$. D'après le lemme 2.2.10 appliqué à H_{SC}, il existe $h_{sc} \in H_{SC}(F)$ tel que $\pi(h_{sc})s_H = hs_H$. Donc $\pi(h_{sc})^{-1}h \in K_{s_H}^{H,\dagger}$, ce qui démontre (12).

On a rappelé plus haut la mesure $m(H)$ introduite en 2.4.5. Par définition, ce nombre est la mesure totale de $A_H(F)\pi(H_{SC}(F))\backslash H(F)$, cet ensemble étant muni de la mesure invariante à droite telle que, pour toute fonction ϕ sur $A_H(F)\backslash H(F)$, on ait l'égalité

$$\int_{A_H(F)\pi(H_{SC}(F))\backslash H(F)} \int_{H_{SC}(F)} \phi(\pi(h_{sc})x)\, dh_{sc}\, dx = \int_{A_H(F)\backslash H(F)} \phi(h)\, dh.$$

Appliquons cela à la fonction caractéristique ϕ du groupe $A_H(F)\backslash K_{s_H}^{H,\dagger}$. A droite, on obtient $mes(A_H(F)\backslash K_{s_H}^{H,\dagger})$. A gauche, l'assertion (11) montre que l'intégrale intérieure ne dépend pas de x. Puisque l'image réciproque par π de $K_{s_H}^{H,\dagger}$ est $K_{s_H}^{H_{SC},0}$, cette intégrale vaut $mes(K_{s_H}^{H_{SC},0})$. Le membre de gauche vaut donc $m(H)mes(K_{s_H}^{H_{SC},0})$, d'où l'égalité

$$mes(A_H(F)\backslash K_{s_H}^{H,\dagger}) = m(H)mes(K_{s_H}^{H_{SC},0}).$$

On a aussi

$$mes(K_{s_H}^{H_{SC},0}) = |H_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)|mes(\mathfrak{k}_{s_H}^{H_{SC},+}).$$

Enfin, l'homomorphisme $H_{SC,s_H} \to H_{AD,s_H}$ est surjectif et de noyau fini central. On en déduit l'égalité

$$|H_{SC,s_H}(\mathbb{F}_q)| = |H_{AD,s_H}(\mathbb{F}_q)|.$$

En appliquant ces égalités et les définitions (9) et (3), on obtient

$$c_3(H) = \mu(w)^{-1}m(H)mes(k_{s_H}^{H_{SC},+})^2|M_{AD,s_\Lambda}(\mathbb{F}_q)||W_s(M_{s_\Lambda})|^{-1}q^{dim(M_{s_\Lambda})/2}mes(K_s^0).$$

On a aussi $mes(k_{s_H}^{H_{SC},+})^2 = q^{-dim(H_{SC,s_H})} = q^{-dim(M_{SC,s_\Lambda})}$ et $m(w) = m(H)$ par définition de $m(w)$. Alors l'égalité ci-dessus devient (11).

Remplaçons $c_3(H)$ par c_3 dans l'égalité (10) et reportons l'égalité obtenue dans l'expression (1). Remarquons que les termes $|W^{nr}(H)^{\Gamma_F^{nr}}|$ intervenant dans cette expression sont en fait indépendants de H puisque tous les H intervenant sont stablement conjugués. En fait, pour $H \in \mathcal{L}_F^{nr,st}(M,w)$, le groupe $W^{nr}(H)$ muni de son action de Frobenius s'identifie à $W^{I_F}(M)$ muni de l'action tordue $u \mapsto w^{-1}Fr(u)w$. Comme plus haut, cf. égalité (8), on en déduit

$$|W^{nr}(H)^{\Gamma_F^{nr}}| = |W^{I_F}(M)||Cl_{Fr}(w)|^{-1}.$$

L'expression (1) devient

$$\hat{k}(f^G) = c(w)c_3|W^{I_F}(M)||Cl_{Fr}(w)|^{-1} \sum_{H\in\mathcal{L}_F^{nr,st}(M,w)} \sum_{w'\in W_s(M_{s_\Lambda})[H]} (Q^-_{w'}, f).$$

Pour $w' \in W_s(M_{s_\Lambda})$, l'existence de $H \in \mathcal{L}_F^{nr,st}(M,w)$ tel que $w' \in W_s(M_{s_\Lambda})[H]$ implique $w' \sim w$. Inversement, si $w' \sim w$, il existe un unique $H \in \mathcal{L}_F^{nr,st}(M,w)$ tel que $H_{w'}$ soit conjugué à H par un élément de $G(F)$, c'est-à-dire tel que $w' \in W_s(M_{s_\Lambda})[H]$. On obtient alors

$$\hat{k}(f^G) = c(w)c_3|W^{I_F}(M)||Cl_{Fr}(w)|^{-1} \sum_{w'\in W_s(M_{s_\Lambda});w'\sim w} (Q^-_{w'}, f).$$

En explicitant les constantes, on voit que $c(w)c_3 = c(\Lambda,\varphi)mes(K_s^0)|W_s(M_{s_\Lambda})|^{-1}$. L'égalité ci-dessus devient celle du (ii) de l'énoncé. □

6.1.8 Evaluation de la distribution $\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)$

Soit $(\Lambda,\varphi,\rho) \in \mathcal{B}'_{Irr}(G)$ et soit $s \in S(\bar{C})$. On utilise les mêmes notations que dans le paragraphe précédent.

Proposition. *Soit $f \in \mathbf{C}(\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q))$. On suppose que $\hat{f}$ est à support nilpotent.*
(i) Si $\Lambda \cup \Lambda(s) = \Delta_a^{nr}$, $\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(f^G) = 0$.
(ii) Si $\Lambda \subset \Lambda(s)$,

$$\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(f^G) = c(\Lambda,\varphi)mes(K_s^0)|W_s(M_{s_\Lambda})|^{-1} \sum_{w'\in W_s(M_{s_\Lambda})} trace(\rho^\flat(j_s(w')Fr^{-1}))(Q^-_{M_{s_\Lambda},\varphi,w'}, f).$$

Preuve. Posons $k = k(\Lambda,\varphi,\rho)$. Par définition, on a

$$\hat{k}(f^G) = |W^{I_F}(M)^{-1} \sum_{w\in W^{I_F}(M)} trace(\rho^\flat(wFr^{-1}))\hat{k}(\Lambda,\varphi,w)(f^G).$$

On applique la proposition précédente. Le (i) de l'énoncé est immédiat. Supposons $\Lambda \subset \Lambda(s)$. Alors

$$\hat{k}(f^G) = c \sum_{w\in W^{I_F}(M)} |Cl_{Fr}(w)|^{-1} trace(\rho^\flat(wFr^{-1})) \sum_{w'\in W_s(M_{s_\Lambda});w'\sim w} (Q^-_{M_{s_\Lambda},\varphi,w'}, f),$$

où

$$c = c(\Lambda,\varphi)mes(K_s^0)|W_s(M_{s_\Lambda})|^{-1}.$$

Pour tout $w' \in W_s(M_{s_\Lambda})$, l'ensemble des $w \in W^{I_F}(M)$ tels que $w' \sim w$ est $Cl_{Fr}(j_s(w'))$. Pour tout élément w de cet ensemble, on a $trace(\rho^\flat(wFr^{-1})) = trace(\rho^\flat(j_s(w')Fr^{-1}))$. Alors la formule ci-dessus se transforme en celle de l'énoncé. □

6.1.9 Calcul de $\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}'})$

Soit $(\Lambda,\varphi,\rho) \in \mathcal{B}'_{Irr}(G)$, soit $s \in S(\bar{C})$ et soit $\mathcal{O}' \in \mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)/conj$. On pose $M = M_\Lambda$ et on fixe $N' \in \mathcal{O}'$. On suppose que $\Lambda \subset \Lambda(s)$.

Posons $W_s(M_{s_\Lambda})^+ = W_s(M_{s_\Lambda}) \rtimes \Gamma_{\mathbb{F}_q}$ et notons $\tilde{W}_s(M_{s_\Lambda})$ son sous-ensemble $W_s(M_{s_\Lambda}) \rtimes \{Fr^{-1}\}$. Considérons une représentation continue π^+ de $W_s(M_{s_\Lambda})^+$, qui n'est pas supposée irréductible (rappelons que la continuité signifie que π^+ est triviale sur un sous-groupe ouvert de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$). Notons π sa restriction à $W_s(M_{s_\Lambda})$. On décompose ces représentations en sommes de représentations irréductibles

$$\pi^+ = \sum_{\sigma^+ \in Irr(W_s(M_{s_\Lambda})^+)} m(\pi^+, \sigma^+)\sigma^+,$$

$$\pi = \sum_{\rho' \in Irr(W_s(M_{s_\Lambda}))} m(\pi, \rho')\rho',$$

avec des multiplicités $m(\pi^+, \sigma^+), m(\pi, \rho') \in \mathbb{N}$. Considérons une représentation $\sigma^+ \in Irr(W_s(M_{s_\Lambda})^+)$. Si sa restriction $\sigma^+_{|W_s(M_{s_\Lambda})}$ n'est pas irréductible, la trace de σ^+ est nulle sur $\tilde{W}_s(M_{s_\Lambda})$. Supposons que $\sigma^+_{|W_s(M_{s_\Lambda})}$ soit irréductible. Notons ρ' cette représentation. On a $\rho' \in Irr_{\mathbb{F}_q}(W_s(M_{s_\Lambda}))$. On a fixé un prolongement $\rho'^\flat$ de ρ' à $W_s(M_{s_\Lambda})^+$. La représentation σ^+ n'est pas forcément égale à ce prolongement mais il existe une racine de l'unité $\zeta(\sigma^+) \in \mathbb{C}^\times$ de sorte que $trace(\sigma^+)$ coïncide sur $\tilde{W}_s(M_{s_\Lambda})$ avec $\zeta(\sigma^+)trace(\rho'^\flat)$. Pour tout $\rho' \in Irr_{\mathbb{F}_q}(W_s(M_{s_\Lambda}))$, posons

$$m(\pi^+, \rho'^\flat) = \sum_{\sigma^+} m(\pi^+, \sigma^+)\zeta(\sigma^+),$$

où on somme sur les $\sigma^+ \in Irr(W_s(M_{s_\Lambda})^+)$ tels que $\sigma^+_{|W_s(M_{s_\Lambda})} = \rho'$. C'est un nombre complexe. Remarquons que, si l'on supprime les racines de l'unité $\zeta(\sigma^+)$ dans la somme ci-dessus, on obtient $m(\pi, \rho')$. On en déduit :

(1) $|m(\pi^+, \rho'^\flat)| \leq m(\pi, \rho')$ et $|m(\pi^+, \rho'^\flat| = 1$ si $m(\pi, \rho') = 1$.

Notre raisonnement conduit à la relation

(2) $trace(\pi^+)$ coïncide sur $\tilde{W}_s(M_{s_\Lambda})$ avec

$$\sum_{\rho' \in Irr_{\mathbb{F}_q}(W_s(M_{s_\Lambda}))} m(\pi^+, \rho'^\flat)trace(\rho'^\flat).$$

Notons ρ_s, resp. $\rho_s^\flat$, les représentations de $W_s(M_{s_\Lambda})$, resp. $W_s(M_{s_\Lambda})^+$, définies par $\rho_s(w') = \rho(j_s(w'))$, resp. $\rho_s^\flat(w'\sigma) = \rho^\flat(j_s(w')\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{F}_q}$. Pour $\rho' \in Irr(W_s(M_{s_\Lambda}))$, notons $(\mathcal{O}_{\rho'}, \mathcal{L}_{\rho'})$ l'image de $(M_{s_\Lambda}, \mathcal{E}_\varphi, \rho')$ par la représentation de Springer dans G_s.

Proposition. *On a l'égalité*

$$\hat{k}(\Lambda, \varphi, \rho)(h_{s,\mathcal{O}'}) = \sum_{\rho' \in Irr_{\mathbb{F}_q}(W_s(M_{s_\Lambda}))} q^{dim(\mathcal{O}_{\rho'})/2 - dim(\mathcal{O}')/2} m(\rho_s^\flat, \rho'^\flat)\chi^\natural_{M_{s_\Lambda}, \mathcal{E}_\varphi, \rho'}(N').$$

Preuve. La fonction $h_{s,\mathcal{O}'}$ est déduite de la fonction $\underline{h}_{s,\mathcal{O}'}$ sur $\mathfrak{g}_s(\mathbb{F}_q)$ et la transformée de Fourier de celle-ci est à support nilpotent. On peut donc utiliser la proposition 6.1.8, dans laquelle on remplace la fonction $\underline{h}_{s,\mathcal{O}'}$ par sa valeur calculée par la proposition 6.1.3. On obtient

$$\hat{k}(\Lambda, \varphi, \rho)(h_{s,\mathcal{O}'}) = c_1|W_s(M_{s_\Lambda})|^{-1} \sum_{w'' \in W_s(M_{s_\Lambda})} trace(\rho^\flat(j_s(w'')Fr^{-1}))$$

$$\sum_{(L',\mathcal{E}')\in\mathcal{T}^{FC}_{0,\mathbb{F}_q}(G_s)} |W_s(L')|^{-1}q^{-dim(Z(L')^0)} \sum_{w'\in W_s(L')} |Z^0_{L'_{w'}}(\mathbb{F}_q)|Q^\natural_{L',\mathcal{E}',w'}(N')(Q^-_{M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,w''}, Q^-_{L',\mathcal{E}',w'}),$$

où

$$c_1 = c(\Lambda,\varphi)mes(K^0_s)|G_s(\mathbb{F}_q)|^{-1}q^{dim(\mathfrak{g}_s)-dim(\mathcal{O}')/2}.$$

On calcule le produit $(Q^-_{M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,w''}, Q^-_{L',\mathcal{E}',w'}) = (Q_{M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,w''}, Q_{L',\mathcal{E}',w'})$ grâce à 2.2.5(4). Il n'est non nul que si $(L',\mathcal{E}') = (M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi)$ et w' et w'' sont Fr-conjugués, c'est-à-dire $w''\in Cl_{s,Fr}(w')$. Remarquons que la première condition fait disparaître la somme en $(L',\mathcal{E}')$ de l'expression ci-dessus. Si les conditions précédentes sont satisfaites, le produit vaut

$$|W_{\mathbb{F}_q}(M_{s_\Lambda,w'})||Z(M_{s_\Lambda,w'})^0(\mathbb{F}_q)|^{-1}q^{dim(\mathcal{O}_\varphi)-dim(M_{SC,s_\Lambda})}.$$

On obtient

$$\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}'}) = c_2|W_s(M_{s_\Lambda})|^{-2}\sum_{w'\in W_s(M_{s_\Lambda})}|Cl_{s,Fr}(w')||W_{\mathbb{F}_q}(M_{s_\Lambda,w'})|$$

$$trace(\rho^\flat(j_s(w')Fr^{-1}))Q^\natural_{M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,w'}(N'),$$

où

$$c_2 = c_1q^{-dim(Z(M_{s_\Lambda})^0)+dim(\mathcal{O}_\varphi)-dim(M_{SC,s_\Lambda})}.$$

Comme on l'a vu en 6.1.7(8), on a l'égalité

$$|Cl_{s,Fr}(w')||W_{\mathbb{F}_q}(M_{s_\Lambda,w'})| = |W_s(M_{s_\Lambda})|$$

pour tout $w'\in W_s(M_{s_\Lambda})$, ce qui simplifie l'expression ci-dessus en

$$\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}'}) = c_2|W_s(M_{s_\Lambda})|^{-1}\sum_{w'\in W_s(M_{s_\Lambda})} trace(\rho^\flat(j_s(w')Fr^{-1}))Q^\natural_{M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,w'}(N').$$

On utilise (2) ci-dessus et on obtient

$$\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}'}) = c_2\sum_{\rho'\in Irr_{\mathbb{F}_q}(W_s(M_{s_\Lambda}))} m(\rho^\flat_s,\rho'^\flat)$$

$$|W_s(M_{s_\Lambda})|^{-1}\sum_{w'\in W_s(M_{s_\Lambda})} trace(\rho'^\flat(w'Fr^{-1}))Q^\natural_{M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,w'}(N').$$

D'après 5.2.1(3), la dernière ligne ci-dessus vaut $q^{-b(M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,\rho')}\chi^\natural_{M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,\rho'}(N')$. D'où

$$\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}'}) = \sum_{\rho'\in Irr_{\mathbb{F}_q}(W_s(M_{s_\Lambda}))} c_3(\rho')\chi^\natural_{M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,\rho'}(N'),$$

où

$$c_3(\rho') = c_2q^{-b(M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,\rho')}m(\rho^\flat_s,\rho'^\flat).$$

On a l'égalité $mes(K^0_s) = q^{-dim(\mathfrak{g}_s)/2}|G_s(\mathbb{F}_q)|$. En se rappelant la définition

$$c(\Lambda,\varphi) = q^{dim(M_{s_\Lambda})/2-dim(\mathcal{O}_\varphi)/2},$$

on calcule la constante

$$c_3(\rho') = q^{dim(\mathcal{O}_{\rho'})/2-dim(\mathcal{O}')/2}m(\rho^\flat,\rho'^\flat).$$

La formule ci-dessus devient celle de l'énoncé. □

6.2 Deux théorèmes de maximalité

6.2.1 Paramétrage de l'ensemble $\mathcal{B}_{Irr}(G)$

On a fixé en 3.2.4 un ensemble de représentants $\mathcal{N}$ de $\mathfrak{g}_{nil}/conj$. Notons $\mathcal{N}_{sp}$ le sous-ensemble des éléments $N \in \mathcal{N}$ tels que l'orbite de N soit spéciale et posons $\mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F) = \mathcal{N}_{sp} \cap \mathcal{N}(\Gamma_F)$. Pour $N \in \mathcal{N}(I_F)$, notons $\mathcal{M}(G,N)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $\bar{A}(N)$ de couples (d,μ) où $d \in \tilde{\bar{A}}(N)$ et μ est une représentation irréductible de $Z_{\bar{A}(N)}(d)$. Comme toujours, on notera une telle classe de conjugaison par un couple la représentant. On note $\mathcal{M}_F(G)$ l'ensemble des triplets (N,d,μ) où $N \in \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$ et $(d,\mu) \in \mathcal{M}(G,N)$.

On a défini en 3.2.6 l'ensemble $\bar{\mathcal{C}}$ des couples (N,d) où $N \in \mathcal{N}(I_F)$ et d est une classe de conjugaison par $\bar{A}(N)$ dans $\tilde{\bar{A}}(N)$. L'application "oubli de μ" : $(N,d,\mu) \mapsto (N,d)$ envoie $\mathcal{M}_F(G)$ dans $\bar{\mathcal{C}}$.

Nous allons définir une application injective

$$(1) \qquad \boldsymbol{\nabla}_F : \mathcal{B}_{Irr}(G) \to \mathcal{M}_F(G).$$

Dans ce paragraphe, nous donnons la définition dans le cas où G est déployé sur F^{nr}.

Supposons d'abord que G est déployé sur F et que $q-1$ soit divisible par 3.4.5. On a dit en 5.2.2 que l'ensemble $\mathbf{FC}_u(\mathbf{G})$ était en bijection avec celui des couples $(s,\mathcal{E})$ où $s \in S^{nr,st}(\bar{C}^{nr})$ et $\mathcal{E} \in \mathbf{FC}^{st}(\mathfrak{g}_s)$. Sous les hypothèses que l'on vient de poser, on a $S^{nr,st}(\bar{C}^{nr}) = S^{st}(\bar{C})$ et $\mathbf{FC}^{st}(\mathfrak{g}_s) = \mathbf{FC}^{st}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g}_s)$ pour tout $s \in S^{st}(\bar{C})$ (cette dernière égalité résulte de [48] paragraphe 9). En fixant une action de Frobenius sur tout élément de $\mathbf{FC}^{st}_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{g}_s)$, cet ensemble s'identifie à $\mathcal{B}(G,s)$. On obtient que $\mathbf{FC}_u(\mathbf{G})$ s'identifie au sous-ensemble des quadruplets $(M,s_M,\varphi,\rho) \in \mathcal{B}_{Irr}(G)$ tels que $M = G$ (et donc $\rho = 1$). Il y a une bijection naturelle entre les classes de conjugaison de F-Levi de G et les classes de conjugaison de $\mathbb{F}_q$-Levi de $\mathbf{G}$. Soient $(M,\mathbf{M})$ un couple de Levi se correspondant. Le résultat précédent vaut en remplaçant $(G,\mathbf{G})$ par $(M,\mathbf{M})$. On a $W^{I_F}(M) \simeq W(\mathbf{M})$ et $Irr_{\mathbb{F}_q}(W^{I_F}(M)) \simeq Irr(W(\mathbf{M}))$ puisque G est déployé. On définit alors une bijection de $\mathcal{B}_{Irr}(G)$ sur $\mathcal{A}(\mathbf{G})$: à un quadruplet $(M,s_M,\varphi,\rho) \in \mathcal{B}_{Irr}(G)$, on associe le triplet $(\mathbf{M},\boldsymbol{\mathcal{E}},\rho) \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ où $\mathbf{M}$ correspond à M comme ci-dessus et $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathbf{FC}_u(\mathbf{M})$ correspond à (s_M,φ).

Affaiblissons les hypothèses sur G en supposant seulement que G est déployé sur F^{nr}. On peut fixer une extension finie non ramifiée F' de F telle que les hypothèses précédentes soient vérifiées sur le corps de base F'. L'ensemble $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ est insensible à un tel changement de corps de base. L'ensemble $\mathcal{B}_{Irr}(G)$ l'est. Mais notons plus précisément $\mathcal{B}_{Irr,F}(G)$ et $\mathcal{B}_{Irr,F'}(G)$ ces ensembles relatifs aux deux corps de base, on a une injection naturelle $\mathcal{B}_{Irr,F}(G) \to \mathcal{B}_{Irr,F'}(G)$. En effet, $\mathcal{B}_{Irr,F}(G)$ apparaît comme le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{B}_{Irr,F'}(G)$ dont tous les termes vérifient une certaine propriété de conservation par l'action de $\Gamma_{F'/F}$ (dans le cas des faisceaux-caractères cuspidaux, cette conservation se traduit par une condition de divisibilité de $q-1$, cf. [48] paragraphe 9). La composée de cette injection et de la bijection $\mathcal{B}_{Irr,F'}(G) \to \mathcal{A}(\mathbf{G})$ fournit une injection naturelle $\mathcal{B}_{Irr,F}(G) \to \mathcal{A}(\mathbf{G})$.

En 5.3.1, on a décomposé $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ en union disjointe de $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ parcourt $\mathcal{U}_{sp}$. On peut identifier $\mathcal{U}_{sp}$ à $\mathcal{N}_{sp}$. Pour un élément $N \in \mathcal{N}_{sp}$ dont on note $\mathcal{O}$ l'orbite, on a défini en 5.3.5 l'ensemble $\mathcal{M}(\mathbf{G},\mathcal{O})$ et une bijection $\nabla : \mathcal{A}(\mathbf{G},\mathcal{O}) \to \mathcal{M}(\mathbf{G},\mathcal{O})$. D'après les définitions, on a l'égalité $\mathcal{M}(\mathbf{G},\mathcal{O}) = \mathcal{M}(G,N)$. Notons $\mathcal{M}(G)$ l'ensemble des triplets (N,d,μ) où $N \in \mathcal{N}_{sp}$ et $(d,\mu) \in \mathcal{M}(G,N)$. On obtient une bijection $\mathcal{A}(\mathbf{G}) \to \mathcal{M}(G)$.

D'où par composition une injection $\mathcal{B}_{Irr}(G) \to \mathcal{M}(G)$, que l'on note $\boldsymbol{\nabla}_F$. Il nous reste à prouver que

(1) $\boldsymbol{\nabla}_F$ prend ses valeurs dans $\mathcal{M}_F(G)$.

Autrement dit, si (N, d, μ) appartient à son image, on doit prouver que l'orbite de N est conservée par l'action galoisienne. D'après 3.1.7, c'est toujours le cas si G n'est pas de type D_n ou si G est déployé. Supposons que G soit de type D_n avec $n \geq 4$ et que le Frobenius Fr agisse sur $\mathcal{D}$ par l'automorphisme habituel d'ordre 2. Soit $N \in \mathcal{N}_{sp} - \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$. Alors l'orbite $\mathcal{O}$ de N est spéciale et sa partition associée à tous ses termes pairs. On sait que $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathcal{O})$ est réduit à un seul élément qui est de la forme $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \rho)$ où $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est le système local trivial sur $\mathbf{T}_{AD} = \{1\}$ et ρ est une représentation irréductible de W qui n'est pas conservée par l'action galoisienne. Cette dernière propriété interdit à un tel triplet d'appartenir à l'image de l'injection $\mathcal{B}_{Irr,F}(G) \to \mathcal{A}(\mathbf{G})$. D'où (1). Il reste le cas où G est de type D_4 et où le Frobenius agit sur $\mathcal{D}$ par un automorphisme d'ordre 3. Soit $N \in \mathcal{N}_{sp} - \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$. Alors l'orbite $\mathcal{O}$ de N est spéciale. Notons λ sa partition associée. D'après 3.1.7, λ est l'une des partitions (51^3), (4^2), (31^5), (2^4). Les partitions (4^2) et (2^4) s'éliminent par le même argument que ci-dessus. Supposons $\lambda = (51^3)$, resp. (31^5). Le calcul de $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathcal{O})$ est classique, cf. [7] p. 409, on trouve que cet ensemble n'a qu'un élément qui est de la forme $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \rho)$, où $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est comme ci-dessus et ρ est une représentation irréductible de W. Décrivons cette représentation. Les représentations irréductibles de W sont paramétrées par des couples $(\nu, \nu') \in \mathcal{P}_2(4)$, les couples (ν, ν') et (ν', ν) étant identifiés (en fait, si $\nu = \nu'$, le couple paramètre deux représentations irréductibles mais peu nous importe). Ici le calcul donne que ρ est paramétrée par $((31), \emptyset)$, resp. $((21^2), \emptyset)$. Ces représentations ne sont pas invariantes par l'action galoisienne : en notant $(w_i)_{i=1,\ldots,4}$ les générateurs de W associés aux racines simples, on calcule $trace(\rho(w_3 w_4)) = 3$ et $trace(\rho(w_1 w_3)) = -1$, alors que $w_3 w_4$ et $w_1 w_3$ sont conjugués par l'action galoisienne. Comme ci-dessus, cela interdit au triplet $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \rho)$ d'appartenir à l'image de l'injection $\mathcal{B}_{Irr,F}(G) \to \mathcal{A}(\mathbf{G})$. D'où (1).

Cela achève la définition de $\boldsymbol{\nabla}_F$ quand G est déployé sur F^{nr}. Signalons une propriété de l'application $\mathcal{B}_{irr}(G) \to \mathcal{A}(\mathbf{G})$ que l'on a définie ci-dessus. Soit $(M, s_M, \varphi, \rho) \in \mathcal{B}_{Irr}(G)$, notons $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \rho) \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ son image. En 2.2.16, on a associé à (M, s_M) un sous-ensemble $\Lambda \subset \Delta_a$. En 5.2.4, on a associé à $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\mathcal{E}})$ un sous-ensemble analogue. Montrons que

(2) ces deux ensembles Λ sont égaux.

On peut supposer que M est standard. On choisit pour alcôve $C^{nr,M}$ de $Imm_{F^{nr}}(M_{AD})$ celle qui contient $p_M(C^{nr})$. Il s'en déduit un ensemble de racines affines Δ_a^M et on peut supposer que s_M est associé à une racine $\alpha \in \Delta_a^M$. Ainsi, l'ensemble Σ^M des racines de T dans M et l'ensemble $\Sigma^{M_{s_M}}$ des racines de T_{s_M} dans M_{s_M} sont des sous-ensembles de Σ. Par définition de l'application de $\mathcal{B}_{irr}(G)$ dans $\mathcal{A}(\mathbf{G})$, on peut supposer que $\mathbf{M}$ est le Levi standard de $\mathbf{G}$ dont l'ensemble de racines est Σ^M et que la racine associée à $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est α. L'ensemble de racines de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{M}_{t_\alpha}$ est alors $\Sigma^{M_{s_M}}$. Alors les deux ensembles Λ sont caractérisés par la même propriété. A savoir qu'il existe un élément $w \in W$ qui conjugue Σ^M, resp. $\Sigma^{M_{s_M}}$, en l'ensemble des éléments de Σ qui sont combinaisons linéaires à coefficients rationnels, resp. entiers, d'éléments de Λ. Cette caractérisation commune entraîne leur égalité. D'où (2).

6.2.2 Le cas de type (A_{n-1}, ram)

Dans ce paragraphe et les suivants, on donne la définition de $\boldsymbol{\nabla}_F$ dans le cas où G n'est pas déployé sur F^{nr}. La définition paraîtra arbitraire. Elle est faite pour que les théorèmes 6.2.6 et 6.2.7 soient vérifiés.

On suppose ici que G est de type (A_{n-1}, ram). Puisque $A(N) = \{1\}$ pour tout élément nilpotent $N \in \mathfrak{g}_{nil}$ et que toute orbite nilpotente est spéciale et conservée par Γ_F, l'ensemble $\mathcal{M}_F(G)$ s'identifie simplement à $\mathfrak{g}_{nil}/conj$ ou encore à $\mathcal{P}(n)$.

Pour $(M, s_M, \varphi) \in \mathcal{B}(G)$, M_{SC} est de type A_{u-1} où u est un nombre triangulaire, c'est-à-dire $u = v(v+1)/2$ pour un $v \in \mathbb{N}$ et u est de même parité que n. Le groupe M, ou encore l'entier u, détermine un unique couple (s_M, φ). Le groupe de Weyl $W(M)$ est celui d'un système de racines de type $B_{(n-u)/2}$ (ou $C_{(n-u)/2}$). Ses représentations sont paramétrées par l'ensemble $\mathcal{P}_2((n-u)/2)$. On obtient une bijection $(M, s_M, \varphi, \rho) \mapsto (v, \alpha, \beta)$ de $\mathcal{B}_{Irr}(G)$ sur l'ensemble $\mathcal{M}(n)$ des triplets (v, α, β) tels que

$v \in \mathbb{N}$ et $v(v+1)/2$ est de même parité que n ;

α, β sont des partitions ;

$v(v+1)/2 + 2S(\alpha) + 2S(\beta) = n$.

L'application $\boldsymbol{\nabla}_F$ s'identifie à une application de $\mathcal{M}(n)$ sur $\mathcal{P}(n)$. Sa définition est issue de [5] paragraphe 5.B. Soit $(v, \alpha, \beta) \in \mathcal{M}(n)$. Fixons un entier $t \geq n$ de même parité que $v+1$. On a $l(\alpha), l(\beta) \leq (t-v-1)/2$. Posons $X(\alpha) = \{2\alpha_j + t + v + 1 - 2j; j = 1, ..., (t+v+1)/2\}$, $Y(\beta) = \{2\beta_j + t - v - 2j; j = 1, ..., (t-v-1)/2\}$. Pour une partition $\lambda \in \mathcal{P}(n)$, posons $\mathbf{Z}(\lambda) = \{\lambda_j + t - j; j = 1, ..., t\}$. Alors $\boldsymbol{\nabla}_F(v, \alpha, \beta)$ est l'unique partition $\lambda \in \mathcal{P}(n)$ telle que $\mathbf{Z}(\lambda) = X(\alpha) \cup Y(\beta)$. On vérifie que $\boldsymbol{\nabla}_F$ est injective.

6.2.3 Le cas de type (D_n, ram)

On suppose que G est de type (D_n, ram). Pour $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n)$, on dit que λ spéciale si et seulement si $\lambda_{2j-1} \equiv \lambda_{2j} \, mod \, 2\mathbb{Z}$ pour tout entier $j \geq 1$. Considérons une orbite dans $\mathfrak{g}_{nil}$ paramétrée par une partition $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n)$. L'orbite est spéciale si et seulement si λ l'est. Supposons qu'il en soit ainsi. On associe à λ un symbole $(\mathbf{X}(\lambda), \mathbf{Y}(\lambda))$ de la façon suivante. On introduit la partition $\lambda + (2n-1, 2n-2, ..., 0)$ et on considère qu'elle a $2n$ termes (éventuellement le dernier peut être nul). On constate que n termes sont pairs, on les note $2x_1 > ... > 2x_n$, et que n termes sont impairs, on les note $2y_1 + 1 > ... > 2y_n + 1$. Alors $\mathbf{X}(\lambda) = (x_1, ..., x_n)$ et $\mathbf{Y}(\lambda) = (y_1, ..., y_n)$. On a défini en 3.1.6 l'ensemble des intervalles $Int(\lambda) \subset Jord_{bp}(\lambda)$. Pour $\Delta \in Int(\lambda)$, notons $j_{min}(\Delta)$, resp. $j_{max}(\Delta)$, le plus petit, resp. grand, indice $j \geq 1$ tel que $\lambda_j \in \Delta$. L'indice $j_{min}(\Delta)$ est impair tandis que $j_{max}(\Delta)$ est pair. On vérifie que

$$\mathbf{X}(\lambda) - (\mathbf{X}(\lambda) \cap \mathbf{Y}(\lambda)) = \{x_{(j_{min}(\Delta)+1)/2}; \Delta \in Int(\lambda)\},$$

$$\mathbf{Y}(\lambda) - (\mathbf{X}(\lambda) \cap \mathbf{Y}(\lambda)) = \{y_{j_{max}(\Delta)/2}; \Delta \in Int(\lambda)\}.$$

Considérons l'ensemble des paires (X, Y) vérifiant les conditions suivantes :

$X, Y \subset \mathbb{N}$, $X \cap Y = \mathbf{X}(\lambda) \cap \mathbf{Y}(\lambda)$, $X \cup Y = \mathbf{X}(\lambda) \cup \mathbf{Y}(\lambda)$.

Dans la dernière égalité, on considère les deux membres comme des partitions, ou encore des ensembles "avec multiplicités". Disons que deux paires (X, Y) sont équivalentes si et seulement si $(X', Y') = (X, Y)$ ou $(X', Y') = (Y, X)$. L'ensemble des classes d'équivalence est appelée la famille de λ et est notée $Fam(\lambda)$. Un élément de cette famille sera notée comme une paire (X, Y) représentant sa classe d'équivalence. On note $Fam(\lambda)_{pair}$, resp. $Fam(\lambda)_{imp}$, l'ensemble des $(X, Y) \in Fam(\lambda)$ tels que $|X| \equiv |Y| \equiv n \, mod \, 2\mathbb{Z}$, resp.

$|X| \equiv |Y| \equiv n+1 \, mod \, 2\mathbb{Z}$. Notons $\bar{A}(\lambda)^\vee$ le groupe dual de $\bar{A}(\lambda)$. On va définir une bijection

$$(1) \qquad \phi_\lambda : Fam(\lambda)_{imp} \to \tilde{\bar{A}}(\lambda) \times \bar{A}(\lambda)^\vee.$$

Notons $-\mathbf{1}$ l'élément de $\{\pm 1\}^{Int(\lambda)}$ dont toutes les composantes valent -1. On définit d'abord une bijection

$$(2) \qquad Fam(\lambda) \to (\{\pm 1\}^{Int(\lambda)} \times \{\pm 1\}^{Int(\lambda)})/\{1, (-\mathbf{1}, -\mathbf{1})\}.$$

Pour $(X, Y) \in Fam(\lambda)$, il existe deux uniques sous-ensembles $Int^X, Int^Y \subset Int(\lambda)$ tels que $X = (\mathbf{X}(\lambda) - \{x_{(j_{min}(\Delta)+1)/2}; \Delta \in Int^X\}) \cup \{y_{j_{max}(\Delta)/2}; \Delta \in Int^Y\}$, $Y = (\mathbf{Y}(\lambda) - \{y_{j_{max}(\Delta)/2}; \Delta \in Int^Y\}) \cup \{x_{(j_{min}(\Delta)+1)/2}; \Delta \in Int^X\}$. On associe à Int^X l'élément $\nu^X = (\nu^X_\Delta)_{\Delta \in Int(\lambda)} \in \{\pm 1\}^{Int(\lambda)}$ tel que

$$\nu^X_\Delta = \begin{cases} 1, & \text{si } \Delta \notin Int^X, \\ -1, & \text{si } \Delta \in Int^X. \end{cases}$$

On définit de même ν^Y. Si l'on remplace (X, Y) par (Y, X), le couple (ν^X, ν^Y) est remplacé par $(\nu^X(-\mathbf{1}), \nu^Y(-\mathbf{1}))$. On voit alors que l'application $(X, Y) \mapsto (\nu^X, \nu^Y)$ se quotiente en la bijection (2). Rappelons que l'ensemble $Int(\lambda)$ est naturellement ordonné. Définissons une bijection

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} (\{\pm 1\}^{Int(\lambda)} \times \{\pm 1\}^{Int(\lambda)})/\{1, (-\mathbf{1}, -\mathbf{1})\} & \to & \{\pm 1\}^{Int(\lambda)} \times (\{\pm 1\}^{Int(\lambda)}/\{1, -\mathbf{1}\}) \\ (\nu^X, \nu^Y) & \mapsto & (d, \mu) \end{array}$$

par les formules $d_\Delta = \nu^X_\Delta \nu^Y_\Delta$, $\mu_\Delta = (\prod_{\Delta' \geq \Delta} \nu^X_{\Delta'}) \prod_{\Delta' > \Delta} \nu^Y_{\Delta'}$ pour tout $\Delta \in Int(\lambda)$ (comme plus haut, on voit que l'application définie par ces formules se quotiente en la bijection (3)). La composée des bijections (2) et (3) envoie $Fam(\lambda)_{imp}$ sur $\{\pm 1\}^{Int(\lambda)}_{-1} \times (\{\pm 1\}^{Int(\lambda)}/\{1, -\mathbf{1}\})$. Mais $\{\pm 1\}^{Int(\lambda)}_{-1} = \tilde{\bar{A}}(\lambda)$ et $\{\pm 1\}^{Int(\lambda)}/\{1, -\mathbf{1}\}$ s'identifie naturellement au dual de $\{\pm 1\}^{Int(\lambda)}_1$, autrement dit au dual $\bar{A}(\lambda)^\vee$ de $\bar{A}(\lambda)$. On a ainsi établi la bijection ϕ_λ de la relation (1).

Pour $(M, s_M, \varphi) \in \mathcal{B}(G)$, ou bien $M = T$, ou bien M_{SC} est de type D_{h^2} où h est un entier impair tel que $3 \leq h$ et $h^2 \leq n$. . Par convention, nous posons $h = 1$ dans le cas où $M = T$. Le groupe M, ou encore l'entier h, détermine un unique couple (s_M, φ). Le groupe de Weyl $W^{I_F}(M)$ est celui d'un système de racines de type B_{n-h^2} ou C_{n-h^2}. Ses représentations sont paramétrées par l'ensemble $\mathcal{P}_2(n-h^2)$. L'ensemble $\mathcal{B}_{Irr}(G)$ s'identifie à celui des triplets (h, α, β) où h est comme ci-dessus et $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(n-h^2)$. Pour un tel triplet, on peut considérer que α a $n+h$ termes et que β en a $n-h$. Posons

$X(\alpha) = \alpha + (n+h-1, ..., 0)$, $Y(\beta) = \beta + (n-h-1, ..., 0)$.

Il existe une unique partition $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n)$ qui est spéciale et telle que $(X(\alpha), Y(\beta)) \in Fam(\lambda)$. La non-nullité de h entraîne que λ a au moins un terme impair, donc λ s'identifie à un élément de $\mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$. L'imparité de h entraîne que $(X(\alpha), Y(\beta)) \in Fam_{imp}(\lambda)$. Posons $(d, \mu) = \phi_\lambda(X(\alpha), Y(\beta))$. On définit alors $\boldsymbol{\nabla}_F(h, \alpha, \beta) = (\lambda, d, \mu)$. L'application $\boldsymbol{\nabla}_F$ ainsi définie est injective (en fait bijective).

6.2.4 Le cas $(D_4, 3-ram)$

On suppose que G est de type $(D_4, 3-ram)$. Les couples (M, s_M) tel que $\mathcal{B}(M, s_M) \neq \emptyset$ sont

$M = G$, $s_M = s_0$; $M = G$, $s_M = s_{134}$; $M = T$ et s_M est l'unique point de $Imm(M_{AD})$.

Dans chaque cas, $\mathcal{B}(M, s_M)$ est réduit à un élément. Dans le cas où $M = G$, on a $W^{I_F}(G) = \{1\}$ et au couple (G, s_G) est associé un unique élément de $\mathcal{B}_{Irr}(G)$ que l'on note simplement (G, s_G). Si $M = T$, $W^{I_F}(M)$ s'identifie au groupe de Weyl de G_{s_0}, qui est de type G_2. On note ses représentations comme dans [7] page 412 et on note (T, ρ) l'élément de $\mathcal{B}_{Irr}(G)$ associé à une représentation ρ de ce groupe.

L'ensemble des orbites spéciales de G conservées par I_F est paramétré par l'ensemble de partitions $\{(71), (53), (3^2 1^2), (2^2 1^4), (1^8)\}$, cf. 3.1.7. On l'identifie à cet ensemble de partitions. Sauf dans le cas de la partition $\lambda = (3^2 1^2)$, on a $A(\lambda) = \{1\}$ et λ se complète en un unique élément de $\mathcal{M}_F(G)$ que l'on note encore λ. Si $\lambda = 3^2 1^2$, on a $\tilde{\bar{A}}(N) = A(N)\gamma = \{\pm 1\}\gamma$. On note 1, resp. sgn, le caractère trivial, resp. non trivial, de $\{\pm 1\}$.

On définit $\boldsymbol{\nabla}_F$ par le tableau suivant :

(M, s_M, φ, ρ)	$\boldsymbol{\nabla}_F(M, s_M, \varphi, \rho)$
(G, s_0)	$(3^2 1^2, \gamma, sgn)$
(G, s_{134})	$(3^2 1^2, -\gamma, sgn)$
$(T, \phi_{1,0})$	(71)
$(T, \phi'_{1,3})$	(53)
(T, ϕ_{21})	$(3^2 1^2, \gamma, 1)$
$(T, \phi_{2,2})$	$(3^2 1^2, -\gamma, 1)$
$(T, \phi''_{1,3})$	$(2^2 1^4)$
$(T, \phi_{1,6})$	1^8

.

6.2.5 Le cas (E_6, ram)

On suppose que G est de type (E_6, ram). Notons $M(A_5)$ l'unique F-Levi standard M tel que M_{SC} soit de type A_5. Les couples (M, s_M) tel que $\mathcal{B}(M, s_M) \neq \emptyset$ sont

$M = G$, $s_M = s_0$;

si $\delta_3(q-1) = 1$, $M = G$ et $s_M = s_{35}$;

$M = M(A_5)$, s_M est le sommet tel que $M_{s_M,SC}$ est de type $A_1 \times A_1 \times A_1$;

$M = T$ et s_M est l'unique point de $Imm(M_{AD})$.

Sauf dans le cas où $M = G$ et $s_M = s_{35}$, $\mathcal{B}(M, s_M)$ a un seul élément et on l'omet de la notation. Dans le cas où $M = G$ et $s_M = s_{35}$, $\mathcal{B}(M, s_M)$ a deux éléments que l'on note φ_1 et φ_2. Si $M = G$, $W^{I_F}(M) = \{1\}$ et on omet son unique représentation de la notation. Si $M = M(A_5)$, $W^{I_F}(M)$ a deux éléments, on note 1 et sgn ses deux caractères. Si $M = T$, $W^{I_F}(M)$ s'identifie au groupe de Weyl de G_{s_0}, qui est de type F_4. On note ses représentations comme dans [7] p. 412 et on note (T, ρ) l'élément de $\mathcal{B}_{Irr}(G)$ associé à une représentation ρ de ce groupe.

On a $\mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F) = \mathcal{N}_{sp}$. Pour $N \in \mathcal{N}_{sp}$, on a en général $A(N) = \{1\}$. Alors N se complète en un unique élément de $\mathcal{M}_F(G)$ que l'on note simplement comme l'orbite de N est désignée dans les tables de [7]. Si $A(N) \neq \{1\}$, N est fixe par γ d'après le choix de notre ensemble $\mathcal{N}$ et on a $\tilde{A}(N) = A(N)\gamma$, où γ agit trivialement sur $A(N)$. Si N est de type A_2 ou $E_6(a_3)$, on a $\tilde{\bar{A}}(N) = \{\pm 1\}\gamma$ et on note 1 et sgn les deux caractères de $\{\pm 1\}$. Si N est de type $D_4(a_1)$, on a $\tilde{\bar{A}}(N) \simeq \mathfrak{S}_3\gamma$. On note $1, g_2, g_3$ des représentants des trois classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_3$, g_i étant d'ordre i pour $i = 2, 3$. Le groupe $Z_{A(N)}(\gamma)$ est $\mathfrak{S}_3$ dont on note les représentations irréductibles 1, sgn, r (r est de dimension 2). Le groupe $Z_{A(N)}(g_2\gamma)$ est d'ordre 2 et on note ses caractères 1 et sgn. Le groupe $Z_{A(N)}(g_3\gamma)$ est d'ordre 3 et on note ses caractères 1, θ, θ^2.

Remarque. Il n'est pas clair pour nous de savoir qui est θ et qui est θ^2, ni de savoir qui est φ_1 et qui est φ_2. Dans les formules qui suivent, il y a donc une ambiguïté, qui ne sera pas importante pour la suite.

On définit $\boldsymbol{\nabla}_F$ par le tableau suivant :

conditions	(M, s_M, φ, ρ)	$\boldsymbol{\nabla}_F(M, s_M, \varphi, \rho)$
	(G, s_0)	$(D_4(a_1), \gamma, sgn)$
$\delta_3(q-1) = 1$	$(G, s_{35}, \varphi_1), (G, s_{35}, \varphi_2)$	$(D_4(a_1), g_3\gamma, \theta), (D_4(a_1), g_3\gamma, \theta^2)$
	$(M(A_5), s_{M(A_5)}, 1)$	$D_5(a_1)$
	$(M(A_5), s_{M(A_5)}, sgn)$	$A_2 + A_1$
	$(T, \phi_{1,0})$	E_6
	$(T, \phi'_{2,4})$	$E_6(a_1)$
	$(T, \phi_{4,1})$	D_5
	$(T, \phi_{9,2})$	$(E_6(a_3), \gamma, 1)$
	$(T, \phi''_{2,4})$	$(E_6(a_3), \gamma, sgn)$
	$(T, \phi'_{8,3})$	$(E_6(a_3), -\gamma, 1)$
	$(T, \phi'_{1,12})$	$(E_6(a_3), -\gamma, sgn)$
	$(T, \phi'_{4,7})$	$A_4 + A_1$
	$(T, \phi''_{8,3})$	D_4
	$(T, \phi'_{9,6})$	A_4
	$(T, \phi_{12,4})$	$(D_4(a_1), \gamma, 1)$
	$(T, \phi''_{6,6})$	$(D_4(a_1), \gamma, r)$
	$(T, \phi_{16,5})$	$(D_4(a_1), g_2\gamma, 1)$
	$(T, \phi_{4,8})$	$(D_4(a_1), g_2\gamma, sgn)$
	$(T, \phi'_{6,6})$	$(D_4(a_1), g_3\gamma, 1)$
	$(T, \phi''_{9,6})$	A_3
	$(T, \phi''_{4,7})$	$A_2 + 2A_1$
	$(T, \phi'_{8,9})$	$2A_2$
	$(T, \phi''_{8,9})$	$(A_2, \gamma, 1)$
	$(T, \phi''_{1,12})$	(A_2, γ, sgn)
	$(T, \phi_{9,10})$	$(A_2, -\gamma, 1)$
	$(T, \phi'_{2,16})$	$(A_2, -\gamma, sgn)$
	$(T, \phi_{4,13})$	$2A_1$
	$(T, \phi''_{2,16})$	A_1
	$(T, \phi_{1,24})$	1

.

6.2.6 Un premier théorème

L'application d'oubli $(N, d, \mu) \mapsto N$ envoie $\mathcal{M}_F(G)$ sur $\mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$. En composant avec l'application $\boldsymbol{\nabla}_F : \mathcal{B}_{Irr}(G) \to \mathcal{M}_F(G)$, on obtient une application $\mathcal{B}_{Irr}(G) \to \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$. Pour $N \in \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$, on note $\mathcal{B}_{Irr}(G, N)$ sa fibre au-dessus de N. Ce sous-ensemble de $\mathcal{B}_{Irr}(G)$ s'identifie par la bijection $\mathcal{B}_{Irr}(G) \simeq \mathcal{B}'_{Irr}(G)$ à un sous-ensemble $\mathcal{B}'_{Irr}(G, N)$ de $\mathcal{B}'_{Irr}(G)$.

Soient $N \in \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$, $(\Lambda, \varphi, \rho) \in \mathcal{B}'_{Irr}(G, N)$ et $s \in S(\bar{C})$. On suppose que $\Lambda \subset \Lambda(s)$. On pose $M = M_\Lambda$. Soit $\rho' \in Irr(W_s(M_{s_\Lambda}))$. Le triplet $(M_{s_\Lambda}, \mathcal{E}_\varphi, \rho')$ appartient à

$\mathcal{I}^{FC}(G_s)$. On note $(\mathcal{O}_{\rho'}, \mathcal{L}_{\rho'})$ son image par la représentation de Springer généralisée de G_s. On a défini l'application $\iota_{s,nil} : \mathfrak{g}_{s,nil}/conj \to (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{I_F} \simeq \mathcal{N}(I_F)$ en 3.2.2. Posons $\iota_{s,nil}(\mathcal{O}_{\rho'}) = N_{\rho'}$. On a aussi défini la multiplicité $m(\rho_s, \rho')$ de ρ' dans $\rho_s = \rho \circ j_s$.

Notons $dim(N)$, resp. $dim(N_{\rho'})$, la dimension de l'orbite de N, resp. $N_{\rho'}$, dans $\mathfrak{g}$.

Théorème. *Supposons $m(\rho_s, \rho') > 0$. Alors ou bien $dim(N_{\rho'}) < dim(N)$, ou bien $N = N_{\rho'}$.*

On démontrera ce théorème en même temps que le suivant dans les paragraphes 6.2.8 à 6.2.13.

6.2.7 Un deuxième théorème

Fixons $N \in \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$. Notons $\tilde{\bar{A}}(N)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $\bar{A}(N)$ dans $\tilde{\bar{A}}(N)$. Soit $d \in \tilde{\bar{A}}(N)/conj$. On définit une application

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}_{Irr}(G,N) & & \to & & \tilde{\bar{A}}(N)/conj \\ (M, s_M, \varphi, \rho) & \mapsto & \boldsymbol{\nabla}_F(M, s_M, \varphi, \rho) = (N, d, \mu) & \mapsto & d \end{array}$$

Pour $d \in \tilde{\bar{A}}(N)/conj$, on note $\mathcal{B}_{Irr}(G, N, d)$ la fibre de cette application au-dessus de d. On a aussi la variante $\mathcal{B}'_{Irr}(G, N, d)$.

Notons $\mathcal{J}_F$ l'ensemble des couples $(s, \mathcal{O}')$ où $s \in S(\bar{C})$ et $\mathcal{O}' \in \mathfrak{g}_{s,nil}/conj$ est une orbite conservée par l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$.

Théorème. *Il existe une application injective $b_F : \tilde{\bar{A}}(N)/conj \to \mathcal{J}_F$ telle que les propriétés suivantes soient vérifiées. Soit $d \in \tilde{\bar{A}}(N)/conj$, posons $b_F(d) = (s, \mathcal{O}')$.*

(i) On a $\iota_{s,nil}(\mathcal{O}') = N$.

(ii) Soit $(\Lambda, \varphi, \rho) \in \mathcal{B}'_{Irr}(G, N, d)$. Alors $\Lambda \subset \Lambda(s)$. Il existe une unique représentation $\rho' \in Irr(W_s(M_{s_\Lambda}))$ telle que $< \rho_s, \rho') > 0$ et que l'image de $(M_{s_\Lambda}, \mathcal{E}_\varphi, \rho')$ par la correspondance de Springer généralisée pour G_s soit portée par $\mathcal{O}'$. Cette représentation ρ' est conservée par l'action galoisienne de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ et on a $< \rho_s, \rho' >= 1$. Posons $Spr(M_{s_\Lambda}, \mathcal{E}_\varphi, \rho') = (\mathcal{O}', \mathcal{L}_{\Lambda,\varphi,\rho})$. L'application $(\Lambda, \varphi, \rho) \mapsto \mathcal{L}_{\Lambda,\varphi,\rho}$ définie sur $\mathcal{B}'_{Irr}(G, N, d)$ est injective.

(iii) Soit $(\Lambda, \varphi, \rho) \in \mathcal{B}'_{Irr}(G, N) - \mathcal{B}'_{Irr}(G, N, d)$. Supposons $\Lambda \subset \Lambda(s)$. Alors il n'existe pas de représentation $\rho' \in Irr(W_s(M_{s_\Lambda}))$ telle que $< \rho_s, \rho') > 0$ et que l'image de $(M_{s_\Lambda}, \mathcal{E}_\varphi, \rho')$ par la correspondance de Springer généralisée pour G_s soit portée par $\mathcal{O}'$.

6.2.8 Preuve des théorèmes 6.2.6 et 6.2.7 dans le cas où G est déployé sur F^{nr}

On suppose que G est déployé sur F^{nr}. La construction de l'application $\boldsymbol{\nabla}_F$ en 6.2.1 associe à $(\Lambda, \varphi, \rho) \in \mathcal{B}'_{Irr}(G, N)$ un élément $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \rho)$ de $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est l'orbite de N. D'après 6.2.1(2), l'ensemble Λ est celui associé à $\mathbf{M}$ comme en 5.2.4. Le triplet $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \rho)$ de $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathcal{O})$ s'identifie au triplet $(\Lambda, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \rho)$ de $\mathcal{A}'(\mathbf{G}, \mathcal{O})$.

Soit $s \in S(\bar{C})$ tel que $\Lambda \subset \Lambda(s)$. Alors l'élément $t = \mathbf{j}_T(s) \in \mathbf{T}$ vérifie les hypothèses de 5.3.4. On a $W_t(\mathbf{M}_{\Lambda,t}) = W_s(M_{\Lambda,s_\Lambda})$ et le théorème 6.2.6 est une traduction de la proposition 5.3.4.

Puisque G est déployé sur F^{nr}, on a $\tilde{\bar{A}}(N) = \bar{A}(N)$. On a défini en 5.3.7 une application $b : \bar{A}(N)/conj \to \mathcal{J}$. Soit $d \in \bar{A}(N)/conj$, posons $b(d) = (\alpha, \mathcal{O}')$. Puisqu'ici, $\mathcal{O}$ est conservée par Γ_F^{nr}, l'assertion (ii) du théorème 5.3.7 dit que $\alpha \in \Delta_a$ est fixe par Γ_F^{nr} et

que $\mathcal{O}'$ est conservée par l'action galoisienne. Puisque α est fixe par Γ_F^{nr}, il lui est associé un sommet $s_\alpha \in S(\bar{C})$. L'homomorphisme $\iota_{s_\alpha} : \mathfrak{g}_{s_\alpha} \to \mathfrak{g}$ identifie $\mathfrak{g}_{s_\alpha}$ à $\mathfrak{g}_{t_\alpha}$. Ainsi $\mathcal{O}'$ s'identifie à un élément de $\mathfrak{g}_{s_\alpha,nil}/conj$. Alors $(s_\alpha, \mathcal{O}')$ appartient à $\mathcal{J}_F$. On définit b_F par $b_F(d) = (s_\alpha, \mathcal{O}')$. Le groupe $W_{s_\alpha}(M_{\Lambda,s_\Lambda})$ est égal à $W_{t_\alpha}(\mathbf{M}_{\Lambda,t_\alpha})$ $\mathcal{E}_\varphi$ est égal à $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{t_\alpha}$. Alors le théorème 6.2.7 est une simple traduction du théorème 5.3.7, à ceci près que celui-ci n'affirme pas que l'unique représentation ρ' de l'assertion (iii) est conservée par l'action galoisienne. Mais cela résulte de son unicité. En effet, considérons cette représentation ρ' et soit $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{F}_q}$. Il fait partie des hypothèses que ρ est conservée par l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. Donc ρ_{s_α} est conservée par σ. Puisque ρ' intervient dans ρ_{s_α}, $\sigma(\rho')$ intervient aussi. Il fait aussi partie des hypothèses que $\mathcal{E}_\varphi$ est conservé par l'action de $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$. La correspondance de Springer généralisée est équivariante pour les actions galoisiennes, donc l'image par cette correspondance de $(M_{s_\Lambda}, \mathcal{E}_\varphi, \sigma(\rho'))$ est portée par $\sigma(\mathcal{O}') = \mathcal{O}'$. Alors $\sigma(\rho')$ vérifie les conditions qui caractérisent ρ', donc $\sigma(\rho') = \rho'$. Cela achève la preuve du théorème 6.2.7 dans le cas où G est déployé sur F^{nr}.

6.2.9 Rappels sur la correspondance de Springer généralisée pour les groupes classiques

Pour ce paragraphe, le corps de base est $\mathbb{F}_q$. On suppose que G est un groupe symplectique ou spécial orthogonal défini et déployé sur $\mathbb{F}_q$, c'est-à-dire $G = Sp(N)$ ou $G = SO(N)$. Dans le cas symplectique, on suppose que $N \geq 2$ est pair. Dans le cas spécial orthogonal, on suppose $N \geq 3$. Puisque G est déployé, on a $\mathcal{I}(G) = \mathcal{I}_{\mathbb{F}_q}(G)$, $\mathcal{I}^{FC}(G) = \mathcal{I}^{FC}_{\mathbb{F}_q}(G)$. On utilise les notations suivantes. Pour deux entiers $a \geq b \geq 0$, on pose $[a,b] = (a, a-1, ..., b+1, b)$. Si de plus, a et b sont de même parité, on pose $[a,b]_2 = (a, a-2, ..., b+2, b)$. Pour une partition $\mu = (\mu_1, \mu_2, ...)$, on note 2μ la partition $2\mu = (2\mu_1, 2\mu_2, ...)$.

Supposons $G = Sp(N)$. On pose $N = 2n$. L'ensemble $\mathcal{I}(G)$ s'identifie à celui des couples (λ, ϵ) où $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2n)$ et $\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$. L'ensemble $\mathcal{I}^{FC}(G)$ s'identifie à celui des triplets (k, α, β), où $k \in \mathbb{N}$, $k(k+1) \leq 2n$ et $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(n - k(k+1)/2)$. L'entier k correspond à un Levi M_k de G tel que $M_{k,SC}$ est de type $C_{k(k+1)/2}$ et (α, β) détermine une représentation irréductible $\rho_{\alpha,\beta}$ de $W(M_k)$ qui est un groupe de Weyl de type $C_{n-k(k+1)/2}$.

Considérons une partition $\lambda \in \mathcal{P}^{symp}(2n)$. On considère qu'elle à $2n$ termes, on pose $mult_\lambda(0) = 2n - l(\lambda)$ et on note $Jord_*(\lambda)$ l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que $mult_\lambda(i) \geq 1$, c'est-à-dire que $Jord_*(\lambda)$ peut contenir 0. On vérifie que $\lambda + [2n-1, 0]$ possède n termes pairs et n termes impairs. On introduit les deux partitions $z = (z_1, ..., z_n)$ et $z' = (z'_1, ..., z'_n)$ telles que $\lambda' + [2n-1, 0] = \{2z_i; i = 1, ..., n\} \cup \{2z'_i + 1; i = 1, ..., n\}$. On pose $\mathbf{A}(\lambda) = (z' + [n+1, 2]) \cup \{0\}$, $\mathbf{B}(\lambda) = z + [n, 1]$. Notons $\mathbf{A}(\lambda) = (a_1, ..., a_{n+1})$, $\mathbf{B}(\lambda) = (b_1, ..., b_n)$. On vérifie que $a_j \geq a_{j+1} + 2$ pour $j \leq n$ et $b_j \geq b_{j+1} + 2$ pour $j \leq n-1$ et que $a_j \geq b_j \geq a_{j+1}$. Posons $\mathbf{A}(\lambda) \cup \mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{C}(\lambda) = (c_1, ..., c_{2n+1})$. Soit $i \in Jord_*(\lambda)$. On note $j_{min}(i)$, resp. $j_{max}(i)$, le plus petit, resp. grand, $j \in \{1, ..., 2n+1\}$ tel que $\lambda_j = i$. Le nombre i contribue à $\mathbf{A}(\lambda) \cup \mathbf{B}(\lambda)$ par une sous-partition $\mathbf{C}(\lambda, i) = (c_{j_{min}(i)}, ..., c_{j_{max}(i)})$. On pose $\mathbf{A}(\lambda, i) = \mathbf{A}(\lambda) \cap \mathbf{C}(\lambda, i)$, $\mathbf{B}(\lambda, i) = \mathbf{B}(\lambda) \cap \mathbf{C}(\lambda, i)$. Supposons que i est pair. Alors $\mathbf{C}(\lambda, i)$ est l'intervalle $[i/2 + 2n + 1 - j_{min}(i), i/2 + 2n + 1 - j_{max}(i)]$. Ces éléments interviennent alternativement dans $\mathbf{A}(\lambda)$ et $\mathbf{B}(\lambda)$: si $c_j \in \mathbf{A}(\lambda)$, resp. $c_j \in \mathbf{B}(\lambda)$, alors $c_{j+1} \in \mathbf{B}(\lambda)$, resp $c_{j+1} \in \mathbf{A}(\lambda)$. Le plus grand terme $c_{j_{min}(i)}$ est $a_{(j_{min}(i)+1)/2}$ si $j_{min}(i)$ est impair, $b_{j_{min}(i)/2}$ si $j_{min}(i)$ est pair. Le plus petit terme $c_{j_{max}(i)}$ est $a_{(j_{max}(i)+1)/2}$ si $j_{max}(i)$ est impair, $b_{j_{max}(i)/2}$ si $j_{max}(i)$ est pair. Supposons maintenant i impair. La multiplicité $mult_\lambda(i)$ est paire,

donc $j_{min}(i)$ et $j_{max}(i)$ ne sont pas de même parité. Alors $\mathbf{C}(\lambda,i)$ est la réunion de deux ensembles égaux à $[(i+1)/2+2n-j_{min}(i),(i+1)/2+2n+1-j_{max}(i)]_2$. Si $j_{min}(i)$ est impair, on a $c_{j_{min}(i)}=c_{j_{min}(i)+1}=a_{(j_{min}(i)+1)/2}=b_{(j_{min}(i)+1)/2}$, $c_{j_{max}(i)-1}=c_{j_{max}(i)}=a_{j_{max}(i)/2}=b_{j_{max}(i)/2}$. Si $j_{min}(i)$ est pair, on a $c_{j_{min}(i)}=c_{j_{min}(i)+1}=a_{j_{min}(i)/2+1}=b_{j_{min}(i)/2}$, $c_{j_{max}(i)-1}=c_{j_{max}(i)}=a_{(j_{max}(i)+1)/2}=b_{(j_{max}(i)-1)/2}$.

Soit $m\in\{0,...,2n\}$. Posons $\nu_m(\lambda)=1$ si $S_m(\lambda)$ est impair et $\nu_m(\lambda)=0$ sinon. Remarquons que la condition $S_m(\lambda)$ impair implique λ_m impair et $\lambda_m=\lambda_{m+1}$. A l'aide des formules ci-dessus, on vérifie que

$$(1)\qquad S_m(\lambda)=2S_m(\mathbf{C}(\lambda))+m^2-m-4nm+\nu_m(\lambda).$$

Soit $\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$. On pose

$$\mathbf{A}(\lambda,\epsilon)=(\cup_{i\in Jord_*(\lambda)-Jord_{bp}(\lambda)}\mathbf{A}(\lambda,i))\cup(\cup_{i\in Jord_{bp}(\lambda);\epsilon_i=1}\mathbf{A}(\lambda,i))\cup(\cup_{i\in Jord_{bp}(\lambda);\epsilon_i=-1}\mathbf{B}(\lambda,i));$$

$$\mathbf{B}(\lambda,\epsilon)=(\cup_{i\in Jord_*(\lambda)-Jord_{bp}(\lambda)}\mathbf{B}(\lambda,i))\cup(\cup_{i\in Jord_{bp}(\lambda);\epsilon_i=1}\mathbf{B}(\lambda,i))\cup(\cup_{i\in Jord_{bp}(\lambda);\epsilon_i=-1}\mathbf{A}(\lambda,i)).$$

Considérons maintenant un triplet $(k,\alpha,\beta)\in\mathcal{I}^{FC}(G)$. Parce que $(\alpha,\beta)\in\mathcal{P}_2(n-k(k+1)/2)$, on vérifie que $l(\alpha),l(\beta)\leq n+[\frac{k+1}{2}]$. On considère que α a $n+1+[\frac{k}{2}]$ termes et que β en a $n-[\frac{k}{2}]$. Si k est pair, on pose $A(\alpha)=\alpha+[2n+k,0]_2$, $B(\beta)=\beta+[2n-k-1,1]_2$. Si k est impair, on pose $A(\alpha)=\alpha+[2n+k,1]_2$, $B(\beta)=\beta+[2n-k-1,0]_2$. Alors $(\lambda,\epsilon)=Spr(k,\alpha,\beta)$ est caractérisé par les propriétés suivantes : λ est l'unique élément de $\mathcal{P}^{symp}(2n)$ telle que $\mathbf{A}(\lambda)\cup\mathbf{B}(\lambda)=A(\alpha)\cup B(\beta)$; ϵ est l'unique élément de $\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$ tel que

$$(\mathbf{A}(\lambda,\epsilon),\mathbf{B}(\lambda,\epsilon))=\begin{cases}(A(\alpha),B(\beta)), & \text{si } k \text{ est pair},\\ (B(\beta),A(\alpha)), & \text{si } k \text{ est impair}.\end{cases}$$

Inversement, partons de $\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$. Il existe un unique triplet $(k,\alpha,\beta)\in\mathcal{I}^{FC}(G)$ tel que $(\lambda,\epsilon)=Spr(k,\alpha,\beta)$ et il est utile de calculer l'entier k. Posons $J=\{i\in Jord_{bp}(\lambda);mult_\lambda(i)$ est impair et $\epsilon_i=-1\}$. Posons

$$D=\sum_{i\in J}(-1)^{mult_\lambda(\geq i)}.$$

Il résulte de [43] lemme XI.4 que

(2) $k=|2D+\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}$.

Cette égalité implique que $D\geq0$ si k est pair et $D<0$ si k est impair.

Supposons maintenant $G=SO(N)$ avec N impair. On pose $N=2n+1$. L'ensemble $\mathcal{I}(G)$ s'identifie à celui des couples (λ,ϵ), où $\lambda\in\mathcal{P}^{orth}(2n+1)$ et $\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1,-\mathbf{1}\}$, en notant $-\mathbf{1}$ l'élément de $\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$ dont toutes les composantes valent -1. L'ensemble $\mathcal{I}^{FC}(G)$ s'identifie à celui des triplets (h,α,β), où $h\in\mathbb{N}$ est un entier impair tel que $h^2\leq2n+1$ et $(\alpha,\beta)\in\mathcal{P}_2(n+(1-h^2)/2)$. L'entier h correspond à un Levi M_h de G tel que $M_{h,SC}$ est de type $B_{(h^2-1)/2}$ et (α,β) détermine une représentation irréductible $\rho_{\alpha,\beta}$ de $W(M_h)$ qui est un groupe de Weyl de type $B_{n+(1-h^2)/2}$.

Considérons une partition $\lambda\in\mathcal{P}^{orth}(2n+1)$. On considère qu'elle à $2n+1$ termes, on pose $mult_\lambda(0)=2n+1-l(\lambda)$ et on note $Jord_*(\lambda)$ l'ensemble des $i\in\mathbb{N}$ tels que $mult_\lambda(i)\geq1$. On vérifie que $\lambda+[2n,0]$ possède n termes pairs et $n+1$ termes impairs. On introduit les deux partitions $z=(z_1,...,z_n)$ et $z'=(z'_1,...,z'_{n+1})$ telles que $\lambda+[2n,0]=\{2z_i;i=1,...,n\}\cup\{2z'_i+1;i=1,...,n+1\}$. On pose $\mathbf{A}(\lambda)=z'+[n,0]$, $\mathbf{B}(\lambda)=z+[n-1,0]$. Notons $\mathbf{A}(\lambda)=(a_1,...,a_{n+1})$, $\mathbf{B}(\lambda)=(b_1,...,b_n)$. On vérifie que $a_j\geq a_{j+1}+2$ pour $j\leq n$ et $b_j\geq b_{j+1}+2$ pour $j\leq n-1$ et que $a_j\geq b_j\geq a_{j+1}$. Posons

$\mathbf{A}(\lambda) \cup \mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{C}(\lambda) = (c_1, ..., c_{2n+1})$. Soit $i \in Jord_*(\lambda)$. On définit les termes $j_{min}(i)$, $j_{max}(i)$, $\mathbf{C}(\lambda, i)$, $\mathbf{A}(\lambda, i)$ et $\mathbf{B}(\lambda, i)$ comme dans le cas symplectique. Supposons que i est impair. Alors $\mathbf{C}(\lambda, i)$ est l'intervalle $[(i+1)/2+2n-j_{min}(i), (i+1)/2+2n-j_{max}(i)]$. Ces éléments interviennent alternativement dans $\mathbf{A}(\lambda)$ et $\mathbf{B}(\lambda)$. Le plus grand terme $c_{j_{min}(i)}$ est $a_{(j_{min}(i)+1)/2}$ si $j_{min}(i)$ est impair, $b_{j_{min}(i)/2}$ si $j_{min}(i)$ est pair. Le plus petit terme $c_{j_{max}(i)}$ est $a_{(j_{max}(i)+1)/2}$ si $j_{max}(i)$ est impair, $b_{j_{max}(i)/2}$ si $j_{max}(i)$ est pair. Supposons maintenant i pair. La multiplicité $mult_\lambda(i)$ est paire, donc $j_{min}(i)$ et $j_{max}(i)$ ne sont pas de même parité. Alors $\mathbf{C}(\lambda, i)$ est la réunion de deux ensembles égaux à $[i/2+2n-j_{min}(i), i/2+2n+1-j_{max}(i)]_2$. Si $j_{min}(i)$ est impair, on a $c_{j_{min}(i)} = c_{j_{min}(i)+1} = a_{(j_{min}(i)+1)/2} = b_{(j_{min}(i)+1)/2}$, $c_{j_{max}(i)-1} = c_{j_{max}(i)} = a_{j_{max}(i)/2} = b_{j_{max}(i)/2}$. Si $j_{min}(i)$ est pair, on a $c_{j_{min}(i)} = c_{j_{min}(i)+1} = a_{j_{min}(i)/2+1} = b_{j_{min}(i)/2}$, $c_{j_{max}(i)-1} = c_{j_{max}(i)} = a_{(j_{max}(i)+1)/2} = b_{(j_{max}(i)-1)/2}$.

Soit $m \in \{1, ..., 2n+1\}$. Posons $\nu_m(\lambda) = 1$ si λ_m est pair et $m \equiv S_m(\lambda) + 1 \ mod\ 2\mathbb{Z}$ et $\nu_m(\lambda) = 0$ sinon. Notons que, si $\nu_m(\lambda) = 1$, on a $\lambda_m = \lambda_{m+1}$. On pose aussi $\nu_0(\lambda) = 0$. Pour $m \in \{0, ..., 2n+1\}$, on vérifie à l'aide des formules ci-dessus que

$$(3) \qquad S_m(\lambda) = 2S_m(\mathbf{C}(\lambda)) + m^2 - 4nm + \nu_m(\lambda).$$

Soit $\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1, -\mathbf{1}\}$. Relevons ϵ en un élément de $\{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$. On définit alors $\mathbf{A}(\lambda, \epsilon)$ et $\mathbf{B}(\lambda, \epsilon)$ par les mêmes formules que dans le cas symplectique. Changer de relèvement ϵ revient à permuter $\mathbf{A}(\lambda, \epsilon)$ et $\mathbf{B}(\lambda, \epsilon)$.

Considérons maintenant un triplet $(h, \alpha, \beta) \in \mathcal{I}^{FC}(G)$. Parce que $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(n+(1-h^2)/2)$, on vérifie que $l(\alpha), l(\beta) \leq n+(1-h)/2$. On considère que α a $n+(1+h)/2$ termes et que β en a $n+(1-h)/2$. On pose $A(\alpha) = \alpha + [2n-1+h, 0]_2$, $B(\beta) = \beta + [2n-1-h, 0]_2$. Alors $(\lambda, \epsilon) = Spr(h, \alpha, \beta)$ est caractérisé par les propriétés suivantes : λ est l'unique élément de $\mathcal{P}^{orth}(2n+1)$ telle que $\mathbf{A}(\lambda) \cup \mathbf{B}(\lambda) = A(\alpha) \cup B(\beta)$; ϵ est l'unique élément de $\{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1, -\mathbf{1}\}$ tel que $(A(\alpha), B(\beta))$ soit égal à $(\mathbf{A}(\lambda, \epsilon), \mathbf{B}(\lambda, \epsilon))$ à permutation près des deux facteurs.

Inversement, partons de $\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1, -\mathbf{1}\}$. Il existe un unique triplet $(h, \alpha, \beta) \in \mathcal{I}^{FC}(G)$ tel que $(\lambda, \epsilon) = Spr(h, \alpha, \beta)$. L'entier h se calcule de la façon suivante. On relève ϵ en un élément de $\{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$. On définit l'ensemble J et le nombre D comme dans le cas symplectique. D'après [43] lemme XI.4, on a

(4) $h = |2D+1|$.

Si $D \geq 0$, on a $(\mathbf{A}(\lambda, \epsilon), \mathbf{B}(\lambda, \epsilon)) = (A(\alpha), B(\beta))$. Si $D < 0$,on a $(\mathbf{A}(\lambda, \epsilon), \mathbf{B}(\lambda, \epsilon)) = (B(\beta), A(\alpha))$.

Supposons enfin $G = SO(N)$ avec N pair. On pose $N = 2n$. L'ensemble $\mathcal{I}(G)$ s'envoie surjectivement sur celui des couples (λ, ϵ) où $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n)$ et $\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1, -\mathbf{1}\}$. Les fibres de cette application ont un seul élément sauf au-dessus d'une partition λ dont tous les termes sont pairs où la fibre a deux éléments (pour une telle partition, $Jord_{bp}(\lambda) = \emptyset$ et le terme ϵ disparaît). L'ensemble $\mathcal{I}^{FC}(G)$ s'envoie surjectivement sur celui des classes d'équivalence de triplets (h, α, β), où $h \in \mathbb{N}$, h est pair, $h^2 \leq 2n$ et $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(n - h^2/2)$. Deux triplets (h_1, α_1, β_1) et (h_2, α_2, β_2) sont équivalents si et seulement s'ils sont égaux ou $h_1 = h_2 = 0$ et $(\alpha_1, \beta_1) = (\beta_2, \alpha_2)$. Les fibres de cette application ont un seul élément sauf au-dessus d'un triplet de la forme $(0, \alpha, \alpha)$ où la fibre a deux éléments. Si $h \geq 2$, h correspond à un Levi M_h de G tel que $M_{h,SC}$ est de type $D_{h^2/2}$ et (α, β) détermine une représentation irréductible $\rho_{\alpha,\beta}$ de $W(M_h)$ qui est un groupe de Weyl de type $B_{n-h^2/2}$. Si $h = 0$, le Levi M_0 est un tore maximal déployé T de G. Le groupe de Weyl $W(M_0) = W$ est de type D_n. Si $\alpha \neq \beta$, le couple (α, β) détermine une représentation irréductible $\rho_{\alpha,\beta}$ de W qui est la restriction de la représentation similaire d'un groupe de Weyl de type B_n. On a $\rho_{\alpha,\beta} = \rho_{\beta,\alpha}$. Si $\alpha = \beta$, cette restriction se

décompose en deux représentations irréductibles de W. Chacune d'elles correspond à un élément de $\mathcal{I}^{FC}(G)$. Comme on le voit, il y a dans ces descriptions des éléments exceptionnels dont on peut dire qu'ils se dédoublent. Pour ne pas alourdir la rédaction, on identifiera $\mathcal{I}(G)$, resp. $\mathcal{I}^{FC}(G)$, à l'ensemble des paires (λ,ϵ), resp. des triplets (h,α,β) comme ci-dessus, en considérant que certaines paires ou certains triplets sont dédoublés. On espère que cela ne créera pas de confusion.

Considérons une partition $\lambda\in\mathcal{P}^{orth}(2n)$. On considère qu'elle à $2n$ termes, on pose $mult_\lambda(0)=2n-l(\lambda)$ et on note $Jord_*(\lambda)$ l'ensemble des $i\in\mathbb{N}$ tels que $mult_\lambda(i)\geq 1$. On vérifie que $\lambda+[2n-1,0]$ possède n termes pairs et n termes impairs. On introduit les deux partitions $z=(z_1,...,z_n)$ et $z'=(z_1,...,z_n)$ telles que $\lambda+[2n-1,0]=\{2z_i;i=1,...,n\}\cup\{2z'_i+1;i=1,...,n\}$. On pose $\mathbf{A}(\lambda)=(z+[n-1,0])$, $\mathbf{B}(\lambda)=z'+[n-1,0]$. Notons $\mathbf{A}(\lambda)=(a_1,...,a_n)$, $\mathbf{B}(\lambda)=(b_1,...,b_n)$. On vérifie que $a_j\geq a_{j+1}+2$ pour $j\leq n-1$ et $b_j\geq b_{j+1}+2$ pour $j\leq n-1$ et que $a_j\geq b_j\geq a_{j+1}$. Posons $\mathbf{A}(\lambda)\cup\mathbf{B}(\lambda)=\mathbf{C}(\lambda)=(c_1,...,c_{2n})$. Soit $i\in Jord_*(\lambda)$. On définit $j_{min}(i)$, $j_{max}(i)$, $\mathbf{C}(\lambda,i)$, $\mathbf{A}(\lambda,i)$ et $\mathbf{B}(\lambda,i)$ comme dans le cas symplectique. Supposons que i est impair. Alors $\mathbf{C}(\lambda,i)$ est l'intervalle $[(i-1)/2+2n-j_{min}(i),(i-1)/2+2n-j_{max}(i)]$. Ces éléments interviennent alternativement dans $\mathbf{A}(\lambda)$ et $\mathbf{B}(\lambda)$. Le plus grand terme $c_{j_{min}(i)}$ est $a_{(j_{min}(i)+1)/2}$ si $j_{min}(i)$ est impair, $b_{j_{min}(i)/2}$ si $j_{min}(i)$ est pair. Le plus petit terme $c_{j_{max}(i)}$ est $a_{(j_{max}(i)+1)/2}$ si $j_{max}(i)$ est impair, $b_{j_{max}(i)/2}$ si $j_{max}(i)$ est pair. Supposons maintenant i pair. La multiplicité $mult_\lambda(i)$ est paire, donc $j_{min}(i)$ et $j_{max}(i)$ ne sont pas de même parité. Alors $\mathbf{C}(\lambda,i)$ est la réunion de deux ensembles égaux à $[i/2+2n-1-j_{min}(i),i/2+2n-j_{max}(i)]_2$. Si $j_{min}(i)$ est impair, on a $c_{j_{min}(i)}=c_{j_{min}(i)+1}=a_{(j_{min}(i)+1)/2}=b_{(j_{min}(i)+1)/2}$, $c_{j_{max}(i)-1}=c_{j_{max}(i)}=a_{j_{max}(i)/2}=b_{j_{max}(i)/2}$. Si $j_{min}(i)$ est pair, on a $c_{j_{min}(i)}=c_{j_{min}(i)+1}=a_{j_{min}(i)/2+1}=b_{j_{min}(i)/2}$, $c_{j_{max}(i)-1}=c_{j_{max}(i)}=a_{(j_{max}(i)+1)/2}=b_{(j_{max}(i)-1)/2}$.

Soit $m\in\{1,...,2n\}$. Posons $\nu_m(\lambda)=1$ si λ_m est pair et $S_m(\lambda)\equiv m+1\,mod\,2\mathbb{Z}$ et $\nu_m(\lambda)=0$ sinon. Si $\nu_m(\lambda)=1$, on a $\lambda_{m+1}=\lambda_m$. On pose aussi $\nu_0(\lambda)=0$. Pour $m\in\{0,...,2n\}$, on vérifie à l'aide des formules ci-dessus que

$$(5)\qquad S_m(\lambda)=2S_m(\mathbf{C}(\lambda))+m^2+2m-4nm+\nu_m(\lambda).$$

Soit $\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1,-\mathbf{1}\}$. On relève ϵ en un élément de $\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$. On définit $\mathbf{A}(\lambda,\epsilon)$ et $\mathbf{B}(\lambda,\epsilon)$ comme dans le cas symplectique. Changer de relèvement ϵ échange $\mathbf{A}(\lambda,\epsilon)$ et $\mathbf{B}(\lambda,\epsilon)$.

Considérons maintenant un triplet $(h,\alpha,\beta)\in\mathcal{I}^{FC}(G)$. Parce que $(\alpha,\beta)\in\mathcal{P}_2(n-h^2/2)$, on vérifie que $l(\alpha),l(\beta)\leq n-h/2$. On considère que α a $n+h/2$ termes et que β en a $n-h/2$. On pose $A(\alpha)=\alpha+[2n+h-2,0]_2$, $B(\beta)=\beta+[2n-h-2,0]_2$. Alors $(\lambda,\epsilon)=Spr(h,\alpha,\beta)$ est caractérisé par les propriétés suivantes : λ est l'unique élément de $\mathcal{P}^{orth}(2n)$ tel que $A(\alpha)\cup B(\beta)=\mathbf{C}(\lambda)$; ϵ est l'unique élément de $\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1,-\mathbf{1}\}$ tel que $(A(\alpha),B(\beta))$ soit égal à $((\mathbf{A}(\lambda,\epsilon),\mathbf{B}(\lambda,\epsilon))$ ou a $(\mathbf{B}(\lambda,\epsilon),\mathbf{A}(\lambda,\epsilon))$. Remarquons que les termes qui se dédoublent se correspondent. Précisément, si $h=0$ et $\alpha=\beta$, on a $Spr(0,\alpha,\alpha)=2\alpha$ (on a déjà dit que, pour une partition $\lambda=2\alpha$, le terme ϵ disparaît).

Inversement, partons de $\epsilon\in\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}/\{1,-\mathbf{1}\}$. Il existe un unique triplet $(h,\alpha,\beta)\in\mathcal{I}^{FC}(G)$ tel que $(\lambda,\epsilon)=Spr(h,\alpha,\beta)$. L'entier h se calcule de la façon suivante. On relève ϵ en un élément de $\{\pm1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$. On définit l'ensemble J et le nombre D comme dans le cas symplectique. D'après [43] lemme XI.4, on a

(6) $h=|2D|$.

Si $D>0$, on a $(\mathbf{A}(\lambda,\epsilon),\mathbf{B}(\lambda,\epsilon))=(A(\alpha),B(\beta))$. Si $D<0$,on a $(\mathbf{A}(\lambda,\epsilon),\mathbf{B}(\lambda,\epsilon))=(B(\beta),A(\alpha))$. Si $D=0$, seule compte la paire (α,β) à permutation près et on peut donc supposer que $(\mathbf{A}(\lambda,\epsilon),\mathbf{B}(\lambda,\epsilon))=(A(\alpha),B(\beta))$.

6.2.10 Preuve des théorèmes 6.2.6 et 6.2.7 dans le cas (D_n, ram)

On revient à notre groupe G défini sur F. On suppose que G est de type (D_n, ram) (ce qui suppose $n \geq 4$). En 6.2.3, on a identifié $\mathcal{B}_{Irr}(G)$ à l'ensemble des triplets (h, α, β),où $h \in \mathbb{N}$ est un entier impair tel que $h^2 \geq n$ et $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(n-h^2)$. L'entier h détermine un Levi de G auquel est associé un ensemble $\Lambda_h \subset \Delta_a^{nr}$ et (α, β) détermine une représentation irréductible $\rho_{\alpha,\beta}$ de $W^{I_F}(M_{\Lambda_h})$ qui est un groupe de Weyl de type B_{n-h^2}. Pour un tel triplet, on a explicité $\boldsymbol{\nabla}_F(h, \alpha, \beta) = (\lambda, d, \mu)$ où $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n)$ est une partition orthogonale spéciale ayant au moins un terme impair, $d \in \{\pm 1\}_{-1}^{Int(\lambda)}$ et $\mu \in \{\pm 1\}^{Int(\lambda)}/\{1, -\mathbf{1}\}$.

L'ensemble $S(\bar{C})$ s'identifie à celui des couples $(n', n'') \in \mathbb{N}^2$ tels que $n' + n'' = n - 1$. Pour le sommet s paramétré par (n', n''), on a $G_s = SO(2n'+1) \times SO(2n''+1)$. Notons G'_s et G''_s ces deux composantes. On a explicité en 6.2.9 les ensembles $\mathcal{I}(G'_s)$, $\mathcal{I}^{FC}(G'_s)$ et les ensembles analogues pour G''_s. On ajoute des indices s et des $'$ ou $''$ aux notations de cette référence. L'ensemble $\mathfrak{g}_{s,nil}/conj$ est paramétré par $\mathcal{P}^{orth}(2n'+1) \times \mathcal{P}^{orth}(2n''+1)$. On a défini l'application $\bar{c}_s : \mathfrak{g}_{s,nil}/conj \to \bar{\mathcal{C}}$ en 3.2.6. D'après 3.2.9, l'image de $(\lambda', \lambda'') \in \mathcal{P}^{orth}(2n'+1) \times \mathcal{P}^{orth}(2n''+1)$ par $\bar{c}_s$ est $(\lambda, \mathbf{d})$, où $\lambda = \lambda' \cup \lambda''$ et $\mathbf{d} \in \{\pm 1\}_{-1}^{Int(\lambda)}$ est l'élément défini par la formule suivante : pour $\Delta \in Int(\lambda)$, $\mathbf{d}_\Delta = (-1)^{mult_{\lambda''}(\Delta)}$. Remarquons que l'on a aussi $\mathbf{d}_\Delta = (-1)^{mult_{\lambda'}(\Delta)}$ puisque $mult_{\lambda'}(\Delta) + mult_{\lambda''}(\Delta) = mult_\lambda(\Delta)$ qui est pair.

Pour un entier h impair tel que $h^2 \leq n$, on a $\Lambda_h \subset \Lambda(s)$ si et seulement si $h^2 \leq 2n'+1$ et $h^2 \leq 2n''+1$. Si ces conditions sont vérifiées, $M_{\Lambda_h, s_{\Lambda_h}}$ s'identifie à $M'_{s,h} \times M''_{s,h}$ et le groupe $W'_s(M'_{s,h}) \times W''_s(M''_{s,h})$ apparaît naturellement comme un sous-groupe de $W^{I_F}(M_{\Lambda_h})$.

Proposition. *Soient $(h, \alpha, \beta) \in \mathcal{B}_{Irr}(G)$ et (n', n'') un couple paramétrant un sommet $s \in S(\bar{C})$. On pose $\boldsymbol{\nabla}_F(h, \alpha, \beta) = (\lambda, d, \mu)$.*

(i) Supposons $\Lambda_h \subset \Lambda(s)$, soient $(h, \alpha', \beta') \in \mathcal{I}^{FC}(G'_s)$ et $(h, \alpha'', \beta'') \in \mathcal{I}^{FC}(G''_s)$, notons (λ', ϵ') et (λ'', ϵ'') leurs images par la correspondance de Springer généralisée. Supposons que $\rho_{\alpha',\beta'} \otimes \rho_{\alpha'',\beta''}$ soit une composante irréductible de la restriction de $\rho_{\alpha,\beta}$ à $W'_s(M'_{s,h}) \times W''_s(M''_{s,h})$. Alors $\lambda' \cup \lambda'' \leq \lambda$ et, si $\lambda' \cup \lambda'' = \lambda$, on a l'égalité $\bar{c}_s(\lambda', \lambda'') = (\lambda, d)$.

(ii) Inversement, soit $(\lambda', \lambda'') \in \mathcal{P}^{orth}(2n'+1) \times \mathcal{P}^{orth}(2n''+1)$, supposons $\bar{c}_s(\lambda', \lambda'') = (\lambda, d)$. Alors $\Lambda_h \subset \Lambda(s)$ et il existe d'uniques triplets $(h, \alpha', \beta') \in \mathcal{I}^{FC}(G'_s)$ et $(h, \alpha'', \beta'') \in \mathcal{I}^{FC}(G''_s)$ vérifiant les conditions suivantes :

(a) leurs images par la correspondance de Springer généralisée sont de la forme (λ', ϵ') et (λ'', ϵ'') ;

(b) $\rho_{\alpha',\beta'} \otimes \rho_{\alpha'',\beta''}$ est une composante irréductible de la restriction de $\rho_{\alpha,\beta}$ à $W'_s(M'_{s,h}) \times W''_s(M''_{s,h})$.

Pour ces triplets, $\rho_{\alpha',\beta'} \otimes \rho_{\alpha'',\beta''}$ intervient avec multiplicité 1 dans la restriction de $\rho_{\alpha,\beta}$. Pour $i \in Jord_{bp}(\lambda')$, resp $i \in Jord_{bp}(\lambda'')$, on a l'égalité $\epsilon'_i = \mu_\Delta$, resp. $\epsilon''_i = \mu_\Delta$, où Δ est l'intervalle de λ tel que $i \in \Delta$.

Remarque. Comme on l'a dit, les termes ϵ', ϵ'' et μ appartiennent à des quotients par des groupes $\{1, -\mathbf{1}\}$. La dernière assertion du théorème signifie que l'on peut choisir des relèvements de ces termes qui vérifient les formules indiquées.

On a besoin d'un préliminaire. Explicitons les ensembles $\mathbf{X}(\lambda)$ et $\mathbf{Y}(\lambda)$ associés en 6.2.3 à la partition spéciale $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n)$. On considère que λ a $2n$ termes et que $mult_\lambda(0) = 2n - l(\lambda)$. On note $Jord_*(\lambda)$ l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que $mult_\lambda(i) > 0$. L'ensemble $Jord_{bp}(\lambda)$ se décompose en union disjointe d'intervalles et on a noté $Int(\lambda)$ l'ensemble de ces intervalles. Posons $Int_*(\lambda) = Int(\lambda) \cup (Jord_*(\lambda) - Jord_{bp}(\lambda))$. Soit

$\Delta \in Int_*(\lambda)$. Notons $j_{min}(\Delta)$, resp. $j_{max}(\Delta)$, le plus petit, resp. grand, entier $j \geq 1$ tel que $\lambda_j \in \Delta$. Les entiers $j_{min}(\Delta)$ et $j_{max}(\Delta)$ sont respectivement impair et pair. Si $\Delta \notin Int(\lambda)$, c'est-à-dire $\Delta = \{i\}$ avec i pair, on a $\lambda_j = i$ pour tout $j \in \{j_{min}(\Delta), ..., j_{max}(\Delta)\}$. Supposons $\Delta \in Int(\lambda)$. Alors, pour un entier j pair tel que $j_{min}(\Delta) < j < j_{max}(\Delta)$, on a $\lambda_j = \lambda_{j+1}$ et ce terme appartient à Δ. Tout élément $\Delta \in Int_*(\lambda)$ contribue à $\mathbf{X}(\lambda)$, resp. $\mathbf{Y}(\lambda)$, par la sous-partition $\mathbf{X}(\lambda, \Delta) = (x_{(j_{min}(\Delta)+1)/2}, ..., x_{j_{max}(\Delta)/2})$, resp. $\mathbf{Y}(\lambda, \Delta) = (y_{(j_{min}(\Delta)+1)/2}, ..., y_{j_{max}(\Delta)/2})$. Si $\Delta = \{i\}$, avec i pair, on a $x_j = y_j = i/2 + n - j$ pour tout $j \in \{(j_{min}(\Delta) + 1)/2, ..., j_{max}(\Delta)/2\}$. Supposons $\Delta \in Int(\lambda)$. Alors $x_j = \frac{\lambda_{2j-1}+1}{2} + n - j$ et $y_j = \frac{\lambda_{2j}}{2} + n - 1 - j$ pour tout $j \in \{(j_{min}(\Delta) + 1)/2, ..., j_{max}(\Delta)/2\}$. On constate que

$$x_{(j_{min}(\Delta)+1)/2} > y_{(j_{min}(\Delta)+1)/2} = x_{(j_{min}(\Delta)+1)/2+1} > ... > y_{j_{max}(\Delta)/2-1} = x_{j_{max}(\Delta)/2} > y_{j_{max}(\Delta)/2}.$$

Soit $m \in \{0, ..., 2n\}$. Posons $\boldsymbol{\nu}_m(\lambda) = 1$ si λ_m est pair et m est impair, $\boldsymbol{\nu}_m(\lambda) = 0$ sinon. A l'aide des formules ci-dessus, on calcule

$$(1) \qquad S_m(\lambda) = 2S_m(\mathbf{X}(\lambda) \cup \mathbf{Y}(\lambda)) + [\frac{m}{2}] - m(4n - 1 - m)/2 + \boldsymbol{\nu}_m(\lambda).$$

Preuve de la proposition. On considère les données de l'assertion (i). On veut prouver que $\lambda' \cup \lambda'' \leq \lambda$. C'est équivalent à l'assertion suivante. Soient $m' \in \{0, ..., 2n' + 1\}$ et $m'' \in \{0, ..., 2n'' + 1\}$. Posons $m = m' + m''$. Alors

(2) $S_{m'}(\lambda') + S_{m''}(\lambda'') \leq S_m(\lambda)$.

Le nombre $S_{m'}(\lambda')$ est calculé par 6.2.9(3). Puisque $\mathbf{C}(\lambda') = A(\alpha') \cup B(\beta')$, il existe deux entiers $x' \in \{0, ..., n' + (1 + h)/2\}$ et $y' \in \{0, ..., n' + (1 - h)/2\}$ tels que $x' + y' = m'$ et $S_{m'}(\mathbf{C}(\lambda')) = S_{x'}(A(\alpha')) + S_{y'}(B(\beta'))$. On calcule

$$S_{x'}(A(\alpha')) = S_{x'}(\alpha') + x'(2n' + h - x'),\ S_{y'}(B(\beta')) = S_{y'}(\beta') + y'(2n' - h - y').$$

D'où

$$S_{m'}(\lambda') = 2S_{x'}(\alpha') + 2S_{y'}(\beta') + e',$$

où

$$\begin{aligned} e' &= 2x'(2n' + h - x') + 2y'(2n' - h - y') + m'^2 - 4n'm' + \nu_{m'}(\lambda') \\ &= 2x'(h - x') + 2y'(-h - y') + m'^2 + \nu_{m'}(\lambda'). \end{aligned}$$

En introduisant des termes analogues pour la partition λ'', on obtient

$$(3) \qquad S_{m'}(\lambda') + S_{m''}(\lambda'') = 2S_{x'}(\alpha') + 2S_{y'}(\beta') + 2S_{x''}(\alpha'') + 2S_{y''}(\beta'') + e' + e''.$$

L'hypothèse que $\rho_{\alpha',\beta'} \otimes \rho_{\alpha'',\beta''}$ intervient dans la restriction de $\rho_{\alpha,\beta}$ implique que $\alpha \geq \alpha' \cup \alpha''$ et $\beta \geq \beta' \cup \beta''$, cf. par exemple [45] 1.13(38). En posant $x = x' + x''$ et $y = y' + y''$, on a alors

$$(4) \qquad S_{x'}(\alpha') + S_{x''}(\alpha'') \leq S_x(\alpha),\ S_{y'}(\beta') + S_{y''}(\beta'') \leq S_y(\beta),$$

d'où

$$(5) \qquad S_{m'}(\lambda') + S_{m''}(\lambda'') \leq 2S_x(\alpha) + 2S_y(\beta) + e' + e''.$$

Le nombre $S_m(\lambda)$ est calculé par (1). Puisque $\mathbf{X}(\lambda) \cup \mathbf{Y}(\lambda) = X(\alpha) \cup Y(\beta)$ et que $x + y = m$ par construction de ces termes, on a

$$(6) \qquad S_m(\mathbf{X}(\lambda) \cup \mathbf{Y}(\lambda)) \geq S_x(X(\alpha)) + S_y(Y(\beta)).$$

On calcule

$$S_x(X(\alpha)) = S_x(\alpha) + x(n+h) - x(x+1)/2,\ S_y(Y(\beta)) = S_y(\beta) + y(n-h) - y(y+1)/2.$$

D'où

$$S_m(\lambda) \geq 2S_x(\alpha) + 2S_y(\beta) + e,$$

où

$$e = 2x(n+h) - x(x+1) + 2y(n-h) - y(y+1) + [\frac{m}{2}] - m(4n-1-m)/2 + \boldsymbol{\nu}_m(\lambda)$$

$$= 2xh - x^2 - 2yh - y^2 + [\frac{m}{2}] - m/2 + m^2/2 + \boldsymbol{\nu}_m(\lambda).$$

Grâce à (5), on en déduit

$$(7) \qquad S_{m'}(\lambda') + S_{m''}(\lambda'') \leq S_m(\lambda) + E,$$

où $E = e' + e'' - e$. On calcule

$$(8) \qquad E = -\frac{(x'-y'-x''+y'')^2}{2} + \frac{m}{2} - [\frac{m}{2}] + \nu_{m'}(\lambda') + \nu_{m''}(\lambda'') - \boldsymbol{\nu}_m(\lambda).$$

On a $m = x'+y'+x''+y''$ donc $x'-y'-x''+y''$ est de même parité que m et la somme des trois premiers termes de E est négative ou nulle. Si $\nu_{m'}(\lambda') = \nu_{m''}(\lambda'') = 0$, alors $E \leq 0$ et (2) résulte de (7). Supposons $\nu_{m'}(\lambda') = 1$. Par définition de ce terme, on a alors $1 \leq m' \leq 2n'$, $\lambda'_{m'}$ est pair, $\lambda'_{m'+1} = \lambda'_{m'}$ et $\nu_{m'-1}(\lambda') = \nu_{m'+1}(\lambda') = 0$. Montrons que

(9) si les analogues de (2) pour les couples $(m'-1, m'')$ et $(m'+1, m'')$ sont vérifiées, alors (2) est vérifiée pour le couple (m', m'').

Supposons que (2) ne soit pas vérifiée pour (m', m''), c'est-à-dire $S_{m'}(\lambda') + S_{m''}(\lambda'') > S_m(\lambda)$. On a $S_{m'}(\lambda') = S_{m'-1}(\lambda') + \lambda'_{m'}$ et $S_m(\lambda) = S_{m-1}(\lambda) + \lambda_m$. Puisque $S_{m'-1}(\lambda') + S_{m''}(\lambda'') \leq S_{m-1}(\lambda)$ par hypothèse, on a $\lambda'_{m'} > \lambda_m$. A fortiori $\lambda'_{m'+1} = \lambda'_{m'} > \lambda_{m+1}$. On a $S_{m'+1}(\lambda') = S_{m'}(\lambda') + \lambda'_{m'+1}$ et $S_{m+1}(\lambda) = S_m(\lambda) + \lambda_{m+1}$. L'inégalité $S_{m'}(\lambda') + S_{m''}(\lambda'') > S_m(\lambda)$ entraîne alors $S_{m'+1}(\lambda') + S_{m''}(\lambda'') > S_{m+1}(\lambda)$. C'est contraire à l'hypothèse. Cette contradiction démontre (9).

Supposons $\nu_{m'}(\lambda') = 1$ et $\nu_{m''}(\lambda'') = 0$ (une preuve similaire vaut si $\nu_{m'}(\lambda') = 0$ et $\nu_{m''}(\lambda'') = 1$). Alors les deux couples $(m'-1, m'')$ et $(m'+1, m'')$ vérifient $\nu_{m'-1}(\lambda') = \nu_{m''}(\lambda'') = 0$ et $\nu_{m'+1}(\lambda') = \nu_{m''}(\lambda'') = 0$. Comme on l'a dit ci-dessus, la relation (2) est vérifiée pour ces deux couples. L'assertion (9) entraîne qu'elle l'est pour (m', m''). Supposons maintenant que $\nu_{m'}(\lambda') = \nu_{m''}(\lambda'') = 1$. Alors les deux couples $(m', m''-1)$ et $(m', m''+1)$ vérifient les hypothèses précédentes : $\nu_{m'}(\lambda') = 1$ et $\nu_{m''-1}(\lambda'') = \nu_{m''+1}(\lambda'') = 0$. On vient de prouver que (2) était vérifiée pour ces deux couples. L'assertion symétrique à (9) où l'on échange les composantes G'_s et G''_s entraîne que (2) est aussi vérifiée pour le couple (m', m''). Cela achève la preuve de (2).

Avant de prouver la deuxième assertion du (i) de l'énoncé, examinons ce que devient le calcul ci-dessus dans le cas où $\lambda' \cup \lambda'' = \lambda$. Pour tout entier $m \in \{1, ..., 2n\}$, on peut choisir un couple $(m', m'') \in \{0, ..., 2n'+1\} \times \{0, ..., 2n''+1\}$ tel que $m = m' + m''$ et

$$(10) \qquad S_m(\lambda) = S_{m'}(\lambda') + S_{m''}(\lambda'').$$

Ce couple n'est pas unique : par exemple, si (m', m'') convient avec $m' \geq 1$ et $m'' \leq 2n''$ et que $\lambda'_{m'} = \lambda''_{m''+1}$, le couple $(m'-1, m''+1)$ convient aussi. Parmi les couples possibles,

on choisit celui tel que m' soit maximal. Les entiers m' et m'' se calculent alors de la façon suivante. Posons $i = \lambda_m$. L'ensemble des m' plus grands termes de λ' contient tous ceux qui sont strictement supérieurs à i, ils sont en nombre $mult_{\lambda'}(\geq i+1)$. Il y a en plus $m' - mult_{\lambda'}(\geq i+1)$ termes égaux à i. De même pour λ''. De plus, si $m - mult_\lambda(\geq i+1) \leq mult_{\lambda'}(i)$, on a $m' - mult_{\lambda'}(\geq i+1) = m - mult_\lambda(\geq i+1)$ et $m'' = mult_{\lambda''}(\geq i+1)$, tandis que si $m - mult_\lambda(\geq i+1) > mult_{\lambda'}(i)$, on a $m' = mult_{\lambda'}(\geq i)$ et $m'' - mult_{\lambda''}(\geq i+1) = m - mult_\lambda(\geq i+1) - mult_{\lambda'}(i)$. Posons $E_0 = \nu_{m'}(\lambda') + \nu_{m''}(\lambda'') - \boldsymbol{\nu}_m(\lambda)$. Montrons que

(11) $E_0 = 0$.

Posons $i = \lambda_m$. Supposons d'abord i impair donc $\boldsymbol{\nu}_m(\lambda) = 0$. Il résulte de la description ci-dessus que ou bien $\lambda'_{m'} = i$, ou bien $m' \leq 2n'$ et $\lambda'_{m'} > i \geq \lambda'_{m'+1}$, ou bien $m' = 2n'+1$. Dans les trois cas, $\nu_{m'}(\lambda') = 0$. De même $\nu_{m''}(\lambda'') = 0$, d'où $E_0 = 0$. Supposons maintenant i pair. Alors $\boldsymbol{\nu}_m(\lambda) = 1$ si m est impair et $\boldsymbol{\nu}_m(\lambda) = 0$ si m est pair. Supposons $m - mult_\lambda(\geq i+1) \leq mult_{\lambda'}(i)$. Alors ou bien $m'' \leq 2n''$ et $\lambda''_{m''} > i \geq \lambda''_{m''+1}$, ou bien $m'' = 2n''+1$. Dans les deux cas, $\nu_{m''}(\lambda'') = 0$. On a $\lambda'_{m'} = i$ qui est pair. Parce que λ' est orthogonale, on a

$$S_{m'}(\lambda') \equiv S_{mult_{\lambda'}(\geq i+1)}(\lambda') \equiv mult_{\lambda'}(\geq i+1) \ mod \ 2\mathbb{Z}.$$

D'où $m' - S_{m'}(\lambda') \equiv m' - mult_{\lambda'}(\geq i+1) \ mod \ 2\mathbb{Z}$. On a $m' - mult_{\lambda'}(\geq i+1) = m - mult_\lambda(\geq i+1)$ mais $mult_\lambda(\geq i+1)$ est pair car λ est spéciale. Puisque $\nu_{m'}(\lambda')$ vaut 1 si $m' - mult_{\lambda'}(\geq i+1)$ est impair et 0 si $m' - mult_{\lambda'}(\geq i+1)$ est pair, on voit que $\nu_{m'}(\lambda') = \boldsymbol{\nu}_m(\lambda)$, d'où $E_0 = 0$. On laisse au lecteur le calcul similaire dans le cas où $m - mult_\lambda(\geq i+1) > mult_{\lambda'}(i)$. Cela prouve (11).

L'entier E de la formule (7) devient $E = -\frac{(x'-y'-x''+y'')^2}{2} + \frac{m}{2} - [\frac{m}{2}]$, qui est toujours négatif ou nul. En comparant (7) et (10), on obtient d'abord que $E = 0$, autrement dit

(12) $x' - y' - x'' + y'' = 0$ si m est pair ; $|x' - y' - x'' + y''| = 1$ si m est impair.

Une seconde conséquence est que les inégalités (4) et (6) que l'on a utilisées sont forcément des égalités.

Démontrons la seconde assertion du (i) de l'énoncé. On suppose $\lambda' \cup \lambda'' = \lambda$. Soit $\Delta \in Int(\lambda)$. Effectuons les constructions ci-dessus pour les deux entiers $m_1 = j_{min}(\Delta) - 1$ et $m_2 = j_{max}(\Delta)$. On en déduit divers nombres que l'on indexe par 1 et 2 : m'_1 et m'_2, x'_1 et x'_2 etc... (dans le cas particulier où $m_1 = 0$, tous les nombres indexés par 1 sont nuls). On note par un indice 0 leurs différences : $m'_0 = m'_2 - m'_1$ etc... Puisque m_1 et m_2 sont pairs, l'assertion (12) appliquée aux deux entiers m_1 et m_2 entraîne que

$$(13) \qquad x'_0 - y'_0 - x''_0 + y''_0 = 0.$$

Par construction, on a

(14) $x'_0 + y'_0 = mult_{\lambda'}(\Delta)$ et $x''_0 + y''_0 = mult_{\lambda''}(\Delta)$.

D'autre part, la relation (6), qui est maintenant une égalité, appliquée aux deux entiers m_1 et m_2, entraîne que $x_0 = x'_0 + x''_0$ est le nombre d'éléments de $X(\alpha) \cap (\mathbf{X}(\lambda, \Delta) \cup \mathbf{Y}(\lambda, \Delta))$ et que $y_0 = y'_0 + y''_0$ est le nombre d'éléments de $Y(\beta) \cap (\mathbf{X}(\lambda, \Delta) \cup \mathbf{Y}(\lambda, \Delta))$. On peut supposer que $X(\alpha)$ et $Y(\beta)$ se déduisent comme en 6.2.3 d'éléments ν^X et ν^Y. On voit que

$$(15) \qquad x_0 = |X(\alpha) \cap (\mathbf{X}(\lambda, \Delta) \cup \mathbf{Y}(\lambda, \Delta))| = \begin{cases} m_0/2, & \text{si } \nu^X_\Delta = \nu^Y_\Delta \\ m_0/2 + 1, & \text{si } \nu^X_\Delta = 1 \text{ et } \nu^Y_\Delta = -1 \\ m_0/2 - 1, & \text{si } \nu^X_\Delta = -1 \text{ et } \nu^Y_\Delta = 1 \end{cases}$$

$$(16) \qquad y_0 = |Y(\beta) \cap (\mathbf{X}(\lambda,\Delta) \cup \mathbf{Y}(\lambda,\Delta))| = \begin{cases} m_0/2, & \text{si } \nu_\Delta^X = \nu_\Delta^Y \\ m_0/2+1, & \text{si } \nu_\Delta^X = -1 \text{ et } \nu_\Delta^Y = 1 \\ m_0/2-1, & \text{si } \nu_\Delta^X = 1 \text{ et } \nu_\Delta^Y = -1. \end{cases}$$

En se rappelant que $d_\Delta = \nu_\Delta^X \nu_\Delta^Y$, on obtient

(17) $x_0 = y_0$ si $d_\Delta = 1$, $|x_0 - y_0| = 2$ si $d_\Delta = -1$.

On a

$$x_0'' + y_0'' \equiv x_0'' - y_0'' \equiv (x_0 - y_0)/2 - (x_0' - y_0' - x_0'' + y_0'')/2 \ mod\ 2\mathbb{Z}.$$

Il résulte alors de (13), (14) et (17) que $mult_{\lambda''}(\Delta)$ est pair si $d_\Delta = 1$ et est impair si $d_\Delta = -1$. Ces égalites pour tout $\Delta \in Int(\lambda)$ équivalent à l'égalité $\bar{c}_s(\lambda', \lambda'') = (\lambda, d)$. Cela achève la preuve du (i) de l'énoncé.

Tournons-nous vers le (ii). Soit $(\lambda', \lambda'') \in \mathcal{P}^{orth}(2n'+1) \times \mathcal{P}^{orth}(2n''+1)$, supposons $\bar{c}_s(\lambda', \lambda'') = (\lambda, d)$. Pour $\eta^X, \eta^Y \in \{\pm 1\}$, notons $Int(\lambda; \eta^X, \eta^Y)$ l'ensemble des $\Delta \in Int(\lambda)$ tels que $\nu_\Delta^X = \eta^X$ et $\nu_\Delta^Y = \eta^Y$. L'égalite (15) entraîne que $|X(\alpha)| = n + |Int(\lambda; 1, -1)| - |Int(\lambda; -1, 1)|$. Mais $|X(\alpha)| = n + h$. Donc

(18) $h = |Int(\lambda; 1, -1)| - |Int(\lambda; -1, 1)|$.

A fortiori $h \leq |Int(\lambda; 1, -1)|$. Pour $\Delta \in Int(\lambda; 1, -1)$, on a $d_\Delta = -1$ et l'égalité $\bar{c}_s(\lambda', \lambda'') = (\lambda, d)$ implique que $mult_{\lambda''}(\Delta)$ et $mult_{\lambda'}(\Delta)$ sont impairs. Donc λ' et λ'' contiennent toutes deux un élément de Δ pour tout $\Delta \in Int(\lambda; 1, -1)$. Ces éléments sont distincts et impairs et il y en a au moins h. Leurs somme est donc minorée par $1 + 3 + ... + (2h-1) = h^2$. Cette somme est majorée par $S(\lambda') = 2n' + 1$ et par $S(\lambda'') = 2n'' + 1$. Donc $h^2 \leq 2n' + 1$ et $h^2 \leq 2n'' + 1$, ce qui signifie que $\Lambda_h \subset \Lambda(s)$. C'est la première assertion de (ii).

Considérons des triplets (h, α', β') et (h, α'', β'') vérifiant les conditions de (ii). On pose $Spr(h, \alpha', \beta') = (\lambda', \epsilon')$ et $Spr(h, \alpha'', \beta'') = (\lambda'', \epsilon'')$. Plus précisément, on relève ϵ' en l'élément de $\{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda')}$ tel que $A(\alpha') = \mathbf{A}(\lambda', \epsilon')$ et $B(\beta') = \mathbf{B}(\lambda', \epsilon')$. De même pour ϵ''.

On reprend notre calcul en choisissant pour tout $m \in \{0, ..., 2n\}$ le couple (m', m'') défini plus haut, que l'on note (m'_m, m''_m). On en déduit des entiers x' etc... que l'on note x'_m etc... Ces entiers sont nuls dans le cas $m = 0$. On peut supposer et on suppose que les suites $m \mapsto x'_m$ etc... sont croissantes. Pour $m \geq 1$, on pose $\mathbf{m}'_m = m'_m - m'_{m-1}$, $\mathbf{x}'_m = x'_m - x'_{m-1}$ etc... Pour tout $m \geq 1$, le couple $(\mathbf{m}'_m, \mathbf{m}''_m)$ est égal à $(1, 0)$ ou à $(0, 1)$. Disons que m provient de λ' dans le premier cas, de λ'' dans le second. Fixons un intervalle $\Delta \in Int(\lambda)$. Posons $u' = mult_{\lambda'}(\Delta)$ et $u'' = mult_{\lambda''}(\Delta)$. Notons $k'_1 < k'_2 < ... < k'_{u'}$ les éléments de $\{j_{min}(\Delta), ..., j_{max}(\Delta)\}$ qui proviennent de λ' et $k''_1 < k''_2 < ... < k''_{u''}$ ceux qui proviennent de λ''. Ajoutons à ces suites les termes $k'_0 = k''_0 = j_{min}(\Delta) - 1$. Pour $r = 1, ..., u'$, posons $\underline{x}'[r] = x'_{k'_r} - x'_{k'_{r-1}} = \mathbf{x}'_{k'_r}$, $\underline{y}'[r] = y'_{k'_r} - y'_{k'_{r-1}} = \mathbf{y}'_{k'_r}$. On a $\underline{x}'[r] + \underline{y}'[r] = 1$, donc le couple $(\underline{x}'[r], \underline{y}'[r])$ est égal à $(1, 0)$ ou $(0, 1)$. On pose des définitions analogues pour λ'', c'est-à-dire en remplaçant les $'$ par des $''$. On va prouver

(19) quand r décrit $\{1, ..., u'\}$, les couples $(\underline{x}'[r], \underline{y}'[r])$ sont alternativement $(1, 0)$ et $(0, 1)$; le premier couple $(\underline{x}'[1], \underline{y}'[1])$ vaut $(1, 0)$ si $\nu_\Delta^X = 1$ et $(0, 1)$ si $\nu_\Delta^X = -1$; on a une assertion analogue pour les termes relatifs à λ''.

Supposons pour fixer les idées que $\nu_\Delta^X = 1$. L'assertion devient $(\underline{x}'[r], \underline{y}'[r]) = (\underline{x}''[r], \underline{y}''[r]) = (1, 0)$ si r est impair et $(\underline{x}'[r], \underline{y}'[r]) = (\underline{x}''[r], \underline{y}''[r]) = (0, 1)$ si r est pair. On raisonne par récurrence sur $m \in \{j_{min}(\Delta), ..., j_{max}(\Delta)\}$ en supposant que les assertions relatives à λ', resp. λ'', sont vérifiées pour tout r tel que $k'_r < m$, resp. $k''_r < m$. Cette hypothèse est vide pour $m = j_{min}(\Delta)$. Posons $\mathbf{X}(\lambda) \cup \mathbf{Y}(\lambda) = (z_1, ..., z_{2n})$. Supposons

pour fixer les idées que $m = k'_r$ et notons s le plus grand élément de $\{0, ..., u''\}$ tel que $k''_s < m$. On a $r + s = m - j_{min}(\Delta) + 1$. Supposons d'abord m impair. On a $z_m > z_{m+1}$ et $z_{j_{min}(\Delta)-1} > z_{j_{min}(\Delta)}$. La relation (6), qui est une égalité, détermine entièrement les couples (x_m, y_m) et $(x_{j_{min}(\Delta)-1}, y_{j_{min}(\Delta)-1})$. L'entier $x_m - x_{j_{min}(\Delta)-1}$, resp. $y_m - y_{j_{min}(\Delta)-1}$, est le nombre d'éléments de $X(\alpha) \cap \{z_{j_{min}(\Delta)}, ..., z_m\}$, resp. de $Y(\alpha) \cap \{z_{j_{min}(\Delta)}, ..., z_m\}$. D'après la construction et l'hypothèse $\nu^X_\Delta = 1$, ces nombres sont $(m - j_{min}(\Delta))/2 + 1$ et $(m - j_{min}(\Delta))/2$. Mais on a aussi

$$x_m - x_{j_{min}(\Delta)-1} = (\sum_{t'=1,...,r} \underline{x}'[t']) + (\sum_{t''=1,...,s} \underline{x}''[t'']),$$

$$y_m - y_{j_{min}(\Delta)-1} = (\sum_{t'=1,...,r} \underline{y}'[t']) + (\sum_{t''=1,...,s} \underline{y}''[t'']).$$

L'hypothèse de récurrence permet de calculer ces sommes : par exemple, $\sum_{t'=1,...,r-1} \underline{x}'[t']$ est le nombre de termes impairs dans l'ensemble $\{1, ..., r-1\}$. En tenant compte de l'égalité $r + s = m - j_{min}(\Delta) + 1$ et de l'imparité de m et $j_{min}(\Delta)$, on obtient

$$x_m - x_{j_{min}(\Delta)-1} = \underline{x}'[r] + (\sum_{t'=1,...,r-1} \underline{x}'[t']) + (\sum_{t''=1,...,s} \underline{x}''[t''])$$

$$= \begin{cases} \underline{x}'[r] + (m - j_{min}(\Delta))/2, & \text{si } r \text{ est impair,} \\ \underline{x}'[r] + (m - j_{min}(\Delta))/2 + 1, & \text{si } r \text{ est pair.} \end{cases}$$

En comparant avec l'égalité $x_m - x_{j_{min}(\Delta)-1} = (m - j_{min}(\Delta))/2 + 1$, on obtient $\underline{x}'[r] = 1$ si r est impair et $\underline{x}'[r] = 0$ si r est pair. D'où forcément $\underline{y}'[r] = 0$ si r est impair et $\underline{y}'[r] = 1$ si r est pair. Cela prouve notre assertion dans le cas où m est impair. Supposons m pair. L'assertion (12) appliquée aux entiers m et $m - 2$ entraîne

$$\mathbf{x}'_m - \mathbf{y}'_m - \mathbf{x}''_m + \mathbf{y}''_m = -(\mathbf{x}'_{m-1} - \mathbf{y}'_{m-1} - \mathbf{x}''_{m-1} + \mathbf{y}''_{m-1}).$$

Le membre de gauche est $\underline{x}'[r] - \underline{y}'[r]$. Le membre de droite est $-(\underline{x}'[r-1] - \underline{y}'[r-1])$ si $m - 1 = k'_{r-1}$, $\underline{x}''[s] - \underline{y}''[s]$ si $m - 1 = k''_s$. Puisque m est pair, $r + s$ l'est aussi et l'hypothèse de récurrence entraîne que ce membre de droite vaut en tout cas $(-1)^{r-1}$. On a alors forcément $(\underline{x}'[r], \underline{y}'[r]) = (1, 0)$ si r est impair, $(\underline{x}'[r], \underline{y}'[r]) = (0, 1)$ si r est pair, ce qui achève la preuve de (19).

Posons $\mathbf{C}(\lambda', \Delta) = \cup_{i \in \Delta} \mathbf{C}(\lambda', i)$ et notons $\mathbf{A}(\lambda', \Delta)$, $\mathbf{B}(\lambda', \Delta)$, $A(\alpha', \Delta)$, $B(\beta', \Delta)$ les intersections de $\mathbf{A}(\lambda')$ etc... avec $\mathbf{C}(\lambda', \Delta)$. Notons $mult_{\lambda'}(> \Delta)$ la somme des $mult_{\lambda'}(i)$ pour les entiers i strictement supérieurs à tout élément de Δ. Autrement dit, le plus grand terme de $\mathbf{C}(\lambda', \Delta)$ est $c_{mult_{\lambda'}(>\Delta)+1}$ avec les notations utilisées en 6.2.9. L'ensemble $\mathbf{C}(\lambda', \Delta)$ est formé d'entiers distincts intervenant alternativement dans $\mathbf{A}(\lambda', \Delta)$ et $\mathbf{B}(\lambda', \Delta)$. Le plus grand terme de $\mathbf{C}(\lambda', \Delta)$ appartient à $\mathbf{A}(\lambda', \Delta)$ si $mult_{\lambda'}(> \Delta)$ est pair, à $\mathbf{B}(\lambda', \Delta)$ si $mult_{\lambda'}(> \Delta)$ est impair. On a $A(\alpha', \Delta) \cup B(\beta', \Delta) = \mathbf{C}(\lambda', \Delta)$ et l'assertion (19) dit que $\mathbf{C}(\lambda', \Delta)$ est formé d'entiers intervenant alternativement dans $A(\alpha', \Delta)$ et $B(\beta', \Delta)$, le plus grand terme intervenant dans $A(\alpha', \Delta)$ si $\nu^X_\Delta = 1$, dans $B(\beta', \Delta)$ si $\nu^X_\Delta = -1$. En conséquence, on a $(A(\alpha', \Delta), B(\beta', \Delta)) = (\mathbf{A}(\lambda', \Delta), \mathbf{B}(\lambda', \Delta))$ si $\nu^X_\Delta = (-1)^{mult_{\lambda'}(>\Delta)}$ et $(A(\alpha', \Delta), B(\beta', \Delta)) = (\mathbf{B}(\lambda', \Delta), \mathbf{A}(\lambda', \Delta))$ si $\nu^X_\Delta = (-1)^{1+mult_{\lambda'}(>\Delta)}$. En se rappelant la construction de ϵ', cela signifie que $\epsilon'_i = \nu^X_\Delta (-1)^{mult_{\lambda'}(>\Delta)}$ pour tout $i \in \Delta \cap Jord_{bp}(\lambda')$. Par hypothèse, on a $\bar{c}_s(\lambda', \lambda'') = (\lambda, d)$. Donc, pour tout $\Delta' \in Int(\lambda)$, on a $(-1)^{mult_{\lambda'}(\Delta')} = (-1)^{mult_{\lambda''}(\Delta')} = d_{\Delta'} = \nu^X_{\Delta'} \nu^Y_{\Delta'}$. On a alors

$$\nu^X_\Delta (-1)^{mult_{\lambda'}(>\Delta)} = (\prod_{\Delta' \geq \Delta} \nu^X_{\Delta'})(\prod_{\Delta' > \Delta} \nu^Y_{\Delta'}) = \mu_\Delta.$$

Cela démontre que $\epsilon'_i = \mu_\Delta$ pour tout $i \in \Delta \cap Jord_{bp}(\lambda')$. On prouve de même que $\epsilon''_i = \mu_\Delta$ pour tout $i \in \Delta \cap Jord_{bp}(\lambda'')$. C'est la dernière assertion du (ii) de l'énoncé. Cela entraîne qu'il y a au plus un couple de triplets (h, α', β') et (h, α'', β'') vérifiant les conditions imposées.

On doit maintenant prouver l'existence de ce couple. On définit des éléments $\epsilon' \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda')}$ et $\epsilon'' \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda'')}$ par les formules de l'énoncé. Il existe d'uniques éléments $(h', \alpha', \beta') \in \mathcal{I}^{FC}(G'_s)$ et $(h'', \alpha'', \beta'') \in \mathcal{I}^{FC}(G''_s)$ de sorte que $Spr(h', \alpha', \beta') = (\lambda', \epsilon')$ et $Spr(h'', \alpha'', \beta'') = (\lambda'', \epsilon'')$. Prouvons que

(20) $h' = h'' = h$.

En adaptant les notations de 6.2.9, on pose $J' = \{i \in Jord_{bp}(\lambda'); mult_{\lambda'}(i)$ est impair et $\epsilon'_i = -1\}$ et

$$D' = \sum_{i \in J'} (-1)^{mult_{\lambda'}(\geq i)}.$$

On peut supprimer de la définition de J' la condition $\epsilon'_i = -1$ en introduisant dans la somme définissant N le terme $\frac{1-\epsilon'_i}{2}$. On peut supprimer la condition $mult_{\lambda'}(i)$ impair en remplaçant le terme $(-1)^{mult_{\lambda'}(\geq i)}$ par $\frac{(-1)^{mult_{\lambda'}(\geq i)} - (-1)^{mult_{\lambda'}(>i)}}{2}$. Alors

$$D' = \frac{1}{4} \sum_{i \in Jord_{bp}(\lambda')} (1 - \epsilon'_i)((-1)^{mult_{\lambda'}(\geq i)} - (-1)^{mult_{\lambda'}(>i)}).$$

Puisque ϵ'_i est constant sur les intervalles de λ, on peut regrouper les i intervenant dans chaque intervalle. En utilisant la définition de ϵ', on obtient

$$D' = \frac{1}{4} \sum_{\Delta \in Int(\lambda)} (1 - \mu_\Delta)((-1)^{mult_{\lambda'}(\geq \Delta)} - (-1)^{mult_{\lambda'}(>\Delta)}),$$

où $mult_{\lambda'}(\geq \Delta)$ est le somme des $mult_{\lambda'}(i)$ sur les entiers i supérieurs ou égaux au plus petit terme de Δ. Puisque $\bar{c}_s(\lambda', \lambda'') = (\lambda, d)$, on a

$$(-1)^{mult_{\lambda'}(\geq \Delta)} = \prod_{\Delta' \geq \Delta} \nu^X_{\Delta'} \nu^Y_{\Delta'}, \ (-1)^{mult_{\lambda'}(>\Delta)} = \prod_{\Delta' > \Delta} \nu^X_{\Delta'} \nu^Y_{\Delta'}.$$

En se rappelant la définition de μ_Δ, on calcule

$$\mu_\Delta((-1)^{mult_{\lambda'}(\geq \Delta)} - (-1)^{mult_{\lambda'}(>\Delta)}) = \nu^Y_\Delta - \nu^X_\Delta,$$

puis

$$D' = \frac{1}{4}(\sum_{\Delta \in Int(\lambda)} (-1)^{mult_{\lambda'}(\geq \Delta)} - (-1)^{mult_{\lambda'}(>\Delta)}) + \frac{1}{4}(\sum_{\Delta \in Int(\lambda)} \nu^X_\Delta - \nu^Y_\Delta).$$

La première somme entre parenthèses vaut $(-1)^{mult_{\lambda'}(\geq \Delta_{min})} - 1$, où Δ_{min} est le plus petit intervalle. Puisque $\lambda' \in \mathcal{P}^{orth}(2n'+1)$, le nombre $mult_{\lambda'}(\geq \Delta_{min})$ est impair et cette première somme vaut -2. Avec les notations de (18), le sommand de la deuxième somme entre parenthèses vaut 2 si $\Delta \in Int(\lambda; 1, -1)$, -2 si $\Delta \in Int(\lambda; -1, 1)$ et 0 dans les autres cas. Cette deuxième somme vaut donc $2(|Int(\lambda; 1, -1)| - |Int(\lambda; -1, 1)|)$. D'après (18), c'est $2h$. D'où $D' = \frac{1}{2}(h-1)$. D'après 6.2.9(4), on a $h' = |2D' + 1|$, donc $h' = h$. On démontre de même que $h'' = h$, ce qui prouve (20).

On applique, du moins partiellement, nos constructions aux triplets (h, α', β') et (h, α'', β''). Pour $m \in \{0, ..., 2n\}$, on choisit selon la recette expliquée ci-dessus des entiers $m'_m \in \{0, ..., 2n'+1\}$ et $m''_m \in \{0, ..., 2n''+1\}$ de sorte que $m = m'_m + m''_m$ et

$S_m(\lambda) = S_{m'_m}(\lambda') + S_{m''_m}(\lambda'')$. A l'aide de ces entiers m'_m et m''_m, on choisit des entiers x'_m, y'_m, x''_m et y''_m comme au début de la preuve et on obtient l'égalité (4) (où les termes sont maintenant affectés d'indices m). On pose $x_m = x'_m + x''_m$, $y_m = y'_m + y''_m$. Pour $m \geq 1$, on pose comme plus haut $\mathbf{m}'_m = m'_m - m'_{m-1}$ etc... Prouvons que

(21) on a l'égalité $S_m(\mathbf{X}(\lambda) \cup \mathbf{Y}(\lambda)) = S_{x_m}(X(\alpha)) + S_{y_m}(Y(\beta))$;

(22) on a l'égalité $x'_m - y'_m - x''_m + y''_m = 0$ si m est pair et $|x'_m - y'_m - x''_m + y''_m| = 1$ si m est impair.

On prouve ces relations par récurrence sur m. Remarquons d'abord que, pour m impair, la relation (22) se déduit de la même relation pour $m-1$. En effet, en tenant compte de cette relation pour $m-1$, on a $x'_m - y'_m - x''_m + y''_m = \mathbf{x}'_m - \mathbf{y}'_m - \mathbf{x}''_m + \mathbf{y}''_m$. Par construction, un et un seul des entiers $\mathbf{x}'_m$ etc.... vaut 1, les autres valant 0. D'où l'égalité (22) pour m.

Supposons d'abord que λ_m est pair et que m est impair. Par récurrence, on a $S_{m-1}(\mathbf{X}(\lambda) \cup \mathbf{Y}(\lambda)) = S_{x_{m-1}}(X(\alpha)) + S_{y_{m-1}}(Y(\beta))$. On note encore $\mathbf{X}(\lambda) \cup \mathbf{Y}(\lambda) = \{z_1, ..., z_{2n}\}$. Les hypothèses sur m entraînent $z_{m-1} > z_m$ et l'égalité précédente détermine entièrement x_{m-1} et y_{m-1}. De plus, le $x_{m-1}+1$-ième terme de $X(\alpha)$ est égal au $y_{m-1}+1$-ième terme de $Y(\beta)$, ces deux termes étant égaux à $z_m = z_{m+1}$. En conséquence, on a les égalités

$$S_m(\mathbf{X}(\lambda) \cup \mathbf{Y}(\lambda)) = S_{x_{m-1}+1}(X(\alpha)) + S_{y_{m-1}}(Y(\beta)) = S_{x_{m-1}}(X(\alpha)) + S_{y_{m-1}+1}(Y(\beta)).$$

Puisque (x_m, y_m) est égal par construction soit à $(x_{m-1}+1, y_{m-1})$, soit à $(x_{m-1}, y_{m-1}+1)$, on obtient dans les deux cas l'égalité (21) pour m. Supposons maintenant que λ_m est pair et que m est pair. Supposons pour fixer les idées que m provient de λ', c'est-à-dire $\mathbf{m}'_m = 1$ et $\mathbf{m}''_m = 0$. Posons $i = \lambda_m$. On a note $\mathbf{C}(\lambda', i) = (c_{j_{min}(i)}, ..., c_{j_{max}(i)})$ et m'_m est un élément de $\{j_{min}(i), ..., j_{max}(i)\}$. Il résulte de la construction des suites $(m'_m)_{m\in\{0,...,2n\}}$ et $(m''_m)_{m\in\{0,...,2n\}}$ que $m'_m - j_{min}(i) + 1 = m - mult_\lambda(\geq i+1)$. L'entier m est pair par hypothèse et $mult_\lambda(\geq i+1)$ l'est parce que λ est spéciale. Donc l'entier $m'_m - j_{min}(i) + 1$ est pair. A fortiori $m'_m > j_{min}(i)$. On a alors $m'_{m-1} = m'_m - 1 \geq j_{min}(i)$. D'autre part, puisque $m'_m - j_{min}(i) + 1$ et i sont pairs, on a $c_{m'_m - 1} = c_{m'_m}$, c'est-à-dire $c_{m'_{m-1}} = c_{m'_m}$. Ces deux termes appartiennent l'un à $A(\alpha')$, l'autre à $B(\beta')$. Cela entraîne que les deux couples $(\mathbf{x}'_{m-1}, \mathbf{y}'_{m-1})$ et $(\mathbf{x}'_m, \mathbf{y}'_m)$ sont distincts, l'un valant $(1,0)$, l'autre $(0,1)$. Donc $(x_m, y_m) = (x_{m-2}+1, y_{m-2}+1)$. Alors l'égalité (21) pour m se déduit comme ci-dessus de la même égalité pour $m-2$. En utilisant (22) pour $m-2$, on a aussi

$$x'_m - y'_m - x''_m + y''_m = \mathbf{x}'_{m-1} + \mathbf{x}'_m - \mathbf{y}'_{m-1} - \mathbf{y}'_m$$

et ceci vaut 0 puisque les couples $(\mathbf{x}'_{m-1}, \mathbf{y}'_{m-1})$ et $(\mathbf{x}'_m, \mathbf{y}'_m)$ sont distincts. D'où (22) pour m.

Supposons maintenant que λ_m est impair. Notons Δ l'intervalle de λ tel que $\lambda_m \in \Delta$. Introduisons les mêmes notations qu'avant l'assertion (19) : les suites $k'_1 < ... < k'_{u'}$ et $k''_1 < ... < k''_{u''}$ et, pour $r \in \{1, ..., u'\}$, resp. $r \in \{1, ..., u''\}$ les éléments $\underline{x}'[r] = x'_{k'_r} - x'_{k'_{r-1}} = \mathbf{x}'_{k'_r}$ etc... Montrons que

(23) l'assertion (19) reste vérifiée.

En effet, parce que l'application $i \mapsto \epsilon'_i$ est constante sur $Jord_{bp}(\lambda') \cap \Delta$, le couple $(A(\alpha', \Delta), B(\beta', \Delta))$ est égal à $(\mathbf{A}(\lambda', \Delta), \mathbf{B}(\lambda', \Delta))$ ou a $(\mathbf{B}(\lambda', \Delta), \mathbf{A}(\lambda', \Delta))$. Les entiers de $\mathbf{C}(\lambda', \Delta)$ interviennent alternativement dans $\mathbf{A}(\lambda', \Delta)$ et $\mathbf{B}(\lambda', \Delta)$, donc interviennent aussi alternativement dans $A(\alpha', \Delta)$ et $B(\beta', \Delta)$. Cela équivaut à la première assertion de (19). Dans le paragraphe qui suit (19), on a calculé la valeur constante de ϵ'_i pour

$i \in Jord_{bp}(\lambda') \cap \Delta$ en utilisant la valeur du premier couple $(\underline{x}'[1], \underline{y}'[1])$. Dans la situation présente où l'on connaît cette valeur constante de ϵ'_i, le même calcul détermine ce premier couple. C'est la deuxième assertion de (19). Cela prouve (23).

Pour fixer les idées, on suppose que $\nu^X_\Delta = 1$ et que m provient de λ'. On note r l'élément de $\{1, ..., u'\}$ tel que $m = k'_r$ et s le plus grand élément de $\{0, ..., u''\}$ tel que $k''_s < m$. Supposons d'abord $m = j_{min}(\Delta)$. Donc m est impair et $r = 1$. Comme on l'a dit, la relation (22) pour m se déduit de la même relation pour $m-1$. On a $z_{m-1} > z_m > z_{m+1}$. La relation (21) pour $m-1$ détermine entièrement le couple (x_{m-1}, y_{m-1}) et, compte tenu de la construction de $X(\alpha)$ et $Y(\beta)$ et de notre hypothèse $\nu^X_\Delta = 1$, la relation (21) pour m (que l'on doit démontrer) équivaut à l'assertion $x_m = x_{m-1} + 1$ et $y_m = y_{m-1}$. Compte tenu de notre hypothèse $m = k'_1$, cela équivaut à $(\underline{x}'[1], \underline{y}'[1]) = (1, 0)$. Mais cela résulte de (19) et cela démontre (21) pour m. Supposons maintenant que m est impair et $m > j_{min}(\Delta)$. On a déjà vérifié (22) pour m. On a $z_{m-1} = z_m$. Compte tenu de la relation (21) pour $m-2$, cette relation pour m équivaut à l'égalité $(x_m, y_m) = (x_{m-2}+1, y_{m-2}+1)$, ou encore à $\mathbf{x}_m + \mathbf{x}_{m-1} = \mathbf{y}_m + \mathbf{y}_{m-1}$, ou encore à $\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m = \mathbf{y}_{m-1} - \mathbf{x}_{m-1}$. Le membre de gauche vaut $\underline{x}'[r] - \underline{y}'[r] = (-1)^{r-1}$ d'après (19) et notre hypothèse $\nu^X_\Delta = 1$. Si $m - 1 = k'_{r-1}$, le membre de droite vaut de même $-(-1)^{r-2}$, d'où l'égalité cherchée. Si $m - 1 = k''_s$, ce membre de gauche vaut $-(-1)^{s-1}$. On a $r + s = m - j_{min}(\Delta) + 1$. C'est un nombre impair et on obtient encore l'égalité cherchée. Supposons maintenant que m est pair. Compte tenu des assertions (22) pour $m - 2$ et $m - 1$, cette assertion pour m équivaut à

$$\mathbf{x}'_m - \mathbf{y}'_m - \mathbf{x}''_m + \mathbf{y}''_m = -(\mathbf{x}'_{m-1} - \mathbf{y}'_{m-1} - \mathbf{x}''_{m-1} + \mathbf{y}''_{m-1}).$$

Le membre de gauche est $\underline{x}'[r] - \underline{y}'[r]$. D'après (19) et notre hypothèse $\nu^X_\Delta = 1$, ceci vaut $(-1)^{r-1}$. Si $m - 1 = k'_{r-1}$, le membre de droite vaut de même $-(-1)^{r-2}$, d'où l'égalité requise. Si $m = k''_s$,ce membre de droite vaut $(-1)^{s-1}$. Mais $r + s = m - j_{min}(\Delta) + 1$ qui est pair donc $(-1)^{s-1} = (-1)^{r-1}$, d'où de nouveau l'égalité requise. Pour prouver (21), supposons d'abord que $m \leq j_{max}(\Delta) - 1$, donc $m \leq j_{max}(\Delta) - 2$ puisque ces deux entiers sont pairs. On a alors $z_{m-1} < z_m = z_{m+1}$. L'assertion (21) pour m se déduit alors de la même assertion pour $m - 1$ comme dans le cas ci-dessus où λ_m est pair et m est impair : l'assertion (21) est vérifiée que le couple (x_m, y_m) soit $(x_{m-1} + 1, y_{m-1})$ ou $(x_{m-1}, y_{m-1}+1)$. Supposons enfin $m = j_{max}(\Delta)$, donc $r = u'$. On a $z_{m-1} < z_m < z_{m+1}$. La relation (21) pour $m - 1$ détermine entièrement le couple (x_{m-1}, y_{m-1}). Compte tenu de la construction de $X(\alpha)$ et $Y(\beta)$, cette relation pour m équivaut aux égalités $(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) = (1, 0)$ si $\nu^Y_\Delta = -1$, $(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) = (0, 1)$ si $\nu^Y_\Delta = 1$. Ou encore à l'égalité $\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m = -\nu^Y_\Delta$. On a $\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m = \underline{x}'[u'] - \underline{y}'[u'] = (-1)^{u'-1}$. Compte tenu de notre hypothèse $\nu^X_\Delta = 1$, on a $-\nu^Y_\Delta = -d_\Delta$. Mais $u' = mult_{\lambda'}(\Delta)$ et l'hypothèse $\bar{c}'_s(\lambda', \lambda'') = (\lambda, d)$ entraîne que $(-1)^{mult_{\lambda'}(\Delta)} = d_\Delta$. D'où l'égalité cherchée, qui démontre (21) pour m. Cela achève la preuve de (21) et (22).

En utilisant (21), les mêmes calculs qu'au début de la preuve conduisent à l'égalité

$$S_m(\lambda) = 2S_{x_m}(\alpha) + 2S_{y_m}(\beta) + e$$

avec la même valeur de e. Posons $T_m = S_{x_m}(\alpha) - S_{x'_m}(\alpha') - S_{x''_m}(\alpha'')$, $U_m = S_{y_m}(\beta) - S_{y'_m}(\beta') - S_{y''_m}(\beta'')$. Jointe à (3), l'égalité précédente conduit à

$$(24) \qquad S_m(\lambda) = 2T_m + 2U_m + S_{m'_m}(\lambda') + S_{m''_m}(\lambda'') - E$$

où E est comme en (8). L'assertion (11) reste vérifiée : elle résulte seulement de notre choix des suites $(m'_m)_{m=1,...,2n}$ et $(m''_m)_{m=1,...,2n}$. L'assertion (22) entraîne que la somme

des trois premiers termes de (8) est nulle. Donc $E = 0$. Mais on a par hypothèse l'égalité $S_m(\lambda) = S_{m'_m}(\lambda') + S_{m''_m}(\lambda'')$. Alors (24) entraîne $T_m + U_m = 0$. On a $(x_m, y_m) = (x_{m-1} + 1, y_{m-1})$ ou $(x_{m-1}, y_{m-1} + 1)$. D'où $U_m = U_{m-1}$ dans le premier cas et $T_m = T_{m-1}$ dans le second. L'égalité $T_m + U_m = 0$ entraîne alors par récurrence les deux égalites $T_m = U_m = 0$. Cela prouve les égalités

$$S_{x_m}(\alpha) = S_{x'_m}(\alpha') + S_{x''_m}(\alpha'') \; S_{y_m}(\beta) = S_{y'_m}(\beta') + S_{y''_m}(\beta'')$$

pour tout $m \in \{1, ..., 2n\}$. Par construction, quand m décrit $\{0, ..., 2n\}$, les entiers x'_m, resp. x''_m décrivent entièrement les ensembles $\{0, ..., n' + (1 + h)/2\}$, resp. $\{0, ..., n'' + (1 + h)/2\}$. Donc x_m décrit entièrement l'ensemble $\{0, ..., n + h\}$. Notons $\ell_1 < ... < \ell_{n+h}$ les entiers m tels que $\mathbf{x}_m = 1$. Pour $r = 1, ..., n + h$, on a $x_{\ell_r} = r$. Posons $x'[r] = x'_{\ell_r}$, $x''[r] = x''_{\ell_r}$. Alors $x'[r] + x''[r] = r$ et $S_r(\alpha) = S_{x'[r]}(\alpha') + S_{x''[r]}(\alpha'')$. Ces relations entraînent par récurrence sur r que α' est la partition extraite de α formée des α_r pour les r tels que $x'[r] = x'[r-1] + 1$ tandis que α'' est la partition extraite de α formée des α_r pour les r tels que $x''[r] = x''[r-1] + 1$. En conséquence $\alpha' \cup \alpha'' = \alpha$. On prouve de même que $\beta' \cup \beta'' = \beta$. Mais alors on sait que la multiplicité de $\rho_{\alpha',\beta'} \otimes \rho_{\alpha'',\beta''}$ dans la restriction de $\rho_{\alpha,\beta}$ vaut 1, cf. [45] 1.13(38). Cela prouve que nos triplets (h, α', β') et (h, α'', β'') vérifient les conditions du (ii) de l'énoncé. Cela vérifie en même temps l'assertion concernant la multiplicité de $\rho_{\alpha',\beta'} \otimes \rho_{\alpha'',\beta''}$ dans la restriction de $\rho_{\alpha,\beta}$. Cela achève la preuve de la proposition. $\square$

Déduisons les théorèmes 6.2.6 et 6.2.7 de la proposition. Le théorème 6.2.6 est conséquence immédiate du (i) de l'énoncé ci-dessus. Fixons une partition spéciale $\lambda \in \mathcal{P}^{orth}(2n)$ dont au moins un terme est impair et fixons $d \in \tilde{\bar{A}}(\lambda)/conj = \{\pm 1\}_{-1}^{Int(\lambda)}$. Fixons un sommet $s \in S(\bar{C})$ paramétré par un couple (n', n'') et fixons $(\lambda', \lambda'') \in \mathcal{P}^{orth}(2n'+1) \times \mathcal{P}^{orth}(2n''+1)$ de sorte que $\bar{c}_s(\lambda', \lambda'') = (\lambda, d)$. L'existence d'un tel triplet (s, λ', λ'') résulte de 3.2.8 et se vérifie d'ailleurs par un calcul simple. En identifiant (λ', λ'') à un élément de $\mathfrak{g}_{s,nil}/conj$, on pose $b_F(d) = (s, \lambda', \lambda'')$. Cela définit l'application b_F du théorème 6.2.7. L'assertion (i) de ce théorème est immédiate et (iii) résulte de la dernière assertion du (i) de la proposition. Les assertions du (ii) du théorème 6.2.7 se déduisent de celles du (ii) de la proposition. En particulier, l'injectivité de l'application $(\Lambda, \varphi, \rho) \mapsto \mathcal{L}_{\Lambda,\varphi,\rho}$ est une traduction du fait que les caractères ϵ' et ϵ'' du (ii) du théorème ci-dessus se déduisent injectivement du terme μ.

6.2.11 Preuve des théorèmes 6.2.6 et 6.2.7 dans le cas (A_{n-1}, ram)

On suppose que G est de type (A_{n-1}, ram) (ce qui suppose $n \geq 3$). En 6.2.2, on a identifié $\mathcal{B}_{Irr}(G)$ à l'ensemble des triplets (v, α, β) où $v \in \mathbb{N}$, $v(v+1)/2 \leq n$, $v(v+1)/2$ est de même parité que n et $(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}_2(n/2 - v(v+1)/4)$. L'entier v détermine un Levi de G auquel est associé un ensemble $\Lambda_v \subset \Delta_a^{nr}$ et (α, β) détermine une représentation irréductible $\rho_{\alpha,\beta}$ de $W^{I_F}(M_{\Lambda_v})$, qui est un groupe de Weyl de type $B_{n/2-v(v+1)/4}$. Pour un tel triplet, on a explicité $\boldsymbol{\nabla}_F(v, \alpha, \beta) = \lambda \in \mathcal{P}(n)$. Introduisons les notations suivantes. Pour $\lambda \in \mathcal{P}(n)$ et $i \in Jord(\lambda)$, on pose

$$mult_\lambda(> i; imp) = \sum_{j>i; j \; impair} mult_\lambda(j), \; mult_\lambda(> i; pair) = \sum_{j>i; j \; pair} mult_\lambda(j).$$

L'ensemble $S(\bar{C})$ s'envoie surjectivement sur l'ensemble des couples $(N', N'') \in \mathbb{N}^2$ tels que $N' + N'' = n$, N' est pair et $N'' \neq 2$. Cette application est bijective si n est

impair. Si n est pair, la fibre au-dessus d'un élément (N', N'') n'a qu'un élément sauf dans le cas où n est pair et $(N', N'') = (n, 0)$ où elle en a deux. Ces deux sommets sont conjugués par l'action de l'élément non trivial de $\mathbf{\Omega}^{nr}$. Pour un sommet s de couple associé (N', N''), posons $G'_s = Sp(N')$ et $G''_s = SO(N'')$, plus exactement G''_s est le groupe $SO(N'')$ déployé. On a $G_s = G'_s \times G''_s$ si n est impair. Si n est pair et $N'N'' \neq 0$, on a $G_s = (G'_s \times G''_s)/\{\pm 1\}$, où $\{\pm 1\}$ est identifié au centre des deux composantes. Si n est pair et $N' = 0$, resp. $N'' = 0$, on a $G_s = G''_s/\{\pm 1\}$, resp. $G_s = G'_s/\{\pm 1\}$. On a décrit en 6.2.9 les ensembles $\mathcal{I}(G'_s)$, $\mathcal{I}^{FC}(G'_s)$ et leurs analogues pour G''_s. On ajoute des indices s et des $'$ et $''$ aux notations de 6.2.9 et on adopte la même convention que dans cette référence quant au problème de dédoublement de certains termes dans le cas où N'' est pair. Si n est impair, on a $\mathcal{I}^{FC}(G_s) = \mathcal{I}^{FC}(G'_s) \times \mathcal{I}^{FC}(G''_s)$. Si n est pair, un couple $((k, \alpha', \beta'), (h, \alpha'', \beta'')) \in \mathcal{I}^{FC}(G'_s) \times \mathcal{I}^{FC}(G''_s)$ se quotiente en un élément de $\mathcal{I}^{FC}(G_s)$ si et seulement si $h + k(k+1)$ est divisible par 4.

L'ensemble $\mathfrak{g}_{s,nil}/conj$ s'envoie surjectivement sur $\mathcal{P}^{symp}(N') \times \mathcal{P}^{orth}(N'')$, les nombres d'éléments des fibres de cette application se déduisant de ce que l'on a dit en 6.2.9. L'application $\bar{c}_s : \mathfrak{g}_{s,nil}/conj \to \bar{\mathcal{C}} = \mathcal{P}(n)$ envoie (λ', λ'') sur $\lambda' \cup \lambda''$.

Pour un entier $v \in \mathbb{N}$ tel que $v(v+1)/2 \leq n$ et $v(v+1)/2$ est de même parité que n, on pose $k = [\frac{v}{2}]$, $h = [\frac{v+1}{2}]$. On a l'égalité $h^2 + k(k+1) = v(v+1)/2$. On a $\Lambda_v \subset \Lambda(s)$ si et seulement si $k(k+1) \leq N'$ et $h^2 \leq N''$. Si ces conditions sont vérifiées, $M_{\Lambda_v, s_{\Lambda_v}}$ s'identifie à l'image dans G_s de $M'_{s,k} \times M''_{s,h}$ et le groupe $W'(M'_{s,k}) \times W''(M''_{s,h})$ s'identifie naturellement à un sous-groupe de $W^{I_F}(M_{\Lambda_v})$. Remarquons que, si n est pair, $v(v+1)/2$ l'est aussi et un calcul simple montre que le couple (k, h) vérifie la condition évoquée plus haut : $h + k(k+1)$ est divisible par 4.

Proposition. *Soient $(v, \alpha, \beta) \in \mathcal{B}_{Irr}(G)$ et $s \in S(\bar{C})$. On note (N', N'') le couple paramétrant s, on pose $\mathbf{\nabla}_F(v, \alpha, \beta) = \lambda$, $k = [\frac{v}{2}]$ et $h = [\frac{v+1}{2}]$.*

(i) Supposons $\Lambda_v \subset \Lambda(s)$, soient $(k, \alpha', \beta') \in \mathcal{I}^{FC}(G'_s)$ et $(h, \alpha'', \beta'') \in \mathcal{I}^{FC}(G''_s)$, notons (λ', ϵ') et (λ'', ϵ'') leurs images par la correspondance de Springer généralisée. Supposons que $\rho_{\alpha',\beta'} \otimes \rho_{\alpha'',\beta''}$ soit une composante irréductible de la restriction de $\rho_{\alpha,\beta}$ à $W'(M'_{s,k}) \times W''(M''_{s,h})$. Alors $\lambda' \cup \lambda'' \leq \lambda$.

(ii) Soient $(\lambda', \lambda'') \in \mathcal{P}^{symp}(N') \times \mathcal{P}^{orth}(N'')$, supposons $\lambda' \cup \lambda'' = \lambda$. Alors $\Lambda_v \subset \Lambda(s)$. Il existe d'uniques triplets $(k, \alpha', \beta') \in \mathcal{I}^{FC}(G'_s)$ et $(h, \alpha'', \beta'') \in \mathcal{I}^{FC}(G''_s)$ vérifiant les conditions suivantes :

(a) leurs images par la correspondance de Springer généralisée sont de la forme (λ', ϵ') et (λ'', ϵ'') ;

(b) $\rho_{\alpha',\beta'} \otimes \rho_{\alpha'',\beta''}$ est une composante irréductible de la restriction de $\rho_{\alpha,\beta}$ à $W'(M'_{s,k}) \times W''(M''_{s,h})$.

Pour ces triplets, $\rho_{\alpha',\beta'} \otimes \rho_{\alpha'',\beta''}$ intervient avec multiplicité 1 dans la restriction de $\rho_{\alpha,\beta}$. Pour $i \in Jord_{bp}(\lambda')$, on a $\epsilon'_i = (-1)^{n + mult_\lambda(>i;imp)}$. Pour $i \in Jord_{bp}(\lambda'')$, on a $\epsilon''_i = (-1)^{mult_\lambda(>i;pair)}$.

Remarque. Comme en 6.2.10, la dernière assertion signifie que l'on peut choisir un relèvement ϵ'' vérifiant les égalités indiquées.

Preuve. On considère les données de l'assertion (i). Comme en 6.2.10, on doit prouver l'assertion suivante. Soient $m' \in \{0, ..., N'\}$ et $m'' \in \{0, ..., N''\}$. Posons $m = m' + m''$. Alors

(1) $S_{m'}(\lambda') + S_{m''}(\lambda'') \leq S_m(\lambda)$.

Le nombre $S_{m'}(\lambda')$ est calculé par 6.2.9(1). Puisque $\mathbf{C}(\lambda') = A(\alpha') \cup B(\beta')$, il existe deux entiers $x' \in \{0, ..., n' + 1 + [\frac{k}{2}]\}$ et $y' \in \{0, ..., n' - [\frac{k}{2}]\}$ tels que $x' + y' = m'$ et $S_{m'}(\mathbf{C}(\lambda')) = S_{x'}(A(\alpha')) + S_{y'}(B(\beta'))$. On calcule

$$S_{x'}(A(\alpha')) = S_{x'}(\alpha') + x'(2n' + k + 1 - x'),\ S_{y'}(B(\beta')) = S_{y'}(\beta') + y'(2n' - k - y').$$

D'où

$$S_{m'}(\lambda') = 2S_{x'}(\alpha') + 2S_{y'}(\beta') + e',$$

où

$$\begin{aligned} e' &= 2x'(2n' + k + 1 - x') + 2y'(2n' - k - y') + m'^2 - m' - 4n'm' + \nu_{m'}(\lambda') \\ &= x'(2k - 2x' + 1) + y'(-2k - 2y' - 1) + m'^2 + \nu_{m'}(\lambda'). \end{aligned}$$

Il existe de même des entiers $x'' \in \{0, ..., n'' + [\frac{h+1}{2}]\}$ et $y'' \in \{0, ...n'' - [\frac{h}{2}]\}$ tels que $x'' + y'' = m''$ et $S_{m''}(\mathbf{C}(\lambda'')) = S_{x''}(A(\alpha'')) + S_{y''}(B(\beta''))$. Un calcul analogue à celui ci-dessus (que l'on a déjà fait en 6.2.10 dans le cas où N'' est impair) conduit à l'égalité

$$S_{m''}(\lambda'') = 2S_{x''}(\alpha'') + 2S_{y''}(\beta'') + e'',$$

où

$$e'' = 2x''(h - x'') + 2y''(-h - y'') + m''^2 + \nu_{m''}(\lambda'').$$

D'où

$$S_{m'}(\lambda') + S_{m''}(\lambda'') = 2S_{x'}(\alpha') + 2S_{y'}(\beta') + 2S_{x''}(\alpha'') + 2S_{y''}(\beta'') + e' + e''.$$

L'hypothèse que $\rho_{\alpha',\beta'} \otimes \rho_{\alpha'',\beta''}$ intervient dans la restriction de $\rho_{\alpha,\beta}$ implique que $\alpha \geq \alpha' \cup \alpha''$ et $\beta \geq \beta' \cup \beta''$, cf. [45] 1.13(38). En posant $x = x' + x''$ et $y = y' + y''$, on a alors

$$S_{x'}(\alpha') + S_{x''}(\alpha'') \leq S_x(\alpha),\ S_{y'}(\beta') + S_{y''}(\beta'') \leq S_y(\beta),$$

d'où

$$(2) \qquad S_{m'}(\lambda') + S_{m''}(\lambda'') \leq 2S_x(\alpha) + 2S_y(\beta) + e' + e''.$$

Utilisons les constructions de 6.2.2. On a choisi un entier $t \geq n$ de même parité que $v+1$ et défini $\mathbf{Z}(\lambda) = \lambda + [t-1, 0]$. On a $S_m(\lambda) = S_m(\mathbf{Z}(\lambda)) - m(2t-1-m)/2$. Puisque $\mathbf{Z}(\lambda) = X(\alpha) \cup Y(\beta)$ et $x + y = m$, on a $S_m(\mathbf{Z}(\lambda)) \geq S_x(X(\alpha)) + S_y(Y(\beta))$. On calcule

$$S_x(X(\alpha)) = 2S_x(\alpha) + x(t + v - x),\ S_y(Y(\beta)) = 2S_y(\beta) + y(t - v - 1 - y).$$

D'où

$$S_m(\lambda) \geq 2S_x(\alpha) + 2S_y(\beta) + e,$$

où

$$e = -m(2t-1-m)/2 + x(t+v-x) + y(t-v-1-y) = xv - x^2 - y(v+1) - y^2 + m(m+1)/2.$$

Grâce à (2), on en déduit

$$(3) \qquad S_{m'}(\lambda') + S_{m''}(\lambda'') \leq S_m(\lambda) + E,$$

où $E = e' + e'' - e$. En se rappelant la définition $k = [\frac{v}{2}]$ et $h = [\frac{v+1}{2}]$, on calcule

$$(4) \qquad E = -\frac{(x' - y' - x'' + y'')(x' - y' - x'' + y'' + (-1)^{v+1})}{2} + \nu_{m'}(\lambda') + \nu_{m''}(\lambda'').$$

Le premier terme de E est négatif ou nul. Si $\nu_{m'}(\lambda') = \nu_{m''}(\lambda'') = 0$, alors $E \leq 0$ et (1) résulte de (3). La même preuve que l'on a utilisée dans 6.2.10 (cf. l'assertion (9) de cette référence et le paragraphe qui suit sa démonstration) montre que (1) est aussi vérifiée en tout cas. Cela prouve cette assertion (1), c'est-à-dire le (i) de l'énoncé.

Passons à la preuve de (ii). Soient $(\lambda', \lambda'') \in \mathcal{P}^{symp}(N') \times \mathcal{P}^{orth}(N'')$, supposons $\lambda' \cup \lambda'' = \lambda$. On considère que λ a t termes, on pose $mult_\lambda(0) = t - l(\lambda)$ et on note $Jord_*(\lambda)$ l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que $mult_\lambda(i) > 0$. Pour tout $i \in Jord_*(\lambda)$, on note $\{j_{min}(i), ..., j_{max}(i)\}$ l'intervalle des $j \in \{1, ..., t\}$ tels que $\lambda_j = i$. Notons $i_1 > .... > i_s$ l'ensemble des $i \in Jord_*(\lambda)$ tels que $mult_\lambda(i)$ soit impair. On a $s \equiv t \ mod \ 2\mathbb{Z}$. On voit par récurrence que $j_{min}(i_r) \equiv j_{max}(i_r) \equiv r \ mod \ 2\mathbb{Z}$ pour tout $r = 1, ..., s$. Par construction, $X(\alpha)$ est le sous-ensemble des éléments pairs de $\mathbf{Z}(\lambda)$ et $Y(\beta)$ est le sous-ensemble des éléments impairs. On a aussi $v+1 = |X(\alpha)| - |Y(\beta)|$. Un élément $i \in Jord_*(\lambda)$ contribue à $\mathbf{Z}(\lambda)$ par les éléments $i + t - j$ où j parcourt $\{j_{min}(i), ..., j_{max}(i)\}$. Si $mult_\lambda(i)$ est pair, il y a dans cet ensemble autant d'éléments pairs que d'impairs. Si $mult_\lambda(i)$ est impair et $i + t - j_{min}(i)$ est impair, il y a $(mult_\lambda(i) + 1)/2$ éléments impairs et $(mult_\lambda(i) - 1)/2$ éléments pairs. Si $mult_\lambda(i)$ est impair et $i + t - j_{min}(i)$ est pair, il y a $(mult_\lambda(i) + 1)/2$ éléments pairs et $(mult_\lambda(i) - 1)/2$ éléments impairs. Ces considérations conduisent à l'égalité

$$v + 1 = |\{r \in \{1, ..., s\}; i_r + t - r \ pair\}| - |\{r \in \{1, ..., s\}; i_r + t - r \ impair\}|.$$

Pour $\eta, \tau \in \{\pm 1\}$, posons

$$e(\eta, \tau) = |\{r \in \{1, ..., s\}; (-1)^{i_r + t - r} = \eta, (-1)^r = \tau\}|, \ e(\eta) = |\{r \in \{1, ..., s\}; (-1)^{i_r + t} = \eta\}|.$$

L'égalité précédente se récrit

$$v + 1 = e(1, 1) + e(1, -1) - e(-1, 1) - e(-1, -1).$$

La somme $e(1, 1) + e(-1, 1)$, resp. $e(1, -1) + e(-1, -1)$, est le nombre de termes pairs, resp. impairs, dans $\{1, ..., s\}$, c'est-à-dire $[\frac{s}{2}]$, resp. $[\frac{s+1}{2}]$. L'égalité ci-dessus se récrit sous les deux formes

$$v+1-[\frac{s+1}{2}]+[\frac{s}{2}] = 2e(1,1)-2e(-1,-1), \ v+1+[\frac{s+1}{2}]-[\frac{s}{2}] = 2e(1,-1)-2e(-1,1).$$

Parce que $s \equiv t \equiv v + 1 \ mod \ 2\mathbb{Z}$, on a $[\frac{s+1}{2}] - [\frac{s}{2}] = [\frac{v+2}{2}] - [\frac{v+1}{2}]$. On a aussi $v + 1 = [\frac{v+2}{2}] + [\frac{v+1}{2}]$ et les égalités précédentes se récrivent

$$(5) \qquad [\frac{v+1}{2}] = e(1, 1) - e(-1, -1), \ [\frac{v+2}{2}] = e(1, -1) - e(-1, 1).$$

A fortiori

$$(6) \qquad e(1, 1) \geq [\frac{v+1}{2}], \ e(1, -1) \geq [\frac{v+2}{2}].$$

Supposons t pair. Par définition, $e(1, -1)$ est inférieur ou égal au nombre des $r \in \{1, ..., s\}$ tels que i_r est impair. Pour un tel entier, la multiplicité $mult_{\lambda'}(i_r)$ est paire puisque λ' est symplectique. Puisque $mult_\lambda(i_r)$ est impaire par définition de la suite $(i_1, ..., i_s)$, on a $mult_{\lambda''}(i_r) > 0$. D'où $e(1, -1) \leq |Jord_{bp}(\lambda'')|$. Puisque t est pair, v est impair et $[\frac{v+2}{2}] = [\frac{v+1}{2}] = h$. Alors (6) implique $h \leq |Jord_{bp}(\lambda'')|$. La somme des éléments de $Jord_{bp}(\lambda'')$ est supérieure ou égale à $1 + 3 + ... + 2h - 1 = h^2$. D'où $h^2 \leq N''$. Par définition, $e(1, 1)$ est inférieur ou égal au nombre des $r \in \{1, ..., s\}$ tels que i_r est pair. Il

faut faire attention d'exclure le cas où $i_s = 0$. En tout cas, $e(1,1)-1$ est inférieur ou égal au nombre des $r \in \{1,...,s\}$ tels que i_r est pair et non nul. On prouve comme ci-dessus que ce dernier nombre est inférieur ou égal à $|Jord_{bp}(\lambda')|$. D'où $e(1,1)-1 \leq |Jord_{bp}(\lambda')|$. Puisque v est impair, on a $[\frac{v+1}{2}] = [\frac{v}{2}] + 1 = k+1$. Alors (6) implique $k \leq |Jord_{bp}(\lambda')|$. La somme des éléments de $Jord_{bp}(\lambda')$ est supérieure ou égale à $2+4+...+2k = k(k+1)$. D'où $k(k+1) \leq N'$. Cela démontre que $\Lambda_v \subset \Lambda(s)$. On laisse au lecteur le cas similaire où t est impair. Cela prouve la première assertion de (ii).

Considérons des triplets (k, α', β') et (h, α'', β'') vérifiant les conditions (a) et (b) du (ii) de l'énoncé. Pour un entier $m \in \{0,...,n\}$, on choisit un couple d'entiers $(m'_m, m''_m) \in \{0,...,N'\} \times \{0,...,N''\}$ tels que $m = m'_m + m''_m$ et $S_m(\lambda) = S_{m'_m}(\lambda') + S_{m''_m}(\lambda'')$. Cette condition ne détermine pas entièrement le couple. On impose de plus la condition suivante : si λ_m est pair, on choisit parmi les couples possibles celui pour lequel m'_m est maximal ; si λ_m est impair, on choisit parmi les couples possibles celui pour lequel m''_m est maximal. On reprend nos constructions en indexant par m les entiers que l'on a introduits : x'_m, y'_m etc... Pour $m \geq 1$, on pose $\mathbf{m}'_m = m'_m - m'_{m-1}$, $\mathbf{x}'_m = x'_m - x'_{m-1}$ etc... Soit $i \in Jord_{bp}(\lambda')$. Posons $M = mult_\lambda(> i)$, $M' = mult_{\lambda'}(> i)$, $M'' = mult_{\lambda''}(> i)$ et $\mathbf{M}' = mult_{\lambda'}(i)$. Il résulte de nos constructions que $m'_M = M'$, $m''_M = M''$ et que, pour tout $\ell \in \{1,...,\mathbf{M}'\}$, on a $m'_{M+\ell} = M' + \ell$, $m''_{M+\ell} = M''$. Soit $m \in \{M,...,M+\mathbf{M}'\}$. On a $\lambda''_{m''_m} = \lambda''_M > \lambda''_{m''_m+1}$ donc $\nu_{m''_m}(\lambda'') = 0$. On a soit $\lambda'_{m'_m} > \lambda'_{m'_m+1}$ si $m = M$, soit $\lambda'_{m'_m} = i \in Jord_{bp}(\lambda')$ si $m \geq M+1$, en tout cas $\nu_{m'_m}(\lambda') = 0$. Alors $E \leq 0$. Nos hypothèses et la relation (3) entraînent que $E = 0$ et que cette relation est une égalité. Toutes les inégalités utilisées dans le calcul sont donc elles-aussi des égalités. La nullité de E entraîne que $x'_m - y'_m - x''_m + y''_m$ vaut 0 ou $(-1)^v$. Mais $x'_m - y'_m - x''_m + y''_m$ est de même parité que $x'_m + y'_m + x''_m + y''_m = m$. D'où $x'_m - y'_m - x''_m + y''_m = 0$ si m est pair, $x'_m - y'_m - x''_m + y''_m = (-1)^v$ si m est impair. Par différence, cela entraîne que $\mathbf{x}'_{M+1} - \mathbf{y}'_{M+1} - \mathbf{x}''_{M+1} + \mathbf{y}''_{M+1} = (-1)^{v+M}$. Mais $\mathbf{m}''_{M+1} = 0$ donc $\mathbf{x}''_{M+1} = \mathbf{y}''_{M+1} = 0$ et $(\mathbf{x}'_{M+1}, \mathbf{y}'_{M+1})$ est égal à $(1,0)$ ou $(0,1)$. D'où

$$(\mathbf{x}'_{M+1}, \mathbf{y}'_{M+1}) = \begin{cases} (1,0), & \text{si } v+M \text{ est pair,} \\ (0,1), & \text{si } v+M \text{ est impair} \end{cases}$$

Par définition de x'_{M+1} et y'_{M+1}, cela signifie que le plus grand terme de l'intervalle $\mathbf{C}(\lambda', i)$ intervient dans $A(\alpha')$ si $v+M$ est pair et dans $B(\beta')$ si $v+M$ est impair. En se rappelant comment sont reliés $A(\alpha')$, $B(\beta')$, $\mathbf{A}(\lambda', \epsilon')$ et $\mathbf{B}(\lambda', \epsilon')$, on voit que le plus grand terme de l'intervalle $\mathbf{C}(\lambda', i)$ intervient dans $\mathbf{A}(\lambda', \epsilon')$ si $v+M+k$ est pair, dans $\mathbf{B}(\lambda', \epsilon')$ si $v+M+k$ est impair. Ce terme intervient dans $\mathbf{A}(\lambda')$ si M' est pair et dans $\mathbf{B}(\lambda')$ si M' est impair. Par définition du couple $(\mathbf{A}(\lambda', \epsilon'), \mathbf{B}(\lambda', \epsilon'))$, cela entraîne $\epsilon'_i = (-1)^{v+M+k+M'}$. On a

$$M + M' = mult_\lambda(> i) + mult_{\lambda'}(> i) = \sum_{j>i} (mult_\lambda(j) + mult_{\lambda'}(j)).$$

Modulo $2\mathbb{Z}$, on a $mult_{\lambda'}(j) \equiv 0$ si j est impair, puisque λ' est symplectique. Si j est pair, on a $mult_\lambda(j) + mult_{\lambda'}(j) \equiv mult_{\lambda''}(j) \equiv 0$ puisque λ'' est orthogonale. Donc $M + M' \equiv mult_\lambda(> i; imp)\ mod\ 2\mathbb{Z}$. Récrivons cette relation, qui nous servira plus loin :

(7) $mult_\lambda(> i) + mult_{\lambda'}(> i) \equiv mult_\lambda(> i; imp)\ mod\ 2\mathbb{Z}$.

On a aussi $v = h + k$ d'où $v + k \equiv h \equiv N'' \equiv n\ mod\ 2\mathbb{Z}$. D'où $\epsilon'_i = (-1)^{n + mult_\lambda(>i;imp)}$. C'est une des égalités affirmées dans le (ii) de l'énoncé.

Pour le caractère ϵ'', on commence par le relever en un élément de $\{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda'')}$ tel que $\mathbf{A}(\lambda'', \epsilon'') = A(\alpha'')$, $\mathbf{B}(\lambda'', \epsilon'') = B(\beta'')$. Un calcul analogue, qu'on laisse au lec-

teur, conduit à l'égalité $\epsilon''_i = (-1)^{v+1+mult_\lambda(>i;pair)}$ pour $i \in Jord_{bp}(\lambda'')$. A multiplication éventuelle près par $-\mathbf{1}$, cela équivaut à la formule de l'énoncé.

Puisque les caractères ϵ' et ϵ'' sont uniquement déterminés, il y a au plus un couple de triplets (k, α', β') et (h, α'', β'') vérifiant les conditions (a) et (b) du (ii) de l'énoncé. Il faut maintenant prouver son existence. On introduit les éléments $\epsilon' \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda')}$ et $\epsilon'' \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda'')}$ définis par $\epsilon'_i = (-1)^{n+mult_\lambda(>i;imp)}$ pour tout $i \in Jord_{bp}(\lambda')$ et $\epsilon''_i = (-1)^{v+1+mult_\lambda(>i;pair)}$ pour tout $i \in Jord_{bp}(\lambda'')$. Introduisons les triplets $(\underline{k}, \alpha', \beta') \in \mathcal{I}^{FC}(G'_s)$ et $(\underline{h}, \alpha'', \beta'') \in \mathcal{I}^{FC}(G''_s)$ dont les images par la correspondance de Springer généralisée sont (λ', ϵ'), (λ'', ϵ''). On a introduit en 6.2.9 pour chacune de ces paires un entier noté D, que l'on note ici D' pour la paire (λ', ϵ') et D'' pour la paire (λ'', ϵ''). Montrons que

(8) $\underline{k} = k$, $\underline{h} = h$ et $D'' \geq 0$.

Comme en 6.2.9, posons $J' = \{i \in Jord_{bp}(\lambda'); mult_{\lambda'}(i)$ est impair et $\epsilon'_i = -1\}$. On a

$$D' = \sum_{i \in J'} (-1)^{mult_{\lambda'}(\geq i)}.$$

Posons $\mathbf{J}' = \{i \in Jord_{bp}(\lambda'); mult_{\lambda'}(i)$ est impair$\}$. On peut remplacer la somme en $i \in J'$ par une somme en $i \in \mathbf{J}'$, en glissant un terme $\frac{1}{2}(1-\epsilon'_i)$ dans la somme. On obtient

$$D' = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbf{J}'} (1 - \epsilon'_i)(-1)^{mult_{\lambda'}(\geq i)} = D'_1 + D'_2,$$

où

$$D'_1 = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbf{J}'} (-1)^{mult_{\lambda'}(\geq i)},$$

$$D'_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbf{J}'} \epsilon'_i (-1)^{mult_{\lambda'}(\geq i)}.$$

Pour $i \in \mathbf{J}'$, on a $(-1)^{mult_{\lambda'}(\geq i)} = \frac{1}{2}((-1)^{mult_{\lambda'}(\geq i)} - (-1)^{mult_{\lambda'}(>i)})$. Pour $i \in Jord(\lambda') - \mathbf{J}'$, cette dernière expression est nulle. Donc

$$D'_1 = \frac{1}{4} \sum_{i \in Jord(\lambda')} ((-1)^{mult_{\lambda'}(\geq i)} - (-1)^{mult_{\lambda'}(>i)}).$$

Cette somme se simplifie et on obtient

$$D'_1 = \frac{1}{4}((-1)^{mult_{\lambda'}(\geq i_{min})} - 1),$$

où i_{min} est le plus petit terme de λ'. On a $mult_{\lambda'}(\geq i_{min}) = l(\lambda') = l(\lambda) - l(\lambda'')$ (rappelons par exemple que $l(\lambda)$ est le nombre de termes non nuls de λ). Puisque λ'' est orthogonale, on a $l(\lambda'') \equiv N'' \equiv n \ mod \ 2\mathbb{Z}$, d'où

$$(9) \qquad D'_1 = \frac{1}{4}((-1)^{n+l(\lambda)} - 1).$$

D'après (7), pour $i \in \mathbf{J}'$, on a $\epsilon'_i = (-1)^{n+mult_\lambda(>i)+mult_{\lambda'}(>i)}$. On a aussi $(-1)^{mult_{\lambda'}(\geq i)} = (-1)^{mult_{\lambda'}(>i)+1}$ et D'_2 se récrit

$$D'_2 = \frac{1}{2}(-1)^n \sum_{i \in \mathbf{J}'} (-1)^{mult_\lambda(>i)}.$$

On a introduit plus haut la suite $i_1 > ... > i_s$. On voit que $\mathbf{J}'$ est l'ensemble des i_r pour $r = 1, ..., s$, tels que i_r est pair et $i_r \neq 0$: cela résulte du fait que, pour un entier i pair strictement positif, la multiplicité $mult_{\lambda''}(i)$ est paire donc $mult_{\lambda'}(i)$ est impaire si et seulement si $mult_\lambda(i)$ l'est. Pour $r = 1, ..., s$, posons $\eta_r = (-1)^{i_r+t-r}$, $\tau_r = (-1)^r$. Alors i_r est pair si et seulement si $\eta_r\tau_r = (-1)^t$. On a remarqué plus haut que $j_{min}(i_r)$ était de la même parité que r. On a $mult_\lambda(> i) = j_{min}(i_r) - 1$, d'où $(-1)^{mult_\lambda(>i)} = (-1)^{r-1} = -\tau_r$. On obtient

$$D'_2 = \frac{1}{2}(-1)^{n+1} \sum_{r=1,...,s;\eta_r\tau_r=(-1)^t,\, i_r\neq 0} \tau_r.$$

Ceci est égal à la même somme où l'on supprime la restriction $i_r \neq 0$, dont on retire la contribution de ce terme. Ce terme existe si $mult_\lambda(0)$ est impaire, c'est-à-dire $t - l(\lambda)$ est impair. Dans ce cas, sa contribution est celle de i_s, c'est-à-dire $\tau_s = (-1)^s = (-1)^t$. En tout cas, cette contribution vaut $-\frac{1}{2}(-1)^t((-1)^{l(\lambda)+t} - 1) = \frac{1}{2}((-1)^t - (-1)^{l(\lambda)})$. D'où $D'_2 = D'_3 + D'_4$, où

$$D'_3 = \frac{1}{2}(-1)^{n+1} \sum_{r=1,...,s;\eta_r\tau_r=(-1)^t} \tau_r,$$

$$D'_4 = \frac{1}{4}(-1)^n((-1)^t - (-1)^{l(\lambda)}).$$

Grâce à (9), on a

$$D'_1 + D'_4 = \frac{1}{4}((-1)^{n+t} - 1).$$

Avec les notations introduites plus haut, on a

$$D'_3 = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(e((-1)^t, 1) - e((-1)^{t+1}, -1)).$$

En se rappelant que t est de la même parité que $v + 1$ et que $k = [\frac{v}{2}]$, il résulte de (5) que

$$D'_3 = \frac{1}{2}(-1)^{n+t+1}(k + 1),$$

d'où

$$D' = D'_1 + D'_3 + D'_4 = \frac{1}{2}(-1)^{n+t+1}(k + 1) + \frac{1}{4}((-1)^{n+t} - 1).$$

Alors $2D' + \frac{1}{2} = (-1)^{n+t+1}(k + \frac{1}{2})$, puis $\underline{k} = |2D' + \frac{1}{2}| - \frac{1}{2} = k$.

On laisse au lecteur la preuve similaire des assertions concernant $\underline{h}$ et D''. Cela prouve (8).

Si $h > 0$, la relation $D'' \geq 0$ entraîne que $\mathbf{A}(\lambda'', \epsilon'') = A(\alpha'')$ et $\mathbf{B}(\lambda'', \epsilon'') = B(\beta'')$. Si $h = 0$, on a le droit de permuter α'' et β'' et on suppose les égalités précédentes vérifiées.

Reprenons nos calculs pour ces triplets (k, α', β') et (h, α'', β''). Pour $m \in \{0, ..., n\}$, on choisit selon la recette expliquée plus haut des entiers $m'_m \in \{0, ..., N'\}$ et $m''_m \in \{0, ..., N''\}$ tels que $m = m'_m + m''_m$ et $S_m(\lambda) = S_{m'_m}(\lambda') + S_{m''_m}(\lambda'')$. On choisit ensuite des entiers x'_m, y'_m, x''_m, y''_m de sorte que

$$S_{m'_m}(\mathbf{C}(\lambda')) = S_{x'_m}(A(\alpha')) + S_{y'_m}(B(\beta')),\ S_{m''_m}(\mathbf{C}(\lambda'')) = S_{x''_m}(A(\alpha')) + S_{y''_m}(B(\beta')).$$

On impose à ces termes des conditions supplémentaires. On suppose que les suites $m \mapsto x'_m$ etc... sont croissantes. Supposons $m'_m = m'_{m-1} + 1$. Si $\lambda'_{m'_m}$ est pair, il n'y a pas le choix pour x'_m et y'_m. Supposons $\lambda'_{m'_m}$ impair. Si $m'_m - mult_{\lambda'}(> \lambda'_{m'_m})$ est pair, il n'y a de

nouveau pas le choix et on a $x'_m = x'_{m-2}+1$, $y'_m = y'_{m-2}+1$. Mais, si $m'_m - mult_{\lambda'}(> \lambda'_{m'_m})$ est impair, les deux couples $(x'_{m-1}+1, y'_{m-1})$ et $(x'_{m-1}, y'_{m-1}+1)$ conviennent. On choisit le couple (x'_m, y'_m) de sorte que $x'_m - y'_m = x'_{m-1} - y'_{m-1} + (-1)^{v+m}$. En revenant au cas où $m'_m - mult_{\lambda'}(> \lambda'_{m'_m})$ est pair, les égalités $x'_m = x'_{m-2}+1$ et $y'_m = y'_{m-2}+1$ et l'égalité précédente pour $m-1$, c'est-à-dire $x'_{m-1} - y'_{m-1} = x'_{m-2} - y'_{m-2} + (-1)^{v+m-1}$ impliquent $x'_m - y'_m = x'_{m-1} - y'_{m-1} + (-1)^{v+m}$. Cette égalité est donc vérifiée pour tout m tel que $m'_m = m'_{m-1}+1$ et $\lambda'_{m'_m}$ est impair. On fait un choix analogue pour les entiers x''_m et y''_m, au signe près. C'est-à-dire que si $m''_m = m''_{m-1}+1$ et si $\lambda''_{m''_m}$ est pair, (x''_m, y''_m) est tel que $x''_m - y''_m = x''_{m-1} - y''_{m-1} + (-1)^{v+m+1}$. Pour $m \geq 1$, on définit $\mathbf{m}'_m = m'_m - m'_{m-1}$, $\mathbf{x}'_m = x'_m - x'_{m-1}$ etc...

On définit E_m par la formule (4), où l'on ajoute des indices m à tous les termes. Prouvons que, pour tout $m \in \{0, ..., n\}$ on a les égalités

(10) $S_m(\mathbf{Z}(\lambda)) = S_{x_m}(X(\alpha)) + S_{y_m}(Y(\beta))$;

(11) $E_m = 0$.

La démonstration se fait par récurrence sur m. Posons $i = \lambda_m$, supposons i pair et $\mathbf{m}'_m = 1$, $\mathbf{m}''_m = 0$. D'après notre choix des suites $(m'_m)_{m=0,...,n}$ et $(m''_m)_{m=0,...,n}$, cela signifie que $m \in \{M+1, ..., M+\mathbf{M}'\}$, où $M = mult_\lambda(> i)$ et $\mathbf{M}' = mult_{\lambda'}(i)$. Pour $\ell = 1, ..., \mathbf{M}'$, les couples $(\mathbf{x}'_{M+\ell}, \mathbf{y}'_{M+\ell})$ sont alternativement $(1,0)$ et $(0,1)$. Dans la preuve ci-dessus de l'unicité des triplets, on a déduit la valeur de ϵ'_i à partir de la connaissance des couples $(\mathbf{x}'_{M+\ell}, \mathbf{y}'_{M+\ell})$. La même preuve s'inverse : ici on connaît la valeur de ϵ'_i et on en déduit que

$$(12) \qquad (\mathbf{x}'_m, \mathbf{y}'_m) = \begin{cases} (1,0), & \text{si } v+m \text{ est impair,} \\ (0,1), & \text{si } v+m \text{ est pair.} \end{cases}$$

Par définition de $X(\alpha)$ et $Y(\beta)$ et d'après la relation (10) pour $m-1$, cette relation (10) pour m (que l'on doit prouver) équivaut aux égalités $(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) = (1,0)$ si $\lambda_m + t - m$ est pair, $(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) = (0,1)$ si $\lambda_m + t - m$ est impair. Puisque $(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) = (\mathbf{x}'_m, \mathbf{y}'_m)$, que $\lambda_m = i$ est pair et que t et v sont de parité opposée, ces égalités résultent de (12). D'où (10) pour m. Par un raisonnement déjà fait, on a $\nu_{m'_m}(\lambda') = \nu_{m'_{m-1}}(\lambda') = \nu_{m''_m}(\lambda'') = \nu_{m''_{m-1}}(\lambda'') = 0$. On se rappelle que $x'_m - y'_m - x''_m + y''_m$ est de la même parité que m. La relation (11) pour $m-1$ signifie donc que $x'_{m-1} - y'_{m-1} - x''_{m-1} + y''_{m-1}$ vaut 0 si $m-1$ est pair et $(-1)^v$ si $m-1$ est impair. Compte tenu de cette relation, la relation (11) pour m équivaut aux égalités $\mathbf{x}'_m - \mathbf{y}'_m = (-1)^{v+1}$ si m est pair et $\mathbf{x}'_m - \mathbf{y}'_m = (-1)^v$ si m est impair. Cela résulte encore de (12), d'où la relation (11) pour m.

Supposons encore $\mathbf{m}'_m = 1$ et $\mathbf{m}''_m = 0$ mais supposons i impair. De nouveau, la relation (10) pour m équivaut aux égalités $(\mathbf{x}'_m, \mathbf{y}'_m) = (1,0)$ si $\lambda_m + t - m$ est pair, $(\mathbf{x}'_m, \mathbf{y}'_m) = (0,1)$ si $\lambda_m + t - m$ est impair. Mais ici $\lambda_m + t$ est de même parité que v et on a choisi les termes x'_m et y'_m de sorte que les conditions précédentes soient vérifiées. On a $\nu_{m''_m}(\lambda'') = 0$. Supposons que $m'_m - mult_{\lambda'}(> i)$ soit pair. Alors $\nu_{m'_m}(\lambda') = 0$. Comme ci-dessus, la relation (11) pour m équivaut aux relations : $x'_m - y'_m - x''_m + y''_m$ vaut 0 si m est pair et $(-1)^v$ si m est impair. Mais on a aussi $\nu_{m'_{m-2}}(\lambda') = 0$ car, ou bien $m'_{m-2} - mult_{\lambda'}(> i) > 0$ et alors ce nombre est pair, ou bien $m'_{m-2} = mult_{\lambda'}(> i)$ et alors $\lambda'_{m'_{m-2}} > \lambda'_{m'_{m-2}+1} = i$. Les relations précédentes sont donc vraies quand on remplace m par $m-2$. Puisque $(x'_m, y'_m) = (x'_{m-2}+1, y'_{m-2}+1)$, elles restent vraies pour m, d'où (11) pour m. Supposons maintenant que $m'_m - mult_{\lambda'}(> i)$ soit impair. Alors $\nu_{m'_m}(\lambda') = 1$. L'égalité $E_m = 0$ équivaut alors à

$$\frac{1}{2}(x'_m - y'_m - x''_m + y''_m)(x'_m - y'_m - x''_m + y''_m + (-1)^{v+1}) = 1.$$

Mais l'égalité $E_{m-1} = 0$ équivaut comme ci-dessus aux relations : $x'_{m-1} - y'_{m-1} - x''_{m-1} + y''_{m-1}$ vaut 0 si $m-1$ est pair et $(-1)^v$ si $m-1$ est impair. On en déduit que l'égalité $E_m = 0$ équivaut aux égalités $\mathbf{x}'_m - \mathbf{y}'_m = (-1)^v$ si m est pair, $\mathbf{x}'_m - \mathbf{y}'_m = (-1)^{v+1}$ si m est impair. Mais on a choisi les termes x'_m et y'_m de sorte qu'il en soit ainsi. Cela prouve (11) pour m.

On laisse au lecteur la preuve analogue dans le cas où $\mathbf{m}'_m = 0$ et $\mathbf{m}''_m = 1$. Cela prouve (10) et (11).

A l'aide de ces relations, on achève la preuve de la proposition comme celle du théorème 6.2.10. On pose $T_m = S_{x_m}(\alpha) - S_{x'_m}(\alpha') - S_{x''_m}(\alpha'')$, $U_m = S_{y_m}(\beta) - S_{y'_m}(\beta') - S_{y''_m}(\beta'')$. Les mêmes calculs qu'au début de la preuve, joints à l'égalité (10), conduisent à l'égalité

$$S_m(\lambda) = 2T_m + 2U_m + S_{m'_m}(\lambda') + S_{m''_m}(\lambda'') - E_m.$$

Grâce à (11), cela entraîne $T_m + U_m = 0$. On en déduit par récurrence $T_m = U_m = 0$, puis, toujours par récurrence, $\alpha = \alpha' \cup \alpha''$, $\beta = \beta' \cup \beta''$. On en déduit que nos triplets (k, α', β') et (h, α'', β'') vérifient les conditions requises et que la multiplicité de $\rho_{\alpha',\beta'} \otimes \rho_{\alpha'',\beta''}$ dans la restriction de $\rho_{\alpha,\beta}$ vaut 1. Cela achève la preuve de la proposition. $\square$

Remarque. Supposons que le triplet (h, α'', β'') de l'assertion (ii) se dédouble, c'est-à-dire $h = 0$ et $\alpha'' = \beta''$. Il y a deux représentations $\rho_{\alpha'',\alpha''}$. Le groupe W''_s est de type $D_{n''}$ et est un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe de Weyl de type $B_{n''}$. Les deux composantes sont échangées par l'automorphisme de ce groupe déduit de l'action d'un élément de ce groupe de Weyl de type $B_{n''}$. La restriction de $\rho_{\alpha,\beta}$ à $W'_s(M'_{s,k}) \times W''_s$ est conservée par cet automorphisme. Donc le produit tensoriel de $\rho_{\alpha',\beta'}$ et de chacune des deux représentations $\rho_{\alpha'',\beta''}$ intervient dans la restriction de $\rho_{\alpha,\beta}$. Cela ne perturbe pas notre résultat d'unicité car la partition λ'' se dédouble elle aussi et chacune des représentations $\rho_{\alpha'',\beta''}$ correspond à une et une seule des partitions dédoublées.

Les théorèmes 6.2.6 et 6.2.7 se déduisent de la proposition ci-dessus comme en 6.2.10.

6.2.12 Preuve des théorèmes 6.2.6 et 6.2.7 dans le cas $(D_4, 3 - ram)$

On suppose que G est de type $(D_4, 3 - ram)$. On a décrit en 6.2.4 l'ensemble $\mathcal{B}_{Irr}(G)$et on a défini l'application $\boldsymbol{\nabla}_F$. On va traiter successivement tous les éléments $(M, s_M, \varphi, \rho) \in \mathcal{B}_{Irr}(G)$. Pour chacun d'eux, on a décrit l'ensemble Λ tel que (M, s_M) soit conjugué à (M_Λ, s_Λ), cf. 2.2.16. On note s_0, s_{134}, s_2 les sommets de $S(\bar{C})$, correspondant aux racines $\beta_0, \beta_{134}, \beta_2$. Dans le tableau ci-dessous, seuls figurent les sommets s tels que $\Lambda \subset \Lambda(s)$. Pour chacun d'eux, on calcule la restriction de ρ à $W_s(M_{\Lambda,s_\Lambda})$ puis, pour chaque composante irréductible ρ' de cette restriction, on calcule l'image $(\mathcal{O}'_{\rho'}, \mathcal{L}_{\rho'})$ de $(M_{\Lambda,s_\Lambda}, \rho')$ par la correspondance de Springer généralisée. Expliquons la notation de cette image. On peut identifier $(\mathcal{O}'_{\rho'}, \mathcal{L}_{\rho'})$ à un couple (N', ξ'), où $N' \in \mathcal{O}'_{\rho'}$ et ξ' est une représentation irréductible de $Z_{G_s}(N')/Z_{G_s}(N')^0$. Quand ce groupe est trivial ou quand $\xi' = 1$, on remplace le couple (N', ξ') par le symbole ou la partition qui paramètre $\mathcal{O}_{\rho'}$. Dans le cas où G_s est classique et $\xi' \neq 1$, on ajoute la mention : $\xi' \neq 1$. Dans le cas où $s = s_0$, auquel cas G_s est de type G_2, et où $\mathcal{O}_{\rho'}$ est l'orbite $G_2(a_1)$, auquel cas $Z_{G_s}(N')/Z_{G_s}(N')^0 \simeq \mathfrak{S}_3$, on écrit plus précisément ξ' qui est l'une des trois représentations irréductibles $1, sgn, r$ de ce groupe, r étant de dimension 2.

Expliquons comment s'effectuent les calculs. Dans le cas où $M = G$, il y a par construction un seul sommet s tel que $\Lambda \subset \Lambda(s)$. C'est l'unique sommet qui figure dans la table ci-dessous. Le système local $\mathcal{L}_{\rho'}$ est simplement le faisceau-caractère cuspidal

dont est issu la fonction φ. Il est décrit en [48] 8.3. Dans le cas où $M = T$, on a $\Lambda = \emptyset$ et les trois sommets de $S(\bar{C})$ vérifient la condition $\Lambda \subset \Lambda(s)$. Le groupe $W^{I_F}(T) = W^{I_F}$ est simplement le groupe de Weyl de G_{s_0}. Pour le sommet $s = s_0$, la restriction de W^{I_F} à W_{s_0} est l'identité et $(\mathcal{O}_\rho, \mathcal{L}_\rho)$ est simplement l'image de ρ par la représentation de Springer de ce groupe de type G_2. Elle est décrite en [7] p. 427. Pour les deux autres sommets, la restriction de ρ à W_s est décrite dans les tables 21 et 22 de [3]. Le groupe G_s est produit de groupes de type A_{n-1} pour lesquels la description de la correspondance de Springer est immédiate : les représentations des groupes de Weyl comme les orbites nilpotentes sont paramétrées par des partitions et, dans ce paramétrage, la correspondance de Springer est l'identité. On doit signaler une subtilité dans l'utilisation des tables de [3]. Le groupe $W(A_2)$ de cette référence est engendré par deux réflexions associées à des racines longues. Ici, notre groupe W_{s_2} est bien un groupe $W(A_2)$ mais il est engendré par deux réflexions associées à des racines courtes. La raison en est que notre diagramme $\mathcal{D}_a^{nr}$ n'est pas le diagramme de Dynkin complété associé à un groupe de type G_2. Pour calculer les restrictions à W_{s_2}, on doit composer les tables de [3] avec l'automorphisme de W^{I_F} qui permute les deux générateurs standards, échangeant ainsi les réflexions associées aux racines courtes et celles associées aux racines longues. Pour les représentations irréductibles, cela échange $\phi'_{1,3}$ et $\phi''_{1,3}$. Par ailleurs, Alvis n'utilise pas les mêmes notations que Curtis. La traduction est : $\chi_{1,1} = \phi_{1,0}$, $\chi_{1,2} = \phi_{1,6}$, $\chi_{1,3} = \phi'_{1,3}$, $\chi_{1,4} = \phi''_{1,3}$, $\chi_{2,1} = \phi_{2,1}$, $\chi_{2,2} = \phi_{2,2}$.

Les résultats sont les suivants. Quand les restrictions de ρ ont plusieurs composantes, on note chacune d'elles en les séparant par des $+$. Il s'avère que les multiplicités de chaque composante sont toujours égales à 1. On expliquera plus loin pourquoi certains termes sont soulignés. La deuxième ligne du tableau rappelle le type de $G_{s,SC}$.

(M, s_M, φ, ρ)	s_0	s_{134}	s_2	$\boldsymbol{\nabla}_F(M, s_M, \varphi, \rho)$
	G_2	$\tilde{A}_1 \times A_1$	$\tilde{A}_2$	
(G, s_0)	$\underline{(G_2(a_1), sgn)}$			$(3^2 1^2, \gamma, sgn)$
(G, s_{134})	$\underline{((2,2), \xi' \neq 1)}$			$(3^2 1^2, -\gamma, sgn)$
$(T, \phi_{1,0})$	$\underline{G_2}$	$(2,2)$	(3)	(71)
$(T, \phi'_{1,3})$	$(G_2(a_1), r)$	$(2, 1^2)$	$\underline{(3)}$	(53)
$(T, \phi_{2,1})$	$\underline{(G_2(a_1), 1)}$	$(2, 1^2) + (1^2, 2)$	$\underline{(21)}$	$(3^2 1^2, \gamma, 1)$
$(T, \phi_{2,2})$	$\tilde{A}_1$	$\underline{(2,2)} + (1^2, 1^2)$	(21)	$(3^2 1^2, -\gamma, 1)$
$(T, \phi''_{1,3})$	$\underline{A_1}$	$\underline{(1^2, 2)}$	1^3	$(2^2 1^4)$
$(T, \phi_{1,6})$	$\underline{1}$	$\underline{(1^2, 1^2)}$	$\underline{(1^3)}$	(1^8)

Pour démontrer le 6.2.6, soit $(M, s_M, \varphi, \rho) \in \mathcal{B}_{Irr}(G)$. Notons $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$ l'orbite figurant dans $\boldsymbol{\nabla}_F(M, s_M, \varphi, \rho)$. Soit $(s, \mathcal{O}'_{\rho'}, \mathcal{L}_{\rho'})$ un triplet intervenant dans la ligne associée à (M, s_M, φ, ρ) du tableau ci-dessus. Posons $\mathcal{O}_{\rho'} = \iota_s(\mathcal{O}'_{\rho'}) \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$. Le théorème 6.2.6 résulte de l'assertion plus forte : $\mathcal{O}_{\rho'} \leq \mathcal{O}$ pour l'ordre usuel des partitions. Mais $\mathcal{O}_{\rho'}$ est calculé en 3.2.3 et on constate que cette assertion est vérifiée. Les termes soulignés dans le tableau ci-dessus sont ceux pour lesquels $\mathcal{O}_{\rho'} = \mathcal{O}$.

Fixons un élément $N \in \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$ dont on note $\mathcal{O}$ l'orbite. Dans le cas où $A(N) = \{1\}$, l'ensemble $\mathcal{B}_{Irr}(G, N)$ est réduit à un élément (M, s_M, φ, ρ). Le théorème 6.2.7 se résume à l'assertion suivante : il existe un triplet $(s, \mathcal{O}'_{\rho'}, \mathcal{L}_{\rho'})$ intervenant dans la ligne associée à (M, s_M, φ, ρ) tel que $\mathcal{O}_{\rho'} = \mathcal{O}$. Autrement dit, il y a dans cette ligne

un terme souligné. C'est clair. Il reste le cas où $\mathcal{O}$ est paramétrée par (3^21^2). On a alors $\tilde{\bar{A}}(N)/conj \simeq \{\pm\gamma\}$. On définit l'application b_F du théorème 6.2.7 par $b_F(\gamma) = (s_0, G_2(a_1))$ et $b_F(-\gamma) = (s_{134}, (2,2))$. L'assertion (i) de ce théorème équivaut aux égalités $\iota_{s_0}(G_2(a_1)) = \iota_{s_{134}}(2,2) = (3^21^2)$, cf. 3.2.3. L'assertion (ii) pour γ signifie que pour les deux éléments (M, s_M, φ, ρ) tels que $\boldsymbol{\nabla}_F(M, s_M, \varphi, \rho) = (3^21^2, \gamma, 1)$ ou $(3^21^2, \gamma, sgn)$ le couple $(s_0, G_2(a_1))$ apparaît dans la ligne associée à (M, s_M, φ, ρ) et que le caractère ξ' qui complète ce couple est différent pour les deux éléments (M, s_M, φ, ρ). C'est clair. L'assertion pour $-\gamma$ est similaire. L'assertion (iii) du théorème pour γ signifie que, pour les deux éléments (M, s_M, φ, ρ) tels que $\boldsymbol{\nabla}_F(M, s_M, \varphi, \rho) = (3^21^2, -\gamma, 1)$ ou $(3^21^2, -\gamma, sgn)$ le couple $(s_0, G_2(a_1))$ n'apparaît pas dans la ligne associée à (M, s_M, φ, ρ). C'est clair. L'assertion pour $-\gamma$ est similaire. Cela démontre le théorème 6.2.7.

6.2.13 Preuve des théorèmes 6.2.6 et 6.2.7 dans le cas (E_6, ram)

On suppose que G est de type (E_6, ram). On démontre les théorèmes 6.2.6 et 6.2.7 par la même méthode que dans le cas $(D_4, 3-ram)$. On utilise les mêmes notations. On écrira ci-dessous le tableau dont les théorèmes résultent.

Concernant les représentations irréductibles d'un groupe de Weyl de type F_4, le dictionnaire entre les notations de Alvis et de Curtis est le suivant :

$$\chi_{1,1} = \phi_{1,0},\ \chi_{1,2} = \phi''_{1,12},\ \chi_{1,3} = \phi'_{1,12},\ \chi_{1,4} = \phi_{1,24},\ \chi_{2,1} = \phi''_{2,4},\ \chi_{2,2} = \phi'_{2,16},\ \chi_{2,3} = \phi'_{2,4},$$

$$\chi_{2,4} = \phi''_{2,16},\ \chi_{4,1} = \phi_{4,8},\ \chi_{9,1} = \phi_{9,2},\ \chi_{9,2} = \phi''_{9,6},\ \chi_{9,3} = \phi'_{9,6},\ \chi_{9,4} = \phi_{9,10},\ \chi_{6,1} = \phi'_{6,6},$$

$$\chi_{6,2} = \phi''_{6,6},\ \chi_{12,1} = \phi_{12,4},\ \chi_{4,2} = \phi_{4,1},\ \chi_{4,3} = \phi''_{4,7},\ \chi_{4,4} = \phi'_{4,7},\ \chi_{4,5} = \phi_{4,13},\ \chi_{8,1} = \phi''_{8,3},$$

$$\chi_{8,2} = \phi'_{8,9},\ \chi_{8,3} = \phi'_{8,3},\ \chi_{8,4} = \phi''_{8,9},\ \chi_{16,1} = \phi_{16,5}.$$

Ici encore, notre diagramme $\mathcal{D}_a^{nr}$ n'est pas le diagramme complété d'un groupe de type F_4. Pour calculer les restrictions à des groupes W_s des représentations irréductibles du groupe W^{I_F} de type F_4, on doit composer ces représentations avec l'automorphisme de ce groupe qui échange les générateurs correspondant aux racines courtes avec ceux correspondant aux racines longues. Cet automorphisme agit sur les représentations irréductibles en conservant celles qui, dans la notation de Curtis, ne sont pas affectées de $'$ ou $''$. Il échange celles affectées d'un $'$ avec celles affectées d'un $''$, par exemple il permute $\phi'_{1,12}$ et $\phi''_{1,12}$, sauf pour le couple formé de $\phi'_{6,6}$ et $\phi''_{6,6}$: ces deux représentations sont fixées par l'automorphisme.

Considérons un élément $(M, s_M, \varphi, \rho) \in \mathcal{B}_{Irr}(G)$. Si $M = G$, le calcul que nous devons faire est immédiat comme en 6.2.12. Il y a deux éléments (G, s_{35}, φ_i) pour $i = 1, 2$ qui n'existent que dans le cas où $\delta_3(q-1) = 1$. Sous cette condition, les faisceaux-caractères cuspidaux à support nilpotent dans $\mathfrak{g}_{s_{35}}$ dont sont issus ces deux triplets sont portés par la même orbite $(3,3)$ et correspondent aux deux caractères d'ordre 3 du groupe $Z_{G_{s_{35}}}(N')/Z_{G_{s_{35}}}(N')^0$, où N' est un élément de cette orbite. On a noté ces caractères θ et θ^2.

Si $M = T$, on a besoin de connaître la correspondance de Springer pour les groupes G_s. Puisque $M = T$, cette correspondance est insensible à une isogénie, on peut remplacer G_s par son groupe adjoint. Le groupe G_{s_0} est de type F_4 et la correspondance de Springer est calculée en [7] p. 428. Il y a dans $\mathfrak{g}_{s_0,nil}$ une orbite de type $F_4(a_3)$ telle que, pour N' dans cette orbite, le groupe $Z_{G_{s_0}}(N')/Z_{G_{s_0}}(N')^0$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$. On adopte les notations de [7] pour les représentations irréductibles de ce groupe (qui déterminent les systèmes locaux sur l'orbite). Pour $s = s_{35}$ et $s = s_4$, $G_{s,AD}$ est produit de groupes

de type A_{n-1} et le calcul de cette correspondance est immédiat. Si $s = s_{16}$, $G_{s,AD}$ contient un facteur de type B_3, c'est-à-dire un facteur $SO(7)$. Si $s = s_2$, $G_{s,AD}$ est de type C_4 et on peut remplacer G_s par $G_{s,SC} = Sp(8)$. On a donc besoin du calcul de la correspondance de Springer pour les groupes $SO(7)$ et $Sp(8)$. On a expliqué ce calcul en 6.2.9. Le résultat est le suivant, avec les notations de cette référence. Dans la colonne de droite, le premier terme est une partition λ, orthogonale ou symplectique. Le deuxième terme est un caractère $\epsilon \in \{\pm 1\}^{Jord_{bp}(\lambda)}$ qui détermine le faisceau porté par l'orbite paramétrée par λ. Ce caractère est omis si c'est le caractère unité. Dans les autres cas, les éléments de $Jord_{bp}(\lambda)$ sont rangés en ordre décroissant. Par exemple, si $\lambda = (42^2) \in \mathcal{P}^{symp}(8)$, le caractère $\epsilon = (1, -1)$ a pour composantes $\epsilon_4 = 1$, $\epsilon_2 = -1$.

$Sp(8)$		$SO(7)$	
(α, β)	$Spr(0, \alpha, \beta)$	(α, β)	$Spr(1, \alpha, \beta)$
$(4, \emptyset)$	(8)	$(3, \emptyset)$	(7)
$(31, \emptyset)$	(61^2)	$(21, \emptyset)$	$(51^2, (1, -1))$
$(2^2, \emptyset)$	$(42^2, (1, -1))$	$(1^3, \emptyset)$	$(31^4, (1, -1))$
$(21^2, \emptyset)$	(41^4)	$(2, 1)$	(51^2)
$(1^4, \emptyset)$	(21^6)	$(1^2, 1)$	(32^2)
$(3, 1)$	(62)	$(1, 2)$	$(3^2 1)$
$(21, 1)$	(42^2)	$(1, 1^2)$	(31^4)
$(1^3, 1)$	$(2^3 1^2)$	$(\emptyset, 3)$	$(3^2 1, (-1, 1))$
$(2, 2)$	(4^2)	$(\emptyset, 21)$	$(2^2 1^3)$
$(1^2, 2)$	$(3^2 2)$	$(\emptyset, 1^3)$	(1^7)
$(2, 1^2)$	(421^2)		
$(1^2, 1^2)$	(2^4)		
$(1, 3)$	$(4^2, -1)$		
$(1, 21)$	$(3^2 1^2)$		
$(1, 1^3)$	$(2^2 1^4)$		
$(\emptyset, 4)$	$(62, (-1, -1))$		
$(\emptyset, 31)$	$(421^2, (-1, -1))$		
$(\emptyset, 2^2)$	$(2^4, -1)$		
$(\emptyset, 21^2)$	$(2^2 1^4, -1)$		
$(\emptyset, 1^4)$	(1^8)		

Dans le cas où $M = M(A_5)$ avec la notation de 6.2.5, c'est-à-dire M_{SC} est de type A_5, l'ensemble Λ associé à M est $\{s_0, s_{35}, s_2\}$ et l'ensemble des $s \in S(\bar{C})$ tels que $\Lambda \subset \Lambda(s)$ est $\{s_{16}, s_4\}$. Pour ces sommets $s = s_{16}$ et s_4, on a besoin de connaître partiellement la correspondance de Springer généralisée pour le groupe G_s, plus exactement l'image par cette correspondance d'éléments de $\mathcal{I}^{FC}(G_s)$ de la forme (M_{s_M}, ρ'). C'est plus compliqué car ces éléments ne se descendent pas au groupe adjoint $G_{s,AD}$. Par contre, le groupe $W_s(M_{s_M})$ a deux éléments, donc ρ' est l'un des deux caractères 1 ou sgn. Heureusement, nous n'aurons pas besoin du calcul complet de $Spr(M_{s_M}, \rho') = (\mathcal{O}_{\rho'}, \mathcal{L}_{\rho'})$, mais seulement de l'orbite $\mathcal{O}_{\rho'}$. Or celle-ci se déduit de la normalisation de Lusztig, cf. [24] théorème 9.2 et proposition 9.5. L'espace $\mathfrak{m}_{s_M,SC}$ porte un faisceau-caractère cuspidal dont le support est ici l'orbite nilpotente régulière de cet espace, notons-la $\mathcal{O}_{s_M}$. Alors $Spr(M_{s_M}, 1)$ est porté par l'orbite induite de $\mathcal{O}_{s_M}$ à $\mathfrak{g}_s$, c'est-à-dire l'orbite régulière de cet espace, et $Spr(M_{s_M}, sgn)$ est porté par l'orbite engendrée, qui se calcule aisément. Dans le tableau ci-dessous, on ne fait pas figurer le caractère associé à $\mathcal{L}_{\rho'}$, que nous n'avons pas calculé.

Les restrictions à des groupes W_s de représentations ρ de W^{I_F} ont beaucoup de

composantes irréductibles. Pour conserver à notre tableau une taille raisonnable, on ne fait figurer que les couples $(\mathcal{O}_{\rho'}, \mathcal{L}_{\rho'})$ dont l'orbite $\mathcal{O}_{\rho'}$ est maximale. Comme l'application $\iota_{s,nil}$ est strictement croissante d'après le tableau de 3.2.3, on voit en effet qu'il suffit de considérer ces couples pour démontrer nos théorèmes. Signalons qu'il s'avère que toutes les composantes irréductibles interviennent avec multiplicité 1.

On obtient le tableau suivant, que l'on a divisé en quatre pour des raisons typographiques.

(M, s_M, φ, ρ)	s_0	s_{16}	s_{35}	s_4	s_2	$\boldsymbol{\nabla}_F(M, s_M, \varphi, \rho)$
	F_4	$\tilde{A}_1 \times B_3$	$\tilde{A}_2 \times A_2$	$\tilde{A}_3 \times A_1$	C_4	
(G, s_0)	$\underline{(F_4(a_3), sgn)}$					$(D_4(a_1), \gamma, sgn)$
(G, s_{35}, φ_1)			$\underline{((3,3),(\theta,\theta))}$			$(D_4(a_1), g_3\gamma, \theta)$
(G, s_{35}, φ_2)			$\underline{((3,3),(\theta^2,\theta^2))}$			$(D_4(a_1), g_3\gamma, \theta^2)$

(M, s_M, φ, ρ)	s_0	s_{16}	s_{35}	s_4	s_2	$\boldsymbol{\nabla}_F(M, s_M, \varphi, \rho)$
	F_4	$\tilde{A}_1 \times B_3$	$\tilde{A}_2 \times A_2$	$\tilde{A}_3 \times A_1$	C_4	
$(M(A_5), s_{M(A_5)}, 1)$		$\underline{(2,7)}$		$(4,2)$		$D_5(a_1)$
$(M(A_5), s_{M(A_5)}, sgn)$		$\underline{(2,32^2)}$		$\underline{(2^2,2)}$		$A_2 + A_1$

(M, s_M, φ, ρ)	s_0	s_{16}	s_{35}	$\boldsymbol{\nabla}_F(M, s_M, \varphi, \rho)$
	F_4	$\tilde{A}_1 \times B_3$	$\tilde{A}_2 \times A_2$	
$(T, \phi_{1,0})$	$\underline{F_4}$	$(2, 7)$	$(3, 3)$	E_6
$(T, \phi'_{2,4})$	$(F_4(a_1), sgn)$	$(2, (51^2, (1, -1)))$	$(3, 21)$	$E_6(a_1)$
$(T, \phi_{4,1})$	$\underline{(F_4(a_1), 1)}$	$(2, 51^2)$	$(21, 3)$	D_5
		$+(1^2, 7)$	$+(3, 21)$	
$(T, \phi_{9,2})$	$\underline{(F_4(a_2), 1)}$	$(2, 7)$	$(3, 3)$	$(E_6(a_3), \gamma, 1)$
$(T, \phi''_{2,4})$	$\underline{(F_4(a_2), sgn)}$	$(2, 7)$	$(21, 3)$	$(E_6(a_3), \gamma, sgn)$
$(T, \phi'_{8,3})$	$\underline{C_3}$	$(2, 51^2)$	$(3, 3)$	$(E_6(a_3), -\gamma, 1)$
$(T, \phi'_{1,12})$	$(F_4(a_3), sgn)$	$(2, (31^4, (1, -1)))$	$(3, 1^3)$	$(E_6(a_3), -\gamma, sgn)$
$(T, \phi'_{4,7})$	$(C_3(a_1), sgn)$	$(2, 32^2)$	$(3, 21)$	$A_4 + A_1$
$(T, \phi''_{8,3})$	$\underline{B_3}$	$(2, 51^2)$	$(3, 3)$	D_4
		$+\underline{(1^2, 7)}$		
$(T, \phi'_{9,6})$	$(F_4(a_3), \psi_{31})$	$(2, (51^2, (1, -1)))$	$(3, 21)$	A_4
$(T, \phi_{12,4})$	$\underline{(F_4(a_3), 1)}$	$(2, 3^2 1)$	$(21, 3)$	$(D_4(a_1), \gamma, 1)$
		$+(1^2, 51^2)$	$+(3, 21)$	
$(T, \phi''_{6,6})$	$\underline{(F_4(a_3), \psi_{22})}$	$(2, 31^4)$	$(1^3, 3)$	$(D_4(a_1), \gamma, r)$
		$+(1^2, 51^2)$	$+(21, 21) + (3, 1^3)$	
$(T, \phi_{16,5})$	$(C_3(a_1), 1)$	$\underline{(2, 51^2)}$	$(21, 3)$	$(D_4(a_1), g_2\gamma, 1)$
			$+(3, 21)$	
$(T, \phi_{4,8})$	(B_2, sgn)	$\underline{(2, (51^2, (1, -1)))}$	$(21, 21)$	$(D_4(a_1), g_2\gamma, sgn)$
$(T, \phi'_{6,6})$	$\tilde{A}_2 + A_1$	$(2, 3^2 1)$	$\underline{(3, 3)}$	$(D_4(a_1), g_3\gamma, 1)$
$(T, \phi''_{9,6})$	$(B_2, 1)$	$(2, 3^2 1)$	$(21, 3)$	A_3
		$+(1^2, 51^2)$		
$(T, \phi''_{4,7})$	$\underline{A_2 + \tilde{A}_1}$	$\underline{(2, (3^2 1, (-1, 1)))}$	$(21, 3)$	$A_2 + 2A_1$
$(T, \phi'_{8,9})$	$\underline{\tilde{A}_2}$	$(2, 32^2)$	$(21, 21)$	$2A_2$
			$+\underline{(3, 1^3)}$	
$(T, \phi''_{8,9})$	$\underline{(A_2, 1)}$	$(2, 2^2 1^3)$	$\underline{(1^3, 3)}$	$(A_2, \gamma, 1)$
		$+\underline{(1^2, 3^2 1)}$	$+(21, 21)$	
$(T, \phi''_{1,12})$	$\underline{(A_2, sgn)}$	$(1^2, (3^2 1, (-1, 1)))$	$\underline{(1^3, 3)}$	(A_2, γ, sgn)
$(T, \phi_{9,10})$	$A_1 + \tilde{A}_1$	$\underline{(2, 31^4)}$	$(21, 21)$	$(A_2, -\gamma, 1)$
		$+(1^2, 32^2)$		
$(T, \phi'_{2,16})$	$(\tilde{A}_1, sgn)$	$\underline{(2, (31^4, (1, -1)))}$	$(21, 1^3)$	$(A_2, -\gamma, sgn)$
$(T, \phi_{4,13})$	$\underline{(\tilde{A}_1, 1)}$	$\underline{(2, 1^7)}$	$(1^3, 21)$	$2A_1$
		$+\underline{(1^2, 31^4)}$	$+\underline{(21, 1^3)}$	
$(T, \phi''_{2,16})$	$\underline{A_1}$	$\underline{(1^2, 2^2 1^3)}$	$\underline{(1^3, 21)}$	A_1
$(T, \phi_{1,24})$	$\underline{1}$	$\underline{(1^2, 1^7)}$	$\underline{(1^3, 1^3)}$	1

(M, s_M, φ, ρ)	s_4	s_2	$\boldsymbol{\nabla}_F(M, s_M, \varphi, \rho)$
	$\tilde{A}_3 \times A_1$	C_4	
$(T, \phi_{1,0})$	$(4,2)$	(8)	E_6
$(T, \phi'_{2,4})$	$(4,2)$	$\underline{(8)}$	$E_6(a_1)$
$(T, \phi_{4,1})$	$(31,2)+(4,1^2)$	$\underline{(62)}$	D_5
$(T, \phi_{9,2})$	$(4,2)$	$(61^2)+(4^2)$	$(E_6(a_3), \gamma, 1)$
$(T, \phi''_{2,4})$	$(2^2,2)$	$(42^2,(1,-1))$	$(E_6(a_3), \gamma, sgn)$
$(T, \phi'_{8,3})$	$(4,2)$	$\underline{(62)}$	$(E_6(a_3), -\gamma, 1)$
$(T, \phi'_{1,12})$	$(4,1^2)$	$\underline{(62,(-1,-1))}$	$(E_6(a_3), -\gamma, sgn)$
$(T, \phi'_{4,7})$	$\underline{(4,2)}$	$(4^2,-1)$	A_4+A_1
$(T, \phi''_{8,3})$	$\underline{(31,2)}$	(42^2)	D_4
$(T, \phi'_{9,6})$	$(31,2)+\underline{(4,1^2)}$	$\underline{(4^2)}$	A_4
$(T, \phi_{12,4})$	$(31,2)$	$(421^2)+(3^22)$	$(D_4(a_1), \gamma, 1)$
$(T, \phi''_{6,6})$	$(21^2,2)+(31,1^2)$	(421^2)	$(D_4(a_1), \gamma, r)$
$(T, \phi_{16,5})$	$(31,2)$	$\underline{(42^2)}$	$(D_4(a_1), g_2\gamma, 1)$
$(T, \phi_{4,8})$	$(2^2,2)$	$\underline{(42^2,(1,-1))}$	$(D_4(a_1), g_2\gamma, sgn)$
$(T, \phi'_{6,6})$	$(31,2)$	(3^22)	$(D_4(a_1), g_3\gamma, 1)$
$(T, \phi''_{9,6})$	$(2^2,2)$	$\underline{(41^4)}+(2^4)$	A_3
$(T, \phi''_{4,7})$	$(21^2,2)$	(2^31^2)	A_2+2A_1
$(T, \phi'_{8,9})$	$(2^2,2)+\underline{(31,1^2)}$	$\underline{(3^21^2)}$	$2A_2$
$(T, \phi''_{8,9})$	$(21^2,2)$	(2^31^2)	$(A_2, \gamma, 1)$
$(T, \phi''_{1,12})$	$(1^4,2)$	(21^6)	(A_2, γ, sgn)
$(T, \phi_{9,10})$	$(21^2,2)+\underline{(2^2,1^2)}$	$\underline{(2^4)}$	$(A_2, -\gamma, 1)$
$(T, \phi'_{2,16})$	$\underline{(2^2,1^2)}$	$\underline{(2^4,-1)}$	$(A_2, -\gamma, sgn)$
$(T, \phi_{4,13})$	$(1^4,2)+\underline{(21^2,1^2)}$	$\underline{(2^21^4)}$	$2A_1$
$(T, \phi''_{2,16})$	$\underline{(1^4,2)}$	$\underline{(21^6)}$	A_1
$(T, \phi_{1,24})$	$\underline{(1^4,1^2)}$	$\underline{(1^8)}$	1

Le théorème 6.2.6 se démontre comme en 6.2.12 en utilisant les tableaux ci-dessus et le calcul de $\iota_{s,nil}$ fait en 3.2.3 pour tous les sommets $s \in S(\bar{C})$. Les termes soulignés ont la même signification qu'en 6.2.12.

Fixons un élément $N \in \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$ dont on note $\mathcal{O}$ l'orbite. Dans le cas où $A(N) = \{1\}$, l'ensemble $\mathcal{B}_{Irr}(G, N)$ est réduit à un élément (M, s_M, φ, ρ). Le théorème 6.2.7 se réduit à l'assertion que, dans la ligne des tableaux ci-dessus correspondant à cet élément, il y a au moins un terme souligné (on doit évidemment réunir les deux derniers tableaux...). Supposons $A(N) \neq \{1\}$. Il y a trois éléments N qui vérifient cette condition. On définit dans chaque cas l'application b_F du théorème 6.2.7 par les formules suivantes :

supposons $\mathcal{O}$ de type $E_6(a_3)$; alors $\tilde{\bar{A}}(N)/conj \simeq \{\pm\gamma\}$; on pose $b_F(\gamma) = (s_0, F_4(a_2))$, $b_F(-\gamma) = (s_2, (62))$;

supposons $\mathcal{O}$ de type A_2 ; alors $\tilde{\bar{A}}(N)/conj \simeq \{\pm\gamma\}$; on pose $b_F(\gamma) = (s_0, A_2)$, $b_F(-\gamma) = (s_2, (2^4))$;

supposons $\mathcal{O}$ de type $D_4(a_1)$; alors $\tilde{\bar{A}}(N)/conj \simeq \{\gamma, g_2\gamma, g_3\gamma\}$; on pose $b_F(\gamma) = (s_0, F_4(a_3))$, $b_F(g_2\gamma) = (s_{16}, (2, 51^2))$, $b_F(g_3\gamma) = (s_{35}, (3,3))$.
Comme en 6.2.12, les propriétés requises de cette application se lisent sur les tableaux ci-dessus.

6.3 Une nouvelle base de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$

6.3.1 Un calcul plus précis de $\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})$

Pour $\mathcal{O}\in\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$, on note $N_{\mathcal{O}}$ l'unique élément de $\mathcal{N}\simeq\mathfrak{g}_{nil}/conj$ tel que l'image de $N_{\mathcal{O}}$ par l'application **Rel** soit l'orbite dans $\mathfrak{g}_{nil}$ engendrée par $\mathcal{O}$. On a $N_{\mathcal{O}}\in\mathcal{N}(\Gamma_F)$. Rappelons que, pour $N\in\mathcal{N}$, on note $d(N)$ la dimension de l'orbite contenant N. L'entier $d(N_{\mathcal{O}})$ est aussi la dimension de $\mathcal{O}$ comme variété analytique sur F.

Pour $s\in S(\bar{C})$ et $\mathcal{O}_s\in\mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)/conj$, on note $\underline{\mathcal{O}}_s$ l'orbite dans $\mathfrak{g}_{s,nil}$ contenant $\mathcal{O}_s$.

Soient $N\in\mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$, $d\in\tilde{\bar{A}}(N)/conj$ et $(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G,N,d)$. Posons $b_F(d)=(s,\underline{\mathcal{O}}_d)$. Le (ii) du théorème 6.2.7 affirme l'existence et l'unicité d'une certaine représentation $\rho'\in Irr_{\mathbb{F}_q}(W_s(M_{\Lambda,s_\Lambda}))$. On la note ici $\rho'_{\Lambda,\varphi,\rho}$ et on pose $Spr(M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,\rho'_{\Lambda,\varphi,\rho})=(\underline{\mathcal{O}}_d,\mathcal{L}_{\Lambda,\varphi,\rho})$.

Proposition. *Soient $s\in S(\bar{C})$, $\mathcal{O}_s\in\mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)/conj$, $N\in\mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$, $d\in\tilde{\bar{A}}(N)/conj$ et $(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)$. Posons $\mathcal{O}=rel_{s,F}(\mathcal{O}_s)$, $M=M_\Lambda$ et fixons un élément $N_s\in\mathcal{O}_s$.*

(i) Si $\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})\neq 0$, alors $d(N_{\mathcal{O}})<d(N)$ ou $N_{\mathcal{O}}=N$.

(ii) Supposons $(s,\underline{\mathcal{O}}_s)=b_F(d)$. Si $(\Lambda,\varphi,\rho)\notin\mathcal{B}'_{Irr}(G,N,d)$, $\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})=0$. Si $(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G,N,d)$, on a $\Lambda\subset\Lambda(s)$ et

$$\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})=m(\rho_s^\flat,\rho'^\flat_{\Lambda,\varphi,\rho})\bar{\mathcal{Y}}_{\underline{\mathcal{O}}_d,\mathcal{L}_{\Lambda,\varphi,\rho}}(N_s).$$

Preuve. Le terme $\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})$ est calculé par les propositions 6.1.8 et 6.1.9. D'où

(1) si $\Lambda\not\subset\Lambda(s)$, $\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})=0$:

(2) si $\Lambda\subset\Lambda(s)$,

$$\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})=\sum_{\rho'\in Irr_{\mathbb{F}_q}(W_s(M_{s_\Lambda}))}q^{dim(\mathcal{O}_{\rho'})/2-dim(\mathcal{O}_s)/2}m(\rho_s^\flat,\rho'^\flat)\chi^\natural_{M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,\rho'}(N_s).$$

Supposons $\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})\neq 0$. Alors $\Lambda\subset\Lambda(s)$ et il existe $\rho'\in Irr_{\mathbb{F}_q}(W_s(M_{\Lambda,s_\Lambda}))$ tel que $m(\rho_s^\flat,\rho'^\flat)\neq 0$ et que $\chi^\natural_{M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,\rho'}$ n'est pas nulle sur $\mathcal{O}_s$. La première propriété implique $m(\rho_s,\rho')\neq 0$. Le théorème 6.2.6 implique que

(3) $d(N_{\rho'})<d(N)$ ou $N_{\rho'}=N$.

Puisque $\chi^\natural_{M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,\rho'}$ n'est pas nulle sur $\mathcal{O}_s$, $\underline{\mathcal{O}}_s$ est contenue dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}'_{\rho'}$. On utilise la propriété de croissance de l'application $\iota_{s,nil}$: cela entraîne que $\iota_{s,nil}(\underline{\mathcal{O}}_s)$ est contenue dans l'adhérence de $\iota_{s,nil}(\mathcal{O}_{\rho'})$. On a $N_{\mathcal{O}}\in\iota_{s,nil}(\underline{\mathcal{O}}_s)$ et $N_{\rho'}\in\iota_{s,nil}(\mathcal{O}_{\rho'})$. Donc $N_{\mathcal{O}}$ appartient à l'adhérence de l'orbite de $N_{\rho'}$, d'où

(4) $d(N_{\mathcal{O}})<d(N_{\rho'})$ ou $N_{\mathcal{O}}=N_{\rho'}$.

L'assertion (i) de l'énoncé résulte de (3) et (4).

Supposons $(s,\underline{\mathcal{O}}_s)=b_F(d)$. On a alors $N_{\mathcal{O}}=N$. Sous l'hypothèse $\Lambda\subset\Lambda(s)$, le même calcul montre que, dans la formule (2), on peut se limiter aux ρ' tels que $\underline{\mathcal{O}}_s$ est contenue dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}'_{\rho'}$ et $N=N_{\mathcal{O}}=N_{\rho'}$. La croissance stricte de l'application $\iota_{s,nil}$, cf. 3.1.3, implique que ces conditions équivalent à $\mathcal{O}'_{\rho'}=\underline{\mathcal{O}}_s$. Le théorème 6.2.7 dit qu'une telle représentation n'existe pas si $(\Lambda,\varphi,\rho)\notin\mathcal{B}'_{Irr}(G,N,d)$. Dans ce cas $\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})=0$. Puisque cette nullité est aussi vérifiée si $\Lambda\not\subset\Lambda(s)$, on obtient la première assertion du (ii) de l'énoncé. Supposons $(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G,N,d)$. Alors le théorème 6.2.7 dit que $\Lambda\subset\Lambda(s)$ et qu'il n'y a qu'une représentation ρ' vérifiant la condition ci-dessus, à savoir $\rho'_{\Lambda,\varphi,\rho}$. Le terme $q^{dim(\mathcal{O}_{\rho'})/2-dim(\mathcal{O}_s)/2}$ disparaît de la formule (2) pour cette représentation puisque $\mathcal{O}_{\rho'}=\underline{\mathcal{O}}_s$. Puisque $Spr(M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,\rho'_{\Lambda,\varphi,\rho})=(\underline{\mathcal{O}}_d,\mathcal{L}_{\Lambda,\varphi,\rho})$ et $N_s\in\underline{\mathcal{O}}_s=\underline{\mathcal{O}}_d$, on a l'égalité $\chi^\natural_{M_{s_\Lambda},\mathcal{E}_\varphi,\rho'_{\Lambda,\varphi,\rho}}(N_s)=\bar{\mathcal{Y}}_{\underline{\mathcal{O}}_d,\mathcal{L}_{\Lambda,\varphi,\rho}}(N_s)$, cf. 5.2.1. Donc (2) se transforme en la formule du (ii) de l'énoncé. $\square$

6.3.2 Construction d'une famille de distributions

La famille $(k(\Lambda,\varphi,\rho))_{(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G)}$ est une base de $D^G(\mathcal{D}^{st}(\mathfrak{g}(F)))$. Pour $(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G)$, notons $I(\Lambda,\varphi,\rho)$ l'élément de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ tel que $D^G\circ\delta(I(\Lambda,\varphi,\rho)))=k(\Lambda,\varphi,\rho)$. Alors $(I(\Lambda,\varphi,\rho))_{(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G)}$ est une base de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$. Pour $(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G)$, la distribution $I(\Lambda,\varphi,\rho)$ appartient a fortiori à $I(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ et on peut écrire cet élément dans la base $(I_{\mathcal{O}})_{\mathcal{O}\in\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj}$ de cet espace :

$$(1)\qquad I(\Lambda,\varphi,\rho)=\sum_{\mathcal{O}\in\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj}c(\Lambda,\varphi,\rho,\mathcal{O})I_{\mathcal{O}}.$$

Lemme. *Soient $N\in\mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$, $(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)$ et $\mathcal{O}\in\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$. Supposons $c(\Lambda,\varphi,\rho,\mathcal{O})\neq 0$. Alors $d(N_{\mathcal{O}})<d(N)$ ou $N_{\mathcal{O}}=N$.*

Preuve. Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des $\mathcal{O}'\in\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$ telles que $c(\Lambda,\varphi,\rho,\mathcal{O}')\neq 0$. On ordonne de façon usuelle les éléments de $\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$: $\mathcal{O}'\leq\mathcal{O}''$ si et seulement si $\mathcal{O}'\subset Cl_F(\mathcal{O}'')$, où $Cl_F(\mathcal{O}'')$ est l'adhérence de $\mathcal{O}''$ pour la topologie p-adique.

Supposons d'abord que $\mathcal{O}$ est un élément maximal de $\mathcal{V}$. Fixons $s\in S(\bar{C})$ et $\mathcal{O}_s\in\mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)/conj$ tels que $rel_{s,F}(\mathcal{O}_s)=\mathcal{O}$, cf. 3.3.1(9). Calculons $I(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})$. Pour $\mathcal{O}'\in\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$, la proposition 6.1.2 dit que si $I_{\mathcal{O}'}(h_{s,\mathcal{O}_s})\neq 0$, alors $\mathcal{O}\leq\mathcal{O}'$. Puisque $\mathcal{O}$ est supposé maximal dans $\mathcal{V}$, on a $c(N,\varphi,\rho,\mathcal{O}')=0$ si $\mathcal{O}<\mathcal{O}'$. Il résulte alors de (1) que

$$I(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})=c(\Lambda,\varphi,\rho,\mathcal{O})I_{\mathcal{O}}(h_{s,\mathcal{O}_s}).$$

Ce dernier terme est non nul d'après la proposition 6.1.2, donc $I(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})\neq 0$.

Puisque $h_{s,\mathcal{O}_s}\in\mathcal{H}$, la définition de l'application δ implique que

$$I(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})=\hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s}).$$

Puisque cette expression n'est pas nulle, le (i) de la proposition 6.3.1 dit que la conclusion du lemme est vérifiée. Cela démontre le lemme sous l'hypothèse que $\mathcal{O}$ est maximale dans $\mathcal{V}$. Si $\mathcal{O}$ n'est pas maximale, on peut fixer un élément maximal $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{O}\subsetneq Cl_F(\mathcal{O}')$. On a alors $d(N_{\mathcal{O}})<d(N_{\mathcal{O}'})$ et l'assertion du lemme déjà prouvée pour $\mathcal{O}'$ entraîne $d(N_{\mathcal{O}})<d(N)$. $\square$

Pour $N\in\mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$ et $(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)$, on note $I^{max}(\Lambda,\varphi,\rho)$ la distribution définie par

$$I^{max}(\Lambda,\varphi,\rho)=\sum_{\mathcal{O}\in\mathfrak{g}_{nil}(F)/conj,N_{\mathcal{O}}=N}c(\Lambda,\varphi,\rho,\mathcal{O})I_{\mathcal{O}}.$$

D'après le lemme précédent, on peut aussi bien remplacer la condition $N_{\mathcal{O}}=N$ par $d(N_{\mathcal{O}})=d(N)$. Donc, d'après 6.1.1(3), $I^{max}(\Lambda,\varphi,\rho)$ appartient à $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$. D'autre part, $I^{max}(\Lambda,\varphi,\rho)$ est supportée par l'orbite $\mathbf{Rel}(N)\in\mathfrak{g}_{nil}/conj$.

6.3.3 Indépendance linéaire des éléments de la famille

Théorème. *La famille de distributions $(I^{max}(\Lambda,\varphi,\rho))_{(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G)}$ est une base de l'espace $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$.*

Preuve. Cette famille est indexée par l'ensemble $\mathcal{B}'_{Irr}(G)$ qui indexe aussi la base $(I(\Lambda,\varphi,\rho))_{(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G)}$ de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$. C'est donc une base si et seulement si cette famille est linéairement indépendante. On décompose la famille en sous-familles indexées

par $\mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$. La sous-famille associée à $N \in \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$ est $(I^{max}(\Lambda,\varphi,\rho))_{(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)}$. Ses éléments sont des distributions portées par l'orbite $\mathbf{Rel}(N)$ et cette orbite détermine N. Il en résulte que la famille $(I^{max}(\Lambda,\varphi,\rho))_{(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G)}$ est linéairement indépendante si et seulement si chaque sous-famille l'est.

Fixons $N \in \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$. Considérons une combinaison linéaire

$$D = \sum_{(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)} x(\Lambda,\varphi,\rho) I^{max}(\Lambda,\varphi,\rho),$$

avec des coefficients $x(\Lambda,\varphi,\rho) \in \mathbb{C}$. Supposons $D = 0$. On veut prouver que $x(\Lambda,\varphi,\rho) = 0$ pour tout $(\Lambda,\varphi,\rho) \in \mathcal{B}'_{Irr}(G,N)$. Puisque $\mathcal{B}'_{Irr}(G,N) = \sqcup_{d\in\tilde{\bar{A}}(N)/conj}\mathcal{B}'_{Irr}(G,N,d)$, on est ramené à prouver

(1) pour tout $d \in \tilde{\bar{A}}(N)/conj$, on a $x(\Lambda,\varphi,\rho) = 0$ pour tout $(\Lambda,\varphi,\rho) \in \mathcal{B}'_{Irr}(G,N,d)$.

Fixons $d \in \tilde{\bar{A}}(N)/conj$. Posons $b_F(d) = (s,\underline{\mathcal{O}}_d)$. Rappelons que $\underline{\mathcal{O}}_d$ est une orbite dans $\mathfrak{g}_{s,nil}$ qui est conservée par l'action galoisienne. Soit $\mathcal{O}_s \in \mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)/conj$ une orbite telle que $\mathcal{O}_s \subset \underline{\mathcal{O}}_d$. Posons $\mathcal{O} = rel_{s,F}(\mathcal{O}_s)$. Puisque $\iota_{s,nil}(\underline{\mathcal{O}}_d) = N$, on a $N_{\mathcal{O}} = N$. Soit $(\Lambda,\varphi,\rho) \in \mathcal{B}'_{Irr}(G,N)$. Calculons $I^{max}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})$. La différence $I^{max}(\Lambda,\varphi,\rho) - I(\Lambda,\varphi,\rho)$ est combinaison linéaire d'intégrales orbitales $I_{\mathcal{O}'}$ pour des $\mathcal{O}' \in \mathfrak{g}_{nil}(F)/conj$ telles que $d_{N_{\mathcal{O}'}} < d_N = d_{N_{\mathcal{O}}}$. La proposition 6.1.2 implique que $I^{max}(\Lambda,\varphi,\rho) - I(\Lambda,\varphi,\rho)$ annule $h_{s,\mathcal{O}_s}$. On a aussi $I(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s}) = \hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})$ par définition de l'application δ. D'où $I^{max}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s}) = \hat{k}(\Lambda,\varphi,\rho)(h_{s,\mathcal{O}_s})$. On applique la proposition 6.3.1. L'expression précédente est nulle si $(\Lambda,\varphi,\rho) \notin \mathcal{B}'_{Irr}(G,N,d)$. Si $(\Lambda,\varphi,\rho) \in \mathcal{B}'_{Irr}(G,N,d)$, elle vaut $m(\rho_s^\flat, \rho'^\flat_{\Lambda,\varphi,\rho})\bar{\mathcal{Y}}_{\underline{\mathcal{O}}_d,\mathcal{L}_{\Lambda,\varphi,\rho}}(N_s)$. On en déduit

$$(2) \qquad D(h_{s,\mathcal{O}_s}) = \sum_{(\Lambda,\varphi,\rho)\in\mathcal{B}'_{Irr}(G,N,d)} x(\Lambda,\varphi,\rho) m(\rho_s^\flat, \rho'^\flat_{\Lambda,\varphi,\rho})\bar{\mathcal{Y}}_{\underline{\mathcal{O}}_d,\mathcal{L}_{\Lambda,\varphi,\rho}}(N_s).$$

Ceci est nul puisque $D = 0$ par hypothèse. Pour $(\Lambda,\varphi,\rho) \in \mathcal{B}'_{Irr}(G,N,d)$, on a $m(\rho_s, \rho'_{\Lambda,\varphi,\rho}) = 1$ d'après le théorème 6.2.7. Il en résulte que $m(\rho_s^\flat, \rho'^\flat_{\Lambda,\varphi,\rho}) \neq 0$ (cette multiplicité est égale à une racine de l'unité qui n'est pas forcément 1). D'après le même théorème, l'application $(\Lambda,\varphi,\rho) \mapsto \mathcal{L}_{\Lambda,\varphi,\rho}$ est injective sur $\mathcal{B}'_{Irr}(G,N,d)$. Donc les fonctions $\bar{\mathcal{Y}}_{\underline{\mathcal{O}}_d,\mathcal{L}_{\Lambda,\varphi,\rho}}$ qui interviennent ci-dessus, qui sont portées par $\underline{\mathcal{O}}_d^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$, sont linéairement indépendantes. En faisant varier $\mathcal{O}_s$ parmi les éléments de $\mathfrak{g}_{s,nil}(\mathbb{F}_q)/conj$ qui sont contenus dans $\underline{\mathcal{O}}_d$, l'élément N_s varie parmi toutes les classes de conjugaison par $G_s(\mathbb{F}_q)$ dans $\underline{\mathcal{O}}_d^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$. La nullité de l'expression (2) pour toutes ces orbites $\mathcal{O}_s$ entraîne $x(\Lambda,\varphi,\rho) = 0$ pour tout $(\Lambda,\varphi,\rho) \in \mathcal{B}'_{Irr}(G,N,d)$. Cela démontre (1) et le théorème. $\square$

6.3.4 Nombres d'éléments

Fixons $N \in \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$. Posons $\mathbf{Rel}(N) = \mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{nil}/conj$. L'orbite $\mathcal{O}$ est conservée par l'action galoisienne. Soit $e \in \mathcal{O}\cap\mathfrak{g}(F)$. D'après la proposition 3.3.4, le nombre d'éléments de $H^1(\Gamma_F,\bar{A}(e))$ est indépendant de e. Notons-le $h^1(\mathcal{O})$. D'après la même proposition, on a $h^1(\mathcal{O}) = |\bar{\mathcal{C}}_F(N)|$. Rappelons que l'on a défini la notion d'orbite exceptionnelle en 5.3.5.

Lemme. *Supposons que l'orbite de N ne soit pas exceptionnelle ou que $\delta_4(q-1) = 1$. Alors le nombre d'éléments de $\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)$ est $h^1(\mathcal{O})$. Supposons que l'orbite de N est exceptionnelle et que $\delta_4(q-1) = 0$. Alors ce nombre d'éléments est 2 tandis que $h^1(\mathcal{O}) = 4$.*

Preuve. On a défini l'ensemble $\mathcal{M}(G,N)$ en 6.2.1. C'est celui des classes de conjugaison par $\bar{A}(N)$ dans l'ensemble des couples (d,μ) où $d \in \tilde{\bar{A}}(N)$ et μ est une représentation irréductible de $Z_{\bar{A}(N)}(d)$. Fixons un ensemble de représentants $\tilde{D}$ des classes de conjugaison par $\bar{A}(N)$ dans $\tilde{\bar{A}}(N)$. Alors le nombre d'éléments de $\mathcal{M}(G,N)$ est la somme sur $d \in \tilde{D}$ de $|Irr(Z_{\bar{A}(N)}(d))|$. Notons $\bar{\mathcal{C}}'_F(N)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $\bar{A}(N)$ dans l'ensemble des couples $(d,v) \in \tilde{\bar{A}}(N) \times \bar{A}(N)$ tels que $vdv^{-1} = d$. Pour tout $d \in \tilde{\bar{A}}(N)$, notons $Z_{\bar{A}(N)}(d)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison dans $Z_{\bar{A}(N)}(d)$. Le nombre d'éléments de $\bar{\mathcal{C}}'_F(N)$ est la somme sur $d \in \tilde{D}$ de $|Z_{\bar{A}(N)}(d)/conj|$. Mais $|Z_{\bar{A}(N)}(d)/conj| = |Irr(Z_{\bar{A}(N)}(d)|$. Donc

(1) les ensembles $\mathcal{M}(G,N)$ et $\bar{\mathcal{C}}'_F(N)$ ont même nombre d'éléments.

L'application $\boldsymbol{\nabla}_F$ définie en 6.2.1 est une injection de $\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)$ dans $\mathcal{M}(G,N)$. Elle n'est pas toujours surjective. La construction de $\boldsymbol{\nabla}_F$ s'appuie sur les descriptions de [48] des espaces $FC^{st}(\mathfrak{m}_{SC}(F))$ pour les F-Levi M de G. Dans ces descriptions apparaissent des conditions sur la divisiblité de $q-1$. On peut dire que certaines fonctions disparaissent quand G est exceptionnel et que $q-1$ n'est pas divisible par 3, 4 ou 5. Supposons que G ne soit pas exceptionnel ou que $q-1$ soit divisible par 3.4.5. On s'aperçoit alors que $\boldsymbol{\nabla}_F$ se restreint en une bijection de $\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)$ sur $\mathcal{M}(G,N)$.

L'ensemble $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$ est celui des classes de conjugaison par $\bar{A}(N)$ dans l'ensemble des couples $(d,v) \in \tilde{\bar{A}}(N) \times \bar{A}(N)$ qui vérifient la condition

(2) si G n'est pas de type $(D_4, 3-ram)$, alors $vdv^{-1} = d^q$.

Si G est de type $(D_4, 3-ram)$, le groupe $\bar{A}^+(N)$ est commutatif. Alors $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$ et $\bar{\mathcal{C}}'_F(N)$ sont tous deux égaux à $\tilde{\bar{A}}(N) \times \bar{A}(N)$. Supposons que G n'est pas de type $(D_4, 3-ram)$. Si G n'est pas exceptionnel, $\bar{A}^+(N)$ est un produit de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et de nouveau, $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$ et $\bar{\mathcal{C}}'_F(N)$ sont tous deux égaux à $\tilde{\bar{A}}(N) \times \bar{A}(N)$. Supposons que G soit exceptionnel et que $q-1$ soit divisible par 3.4.5. Puisque $\bar{A}(N) = \mathfrak{S}_n$ pour un entier $n \in \{1,...,5\}$ et que, dans le cas (E_6, ram), on a $\bar{A}^+(N) \simeq \bar{A}(N) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, la condition ci-dessus $vdv^{-1} = d^q$ équivaut à $vdv^{-1} = d$. Alors $\bar{\mathcal{C}}_F(N) = \bar{\mathcal{C}}'_F(N)$. Ces considérations démontrent l'égalité $|\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)| = |\bar{\mathcal{C}}_F(N)|$, c'est-à-dire $|\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)| = h^1(\mathcal{O})$ sous l'hypothèse que G n'est pas exceptionnel ou que $q-1$ soit divisible par 3.4.5.

Supposons maintenant que G est exceptionnel. Notons $\bar{\mathcal{C}}''_F(N)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $\bar{A}(N)$ dans l'ensemble des couples $(d,v) \in \bar{A}(N) \times \bar{A}(N)$ qui vérifient la condition

(3) $vdv^{-1} = d^q$.

Si G est déployé sur F^{nr}, on a $\bar{\mathcal{C}}''_F(N) = \bar{\mathcal{C}}_F(N)$. Si G est de type (E_6, ram), on a rappelé ci-dessus que $\bar{A}^+(N) \simeq \bar{A}(N) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et il en résulte que $\bar{\mathcal{C}}_F(N)$ a même nombre d'éléments que $\bar{\mathcal{C}}''_F(N)$. Supposons que l'orbite de N ne soit pas exceptionnelle. En vertu de (1), l'égalité affirmée par l'énoncé du lemme équivaut à

(4) $|\mathcal{M}(G,N)| - |\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)| = |\bar{\mathcal{C}}'_F(N)| - |\bar{\mathcal{C}}''_F(N)|$.

Rappelons que $\bar{A}(N)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$ pour un entier $n \in \{1,...,5\}$. On fixe un ensemble de représentants D des classes de conjugaison dans $\bar{A}(N)$. On a déjà dit que

$$|\bar{\mathcal{C}}'_F(N)| = \sum_{d \in D} |Z_{\bar{A}(N)}(d)/conj|.$$

Pour $d \in D$, notons $Z_{\bar{A}(N)}(d;q)$ l'ensemble des $v \in \bar{A}(N)$ vérifiant la relation (3). Il n'est jamais vide et, si l'on en fixe un élément v, on a $Z_{\bar{A}(N)}(d;q) = Z_{\bar{A}(N)}(d)v = vZ_{\bar{A}(N)}(d)$. Notons $Z_{\bar{A}(N)}(d;q)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $Z_{\bar{A}(N)}(d)$ dans $Z_{\bar{A}(N)}(d;q)$.

Alors

$$|\bar{\mathcal{C}}''_F(N)| = \sum_{d\in D} |Z_{\bar{A}(N)}(d;q)/conj|.$$

On calcule aisément le membre de droite de (4) à l'aide des deux égalités ci-dessus. Traitons par exemple le cas où G est de type E_8 et N est de type $E_8(a_7)$. On a alors $\bar{A}(N) \simeq \mathfrak{S}_5$. L'ensemble D est paramétré par $\mathcal{P}(5)$, on note $\lambda(d)$ la partition paramétrant $d \in D$. Si $\lambda(d)$ est égale à (1^5), (21^3), (2^21), on a $d^2 = 1$, la relation (3) équivaut à $vdv^{-1} = d$ et $Z_{\bar{A}(N)}(d;q) = Z_{\bar{A}(N)}(d)$. Supposons que $\lambda(d) = (31^2)$ ou (32). Alors $Z_{\bar{A}(N)}(d) \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Pour $v \in Z_{\bar{A}(N)}(d;q)$, la conjugaison par v agit dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ par multiplication par q. On en déduit que $Z_{\bar{A}(N)}(d;q)/conj$ a même nombre d'éléments que $\mathbb{Z}/(6\mathbb{Z}+(q-1)\mathbb{Z})$. D'où

$$|Z_{\bar{A}(N)}(d)/conj| - |Z_{\bar{A}(N)}(d;q)/conj| = 4(1-\delta_3(q-1)).$$

Si $\lambda(d) = (41)$ ou $\lambda(d) = (5)$, on trouve de même

$$|Z_{\bar{A}(N)}(d)/conj| - |Z_{\bar{A}(N)}(d;q)/conj| = 2(1-\delta_4(q-1)), \quad \text{resp. } 4(1-\delta_5(q-1)).$$

D'où, dans notre exemple :

$$(5) \qquad |\bar{\mathcal{C}}'_F(N)| - |\bar{\mathcal{C}}''_F(N)| = 8(1-\delta_3(q-1)) + 2(1-\delta_4(q-1)) + 4(1-\delta_5(q-1)).$$

Le membre de gauche de (4) calcule le défaut de surjectivité de l'injection de $\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)$ dans $\mathcal{M}(G,N)$ déduite de $\boldsymbol{\nabla}_F$. Comme on l'a dit ci-dessus, il s'agit de voir quels sont les éléments (M, s_M, φ, ρ) qui disparaissent quand $q-1$ n'est pas divisible par 3.4.5. Dans le cas où G est de type (E_6, ram), cela se voit directement sur la définition de $\boldsymbol{\nabla}_F$, cf. 6.2.5 : il y a deux termes qui disparaissent si $\delta_3(q-1) = 0$, qui concernent l'orbite N de type $D_4(a_1)$. Le membre de gauche de (4) vaut donc $2(1-\delta_3(q-1))$ pour cette orbite et 0 pour les autres orbites. Supposons maintenant G déployé sur F^{nr}. Les éléments (M, s_M, φ, ρ) qui disparaissent se déduisent des résultats de [48] paragraphe 9. Leur image $N \in \mathcal{N}_{sp}(\Gamma_F)$ se calcule en associant d'abord à (M, s_M, φ, ρ) un triplet $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, \rho)$ comme en 6.2.1, puis en utilisant les tables de [7]. Donnons le résultat dans le même cas que plus haut : G est de type E_8 et N est de type $E_8(a_7)$. Si $\delta_3(q-1) = 0$, il y a quatre termes (M, s_M, φ, ρ) qui disparaissent avec M de type E_6. Précisement, le couple (M, s_M) est unique et son ensemble Λ associé est $\Delta_a - \{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_7\}$. Ce couple se complète par deux fonctions φ possibles et deux représentations ρ. Les termes suivants disparaissent aussi (notons que le terme ρ est inexistant si $M = G$) :

si $\delta_3(q-1) = 0$, deux termes $(G, s_{\alpha_4}, \varphi)$ et deux termes $(G, s_{\alpha_7}, \varphi)$;

si $\delta_4(q-1) = 0$, deux termes $(G, s_{\alpha_6}, \varphi)$;

si $\delta_5(q-1) = 0$, quatre termes $(G, s_{\alpha_5}, \varphi)$.

On constate alors que $|\mathcal{M}(G,N)| - |\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)|$ est égal au membre de droite de (5), ce qui démontre (4) pour notre exemple.

Des calculs analogues valent dans tous les cas où N n'est pas exceptionnelle.

Dans les cas où N est exceptionnelle, on a $\bar{A}(N) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $|\bar{\mathcal{C}}_F(N)| = 4$, d'où $h^1(N) = 4$. Mais, si $\delta_4(q-1) = 0$, il y a deux termes qui disparaissent de $\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)$: ceux de la forme (M, s_M, φ, ρ) où M est de type E_7 et $s_M = s_{\alpha_4}$ (pour la numérotation des racines de M). Dans ce cas, $\mathcal{B}'_{Irr}(G,N)$ n'a que deux éléments. □

6.3.5 L'énoncé final

Pour toute orbite $\underline{\mathcal{O}} \in (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$, notons $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}}$ le sous-espace des éléments de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ qui sont combinaisons linéaires d'intégrales orbitales $I_{\mathcal{O}}$ avec $\mathcal{O} \subset \underline{\mathcal{O}}$.

Théorème. *(i) L'espace $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{nil}$ est la somme directe des $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}}$ quand $\underline{\mathcal{O}}$ décrit $(\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$.*

(ii) Pour $\underline{\mathcal{O}} \in (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$, l'espace $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}}$ est nul si $\underline{\mathcal{O}}$ n'est pas spéciale.

(iii) Soit $\underline{\mathcal{O}} \in (\mathfrak{g}_{nil}/conj)^{\Gamma_F}$, supposons $\underline{\mathcal{O}}$ spéciale et fixons $e \in \underline{\mathcal{O}}^{\Gamma_F}$. Si $\underline{\mathcal{O}}$ n'est pas exceptionnelle ou si $\delta_4(q-1) = 1$, la dimension de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}}$ est égale au nombre d'éléments de $H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$. Si $\underline{\mathcal{O}}$ est exceptionnelle et $\delta_4(q-1) = 0$, la dimension de $SI(\mathfrak{g}(F))^*_{\underline{\mathcal{O}}}$ est 2 tandis que le nombre d'éléments de $H^1(\Gamma_F, \bar{A}(e))$ est 4.

C'est une conséquence directe du théorème 6.3.3 et du lemme 6.3.4.

Références

[1] P. Achar, A.-M. Aubert : *Localisation de faisceaux caractères*, Adv. in Math. 224 (2010), p. 2435-2471

[2] J. Adler : *Refined anisotropic K-types and supercuspidal representations*, Pacific J. Math. 185 (1998), p. 1-32

[3] D. Alvis : Induce/restrict matrices for exceptional Weyl groups, arXiv RT 0506377

[4] M. Assem : *On stability and endoscopic transfer of unipotent orbital integrals on p-adic symplectic groups*, Memoirs AMS 635 (1998)

[5] A.-M. Aubert, J. Michel, R. Rouquier : *Correspondance de Howe pour les groupes réductifs sur les corps finis*, Duke Math. J. 83 (1996), p. 353-397

[6] N. Bourbaki : *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*, Hermann 1968

[7] R. Carter : *Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters*, Wiley-Interscience 1985

[8] S. DeBacker : *Homogeneity results for invariant distributions of a reductive p-adic group*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 35 (2002), p. 391-422

[9] S. DeBacker : *Parametrizing nilpotent orbits via Bruhat-Tits theory*, Annals of Math. 156 (2002), p. 295-332

[10] S. DeBacker : *Parametrizing conjugacy classes of maximal unramified tori via Bruhat-Tits theory*,

[11] S. DeBacker, D. Kazhdan : *Stable distributions supported on the nilpotent cone for the group G_2*, in *The unity of Mathematics*, Prog. Math. 244, Birkhäuser 2006, p. 205-262

[12] S. DeBacker, M. Reeder : Depth-zero supercuspidal L-packets and their stability, Annals of Math. 169 (2009), p. 795-901

[13] F. Digne, G. Lehrer, J. Michel : *On character sheaves and characters of reductive groups at unipotent classes*, Pure Applied Math. Quaterly 10 (2014), p. 459-512

[14] T. Haines, M. Rapoport : *On parahoric subgroups*, appendice à G.Pappas, M. Rapoport *Twisted loop groups and their affine flag varieties*, Adv. in Math. 219 (2008), p. 118-198

[15] Harish-Chandra : *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, L. N. in Math 162, Springer, 1970

[16] D. Kazhdan : *Proof of Springer's hypothesis*, Israël J. Math. 28 (1977), p. 272-286

[17] J.-L. Kim, F. Murnaghan : *K-types and Γ-asymptotic expansions*, J. Reine Angew. Math. 592 (2006), p. 189-236

[18] B. Kostant : *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*, Amer. J. Math. 81 (1959), p. 973-1032

[19] R. Kottwitz : *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. 49 (1982), p. 785-806

[20] R. Kottwitz : *Stable trace formula : elliptic singular terms*, Math. Ann. 275 (1986), p. 365-399

[21] R. Kottwitz, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[22] R. P. Langlands, D. Shelstad : *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. 278 (1987), p. 219-271

[23] G. Lusztig : *Characters of reductive groups over a local field*, Annals of Math. Studies 107, Princeton Univ. Press (1984)

[24] G. Lusztig : *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Inventiones Math. 75 (1984), p. 205-272

[25] G. Lusztig : *Character sheaves II*, Adv. in Math. 57 (1985), p. 226-265

[26] G. Lusztig : *Character sheaves III*, Adv. in Math. 57 (1985), p. 266-315

[27] G. Lusztig : *On the character values of finite Chevalley groups at unipotent elements*, J. Algebra 104 (1986), p. 146-194

[28] G. Lusztig : *Fourier transform on a semi-simple Lie algebra over $\mathbb{F}_q$*, in *Algebraic groups, Utrecht 1986*, Springer LN 1271 (1987), p. 177-188

[29] G. Lusztig : *Green functions and character sheaves*, Annals of Math. 131 (1990), p. 355-408

[30] G. Lusztig : *A unipotent support for irreducible representations*, Adv. in Math. 94 (1992), p. 139-179

[31] G. Lusztig : *Unipotent almost characters of simple p-adic groups*, in *De la géométrie algébrique aux formes automorphes*, Astérisque 370 (2015), p. 243-267

[32] G. Lusztig : *Restriction of a character sheaf to conjugacy classes*, Bull. Math. Soc. Sci. Roum. 58 (2015), p. 297-309

[33] G. Lusztig, N. Spaltenstein : *Induced unipotent classes*, J. London Math. Soc. 19 (1979), p. 41-52

[34] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger : *Stabilisation de la formule des traces tordue*, volume 1, Progress in Math. 316, Birkhäuser 2016

[35] F. Shahidi : *On certain L-functions*, Amer. J. of Math. 103 (1981), p. 297-355

[36] T. Shoji : *Character sheaves and almost characters of reductive groups*, Adv. Math. 111 (1995), p. 244-313

[37] T. Shoji : *Character sheaves and almost characters of reductive groups, II*, Adv. Math. 111 (1995), p. 314-354

[38] P. Slodowy : *Simple singularities and semi-simple algebraic groups*, Springer L. N. 815 (1980)

[39] M. Solleveld : *Conjugacy of Levi subgroups of reductive groups and a generalization to linear algebraic groups*, J. Pure Applied Algebra (2019), p. 1-17

[40] E. Sommers : *Lusztig's canonical quotient and generalized duality* J. of Algebra 243 (2001), p. 790-812

[41] J. Taylor : *On unipotent supports of reductive groups with a disconnected center*, J. of Algebra 391 (2013), p. 41-61

[42] J. Tits : *Reductive groups over local fields*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Symp. in Pure Math. XXXIII, part 1, AMS (1979), p. 29-69

[43] J.-L. Waldspurger : *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque 269 (2001)

[44] J.-L. Waldspurger : *Endoscopie et changement de caractéristique*, J. of the Inst. of Math. Jussieu 5 (2006), p. 423-525

[45] J.-L. Waldspurger : *Représentations de réduction unipotente pour $SO(2n+1)$, III : exemples de fronts d'onde*, Alg. and Number Th. 12 (2018), p. 1107-1172

[46] J.-L. Waldspurger : *Caractères de représentations de niveau* 0, Ann. Fac. Sc. Toulouse 27 (2018), p. 925-984

[47] J.-L. Waldspurger : *Fonctions dont les intégrales orbitales et celles de leurs transformées de Fourier sont à support topologiquement nilpotent*, prépublication 2019

[48] J.-L. Waldspurger : *Espaces $FC(\mathfrak{g}(F))$ et endoscopie*, prép. 2020

jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr
CNRS- Institut de Mathématiques de Jussieu- Paris rive gauche
4 place Jussieu
Boîte courrier 247
75252 Paris Cedex 05