HAL open science

Éléments de géométrie différentielle à l'usage des mécaniciens

Boris Kolev

▶ To cite this version:

Boris Kolev. Éléments de géométrie différentielle à l'usage des mécaniciens. 2020. hal-03330418

HAL Id: hal-03330418
https://hal.science/hal-03330418

Preprint submitted on 31 Aug 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Éléments de géométrie différentielle à l'usage des mécaniciens

Boris KOLEV

Résumé. — La géométrie différentielle est un outil fondamental en mécanique. Que ce soit dans l'étude du corps rigide ou des structures articulées complexes ou bien dans le cadre de la formulation de la mécanique des milieux continus. Ce cours propose une mise à niveau sur les notions essentielles et basiques de la géométrie différentielle.

E-mail : `boris.kolev@math.cnrs.fr`

Version du 11 mars 2020

© Ce travail est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons Paternité-Pas d'Utilisation Commerciale-Pas de Modification 3.0 France.

Table des matières

Introduction **1**

1 Variétés, fibrés vectoriels et sections **4**

1.1 Préliminaires topologiques 4
1.2 Variétés différentielles 6
1.2.1 Cartes, atlas et structure de variété 6
1.2.2 Sous-variétés 8
1.2.3 Espace tangent 9
1.2.4 Application linéaire tangente 11
1.2.5 Variétés de dimension infinie 12
1.2.6 L'espace des configurations en MMC 13
1.3 Fibrés vectoriels 14
1.3.1 Définition d'un fibré vectoriel 14
1.3.2 Morphismes de fibrés vectoriels 15
1.3.3 Opérations sur les fibrés 16
1.3.4 Sections d'un fibré vectoriel 16
1.3.5 L'algèbre de Lie des champs de vecteurs 17
1.3.6 Flot d'un champ de vecteur 18
1.3.7 Le théorème de Frobenius 19
1.4 Exercices 20

2 Groupes de Lie **21**

2.0.1 Les groupes classiques 21
2.0.2 Action d'un groupe de Lie sur une variété 23
2.1 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie 24
2.1.1 Algèbres de Lie des groupes classiques 24
2.1.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie abstrait 25
2.1.3 Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie 27
2.2 Application exponentielle 27
2.2.1 L'application exponentielle du groupe linéaire 27
2.2.2 L'application exponentielle d'un groupe de Lie abstrait 29
2.3 Les groupes de la mécanique classique 31
2.3.1 Le groupe de Galilée 31
2.3.2 Le groupe de Poincaré 32
2.4 Le groupe des difféomorphismes 33
2.5 L'algèbre de Lie du groupe des difféomorphismes 34
2.6 Action infinitésimale associée à un groupe de Lie 35
2.7 La dérivée de Lie 36
2.8 Exercices 38

3 Formes différentielles **40**
3.1 Formes différentielles extérieures . . . 40
3.1.1 Produit extérieur . . . 41
3.1.2 Produit intérieur . . . 41
3.1.3 La différentielle extérieure . . . 42
3.2 Intégration et formule de Stokes . . . 43
3.2.1 Formes volumes et orientation . . . 44
3.2.2 Intégrale d'une forme différentielle à support compact . . . 44
3.2.3 La formule de Stokes . . . 46
3.3 Complexes différentiels . . . 48
3.3.1 Le lemme de Poincaré . . . 48
3.3.2 Opérateur de Hodge et co-différentielle . . . 50
3.3.3 Les équations de Maxwell . . . 54
3.3.4 Équations de compatibilité en élasticité et complexes généralisés . . . 56
3.4 Exercices . . . 62

4 Lois de dérivation sur les fibrés vectoriels **64**
4.1 Lois de dérivation sur un fibré vectoriel . . . 64
4.1.1 Loi de dérivation . . . 64
4.1.2 Lois de dérivation associées . . . 65
4.1.3 Courbure d'une loi de dérivation . . . 65
4.2 Dérivée covariante . . . 66
4.2.1 Loi de dérivation sur TM . . . 66
4.2.2 Courbure et torsion . . . 66
4.2.3 Dérivée covariante canonique sur un groupe de Lie . . . 67
4.2.4 Dérivée covariante le long d'une courbe . . . 67
4.3 Le flot géodésique . . . 69
4.3.1 Le flot géodésique . . . 69
4.3.2 L'application exponentielle . . . 69
4.3.3 Les coordonnées géodésiques . . . 70
4.3.4 Signification locale de la nullité de la torsion et de la courbure . . . 70
4.3.5 La gravitation galiléenne . . . 71
4.4 Connexions linéaires . . . 72
4.4.1 Le fibré des repères . . . 72
4.4.2 Connexion linéaire . . . 74
4.4.3 Dérivée covariante et connexion linéaire . . . 74
4.4.4 Intégrabilité d'une G-structure . . . 77
4.5 Exercices . . . 78

5 Géométrie Riemannienne **80**
5.1 Métriques riemanniennes et pseudo-riemanniennes . . . 80
5.2 La connexion Riemannienne . . . 82
5.3 Le tenseur de Riemann . . . 84
5.4 Le flot géodésique d'une variété riemannienne . . . 86
5.5 Isométries et champs de Killing . . . 89
5.5.1 Isométries . . . 89
5.5.2 Champs de vecteurs de Killing . . . 90
5.6 La variété des métriques riemanniennes . . . 91
5.7 Exercices . . . 94

6 Géométrie Riemannienne sur un groupe de Lie **97**
6.1 Les équations du mouvement d'un corps rigide . . . 97
6.1.1 L'espace de configuration d'un corps rigide . . . 97
6.1.2 Les équations d'Euler du corps rigide . . . 99
6.2 Métrique riemannienne invariante sur un groupe de Lie . . . 100
6.2.1 Métrique invariante à gauche sur un groupe de Lie . . . 100
6.2.2 Connexion riemannienne d'une métrique invariante à gauche . . . 100
6.2.3 L'équation d'Euler-Arnold . . . 101
6.2.4 Les théorèmes d'Euler . . . 101
6.2.5 Cas d'une métrique invariante à droite . . . 102
6.3 Application à l'hydrodynamique . . . 102
6.3.1 Fluides parfaits, homogènes et incompressibles . . . 102
6.3.2 La reformulation d'Arnold . . . 103
6.3.3 L'équation de Helmholtz et l'isovorticité . . . 105
6.4 Exercices . . . 107

7 Un principe de covariance général d'après J. M. Souriau **108**
7.1 Statique . . . 108
7.1.1 Matière distribuée . . . 108
7.1.2 Fils . . . 109
7.1.3 Membranes . . . 110
7.1.4 Coexistence, homogénéisation et assemblage . . . 110
7.1.5 Second gradient . . . 111
7.1.6 Coques . . . 111
7.2 Dynamique . . . 112
7.2.1 Matière libre . . . 112
7.2.2 Lois de conservation . . . 114
7.3 Forces extérieures . . . 115
7.3.1 La chute des corps . . . 115
7.3.2 Les équations de la MMC dans un champ de gravitation . . . 118
7.4 Interprétation dans le cadre de la relativité générale . . . 118
7.4.1 Éléments de relativité générale . . . 118
7.4.2 Le principe des géodésiques . . . 120
7.5 Perspectives . . . 121
7.6 Exercices . . . 122

A Solutions des exercices **124**

Bibliographie **131**

Introduction

Le paradigme de la mécanique classique

Le modèle mathématique sur lequel repose la mécanique classique telle qu'elle est enseignée dans les lycées et les premières années universitaires contient deux notions. Il y'a d'une part l'*espace*, qui est représenté par un espace affine euclidien orienté de dimension 3 après avoir effectué le choix d'une *unité de longueur* (notre fameux mètre étalon) et que nous noterons E^3. D'autre part le *temps*, qui est représenté, après avoir fixé une *unité de temps*, par un espace euclidien orienté (la flèche du temps) de dimension 1. Ces concepts correspondent assez bien à la *perception* immédiate que nous avons du « monde qui nous entoure ». On peut les regrouper formellement pour décrire l'« univers » (espace-temps [1]) de la mécanique newtonienne

$$M = E^3 \oplus E^1.$$

L'univers newtonien, c'est donc un espace euclidien tridimensionnel et un *temps absolu* (nos horloges sont théoriquement *synchrones* et nous nous attendons à ce que quelque soit le destin de chacun d'entre nous, elles indiquent la même heure à chacune de nos rencontres et par extension que le temps soit le même partout). Le choix d'un repère de temps et d'un repère orthonormé de l'espace permet ainsi de localiser tout évenement de l'univers par un quadruplet de nombre réels qui sont les coordonnées de cet évenement dans ce *référentiel*.

La mécanique classique, comme les autres théories physiques, repose sur des *principes*, c'est à dire des équations ou postulats concernant des *grandeurs physiques* issues d'un *modèle mathématique* et devant être vérifiées expérimentalement avec la plus grande précision par l'expérience. Tout écart expérimental *significatif et suffisamment confirmé* par rapport à ce principe donnant lieu tôt ou tard à une correction du modèle initial qui n'apparaît plus alors que comme une approximation d'un nouveau modèle plus précis de la « réalité physique » qu'il est censé décrire. Par exemple, la mécanique classique est une très bonne approximation de la *mécanique relativiste* quand les vitesses des phénomènes étudiés sont faibles devant la vitesse de la lumière.

En mécanique newtonienne, le concept de base est celui de *point matériel*. Son mouvement est représenté, après le choix d'un *référentiel fixe de l'espace-temps*, par un arc $t \mapsto r(t)$ de I dans $\mathbb{R}^3$ où I est un intervalle de temps. Cette mécanique repose sur deux principes fondamentaux [2]. D'une part le principe de *déterminisme* qui assure que :

> *la position et la vitesse à un instant donné d'un point matériel détermine de façon univoque son mouvement passé et futur,*

ce qui se traduit mathématiquement par

$$\ddot{r} = f(t, r, \dot{r}). \tag{0.1}$$

1. le terme « espace-temps » suggère fortement l'existence de deux choses séparées qui seraient l'« espace » et le « temps » et l'idée trompeuse d'un « espace » intemporel.

2. Les équations des modèles plus compliqués comme les systèmes de plusieurs points matériels s'en déduisent et ne nécessitent pas l'introduction de nouveaux principes fondamentaux à part celui de *l'égalité entre l'action et la réaction.*

D'autre part le principe de *relativité galiléenne* :

> *Les équations du mouvement d'un système isolé sont invariantes sous l'action du groupe de Galilée.*

Ce second principe est plus difficile à expliciter car il faut définir ce qu'on entend par *système isolé* et par *groupe de Galilée*.

L'univers newtonien possède une structure naturelle d'espace affine. Le groupe de Galilée est un sous groupe du groupe affine de l'univers. Une fois donné un référentiel comme il a été décrit plus haut, l'action de ce groupe s'écrit

$$\begin{cases} r' = & \mathbf{a}r + \mathbf{b}t + \mathbf{c} \\ t' = & t + e \end{cases} \tag{0.2}$$

où $\mathbf{a}$ appartient au groupe orthogonal SO(3), $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et e est un réel. Il est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

1. $t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1$,
2. si $t_1 = t_2$ alors $\|r_2 - r_1\| = \|r'_2 - r'_1\|$.

Autrement dit, c'est le groupe des transformations de $E^3 \oplus E^1$ qui préservent les intervalles de temps et qui, lorsqu'elles fixent t, sont des isométries de E^3. Attention, il ne faudrait pas croire pour autant que le groupe de Galilée est le groupe laissant invariant une certaine forme bilinéaire de $E^3 \oplus E^1$. L'univers newtonien a seulement une structure d'espace affine sur lequel agit ce groupe.

La notion de système isolé est plus vague. On dit habituellement qu'un système est isolé s'il n'est soumis à aucune action extérieure, autrement dit si le système que l'on considère est « un tout » et non une partie d'un système plus vaste. Un corollaire des deux principes fondamentaux est le *principe d'inertie* :

> *Un point matériel, soustrait à l'action de tous les autres corps, a un mouvement de translation rectiligne et uniforme.*

L'apparente simplicité d'un tel principe est trompeuse. En effet, la validité de cet énoncé suppose l'existence de référentiels privilégiés qui n'existent que dans la tête du mathématicien. Pour le physicien, la justification de l'existence d'un tel référentiel est un véritable casse-tête. Cette question est souvent soigneusement évitée dans les cours de physique et de mécanique, où l'on considère que les indications d'une horloge et le choix d'un référentiel, dont par exemple, l'origine spatiale est le centre de gravité du système solaire et dont les trois axes orthonormés sont dirigés vers des étoiles « fixes », correspond à peu près avec l'artifice mathématique mentionné.

En revanche, si l'on admet l'existence d'un référentiel ou le principe d'inertie est valide, il est facile de voir que tout autre référentiel déduit du premier par une transformation de Galilée est encore un référentiel dans lequel le principe d'inertie se vérifie. On arrive ainsi à la notion de *référentiel d'inertie* ou *référentiel galiléen*, qui est donc une propriété partagée par une classe de référentiels, sous l'action du groupe de Galilée [3]. On ne peut distinguer l'« immobilité » du « mouvement de translation rectiligne uniforme ».

Relativité, groupes, physique et géométrie

Ce qui fait la force d'une *loi physique*, c'est qu'elle peut être vérifiée par différents observateurs, à différents endroits et différentes époques. Ceci se traduit par le fait qu'elle est nécessairement invariante si l'on fait agir sur les grandeurs qu'elle met en jeu certaines transformations (translations spatiales ou temporelles dans notre exemple). Ces transformations forment

3. Est-il nécessaire de rappeler que l'impression que notre chambre pourrait définir un référentiel galiléen est trompeuse. Une expérience plus fine comme celle du pendule de Foucault (1851) met en évidence que les effets dus à la rotation de la Terre ne sont pas si négligeables.

un groupe et celui-ci est à la racine du *principe de relativité*. Dans le cas présent, il s'agit du groupe de Galilée et de la *relativité galiléenne*. Deux observateurs différents sont censés subir la même physique, ce qui confère à cette physique sa nature objective, reproductible et universelle. Attention cependant, l'universalité d'une loi physique est limité par le groupe même qui définit *sa relativité*.

Prenons un exemple. L'équation de Newton (0.1) n'est valable que dans certains systèmes de coordonnées bien particuliers dont nous avons évoqué la difficulté à justifier l'existence. Cette équation est invariante par le groupe de Galilée, qui définit en quelque sorte la classe des observateurs « habilités à l'utiliser ».

On serait donc tenté de dire qu'il n'y a pas de modèle physique rigoureux tant qu'il n'y a pas de groupe derrière. C'est du moins ce que suggère Souriau (« Les groupes comme Universaux »), et ce point de vue sera largement adopté dans ce cours. Toujours est-il, et quelque soit le point de vue qu'on adopte à ce sujet, nul ne peut ignorer aujourd'hui le rôle crucial joué par les groupes dans les diverses théories physiques.

Il existe une démarche similaire en mathématiques. Le programme d'Erlangen de Felix Klein (1872) [28] a stigmatisé le lien étroit qui existait entre la géométrie et les groupes : *une géométrie, c'est un groupe qui agit sur un ensemble*. La géométrie euclidienne est basée sur le groupe euclidien, la géométrie affine sur le groupe affine, la géométrie projective sur le groupe projectif et la *géométrie différentielle sur le groupe des difféomorphismes*.

On peut donc dire que la géométrie associée à la mécanique newtonienne est celle du *groupe de Galilée*, celle de la mécanique relativiste (relativité restreinte) est celle du *groupe de Poincaré* et que la géométrie de la relativité générale (einsteinienne ou non) est celle du *groupe des difféomorphismes*. Ce groupe, Souriau l'appelle le *groupe souple*, en référence aux célèbres « montres molles » du peintre Dali, lui-même faisant allusion aux « mollusques de référence » qu'avait introduit Einstein, non sans humour, pour décrire les systèmes de coordonnées quelconques de la *relativité générale* où l'espace et le temps s'entremêlent et semblent échapper à notre sens commun.

Un modèle mathématique est au physicien ce qu'est une carte marine au navigateur. Il y'a des « routières » pour les grandes traversées et des cartes de détails pour les « atterrissages » à l'approche des côtes. Le navigateur ne confond pas sa carte avec le paysage réel qui l'entoure mais il est capable de faire le *lien entre la carte et le paysage*. Sa carte l'aide à se situer, à se faire une image mentale de la géographie des océans qu'il traverse et des terres qu'il rencontre. Il n'est pas utile d'utiliser une carte de détail au milieu de l'océan Atlantique, loin de toute côte. Inversement il serait dangereux d'utiliser une « routière » au voisinage d'une côte. Un modèle mathématique, aussi puissant soit-il, n'est qu'une description extrêmement simplifiée du « réel » et possède ses limites. Suivant ce que l'on veut étudier, on n'utilisera pas forcément la même « carte » : *ne pas confondre la carte avec le territoire* [4].

Ce cours se propose de présenter quelques éléments de la géométrie différentielle, un vaste programme ! On pourra le considérer comme un « reader's digest » de la discipline et certainement pas comme un exposé exhaustif. Il sera centré sur les bases de la géométrie différentielle. La mécanique des milieux continus dans sa forme classique ou dans ces derniers développements est une source inépuisable de concepts géométriques, parfois malheureusement mal formulés par les mécaniciens et pas toujours compris par les mathématiciens. D'un autre côté les mathématiciens enrichissent la géométrie avec de nouveaux concepts qui peuvent être fort intéressants pour le mécanicien mais pas toujours accessibles dans leur version initiale. Quel dommage que ces différentes communautés ne dialoguent pas davantage entre elles !

4. Expression attribuée au philosophe Alfred Korzybski.

Chapitre 1

Variétés, fibrés vectoriels et sections

En mécanique des milieux continus, l'outil mathématique adéquate pour décrire l'*espace* ou l'*univers* est celui de *variété différentielle*. L'objet de ce chapitre est de récapituler les notions fondamentales de géométrie différentielle que nous utiliserons par la suite. Toutes les variétés considérées seront, sauf mention explicite du contraire, supposées de classe C^∞. La définition d'une variété C^∞, d'espace tangent, d'application C^∞ entre deux variétés et de son application linéaire tangente sont définies. On introduit ensuite la notion de *fibré vectoriel*, une structure plus riche mais tout aussi fondamentale, qui permet de définir correctement les champs de vecteurs et de tenseurs. Il est hors de question d'aborder ici toutes les subtilités de la géométrie différentielle qui sont nombreuses mais seulement d'introduire les concepts fondamentaux. Pour plus de détails sur ces notions, on pourra se reporter, entre autre, aux référence suivantes [44, 32, 10, 11, 6, 31, 16, 17].

1.1 Préliminaires topologiques

En mathématiques, on est amené indubitablement à définir la notion de *proximité* et de *continuité*. La structure la plus générale qui permet de telles concepts est celle d'*espace topologique*. On pourra consulter [48, 25] pour plus de détails sur cette notion. Une structure topologique sur un ensemble X est défini par le choix de certains sous-ensembles de X dénommés *ouverts* et qui vérifient certaines propriétés.

Définition 1.1 (Topologie)**.** Une topologie sur un ensemble X est une partie τ de $\mathscr{P}(X)$, l'ensemble des partie de X, qui satisfait les axiomes suivants :

1. L'ensemble vide $\emptyset$ et X sont dans τ ;
2. L'union quelconque d'éléments de τ appartient à τ ;
3. L'intersection d'un nombre fini d'éléments de τ appartient à τ.

Remarque 1.2. Il y a deux cas extrêmes ; la *topologie discrète* où toutes les parties de X sont des ouverts et la *topologie triviale* où seulement l'ensemble vide $\emptyset$ et X sont des ouverts.

Définition 1.3 (Espaces topologiques)**.** Un espace X munie d'une topologie est appelé *espace topologique*. Si Y est une partie de X, on peut faire de Y un espace topologique, en prenant comme ouverts les intersections avec Y des ouverts de la topologie de X. C'est la *topologie induite* sur Y.

Un cas particulier d'espace topologique est fourni par les *espaces métriques*. Ce sont des espaces pour lesquels la topologie est induite par une distance. C'est le cas de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne où la distance entre deux points x, y est définie par $d(x, y) = \|x - y\|$. Plus généralement, la notion de distance est définie de la façon suivante.

Définition 1.4 (distance)**.** Une distance sur un ensemble X est une fonction

$$d : X \times X \to [0, +\infty[$$

telle que, pour tous x, y, z dans X, on a :

1. $d(x, y) = d(y, x)$;
2. $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un *espace métrique* (X, d) est un ensemble X muni d'une distance d. Dans un espace métrique, on définit une *boule ouverte* de centre x et de rayon $r > 0$ comme le sous-ensemble

$$B(x, r) := \{y \in X;\ d(x, y) < r\}.$$

Une partie U d'un espace métrique (X, d) est ouverte ssi chaque fois que $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. C'est la définition de la topologie sur l'espace métrique (X, d).

Définition 1.5 (Parties fermées)**.** Une partie F d'un espace topologique X est fermée ssi son complémentaire $X \setminus F$ est ouverte. Dans un espace métrique, une partie F est fermée ssi la limite de toute suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de F appartient à F.

Définition 1.6 (Adhérence)**.** Étant donnée une partie A d'un espace topologique X, son adhérence $\bar{A}$ est le plus petit ensemble fermé qui contient A.

Définition 1.7 (Voisinage d'un point)**.** Dans un espace topologique X, on appelle *voisinage* d'un point $x \in X$ une partie V de X qui contient x et qui contient un ouvert qui contient x. Un ouvert U de X est voisinage de chacun de ses points.

Remarque 1.8 (Espaces de Hausdorff)*.* Étant donné deux points distincts x, y d'un espace métrique (X, d), il est possible de trouver des voisinages respectifs V_x et V_y de ces points tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$. Ceci n'est pas nécessairement vrai pour un espace topologique général. Si c'est le cas, on dit que l'espace est *séparé* ou de *Hausdorff*. Dans un espace de Hausdorff, les parties réduites à un point sont fermées.

Définition 1.9 (Continuité en un point)**.** Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est *continue au point* $x \in X$ ssi l'image réciproque $f^{-1}(W)$ de tout voisinage W de $f(x)$ est un voisinage de x.

Définition 1.10 (Continuité)**.** Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est *continue* (en tout point) ssi l'image réciproque $f^{-1}(U)$ de tout ouvert U de Y est un ouvert de X. Si de plus f est bijective et son inverse f^{-1} est également continue, on dit que f est un *homéomorphisme*.

Remarque 1.11 (Critères d'ouverture et de fermeture)*.* En pratique, pour établir qu'un sous-ensemble F d'un espace topologique X est fermé, il suffit de monter qu'il s'écrit comme la pré-image d'un fermé par une application continue. De même, un sous-ensemble U est ouvert si il est la pré-image d'un ouvert par une application continue.

Définition 1.12 (Connexité)**.** Intuitivement, un espace est connexe s'il est d'un seul tenant. Plus formellement, un espace topologique X est *connexe* si il ne peut s'écrire comme l'union de deux ouverts disjoints non vides. L'espace X est connexe ssi les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X. L'image d'un espace connexe par une application continue est connexe.

Une famille d'ouverts $\mathscr{U} := (U_i)_{i\in I}$ d'un espace topologique X est un *recouvrement* de X si

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Un *sous-recouvrement* de $\mathscr{U}$ est une sous-famille $(U_j)_{j\in J}$ $(J \subset I)$ qui est encore un recouvrement de X.

Définition 1.13 (Compacité)**.** Un espace topologique séparé X est *compact* si de tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$, on peut extraire un sous-recouvrement *fini*. Un espace métrique (X, d) est compact ssi de toute suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème 1.14 (Parties compacts de $\mathbb{R}^n$)**.** *Les parties compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les sous-ensembles fermés et bornés.*

1.2 Variétés différentielles

Après ces définitions très générales, on va s'intéresser à des espaces avec une structure beaucoup plus rigide, qui sont localement comme l'espace $\mathbb{R}^n$. Ce sont les *variétés topologiques*, également dénommées *espaces localement euclidiens* pour cette raison. La description de cette structure se fait sur le mode de la cartographie, où, pour représenter l'ensemble de la surface de la Terre, on utilise des *cartes* qui décrivent seulement une partie de celle-ci et se superposent entre elles.

1.2.1 Cartes, atlas et structure de variété

Définition 1.15 (Variétés topologiques)**.** Une variété topologique M de dimension n est un espace topologique séparé où tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Une variété topologique de dimension n possède donc un recouvrement par des ouverts U_α, chacun d'eux étant homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ via un homéomorphisme noté ϕ_α.

Remarque 1.16. Pour éviter des cas pathologiques, il faut également imposer quelques propriétés topologiques supplémentaires comme la *séparabilité* ou la *para-compacité* mais il n'est pas question d'aborder ces détails techniques ici.

Définition 1.17 (Cartes et atlas)**.** Un couple (U_α, ϕ_α) est appelé une *carte* de M. La collection de toutes les cartes $\mathscr{A}$, formant un recouvrement de M, est appelé un *atlas* de M.

Remarque 1.18 (Topologie associée à un atlas). On pourrait également commencer avec un ensemble abstrait X et un atlas constitué de cartes U_α qui sont seulement en *bijection* avec des ouverts de $\mathbb{R}^n$. On montre alors que cet atlas induit une topologie sur X et une structure de variété topologique (voir [32] par exemple).

Remarque 1.19 (Coordonnées locales). Une carte (U_α, ϕ_α) permet d'associer à tout point $m \in U_\alpha$ un n-uplet de nombres réels $(x^1(m), \ldots, x^n(m))$. Ce sont les *coordonnées locales* du point m dans la carte (U_α, ϕ_α).

Lorsque deux cartes (U_α, ϕ_α) et (U_β, ϕ_β) ont une intersection non vide, on peut définir le *changement de carte* $\phi_{\alpha\beta}$:

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Chaque changement de carte est un homéomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, dont l'inverse est :

$$\phi_{\beta\alpha} = \phi_{\alpha\beta}^{-1} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}.$$

C'est en considérant ces changements de carte qu'on peut enrichir la structure de variété topologique et introduire une *structure différentielle* sur M, qui permet d'étendre dans ce cas le calcul différentiel connu sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.20 (Variété différentielle)**.** Un atlas $\mathscr{A}$ est de classe C^∞ si tous les changements de carte sont des difféomorphismes locaux de classe C^∞ (entre ouverts de $\mathbb{R}^n$). Deux atlas $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ de classe C^∞ sur M sont dits *compatibles* si $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ est encore un atlas de classe C^∞ sur M. Une *structure de variété différentielle de classe* C^∞ sur M (on dit aussi *variété lisse* ou *smooth manifold* en anglais) est une classe d'équivalence d'atlas compatibles.

Remarque 1.21. On peut refaire la théorie en demandant que les changements de cartes soient seulement de classe C^k ou bien analytique, on obtient alors une variété différentielle de classe C^k ou une variété analytique. On peut également considérer des cartes à valeur dans $\mathbb{C}^n$ et des changements de cartes holomorphes, on obtient alors une variété complexe. Dans ce cours, les variétés seront toujours réelles et lisses, sauf mention explicite du contraire.

Étant donné un atlas $\mathscr{A}$ de classe C^∞ sur M, on peut être amené à ajouter une nouvelle carte (topologique) (V, ϕ). On dit que la carte (V, ϕ) est compatible avec $\mathscr{A}$ si le nouvel atlas $\mathscr{A} \cup \{(V, \phi)\}$ est encore un atlas de classe C^∞.

Remarque 1.22. Si (U_α, ϕ_α) est une carte, V_α, un ouvert inclus dans U_α et $\tilde{\phi}_\alpha$, la restriction de ϕ_α à V_α, alors $(V_\alpha, \tilde{\phi}_\alpha)$ est encore une carte compatible. De même si h est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ définit sur $\phi_\alpha(U_\alpha)$, alors $(U_\alpha, h \circ \phi_\alpha)$ est encore une carte compatible.

Définition 1.23 (Variétés orientables)**.** Une variété lisse M est *orientable* si il existe un atlas $\mathscr{A}$ de M dont tous les changements de cartes ont un jacobien positif.

Exemple 1.24. Le tore et la sphère sont des variétés orientables mais pas la bouteille de Klein, ni le plan projectif.

Soient M et N deux variétés lisses et $f : M \to N$ une application continue. Étant données une carte (U_α, ϕ_α) de M et une carte (V_β, ψ_β) de N, on définit formellement une application

$$f_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1},$$

qui est définie sur l'ouvert $W_{\alpha\beta} := \phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta))$, qui peut d'ailleurs être vide. Elle prend ses valeurs dans $\psi_\beta(V_\beta)$. L'application $f_{\beta\alpha}$ est l'*expression locale* de f. C'est une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans un ouvert de $\mathbb{R}^p$ (où $n = \dim M$ et $p = \dim N$).

Définition 1.25 (Applications différentiables entre variétés)**.** On dit que l'application $f : M \to N$ est de classe C^∞ si pour toute carte (U_α, ϕ_α) de M et toute carte (V_β, ψ_β) de N, l'application $f_{\beta\alpha}$ définie sur l'ouvert $W_{\alpha\beta}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^p$ est de classe C^∞.

En d'autres mots, une application différentiable entre variétés est une application dont l'expression locale

$$y^j = f^j_{\beta\alpha}(x^1, \dots, x^n), \qquad j = 1, \dots, p$$

est différentiable. Cette notion est stable par composition.

Pour finir cette section, précisons que le concept de variété admet plusieurs extensions possibles. Par exemple, celle de *variété à bord*, modelée non pas sur $\mathbb{R}^n$ mais sur le demi-espace

$$\mathbb{R}^n_- := \left\{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n;\ x^1 \leq 0\right\}.$$

Définition 1.26 (Variétés à bord)**.** Une variété à bord de dimension n et de class C^∞ est un espace topologique séparé, muni d'un atlas $\mathscr{A}$ constitué par des cartes (U_α, ϕ_α), qui sont des homéomorphismes sur des ouverts du demi-espace $\mathbb{R}^n_-$ et telles que les changements de cartes $\phi_{\alpha\beta}$ soient des difféomorphismes C^∞.

Remarque 1.27. Il est peut-être nécessaire de préciser ici ce qu'on entend par une application C^∞ entre des ouverts U, V de $\mathbb{R}^n_-$. Seuls les points du bord de $\mathbb{R}^n_-$ (i.e pour lesquels $x^1 = 0$) posent un problème. Par souci de simplicité (il existe d'autres définitions, voir par exemple [21, ch. 4]), on admettra qu'une application $f : U \to V$ est C^∞ en un point x du bord de $\mathbb{R}^n_-$ ssi elle est la restriction d'une application C^∞ définie sur un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$.

Un point de M qui est envoyé sur un point du bord de $\mathbb{R}^n_-$ (i.e un point pour lequel $x^1 = 0$) dans une carte est également envoyé sur un tel point dans toute autre carte (c'est un résultat de topologie, voir par exemple [25]). L'ensemble de ces points forme le *bord* de M, noté ∂M, qui est une variété (sans bord) de dimension $n-1$. L'ensemble $M \setminus \partial M$ est un ouvert de M qui est appelé l'*intérieur* de M.

Remarque 1.28. On peut considérer une variété (sans bord) comme une variété à bord avec un bord vide.

1.2.2 Sous-variétés

Une *sous-variété* est à une variété, ce qu'un sous-espace vectoriel est à un espace vectoriel. Plus précisément, on formulera la définition suivante.

Définition 1.29 (Sous-variété)**.** Étant donné une variété lisse M de dimension n, une partie S de M est une *sous-variété* de M de dimension $k \leq n$ si pour tout point $m \in S$, il existe une carte (U, ϕ) de M contenant m et tel que $\phi(U \cap S)$ soit l'intersection de $\phi(U)$ avec un sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.30. On pourra noter que tout ouvert d'une variété M de dimension n est une sous-variété de dimension n (le vérifier !).

Remarque 1.31. Une sous-variété S de dimension k d'une variété M est également une variété de dimension k (les cartes sont obtenues par restriction des cartes de M à S).

Par exemple le graphe S d'une application $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe C^∞ est une sous-variété lisse de dimension n de $\mathbb{R}^{n+p}$. En effet, localement, le changement de variables (dans $\mathbb{R}^{n+p}$) :

$$\begin{cases} \tilde{x}^j = x^j, & \text{pour } j = 1, \dots, n\,; \\ \tilde{x}^{n+j} = x^{n+j} - \phi^j(x^1, \dots, x^n), & \text{pour } j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

permet de « redresser le graphe » et de réaliser S comme le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+p}$ défini par les équations $\tilde{x}^{n+j} = 0$ pour $j = 1, \dots, p$.

Un exemple plus intéressant est donné par les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, définies par un ensemble fini d'équations (faire l'analogie avec un sous-espace vectoriel défini par une famille d'équations linéaires indépendantes). Considérons par exemple une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et soit

$$S := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ f(x, y, z) = 0\right\}.$$

Supposons de plus que $d_m f$, la différentielle de f au point $m = (x_0, y_0, z_0)$ soit non nulle. Alors le *théorème des fonctions implicites* (voir par exemple [46]) nous assure qu'il est possible de trouver un voisinage U du point m dans $\mathbb{R}^3$ tel que $S \cap U$ soit défini par le graphe d'une fonction. Par exemple, si $\frac{\partial f}{\partial z}(m) \neq 0$, il existe une fonction ϕ de classe C^∞ définie sur un voisinage V de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$S \cap U = \{(x, y, z) \in U;\ z = \phi(x, y);\ (x, y) \in V\}.$$

Si $d_m f \neq 0$ en tout point m de S, on peut donc en conclure que S est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. On notera toutefois que sans l'hypothèse $d_m f \neq 0$ en tout point de S, on ne peut pas conclure.

Le résultat précédent se généralise au cas d'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, à condition que la différentielle $d_m f$ soit *surjective* en tout point m de la *fibre* $S := f^{-1}(0)$. On dit alors que f est une *submersion*. On formulera ce résultat sous la forme d'un théorème.

Théorème 1.32 (Théorème de la submersion)**.** *La fibre* $S := f^{-1}(0)$ *d'une submersion* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *est une sous-variété de dimension* $n - p$ *de* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemple 1.33 (Contre-exemple)**.** Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$. Alors $f^{-1}(0)$ n'est pas une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$ (faire un dessin).

Remarque 1.34. En pratique, on rencontre souvent des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ définis par un système fini d'équations *polynomiales* (par exemple $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 = 0\}$). Un tel ensemble est appelé une *variété algébrique affine*. En général, une variété algébrique affine n'est pas une *sous-variété différentielle* de $\mathbb{R}^n$. Quand c'est le cas, on parle de *variété algébrique lisse* (ou non-singulière). C'est le cas du cercle ou de la sphère par exemple.

1.2.3 Espace tangent

Considérons pour commencer une sous-variété S de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ est dit *tangent* à S au point $m \in S$ si il existe une courbe lisse $c(t)$ à valeur dans S telle que $c(0) = m$ et $c'(0) = v$. L'ensemble des vecteurs tangents à S au point m forme un sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{R}^n$. C'est l'*espace tangent* à S noté T_mS.

Exemple 1.35. Considérons une sous variété $S = f^{-1}(0)$ de $\mathbb{R}^n$ définie comme la fibre d'une submersion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. On vérifie alors facilement que $T_mS = \ker d_mf$.

Le problème qu'on rencontre pour définir l'espace tangent en un point m d'une variété lisse abstraite est que si c est une courbe lisse sur M, on ne sait pas « dériver » c et on ne peut donc pas définir directement le vecteur tangent au point $c(0)$ par $c'(0)$. On est donc amené à définir un vecteur tangent au point m de manière abstraite. La définition que nous proposons ici (il y en a d'autres, voir par exemple [44]) est parfois appelé la *définition cinématique de l'espace tangent*. Elle a l'avantage de se généraliser facilement en dimension infinie.

Cette définition est motivée par l'observation suivante dans le cas d'une sous-variété S de $\mathbb{R}^n$. Considérons deux courbes lisses c_1 et c_2 sur S. Si $c_1(0) = c_2(0) = m$ et $c_1'(0) = c_2'(0)$, on dit que les courbes c_1 et c_2 sont *tangentes au point* m. Elles définissent alors le même vecteur tangent à S au point m. Inversement, toutes les courbes c qui définissent un même vecteur tangent v à S au point m sont tangentes au point m entre elles. On vérifie de plus que la relation sur les courbes « être tangentes au point m » est une relation d'équivalence et donc que l'espace tangent T_mS est en bijection avec les classes d'équivalence de courbes pour cette relation.

Dans le cas d'une variété lisse abstraite M de dimension n, on peut étendre cette relation d'équivalence de tangence entre courbes au point m à l'aide d'une carte. Plus précisément, étant donnée une carte (U, ϕ) contenant m, on introduit la relation d'équivalence suivante sur les courbes lisses $c : I \to M$, où I est un interval ouvert contenant 0 et telle que $c(0) = m$:

$$c_1 \underset{m}{\sim} c_2 \qquad \text{ssi} \qquad (\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0).$$

On peut vérifier que cette définition est indépendante de la carte choisie et on formule alors la définition suivante.

Définition 1.36 (Vecteurs tangents)**.** Soit M une variété lisse et $m \in M$. Un *vecteur tangent* à M au point m est une classe d'équivalence de courbes lisses $c : I \to M$ pour la relation d'équivalence de *tangence au point* m.

Une carte (U, ϕ) étant fixée, il est facile de voir que l'application $c \mapsto (\phi \circ c)'(0)$ induit une bijection entre les classes d'équivalence de courbes tangentes au point m et $\mathbb{R}^n$. A l'aide de cette bijection, on muni l'ensemble des vecteurs tangents à M au point m, noté T_mM, d'une structure d'espace vectoriel de dimension n.

Remarque 1.37. Dans le cas d'une variété à bord M, il est nécessaire d'étendre la définition des courbes c pour définir l'espace tangent en un point m du bord. Dans ce cas, on s'autorise les courbes c définies sur un intervalle semi-ouvert $]-\varepsilon, 0]$ ou $[0, \varepsilon[$, avec $c(0) = m$ et où $c'(0)$ est la dérivée à gauche ou à droite. L'espace tangent en un point m du bord est donc bien aussi, dans ce cas, un espace vectoriel de dimension n, comme pour les points intérieurs.

Soit f une fonction numérique de classe C^∞ définie au voisinage du point $m \in M$ et c une courbe passant par m et représentant la classe d'un vecteur tangent $v = [c] \in T_mM$. Alors, la fonction $f \circ c : I \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞. Posons

$$D_v(f) := \left.\frac{d(f \circ c)}{dt}\right|_{t=0}.$$

On pourra vérifier que cette définition est indépendante du choix du représentant c dans la class d'équivalence $[c]$ et définit un opérateur linéaire sur les fonctions C^∞ définies au voisinages de m, autrement dit :

$$D_v(f + g) = D_v(f) + D_v(g).$$

Il vérifie de plus la *règle de Leibniz*

$$D_v(fg) = fD_v(g) + D_v(f)g.$$

On peut montrer (au moins dans le cadre d'une variété lisse de dimension n) que la correspondance $v \to D_v$ est un isomorphisme linéaire, ce qui nous donne, dans ce cas, une autre interprétation de l'espace tangent.

Si maintenant on fixe une carte (U, ϕ) et qu'on choisit une courbe c_i telle que $(\phi \circ c_i)'(0) = e_i$ (où e_i correspond au i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$) alors, en posant $v_i = [c_i]$, on a :

$$D_{v_i}(f) = \left.\frac{d(f \circ c_i)}{dt}\right|_{t=0} = d_{\phi(m)}(f \circ \phi^{-1}).e_i = \left.\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\phi(m)}.$$

Autrement dit, $D_{v_i}(f)$ s'interprète comme la dérivée partielle par rapport à x^i de l'expression locale de f dans les coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$. Pour cette raison, on adopte la notation

$$D_{v_i} := (\partial/\partial x^i)_m.$$

Dit d'une autre façon, $(\partial/\partial x^i)_m$ représente le vecteur tangent défini par une courbe c telle que $c(0) = m$ et $(\phi \circ c)'(0) = e_i$. Les vecteurs tangents $(\partial/\partial x^i)_m$ $(1 \leq i \leq n)$ forment une base de T_mM.

Soit TM l'union disjointe des espaces tangents à M :

$$TM := \bigcup_{m \in M} T_mM.$$

On définit alors une application $\pi : TM \to M$, qui associe à tout vecteur tangent $v_m \in TM$ son point de base m. On montre que TM *est une variété de dimension* $2n$ (où $n = \dim M$) et que $\pi : TM \to M$ est C^∞. On entrera pas ici dans la démonstration rigoureuse de ce résultat (voir par exemple [21] ou [32]). Toutefois, on peut décrire facilement un atlas de TM à partir d'un atlas de M. Soit (U, ϕ) une carte locale de M et $(x^1, \ldots, x^n)$ les coordonnée locales correspondantes. Pour tout point $m \in U$ on obtient alors la base

$$\big((\partial/\partial x^1)_m, \ldots, (\partial/\partial x^n)_m\big)$$

de T_mM. On peut donc associer à tout vecteur tangent v_m appartenant à $\pi^{-1}(U)$ ses composantes $\lambda^1(m), \ldots, \lambda^n(m)$ dans cette base. Cette association définit donc une application

$$\pi^{-1}(U) \to \phi(U) \times \mathbb{R}^n, \qquad v_m \mapsto (x^1, \ldots, x^n, \lambda^1, \ldots, \lambda^n)$$

qui correspond à une carte locale de TM. Dans un changement de coordonnées $(x^i) \mapsto (y^i)$, on obtient :

$$\hat{\lambda}^i = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \lambda^j.$$

1.2.4 Application linéaire tangente

Considérons une application $f : M \to N$ de classe C^∞ entre deux variétés lisses m et N. Alors f envoie une courbe lisse c passant pas $m \in M$ en une courbe lisse $f \circ c$ passant par $f(m) \in N$ et cette correspondance préserve la relation d'équivalence de tangence en un point. Autrement dit :

$$c_1 \underset{m}{\sim} c_2 \qquad \Rightarrow \qquad f \circ c_1 \underset{f(m)}{\sim} f \circ c_2.$$

On en déduit que f induit une application entre T_mM et $T_{f(m)}N$. On montre de plus que cette application est linéaire. On la note T_mf et on l'appelle l'*application linéaire tangente* à f au point m (c'est la généralisation de la Jacobienne d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$). Comme dans le cas des Jacobiennes, on a la règle de composition suivante.

Théorème 1.38. *Soient M, N, P des variétés différentielles lisses, $f : M \to N$ et $g : N \to P$ des applications C^∞. Étant donné $m \in M$, on a :*

$$T_m(g \circ f) = T_{f(m)}g \circ T_mf.$$

Étant donné une application $f : M \to N$ de classe C^∞ entre deux variétés différentielles lisses M, N, on introduira le vocabulaire suivant qu'on trouve de manière récurrente dans les ouvrages de géométrie différentielle :

1. f est une *immersion* si T_mf est injective en tout point $m \in M$;
2. f est une *submersion* si T_mf est surjective en tout point $m \in M$;
3. f est *étale* si T_mf est bijective en tout point $m \in M$.

En dehors de ces concepts *locaux*, on trouve deux notions *globales* à connaître, celle de *difféomorphisme* et celle de *plongement*.

Définition 1.39 (Difféomorphisme)**.** Une application $f : M \to N$ entre deux variétés différentielles lisses M, N est un *difféomorphisme* si f est bijective et si de plus f et f^{-1} sont de classe C^∞.

Définition 1.40 (Plongement)**.** Une application $f : M \to N$ de classe C^∞ entre deux variétés différentielles lisses M, N est un *plongement* si f est une immersion et si de plus f est un homéomorphisme sur son image.

On démontre le théorème suivant (voir [21] par exemple).

Théorème 1.41. *Soit n et M deux variétés et $f : N \to M$ un plongement. Alors $f(N)$ est une sous-variété de M.*

Remarque 1.42. Le théorème n'est plus vrai si on suppose seulement que f est une immersion. On pourra considéré, par exemple, le cercle immergé dans $\mathbb{R}^2$ sous la forme du chiffre 8 pour s'en convaincre.

Toutes les images mentales de variétés que nous avons dans la tête sont en fait des variétés plongées dans $\mathbb{R}^3$ car il nous est difficile d'imaginer (à part l'espace tri-dimensionnel lui-même) une variété abstraite « située nulle part ». Le théorème suivant, du à Whitney [57] montre qu'en fait, toute variété lisse abstraite peut être plongée dans $\mathbb{R}^n$ pour n assez grand.

Théorème 1.43 (Théorème de plongement de Whitney)**.** *Soit M une variété lisse de dimension n. Alors il existe un plongement de M dans $\mathbb{R}^{2n}$.*

Remarque 1.44. Un plongement explicite $f : M \to \mathbb{R}^{2n}$ est représenté par $2n$ fonctions numériques $f^1, \dots, f^{2n}$. Ces fonctions peuvent être considérées comme des *coordonnées globales*. Elles possèdent la propriété de *séparer* les points de M, ce qui signifie que si m_1 et m_2 sont deux points distincts de M alors il existe au moins, parmi ces $2n$ fonctions, un élément f^i tel que $f^i(m_1) \neq f^i(m_2)$. Attention, il ne faut pas confondre un *système local de coordonnées* de M avec un *système global de fonctions séparantes*. Par exemple, le cercle est une variété de dimension 1, dont les carte locales sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais il n'existe pas de plongement du cercle dans $\mathbb{R}$.

1.2.5 Variétés de dimension infinie

La théorie des variétés différentielles peut être étendue formellement en dimension infinie, c'est à dire en prenant des cartes à valeur dans un même espace vectoriel E de dimension infinie. Toutefois, pour rendre la théorie rigoureuse il faut prendre en compte deux facteurs : la *structure topologique* et la *structure différentielle* de E (qui sont liées entre elles).

Si la topologie d'un espace vectoriel de dimension finie est canonique (toutes les normes sont équivalentes entre elles), ceci n'est plus vrai en dimension infinie. Il existe plusieurs catégorie d'espaces vectoriels topologiques avec des propriétés radicalement différentes : espaces de Hilbert, espaces de Banach, espaces de Fréchet, ... (on pourra consulter [47] pour des définitions précises et plus de détails sur le sujet).

Exemple 1.45. Sur l'espace vectorielle $\mathrm{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$, des fonctions à valeur réelles définies sur l'intervalle $I = [0,1]$, il existe plusieurs structures topologiques non équivalentes entre elles. Par exemple :

1. la topologie induite par la norme $\|f\|_{C^0} := \sup_{x\in I} |f(x)|$;
2. la topologie induite par la norme $\|f\|_{C^k} := \max_{1\leq j\leq k} \sup_{x\in I} \left|f^{(j)}(x)\right|$;
3. la topologie induite par la norme $\|f\|_{L^2} := \left(\int_I |f|^2 \, dx\right)^{1/2}$;
4. la structure topologique de Fréchet définie par la famille des semi-normes

$$p_k := \sup_{x\in I} \left|f^{(k)}(x)\right|, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, la notion de *dérivabilité* sur les espaces vectoriels de dimension infinie est multiple et subtile. On a par exemple la notion de *dérivabilité* au *sens de Fréchet* sur les espaces de Banach et la notion de dérivabilité au *sens de Gâteaux* sur les espaces de Fréchet (où seulement les dérivées directionnelles sont admises).

On pourra noter également que la structure d'espace de Fréchet conduit à des difficultés importantes en géométrie différentielle. D'une part, les principaux théorèmes d'analyse (théorème des fonctions implicites, théorème d'inversion locale, théorème de Cauchy-Lipschitz) ne sont plus valables sur ces espaces et d'autre part le dual d'un espace de Fréchet de même que l'espace des applications linéaires continues $\mathscr{L}(E,F)$ entre deux espaces de Fréchet ne sont pas des espaces de Fréchet en général.

Afin de surmonter ces difficultés, Frölicher, Kriegel et Michor ont développé une théorie plus générale de structure différentielle, les *espaces de Frölicher* [19] et qui semble adéquate pour traiter la plupart des exemples intéressants. En quelques mots, un espace de Frölicher X est défini par une famille $\mathscr{C}$ de courbes sur X et une famille $\mathscr{F}$ de fonction à valeurs réelles sur X, qui vont jouer respectivement le rôle des courbes et fonctions C^∞ et qui vérifient les axiomes suivants :

1. $f \in \mathscr{F}$ ssi pour toute courbe $c \in \mathscr{C}$, $f \circ c \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
2. $c \in \mathscr{C}$ ssi pour toute fonction $f \in \mathscr{F}$, $f \circ c \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque 1.46. Une notion plus générale encore est celle de *difféologie*, initiée par Souriau puis développée par Iglesias-Zemmour [26]. Cette structure permet de définir des applications différentiables de la même façon qu'une topologie permet de définir des applications continues. Les *espaces de Frölicher* [19] sont une sous-catégorie des espaces difféologiques (voir [26, pages 99 and 390–391]).

On peut alors développer une théorie des variété différentielle modelées sur une catégorie d'espace vectoriel donnée. En prenant comme modèle un espace de Banach, on obtient une *variété banachique* (on pourra se référer au livre de Lang [31] qui reconstruit toute la géométrie différentielle dans cette catégorie). La géométrie différentielle banachique diffère assez peu de la géométrie différentielle de dimension finie. En prenant comme modèle un espace de Fréchet, on obtient une *variété de Fréchet* (on pourra consulter l'article de Hamilton [23] pour se faire une idée exhaustive du sujet). Dans ce cas, la géométrie différentielle est radicalement différente de ce qui se passe en dimension finie (voir par exemple [36, 35] et la discussion [18, Section 5]). Enfin, pour une théorie exhaustive des variétés différentielles modelées sur les espaces vectoriels de Frölicher, on pourra consulter [30, 34].

1.2.6 L'espace des configurations en MMC

En mécanique classique, un *système matériel en mouvement* dans l'espace ambiant $\mathscr{E}_3$ est défini par une famille non vide $(\varphi_p)_{p\in\Sigma}$ de mouvements ponctuels

$$\varphi_p : I \to \mathscr{E}_3, \qquad t \mapsto \varphi_p(t)$$

définis sur un même intervalle de temps I, qu'on supposera de classe C^∞ et tels que, pour chaque $t \in I$, l'application $\Sigma \to \mathscr{E}_3$, $p \mapsto \varphi_p(t)$ soit injective (les particules ne peuvent occuper le même point de l'espace à un instant donné).

Du point de vue mathématique, Σ n'est rien d'autre qu'un ensemble d'indices et n'est défini qu'à une bijection près : il ne sert qu'à indexer les « particules » du « système matériel ». Du point de vue physique, Σ représente le « modèle » ou la « maquette » du système étudié. A chaque instant $t \in I$, l'image Σ_t de Σ par $p \mapsto \varphi(p, t)$ est appelée la *position du système matériel à l'instant t* ou *configuration du système à l'instant t*.

Remarque 1.47 (Changement de modèle). On peut remarquer qu'un *changement de modèle*, c'est à dire une bijection

$$\theta : \Sigma \to \Sigma'$$

ou ré-indexation de la famille des mouvements ne modifie ni l'ensemble Σ_t, ni le champ des vitesses, ni le champ des accélérations à l'instant t. On pourra donc toujours choisir comme maquette, une configuration particulière Σ_{t_0} et supposer par conséquent que Σ est une partie de l'espace affine euclidien $\mathscr{E}_3$. Dans ce cas, l'application φ_{t_0} est l'application identique Id_Σ et l'application φ_t coïncide avec la fonction de transition $\varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1} : \Sigma_{t_0} \to \Sigma_t$.

Dans le cas d'un système finis de n points matériels on prend généralement $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$. En mécanique des milieux continus (MMC), Σ est un ensemble infini, dénommé génériquement par l'anglicisme *body*. On fait généralement l'hypothèse supplémentaire que Σ est une *sous-variété compacte à bord* et que pour chaque $t \in I$ fixé, l'application

$$\varphi_t : p \mapsto \varphi(p, t), \qquad \Sigma \to \mathscr{E}_3$$

est un *plongement* C^∞. L'espace des configurations en MMC est donc l'ensemble des plongements, noté $\mathrm{Emb}(\Sigma, \mathscr{E}_3)$, de Σ dans $\mathscr{E}_3$. On peut montrer que cet ensemble est un ouvert de

l'espace vectoriel $\mathrm{C}^\infty(\Sigma, \mathscr{E}_3)$ et donc une variété de Fréchet. C'est la *description Lagrangienne* de la MMC. Dans ce modèle, le *champ des vitesses instantanées* à la date t :

$$\mathbf{V}(M,t) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(M,t)$$

appartient à l'espace tangent $T_\varphi \mathrm{Emb}(\Sigma, \mathscr{E}_3) = \mathrm{C}^\infty(\Sigma, \mathscr{E}_3)$.

1.3 Fibrés vectoriels

« Relier » ensemble de manière régulière une famille d'espaces vectoriels (E_x) où x parcourt une variété M, tel est l'objet de la définition d'un fibré vectoriel.

1.3.1 Définition d'un fibré vectoriel

Le prototype d'un fibré vectoriel est donné par l'ensemble

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$$

formé par l'ensemble des vecteurs tangents à une variété M et dénommé le *fibré tangent*. Attention, cet ensemble est constitué de vecteur tangents vivants dans des espaces vectoriels différents, ce sont des « vecteurs pointés », comme on disait autrefois. Comme nous l'avons vu, TM est une variété différentielle de dimension $2n$ mais celle-ci possède une structure supplémentaire, c'est une union disjointe d'espaces vectoriels. De plus, cette variété TM ressemble localement au produit cartésien d'un ouvert U (une carte de la variété de base M) avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Ceci nous amène à la définition générale suivante.

Définition 1.48 (Fibré vectoriel)**.** Un fibré vectoriel est construit à partir des objets mathématiques suivants :

1. deux variétés différentielles lisses, $\mathbb{E}$ (*l'espace total*) et M (la *base du fibré*),
2. une application C^∞, surjective $\pi : \mathbb{E} \to M$ (la *projection canonique*),
3. pour tout $m \in M$, une structure d'espace vectoriel de dimension finie sur la fibre

$$E_m = \pi^{-1}(m),$$

   isomorphe à un *espace vectoriel type* E.

On dit alors que $\mathbb{E}$ est un *fibré vectoriel* (localement trivial) de *fibre type* E et de *base* M si pour tout $m \in M$, il existe un voisinage ouvert U de m dans M et un difféomorphisme

$$\varphi : U \times E \to \pi^{-1}(U)$$

tel que :

1. $(\pi \circ \varphi)(m, v) = m$, pour tout $v \in E$,
2. le point $m \in M$ étant fixé, l'application $v \mapsto \varphi(m, v)$ est un isomorphisme linéaire entre l'espace vectoriel type E et la fibre E_m.

Un couple (U, φ), constitué par un ouvert U sur la base M et un difféomorphisme φ est dit *localement trivialisant*. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} U \times E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Remarque 1.49. Un exemple simple de fibré vectoriel est donné par le produit cartésien $M \times E$ d'une variété M par un espace vectoriel E, on dit alors d'un tel fibré qu'il est *trivial*. Ceci est cependant loin d'être le cas de la plupart des fibrés vectoriels qu'on rencontre en pratique. Nous verrons un peu plus loin, par exemple, que le fibré tangent de la sphère S^2 n'est pas trivial. C'est pourquoi la définition d'un fibré vectoriel est compliquée : un fibré vectoriel est, en général, seulement localement trivial, mais pas trivial (penser au ruban de Möbius).

Remarque 1.50. Comme pour les variétés différentielles, on peu également définir un fibré vectoriel de classe C^k, voir topologique mais on se concentre essentiellement dans ce cours sur la catégorie C^∞.

Étant donné un fibré vectoriel $(\mathbb{E}, \pi, M)$ et deux ouverts trivialisants (U, φ_U) et (V, φ_V), le difféomorphisme composé

$$\varphi_V^{-1} \circ \varphi_U : (U \cap V) \times E \to (U \cap V) \times E$$

s'écrit :

$$(m, v) \mapsto (m, g_{UV}(m)v)$$

où $g_{UV}(m)$ est un isomorphisme linéaire (qui dépend du point m) de E dans lui-même (voir par exemple le cas du fibré tangent où $g_{UV}(m)$ correspond, dans le cas d'un changement de cartes, à la jacobienne $\partial y^j / \partial x^i$). Ces applications sont dénommées les *fonctions de transition*.

1.3.2 Morphismes de fibrés vectoriels

Un *morphisme* de fibré vectoriels est une application C^∞ entre deux fibrés qui préserve les fibres et la structure vectorielle de chaque fibre. Plus précisément :

Définition 1.51 (Morphisme de fibrés vectoriels)**.** On appelle *morphisme*, entre deux fibrés vectoriels $(\mathbb{E}_1, \pi_1, M_1)$ et $(\mathbb{E}_2, \pi_2, M_2)$, la donnée de deux applications C^∞, $F : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ et $f : M_1 \to M_2$ telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E}_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{E}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \end{tikzcd}$$

c'est à dire $f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ F$, et tel la restriction de F à chaque fibre

$$\pi_1^{-1}(m) \to \pi_2^{-1}(\bar{f}(m))$$

soit une application linéaire.

Exemple 1.52. Soit $f : M \to N$ une application C^∞, alors l'application linéaire tangente Tf est un morphisme entre les fibrés tangents TM et TN.

Remarque 1.53. Un cas particulier est obtenu lorsque $\mathbb{E}_1$ et $\mathbb{E}_2$ sont des fibrés au dessus de la même base $M = M_1 = M_2$ et que $\bar{f} = \mathrm{Id}$.

Définition 1.54 (Isomorphisme de fibrés vectoriels)**.** Un morphisme de fibrés vectoriels $f : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ qui admet un inverse qui est également un morphisme de fibrés vectoriels (de $\mathbb{E}_2$ dans $\mathbb{E}_1$) est appelé un isomorphisme de fibrés vectoriels.

Remarque 1.55. On peut étendre la notion de fibré trivial. On dira qu'un fibré vectoriel est *trivialisable* s'il est isomorphe (en tant que fibré) au produit $M \times E$ de sa base M par sa fibre type E.

1.3.3 Opérations sur les fibrés

Toutes les opérations sur les espaces vectoriels, le passage au dual, la somme directe, le produit tensoriel, ..., induisent des opérations similaires sur les fibrés vectoriels. Ainsi si $\mathbb{E}$ est un fibré vectoriel, alors l'union disjointe

$$\bigcup_{m\in M} E_m^*$$

est encore un fibré vectoriel (localement trivial). On le note $\mathbb{E}^*$ et on l'appelle le *fibré dual*. On définit de cette façon le *fibré cotangent* T^*M à partir du fibré tangent TM.

De même, si $\mathbb{E}^1$ et $\mathbb{E}^2$ sont des fibrés vectoriels *au dessus d'une même base* M, on peut construire un fibré vectoriel, noté $\mathbb{E}^1 \oplus \mathbb{E}^2$, qui a pour fibre au dessus de $x \in M$, l'espace vectoriel $E_m^1 \oplus E_m^2$. On obtient de façon similaire le fibré tensoriel $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$ et le fibré des homomorphismes $\mathscr{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$.

Exemple 1.56 (Fibrés tensoriels)**.** Le fibré des tenseurs p-fois covariants et q-fois contravariants, noté $\mathscr{T}_p^q(M)$ est obtenu de cette façon. En particulier, on a $\mathscr{T}_0^1(M) = TM$ et $\mathscr{T}_1^0(M) = T^*M$.

Exemple 1.57 (Fibrés des formes alternées)**.** Si on se restreint aux tenseurs p-fois covariants totalement antisymétriques, on obtient le fibré, noté $\bigwedge^p T^*M$, dont chaque fibre est constituée par les formes p-linéaires totalement antisymétriques (formes alternées) sur l'espace tangent T_mM.

Remarque 1.58. Le fibré tangent TM à une variété M étant lui même une variété, on peut considérer son fibré tangent, c'est le *second fibré tangent*, noté TTM.

1.3.4 Sections d'un fibré vectoriel

Définition 1.59 (Section d'un fibré)**.** Une *section* (globale) d'un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ (continue, C^∞, ...) est une application $\sigma : M \to \mathbb{E}$ telle que

$$\pi \circ \sigma = Id_M.$$

On peut définir également la notion de *section locale* au-dessus d'un ouvert U de $\mathbb{E}$. C'est une application $\sigma : U \to \mathbb{E}$ telle que

$$\pi \circ \sigma = Id_U.$$

En d'autres termes, une section, c'est le *choix* pour chaque $m \in M$ d'un vecteur dans la fibre E_m au dessus de m et qui dépend de manière (continue, C^∞, ...) de ce point.

Remarque 1.60. Soit (U, φ) un ouvert trivialisant du fibré vectoriel $\mathbb{E}$. Alors, une section locale σ (ou la restriction à U d'une section quelconque globale) correspond à la donnée d'une application $s : U \to E$ que l'on appelle l'*expression locale* de σ et définie par

$$\sigma_U(m) = \varphi(m, s(m)), \quad m \in U.$$

On peut choisir U de telle sorte que ce soit également une carte locale de M. Dans ce cas, on peut considérer l'application s comme une fonction vectorielle (à valeurs dans E) définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble des sections d'un fibré vectoriel $(\mathbb{E}, \pi, M)$, que nous noterons $\Gamma(\mathbb{E})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le vecteur nul est représenté par la *section nulle*, i.e la section qui envoie $m \in M$ sur le vecteur nul 0_m dans E_m.

Remarque 1.61. $\Gamma(\mathbb{E})$ est également un $C^\infty(M)$-module, la multiplication d'un section $\sigma \in \Gamma(E)$ par un fonction $f \in C^\infty(M)$ étant donnée par $(f\,\sigma)(m) = f(m)\,\sigma(m)$.

En considérant divers fibrés vectoriels, on arrive aux définitions suivantes :

Champ de vecteurs : C'est une section du fibré tangent TM. On note généralement $\mathrm{Vect}(M)$ l'espace des sections C^∞ de TM.

Champ de tenseurs de type (q,p) **:** C'est une section du fibré $\mathscr{T}_q^p(M)$ des tenseurs q-fois contravariants et p-fois covariants.

Forme différentielle d'ordre p **sur** M **:** C'est une section du fibré des formes alternées $\bigwedge^p T^*M$ d'ordre p. On note $\Omega^p(M)$ l'espace des sections C^∞ de $\bigwedge^p T^*M$.

Champs de tenseurs symétriques d'ordre p **sur** M **:** C'est une section du fibré des tenseurs covariants totalement symétriques S^pT^*M d'ordre p sur TM.

Métrique riemannienne : C'est une section g du fibré S_2T^*M, des tenseurs 2-fois covariants symétriques telle que $g(m)$ soit de plus définie positive en chaque point $m \in M$.

Métrique pseudo-riemannienne de signature (r,s) **:** C'est également une section g du fibré S_2T^*M, des tenseurs 2-fois covariants symétriques mais telle que $g(m)$ soit de signature (r,s) en chaque point $m \in M$.

Remarque 1.62. Une variété M de dimension n est dite *parallélisable* si son fibré tangent est trivial, c'est à dire si TM est isomorphe au fibré trivial $M \times \mathbb{R}^n$. On voit facilement que cette propriété est équivalente à l'existence de n champs de vecteurs sur M qui sont *indépendants en tout point* m de M. De cette observation, il est facile de voir que le cercle S^1 est parallélisable. Par contre, du *théorème de la sphère chevelue* (tout champ de vecteur sur la sphère S^2 s'annule en un point au moins) permet de conclure que la sphère S^2 n'est pas parallélisable.

1.3.5 L'algèbre de Lie des champs de vecteurs

L'identification entre les vecteurs tangents en un point m d'une variété M et les dérivations en ce point peut être étendue aux champs de vecteurs, ce qui permet de définir une structure algébrique supplémentaire sur l'espace des champs de vecteurs $\mathrm{Vect}(M)$.

Définition 1.63. Une *dérivation* sur l'algèbre $\mathrm{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ des fonctions numériques C^∞ sur M est une application linéaire $D : \mathrm{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathrm{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ vérifiant de plus la *règle de Leibniz* :

$$D(fg) = f\,D(g) + D(f)\,g. \tag{1.1}$$

Remarque 1.64. Noter que l'ensemble des dérivations forme un espace-vectoriel mais que la composition de deux dérivations n'est pas une dérivation, en général.

A tout champ $X \in \mathrm{Vect}(M)$ correspond une dérivation sur $C^\infty(M)$, notée $\mathscr{L}_X$ et définie par :

$$\mathscr{L}_X(f)(m) = d_m f.X(m). \tag{1.2}$$

Inversement, on peut montrer le résultat suivant, dont la preuve est proposée dans l'exercice 1.4.

Théorème 1.65. *Soit M une variété lisse de dimension finie. Alors à toute dérivation D sur $C^\infty(M)$, correspond un unique champ de vecteur X de classe C^∞ sur M.*

Lemme 1.66. *Soient X et Y deux champs de vecteurs. Alors, l'opérateur*

$$\mathscr{L}_X\mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_Y\mathscr{L}_X$$

est encore une dérivation.

Le vérifier !

Définition 1.67 (Crochet de deux champs de vecteurs)**.** La dérivation $\mathscr{L}_X\mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_Y\mathscr{L}_X$ correspond à un champ de vecteur de classe C^∞ sur M noté $[X, Y]$ et appelé le crochet des champs de vecteurs X et Y. Il dépend de façon bilinéaire des champs X et Y.

Remarque 1.68 (Expression locale du crochet de deux champs de vecteurs). Dans un système de coordonnées locales (x^i), les composantes du champ $[X, Y]$ s'écrivent :

$$[X, Y]^k = X^j\partial_j Y^k - Y^j\partial_j X^k. \tag{1.3}$$

Définition 1.69 (Algèbre de Lie)**.** Une *algèbre de Lie* est un espace vectoriel L muni d'une application bilinéaire *antisymétrique*

$$(X, Y) \mapsto [X, Y], \qquad L \times L \to L,$$

vérifiant l'identité suivante :

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \qquad \text{(Identité de Jacobi)},$$

pour tout $X, Y, Z \in L$.

On vérifie facilement le résultat suivant.

Théorème 1.70. *L'espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(M)$ *muni du crochet* $[X, Y]$ *est une algèbre de Lie, c'est l'*algèbre de Lie des champs de vecteurs *sur* M.

1.3.6 Flot d'un champ de vecteur

Chaque champ de vecteurs X sur M définit une équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$\frac{dc}{dt} = X(c(t)), \tag{1.4}$$

où c est une courbe sur M.

Définition 1.71 (Flot d'un champ de vecteur)**.** Le *flot* de X est l'application

$$\varphi^t : M \to M, \qquad m \mapsto \varphi(t, m)$$

où $\varphi(t, m)$ est la valeur à l'instant t de la solution $c(t)$ de (1.4) telle que $c(0) = m$.

La théorie des *équation différentielle ordinaire du premier ordre* (EDO) sur un espace de Banach marche bien [31]. L'existence et l'unicité locale de la solution d'une (EDO) sont assurés par le *théorème de Cauchy–Lipschitz*. En particulier, si X est de classe C^∞, il existe pour chaque $m \in M$ une unique solution définie sur un intervalle ouvert I, contenant 0 et tel que $c(0) = m$. De plus la solution dépend de manière C^∞ de la condition initiale m. Le flot φ^t de X est donc bien défini localement.

Remarque 1.72. Attention, en général, le point $m \in M$ étant fixé, $t \mapsto \varphi(t, m)$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais seulement sur un sous-intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Par ailleurs, l'instant t étant fixé, l'application $\varphi^t := \varphi(t, \cdot)$ n'est pas nécessairement défini pour tout $m \in M$. Lorsqu'elle est définie en un point m_0, c'est un difféomorphisme local défini au voisinage de ce point. De plus si t, s et $t + s$ sont des valeurs pour lesquelles ces difféomorphismes sont définis, on a

$$(\varphi^t \circ \varphi^s)(m) = \varphi^{t+s}(m), \tag{1.5}$$

sur un voisinage de m_0. Enfin, si, pour tout $m \in M$, le flot $t \mapsto \varphi^t(m)$ est défini sur $\mathbb{R}$ tout entier, on dit que le champ X est *complet* et chaque φ^t est un difféomorphisme global de M. Quand la variété M est compacte (ou si X est à support compact [1]), c'est toujours le cas.

1. Le support d'un champ de vecteur X est l'adhérence de l'ensemble des points $x \in M$ tels que $X(x) \neq 0$.

Remarque 1.73 (Solutions maximales). Il résulte du théorème de Cauchy–Lipschitz que deux solutions d'une même (EDO) définies respectivement sur des intervalles ouvert I et J de $\mathbb{R}$ et qui coincident en un instant $t \in I \cap J$ coincident sur $I \cap J$. On peut donc prolonger chacune de ces deux solutions en une solution unique définie sur l'intervalle $I \cup J$. Une solution d'une (EDO) définie sur un intervalle I est dite *maximale* si il n'existe pas de prolongement sur un intervalle plus grand.

Remarque 1.74 (Champ de vecteurs dépendant du temps). Un champ de vecteur dépendant du temps est une application lisse $X : I \times M \to TM$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, telle que $X(t, m) \in T_mM$ pour tout $t \in I$ et tout $m \in M$. Un *courbe intégrale* de X est une courbe $(c(t)$ sur M telle que

$$c_t = X(t, c(t)).$$

Dans ce cas le flot de X est la famille de difféomorphismes (locaux)

$$\varphi_{t,s} : M \to M$$

tel que la courbe $t \mapsto \varphi_{t,s}(m)$ est la courbe intégrale $c(t)$ avec condition initiale $c(s) = m$. L'existence du flot $\varphi_{t,s}$ est encore une fois assuré par le théorème de Cauchy–Lipschitz. De plus, comme les solutions $\varphi_{t,s}(\varphi_{s,r}(m))$ et $\varphi_{t,r}(m)$ coincident en $t = s$, on en déduit la propriété

$$\varphi_{t,s} \circ \varphi_{s,r} = \varphi_{t,r}.$$

Si X est indépendant de t, alors $\varphi_{t,s} = \varphi^{t-s}$.

1.3.7 Le théorème de Frobenius

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence locale au voisinage de tout point m_0 d'une variété M d'une courbe c passant par m_0 et tangente à un champ de vecteur X donné. On peut s'interroger plus généralement si on se donne p champs de vecteur indépendants (en tout point m) si il existe (localement) une nappe paramétrée $\sigma(u_1, \dots u_p$ qui soit tangente en tout point au sous-espace engendré par ces vecteurs. C'est l'objet du *théorème de Frobenius.*

Définition 1.75 (Distribution)**.** Une distribution de rang p, notée $\mathbb{E}$ est un sous-fibré vectoriel de rang p du fibré tangent TM. Autrement dit c'est la donnée pour chaque $m \in M$ d'un sous-espace vectoriel E_m de T_mM, de dimension p qui dépend de manière lisse de m.

Définition 1.76 (Variété intégrale)**.** Une variété intégrale de $\mathbb{E}$ est une sous-variété S de M telle que $T_mS = E_m$ pour tout $m \in S$. C'est donc une sous-variété de dimension p. On dit que $\mathbb{E}$ est *intégrable* si par tout point $m \in M$ passe une variété intégrale de $\mathbb{E}$.

Supposons donc qu'il existe une variété intégrale S de $\mathbb{E}$ définie au voisinage V d'un point $m_0 \in M$ et choisissons des coordonnées locales $(x^i$ telles que localement S soit défini par les équations :

$$x^{p+1} = \cdots = x^n = 0.$$

Alors les champs de vecteurs (locaux) $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^p}$ forment une base de $T_mS = E_m$ en tout point $m \in V$. On en déduit alors, compte tenu du fait que :

$$[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = 0, \qquad \forall i, j,$$

que si X et Y sont des champs de vecteurs à valeurs dans $\mathbb{E}$, alors $[X, Y]$ est à valeur dans $\mathbb{E}$. Dit autrement, l'espace des sections $\Gamma(\mathbb{E})$ (les champs de vecteurs à valeur dans $\mathbb{E}$) est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Vect}(M)$. On dit dans ce cas que la distribution est *involutive.* Le théorème de Frobenius énonce que ce critère est également suffisant (on pourra consulter par exemple [44]).

Théorème 1.77 (Théorème de Frobenius)**.** *Soit M une variété de dimension n et $\mathbb{E}$ une distribution de rang p dans M. Alors $\mathbb{E}$ est intégrable ssi elle est involutive.*

1.4 Exercices

Exercice 1.1. Soit M une variété. Montrer que TM est toujours orientable.

Exercice 1.2. Soit $\pi : \mathbb{E} \to M$ un fibré vectoriel de rang k (i.e. $k = \dim E$) ; Monter qu'il est trivial ssi il existe il existe k sections (globales) linéairement indépendantes (en chaque point de M).

Exercice 1.3. Montrer que le fibré tangent au tore $\mathbb{T}^2$ est trivial.

Exercice 1.4 (Champs de vecteurs et dérivations)**.**

1. Montrer que toute dérivation D sur $C^\infty(M)$ est *locale*, c'est à dire que si f et g coïncident sur U, alors $D(f)$ et $D(g)$ aussi.
2. Montrer que si D est une dérivation sur $C^\infty(M)$, alors pour tout ouvert U de M, on peut définir une dérivation D_U sur $C^\infty(U)$ telle que pour tout $f \in C^\infty(M)$:
$$D_U(f_{|U}) = D(f)_{|U}\,.$$
3. En déduire que l'espace des champs de vecteurs C^∞ de M, $\mathrm{Vect}(M)$, est isomorphe à l'espace des dérivations de $C^\infty(M)$.

Exercice 1.5. Soit X et Y deux champs de vecteurs sur une variété M. Désignons par φ et ψ leur flot respectif. Monter que $\varphi^t \circ \psi^s = \psi^s \circ \varphi^t$ si et seulement si $[X, Y] = 0$.

Chapitre 2

Groupes de Lie

Définition 2.1 (Groupe de Lie)**.** Un *groupe de Lie* est un groupe G qui est également une variété de classe C^∞ et tel que les applications $g \mapsto g^{-1}$ et $(g,h) \mapsto gh$ soient C^∞.

Remarque 2.2. On peut également affaiblir la définition pour introduire la notion de *groupe topologique*. C'est un groupe qui est également un espace topologique et tel que les applications $g \mapsto g^{-1}$ et $(g,h) \mapsto gh$ soient continues. En pratique, on rencontra essentiellement des groupes de Lie.

2.0.1 Les groupes classiques

Exemple 2.3. Le *groupe linéaire réel*

$$\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}); \quad \det M \neq 0\}$$

des matrices inversibles de $\mathbb{R}^n$ est un groupe de Lie réel. En effet, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est une partie ouverte de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$. C'est donc une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2. On vérifie facilement que la composition dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, de même que l'inversion $P \mapsto P^{-1}$ ($P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$) sont des applications de classe C^∞. Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est donc un groupe de Lie.

En dehors de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, le prototype d'un groupe de Lie est très certainement, pour le mécanicien, le groupe des rotations $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Plus généralement, la plupart des groupes de Lie qu'on rencontre en pratique, sont des groupes matriciels, autrement dit des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n;K)$ où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ces groupes sont définis par des équations algébriques sur $M_n(K)$ (voir les exemples donnés ci-dessous) ; ce sont les *groupes classiques*.

Remarque 2.4. Il ne faudrait toutefois pas en déduire que tout groupe de Lie soit isomorphe à un sous-groupe matriciel, bien que cela soit vrai pour les groupes de Lie *compacts*, d'après des résultats dus à Von Neumann [49].

Détaillons l'exemple le plus parlant pour les mécaniciens, le *groupe orthogonal*

$$\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \left\{P \in M_n(\mathbb{R});\ PP^t = I\right\},$$

qui correspond aux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui préservent le produit scalaire euclidien. D'un point de vue topologique, $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est sous-ensemble fermé et borné (voir l'exercice 2.3) de $M_n(\mathbb{R})$. C'est donc un ensemble compact. Cet ensemble possède deux composantes connexes définies respectivement par $\det P = 1$ et $\det P = -1$. La composante connexe qui contient l'identité (qui est un sous-groupe) est le *groupe spécial orthogonal*

$$\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) = \left\{P \in M_n(\mathbb{R});\ PP^t = I \quad \text{et} \quad \det P = 1\right\}.$$

Théorème 2.5. *Le groupe orthogonal* $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ *est un groupe de Lie.*

Démonstration. En utilisant le théorème 1.32 sur les submersions, nous allons d'abord établir que le sous-ensemble $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ est une variété. Pour cela, on introduit l'application

$$f : P \mapsto PP^t - I, \qquad M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$$

à valeur dans l'espace vectoriel $S_n(\mathbb{R})$, des matrices carrés symétriques d'ordre n. Cette application est C^∞ (c'est une application polynomiale). Sa différentielle en un élément $P \in M_n(\mathbb{R})$ s'écrit

$$d_P f.H = PH^t + HP^t.$$

Si $P \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ (*i.e.* si P vérifie $PP^t = I$), alors $d_P f$ est une application linéaire surjective (en effet, l'équation $PH^t + HP^t = S$ se résout en prenant $H = SP/2$). Il résulte alors, d'après le théorème 1.32, que $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = f^{-1}(0)$ est la fibre d'une submersion et donc une sous-variété de classe C^∞ de $M_n(\mathbb{R})$. La composition dans le groupe $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est fourni par des applications polynomiales donc C^∞, de même que l'inversion $P \mapsto P^{-1} = P^t$. On en déduit que $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est un groupe de Lie. □

On peut montrer de la même façon que les exemples qui suivent sont des groupes de Lie. On a toutefois le résultat suivant, beaucoup plus profond et général, attribué à Élie Cartan [5] (voir également [42]).

Théorème 2.6. *(Théorème de Cartan–von Neumann) Tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un groupe de Lie.*

Exemple 2.7. Le groupe orthogonal

$$\mathrm{O}(p,q) = \left\{P \in M_n(\mathbb{R}); \quad PG_{p,q}P^t = G_{p,q}\right\}$$

où

$$G_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \qquad (p+q=n),$$

des endomorphismes qui préservent la forme quadratique :

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} x_i^2.$$

Le groupe $\mathrm{O}(3,1)$ apparaît en relativité restreinte, c'est le *groupe de Lorentz.*

Exemple 2.8. Le *groupe spécial linéaire*

$$\mathrm{SL}(n;\mathbb{R}) = \{P \in M_n(\mathbb{R}); \quad \det P = 1\}$$

des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui préservent le *déterminant.*

Exemple 2.9. Le *groupe symplectique*

$$\mathrm{Sp}(n) = \left\{P \in M_{2n}(\mathbb{R});\ PJP^t = J\right\}$$

des endomorphismes de $\mathbb{R}^{2n}$ qui préservent la *forme symplectique* de $\mathbb{R}^{2n}$, définie par :

$$\omega(x,y) := \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{n+i} - y_i x_{n+i}),$$

représentée par la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.10. Le *groupe linéaire complexe*

$$\mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) = \{P \in M_n(\mathbb{C});\ \det P \neq 0\}$$

des matrices inversibles de $\mathbb{C}^n$ est un groupe de Lie complexe de dimension n^2. On peut également considérer $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ comme un groupe de Lie réel en « décomplexifiant $\mathbb{C}^n$ ». On écrit $(z^1,\dots,z^n) = (x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n)$ où $z^k = x^k + y^k$ $(k = 1,\dots n)$. On a alors :

$$\mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) = \{P \in \mathrm{GL}(2n;\mathbb{R});\ PJ = JP\}$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice qui représente la *multiplication par i*.

Exemple 2.11. Le *groupe unitaire*

$$\mathrm{U}(n) = \left\{P \in M_n(\mathbb{C});\ P\bar{P}^t = I\right\}$$

des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ qui préservent la *forme hermitienne* $\sum_{i=1}^n z_i\bar{z}_i$. Il s'agit d'un groupe de Lie réel. Contrairement à $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, ce groupe ne possède pas de structure de groupe de Lie complexe.

Exemple 2.12. Le *groupe spécial unitaire*

$$\mathrm{SU}(n) = \left\{P \in M_n(\mathbb{C});\ P\bar{P}^t = I \quad \text{et} \quad \det P = 1\right\}.$$

Exemple 2.13. Le *groupe affine* $\mathrm{GA}(n;\mathbb{R})$ des applications affines de $\mathbb{R}^n$. On peut le réaliser comme le sous-groupe des éléments de $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$ qui préservent l'hyperplan $x_{n+1} = 1$, c'est à dire par les matrices $(n+1)\times(n+1)$ qui s'écrivent :

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^n.$$

2.0.2 Action d'un groupe de Lie sur une variété

Définition 2.14. On dit qu'un groupe de Lie G *agit* différentiablement sur une variété M si G agit (à gauche ou à droite) sur M et si cette action

$$\varphi : G \times M \to M$$

est différentiable (de classe C^∞).

Exemple 2.15. Un groupe de Lie G agit sur lui-même de différentes façons. On notera trois actions remarquables.

1. La *translation à gauche* (action à gauche)

$$(g,h) \mapsto L_g \cdot h := gh, \qquad G \times G \to G,$$

2. la *translations à droite* (action à droite)

$$(g,h) \mapsto R_g \cdot h := hg, \qquad G \times G \to G$$

3. et l'*action intérieure* ou *conjugaison* (action à gauche)

$$(g,h) \mapsto I_g \cdot h := ghg^{-1}, \qquad G \times G \to G$$

2.1 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Dans un groupe de Lie G, il y a un élément particulier, c'est l'élément neutre e. Comme nous allons le voir, l'espace tangent à G au point e possède une structure d'algèbre de Lie, c'est l'*algèbre de Lie du groupe* G. De plus, les éléments de l'algèbre de Lie du groupe peuvent être interprétés comme les *générateurs infinitésimaux* du groupe.

2.1.1 Algèbres de Lie des groupes classiques

Exemple 2.16 (Algèbre de Lie de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$)**.** Tous les espaces tangents en un point $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ se confondent avec l'espace ambiant tout entier à savoir $M_n(\mathbb{R})$. Dans ce cas, la structure d'algèbre de Lie sur $T_I\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ est le commutateur entre deux matrices :

$$[M_1, M_2\,] = M_1M_2 - M_2M_1, \qquad M_1, M_2 \in M_n(\mathbb{R}).$$

Cette algèbre de Lie est notée $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Remarque 2.17. On pourra noter comment le crochet de Lie sur $M_n(\mathbb{R})$ s'obtient par deux dérivations successives à partir de l'opération de conjugaison

$$(P,Q) \mapsto PQP^{-1}, \qquad P,Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}).$$

En dérivant une première fois par rapport à Q au point I, on obtient une application linéaire

$$\mathrm{Ad}_P : M \mapsto PMP^{-1}, \qquad \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{End}(M_n(\mathbb{R})).$$

En dérivant une seconde fois par rapport à P au point I, on obtient alors le crochet de Lie

$$[N, M\,] := (d_I\,\mathrm{Ad}\,.N)(M) = NM - MN.$$

Exemple 2.18 (Algèbre de Lie du groupe orthogonal)**.** L'espace tangent, en l'identité I, au groupe des rotations est définit par

$$\ker d_I f = \left\{H \in M_n(\mathbb{R});\ H + H^t = 0\right\},$$

f étant l'application définie par $f(P) = PP^t - I$. Cet espace tangent est donc le sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques. Le commutateur de deux matrices antisymétriques étant encore une matrice antisymétrique, l'espace des matrices antisymétriques est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. C'est l'algèbre de Lie du groupe des rotations, notée $\mathfrak{o}(n)$. C'est également l'algèbre de Lie du groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ notée $\mathfrak{so}(n)$.

Remarque 2.19. Les algèbres de Lie des autres groupes classiques s'obtiennent de la même façon, en dérivant à l'identité les équations qui définissent le groupe.

Remarque 2.20 (Cas particulier de $\mathfrak{so}(3)$). Il y a un isomorphisme bien connu entre $\mathbb{R}^3$ et l'espace des matrices anti-symétriques sur $\mathbb{R}^3$:

$$\omega \in \mathbb{R}^3 \mapsto j(\omega), \qquad j(\omega)x = \omega \wedge x,\ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Cet isomorphisme vérifie de plus :

$$[j(\omega_1), j(\omega_2)\,] = j(\omega_1 \wedge \omega_2).$$

Il s'agit donc d'un isomorphisme entre l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ et l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel (qui forme une algèbre de Lie).

2.1.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie abstrait

Nous allons maintenant introduire de façon intrinsèque une structure d'algèbre de Lie sur l'espace tangent T_eG en l'élément neutre d'un groupe de Lie abstrait G. Cette construction s'inspire de la dérivation du crochet de Lie sur l'espace tangent à l'identité au groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Le lecteur est invité à détailler les calculs pour lui-même. Désignons par

$$m : (g,h) \mapsto gh, \qquad G \times G \to G$$

la composition dans G et par

$$i : g \mapsto g^{-1}$$

l'inversion dans G. Ces applications sont lisses par définition et on pourra vérifier que, comme dans le cas de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, on a :

$$T_{(e,e)}m.(u,v) = u + v, \qquad \forall u, v \in T_eG$$

et que

$$T_e i.u = -u, \qquad \forall u \in T_eG.$$

Désignons maintenant par

$$I_g : h \mapsto ghg^{-1}, \qquad G \to G$$

la conjugaison dans G. Cette application est lisse pour tout $g \in G$ et envoie l'élément neutre e sur lui-même. Par conséquent l'application linéaire tangent au point e, T_eI_g, qu'on notera Ad_g est un endomorphisme de T_eG. On pourra vérifier que $\mathrm{Ad}_e = \mathrm{Id}$ et que

$$\mathrm{Ad}_{g_1 g_2} = \mathrm{Ad}_{g_1} \circ \mathrm{Ad}_{g_2}\,.$$

L'application

$$g \mapsto \mathrm{Ad}_g, \qquad G \to \mathrm{GL}(T_eG)$$

est appelé la *représentation adjointe* de G.

Remarque 2.21. Dans le cas de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{Ad}_P\, M = PMP^{-1}, \qquad P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ M \in M_n(\mathbb{R}).$$

Comme l'application

$$(g,h) \mapsto ghg^{-1}, \qquad G \times G \to G$$

est lisse, on en déduit que l'application $g \mapsto \mathrm{Ad}_g$ à valeur dans l'espace vectoriel $\mathrm{End}(T_eG)$ est lisse. En différenciant cette application au point e, on obtient une application linéaire

$$\mathrm{ad} := d_e\,\mathrm{Ad} : u \mapsto \mathrm{ad}_u, \qquad T_eG \to \mathrm{End}(T_eG).$$

On définit alors le crochet de Lie sur T_eG par

$$[u,v\,] := \mathrm{ad}_u\, v, \qquad \forall u, v \in T_eG \tag{2.1}$$

Remarque 2.22. Dans le cas de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{ad}_N\, M = NM - MN, \qquad M, N \in M_n(\mathbb{R}).$$

Théorème 2.23 (Algèbre de Lie d'un groupe de Lie)**.** *L'espace vectoriel T_eG muni de l'application bilinéaire définie par l'équation (2.1) est une algèbre de Lie. C'est l'algèbre de Lie du groupe G, dénotée habituellement par $\mathfrak{g}$ où* $\mathrm{Lie}(G)$.

Esquisse de preuve. Il nous faut montrer que le crochet $[u, v]$ est antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi. Le lecteur est invité à rédiger les détails de la preuve pour lui-même.

1) Pour établir l'antisymétrie, on introduit l'application commutateur

$$c : (g, h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}, \qquad G \times G \to G.$$

C'est une application lisse qui envoie $\{e\} \times G$ et $G \times \{e\}$ sur $\{e\}$. En différenciant par rapport à la deuxième variable, on obtient une application lisse

$$\partial_h c(g, e) : v \mapsto \mathrm{Ad}_g\, v - v, \qquad G \times T_eG \to T_eG.$$

En différenciant cette dernière application par rapport à g on obtient une application bilinéaire

$$\partial_g \partial_h c(e, e) : (u, v) \mapsto \mathrm{ad}_u\, v, \qquad T_eG \times T_eG \to T_eG.$$

En différenciant par rapport à la première variable, on obtient une application lisse

$$\partial_g c(e, h) : u \mapsto u - \mathrm{Ad}_h\, u, \qquad G \times T_eG \to T_eG.$$

En différenciant cette dernière application par rapport à h on obtient une application bilinéaire

$$\partial_h \partial_g c(e, e) : (u, v) \mapsto -\,\mathrm{ad}_v\, u, \qquad T_eG \times T_eG \to T_eG.$$

Comme c est lisse, le théorème de Schwarz permet de conclure que

$$\mathrm{ad}_u\, v = \partial_g \partial_h c(e, e) = \partial_h \partial_g c(e, e) = -\,\mathrm{ad}_v\, u.$$

2) Pour établir l'identité de Jacobi, on commence par établir l'identité

$$\mathrm{Ad}_g\, [u, v] = [\mathrm{Ad}_g\, u, \mathrm{Ad}_g\, v], \qquad \forall g \in G,\ \forall u, v \in T_eG,$$

et on conclut en dérivant cette dernière. □

Remarque 2.24 (Définition alternative de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie). Étant donné un groupe de Lie G, le crochet de Lie de deux champs de vecteurs invariants à gauche est lui même invariant à gauche. Comme un champ de vecteur invariant à gauche est complètement déterminé par sa valeur en l'élément neutre e, le crochet de Lie sur les champs de vecteurs induit une structure d'algèbre de Lie sur T_eG, que nous noterons $[\cdot, \cdot]_L$ et qui est défini par

$$[u, v]_L := [X^u, X^v](e), \qquad u, v \in T_eG.$$

Ce produit coincide avec le crochet $[u, v]_{\mathfrak{g}} = \mathrm{ad}_u\, v$ précédemment introduit (le vérifier !). Si on définit de même un crochet de Lie, noté $[\cdot, \cdot]_R$ sur T_eG à partir des *champs de vecteurs invariants à droite* on a

$$[u, v]_R = -\,[u, v]_L\,.$$

Remarque 2.25. Il est important de noter que tout groupe de Lie est une variété parallélisable (le fibré tangent est trivial). En effet, l'application

$$TG \to G \times \mathfrak{g}, \qquad \xi_g \mapsto TL_{g^{-1}}.\xi_g,$$

où $TL_{g^{-1}} : T_gG \to T_eG$ est l'application linéaire tangente à la translation à gauche L_g est un isomorphisme de fibré vectoriel. Dit autrement, sur un groupe de Lie G, il existe un champ de repère définit sur tout G et obtenu en translatant à gauche (ou à droite) un repère défini sur T_eG.

2.1.3 Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie

Définition 2.26 (Morphisme de groupe de Lie)**.** Un *morphisme de groupe de Lie* est un morphisme de groupe qui est également une application de classe C^∞ (il suffit en fait qu'elle soit continue).

A tout morphisme de groupes de Lie est associé un morphisme entre les algèbres de Lie respectives. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 2.27. *Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes de Lie, alors $T_e f : T_e G \to T_e G'$ est un morphisme d'algèbre de Lie, c'est à dire :*

$$T_e f\ [u, v\,] = [T_e f.u, T_e f.v\,]\,.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que, si f est un morphisme de groupes de Lie, on a :

$$f(I_g(h)) = I_{f(g)}(f(h)), \qquad g, h \in G.$$

En dérivant une première fois cette identité, on obtient :

$$T_e f.\,\mathrm{Ad}_g\, v = \mathrm{Ad}_{f(g)}\, T_e f.v, \qquad g \in G,\ v \in \mathfrak{g},$$

puis en dérivant une seconde fois, on obtient

$$T_e f.\,\mathrm{ad}_u\, v = \mathrm{ad}_{T_e f.u}\, T_e f.v, \qquad u, v \in \mathfrak{g},$$

soit

$$T_e f.\,[u, v\,] = [T_e f.u, T_e f.v\,]\,, \qquad u, v \in \mathfrak{g}.$$

□

2.2 Application exponentielle

Dans cette section, nous allons voir, inversement, comment il est possible de « reconstituer un groupe de Lie » à partir de son algèbre de Lie. Ceci se fait, au moins au voisinage de l'identité, grâce à l'*application exponentielle*. Par exemple, la plupart des mécaniciens savent qu'on peut reconstituer une rotation autour d'un axe donné en prenant l'exponentielle de la rotation infinitésimale (matrice antisymétrique) associée.

2.2.1 L'application exponentielle du groupe linéaire

Soit $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$. L'*application exponentielle* est définit par

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Il s'agit d'une série normalement convergente sur $M_n(\mathbb{R})$ qui définit une application lisse de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Remarque 2.28. On pourra vérifier, à titre d'exercice, qu'en prenant la matrice A dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \in M_n(\mathbb{R})$ d'un groupe classique $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ on a $\exp(A) \in G$. Par exemple, en prenant une matrice antisymétrique $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\exp(A) \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ car :

$$\exp(A)^t = \exp(A^t) = \exp(-A) = \exp(A)^{-1}.$$

Étant donné une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle spectre de A et on note $\mathrm{Spec}(A) \in \mathbb{C}$, l'ensembles des valeurs propres de A. On définit alors $\mathbb{B}$ la bande $|\mathrm{Im}(z)| < \pi$ dans $\mathbb{C}$ puis les deux sous-ensembles ouverts suivants de $M_n(\mathbb{R})$.

$$\Omega := \{A \in M_n(\mathbb{R});\ \mathrm{Spec}(A) \in \mathbb{B}\}$$

et

$$\Omega' := \{A \in M_n(\mathbb{R});\ \mathrm{Spec}(A) \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-\}\,.$$

On pourra noter que $\Omega' \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et on montre le résultat suivant dont la preuve est proposée dans l'exercice 2.8.

Lemme 2.29. *L'application exponentielle réalise un difféomorphisme de l'ouvert $\Omega \in M_n(\mathbb{R})$ sur l'ouvert $\Omega' \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, dont l'application inverse est notée* Log.

A l'aide de ce résultat, on démontre les deux théorèmes suivants.

Théorème 2.30 (Décomposition polaire de Cartan)**.** *Soit $M \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$. Alors il existe un unique couple (O, S) où $O \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique telle que :*

$$M = O \exp(S).$$

De plus l'application $M \mapsto (O, S)$ est un difféomorphisme de $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ sur $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$.

Démonstration. La solution du problème est fournie par les matrices :

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}({}^tMM), \qquad O = M \exp(-S).$$

Pour établir l'unicité, il suffit de remarquer que si $M = O\exp(S) = O'\exp(S')$, alors on a nécessairement ${}^tMM = \exp(2S) = \exp(2S')$ et donc $S = S'$ puis $O = O'$. Enfin il est clair que les expressions ci-dessus correspondent à un difféomorphisme de $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ sur $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. □

Théorème 2.31 (Décomposition « boost-rotation » de $\mathrm{O}(p, q)$)**.** *Soit $M \in \mathrm{O}(p, q)$. Alors s'écrit de manière unique :*

$$M = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ R & 0 \end{pmatrix}\right]$$

où $P \in \mathrm{O}(p, \mathbb{R})$, $Q \in \mathrm{O}(q, \mathbb{R})$ et R est une matrice à p colonnes et q lignes. De plus l'application $M \mapsto (P, Q, R)$ est un difféomorphisme de $\mathrm{O}(p, q)$ sur $\mathrm{O}(p, \mathbb{R}) \times \mathrm{O}(q, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$.

Remarque 2.32. On en déduit, en particulier, que si $p, q \neq 0$, alors $\mathrm{O}(p, q)$ a quatre composantes connexes.

Démonstration. Le groupe $\mathrm{O}(p, q)$ est constitué des matrices $M \in M_{p+q}(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tMGM = G$ où :

$$G = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

Son algèbre de Lie est constituée les matrices L vérifiant ${}^tLG + G{}^tL = 0$. Soit $M \in \mathrm{O}(p, q)$ alors on vérifie facilement que ${}^tM \in \mathrm{O}(p, q)$ et donc aussi ${}^tMM$. Soit :

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}({}^tMM).$$

Alors $S \in \mathfrak{o}(p,q)$. Par conséquent, les deux facteurs O et $\exp(S)$ de la décomposition de Cartan de M appartiennent au groupe $\mathrm{O}(p,q)$. On vérifie que $SG = -GS$ et que $OG = GO$ et par conséquent O et S s'écrivent :

$$O = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ R & 0 \end{pmatrix}$$

où où $P \in \mathrm{O}(p,\mathbb{R})$, $Q \in \mathrm{O}(q,\mathbb{R})$ et R est une matrice à p colonnes et q lignes. Cette solution est unique et l'application $M \mapsto (P,Q,R)$ est un difféomorphisme de $\mathrm{O}(p,q)$ sur $\mathrm{O}(p,\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(q,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$. □

2.2.2 L'application exponentielle d'un groupe de Lie abstrait

Sur un groupe de Lie abstrait G, on ne peut plus définir aussi simplement l'application exponentielle, la construction est légèrement plus subtile. Commençons par remarquer que tout élément $u \in \mathfrak{g}$ de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G engendre un *champ de vecteur* sur G, défini par :

$$X^u(g) := TL_g.u, \qquad g \in G,$$

où L_g est la translation à gauche par g sur G. Ce champ de vecteur est invariant à gauche, ce qui signifie que :

$$T_gL_h.X^u(g) = X^u(L_h \cdot g), \qquad g,h \in G.$$

Comme tout champ de vecteur sur une *variété de dimension finie*, le *théorème de Cauchy-Lipschitz* nous assure de l'existence local du flot de ce champ de vecteur. En particulier, pour tout $u \in \mathfrak{g}$, il existe une unique *courbe intégrale* de classe C^∞ de ce champ de vecteur. C'est à dire une courbe lisse $t \mapsto g(t)$, définie sur un intervalle de temps I, vérifiant $g(0) = g_0$ et telle que :

$$\frac{dg}{dt} = X^u(g). \tag{2.2}$$

Exemple 2.33. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$. Le champ de vecteur *invariant à gauche* correspondant s'écrit :

$$X^A(P) = PA, \qquad P \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}).$$

Le flot de X^A est défini par l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = PA, \qquad P \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}).$$

Il s'agit d'une équation linéaire à coefficients constants sur $M_n(\mathbb{R})$ dont la solution, pour la condition initiale $P(0) = I_n$, s'écrit $P(t) = \exp(tA)$. De plus, la solution est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on dit qu'elle est *globale*). On pourra également remarquer que la solution avec condition initiale $P(0) = P_0$ s'écrit $P(t) = P_0 \exp(tA)$.

Cette observation sur le fait que la solution soit définie globalement sur $\mathbb{R}$ est un résultat général sur les champs de vecteurs invariants à gauche (ou à droite) sur n'importe quel groupe de Lie (de *dimension finie*).

Proposition 2.34. *Soit X un champ de vecteur invariant à gauche (ou à droite) sur un groupe de Lie G (de dimension finie). Le flot φ^t de X est global et vérifie de plus*

$$\varphi^t \circ L_h = L_h \circ \varphi^t \tag{2.3}$$

pour tout $h \in G$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

Esquisse de preuve. Soit φ^t le flot du champ de vecteur X. Autrement dit, $\varphi^t(g)$ est la solution de (2.3) avec la condition initiale g en $t = 0$. Si de plus X est invariant à gauche, c'est à dire vérifie

$$T_g L_h . X(g) = X(L_h \cdot g), \qquad \forall g, h \in G,$$

alors on a (le vérifier !) :

$$L_h \circ \varphi^t \circ L_h^{-1} = \varphi^t, \qquad \forall h \in G.$$

Autrement dit, le flots φ^t et L_h commutent. Supposons maintenant que $\varphi^t(e)$ soit défini pour $|t| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Alors $\varphi^t(\varphi_\varepsilon(e)) = \varphi_\varepsilon(e)\varphi^t(e)$ est une solution de (2.3), définie sur le même intervalle de temps que $\varphi^t(e)$ et qui coïncide avec $\varphi^t(e)$ au point $\varphi_\varepsilon(e)$. Plus généralement, on obtient un prolongement de $\varphi^t(e)$ défini sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\varphi_{t+k\varepsilon}(e) = (\varphi_\varepsilon)^k (\varphi^t(e)), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

□

Définition 2.35 (Sous-groupe à 1 paramètre)**.** Un *sous-groupe à 1 paramètre* d'un groupe de Lie G est un morphisme de groupe de Lie de $\mathbb{R}$ dans G, c'est à dire une application C^∞ de $\mathbb{R}$ dans G telle que :

$$g(t + s) = g(t)g(s). \tag{2.4}$$

On a donc le résultat important suivant.

Corollaire 2.36. *Chaque élément u de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie G défini un* sous-groupe à 1 paramètre $g(t)$. *Inversement tout-sous groupe à 1 paramètre lisse, $t \mapsto g(t)$ définit un champ de vecteur invariant à gauche X, dont la valeur en e est donnée par $X(e) = \dot{g}(0)$.*

Définition 2.37. On appelle *application exponentielle* du groupe de Lie G, l'application

$$\exp : \mathfrak{g} \to G, \qquad u \mapsto \varphi(1, e, u)$$

où $\varphi(t, g, u)$ est le flot du champ de vecteur invariant à gauche X^u.

Proposition 2.38. *Cette application possède les propriétés suivantes :*

1. $\exp(tu) = \varphi(t, e, u)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $u \in \mathfrak{g}$,
2. $\exp((t + s)u) = \exp(tu)\exp(su)$ *pour tout* $t, s \in \mathbb{R}$ *et tout* $u \in \mathfrak{g}$.

Remarque 2.39. Attention, si u et v ne commutent pas, on a pas $\exp(u)\exp(v) = \exp(u + v)$ mais une expression plus compliquée :

$$\exp(u)\exp(v) = \exp\left(u + v + \frac{1}{2}[u, v] + \cdots\right)$$

qu'on appelle la *formule de Baker-Campbell-Hausdorff* [42].

Théorème 2.40. *L'application exponentielle est un difféomorphisme d'un voisinage de* 0 *dans* $\mathfrak{g}$ *sur un voisinage de e dans G et sa différentielle à l'origine est l'identité.*

Démonstration. L'application exponentielle est une application C^∞ de $\mathfrak{g}$ dans G en vertu des résultats classiques sur la régularité du flot d'un champ de vecteur dépendant de manière lisse d'un paramètre (voir [31] par exemple). Grâce au *théorème d'inversion local*, il nous suffit donc de montrer que sa différentielle à l'origine est l'identité. Soit $u \in \mathfrak{g}$ et désignons par $\varphi(t, g, u)$ le flot du champ de vecteur invariant à gauche engendré par u. On a :

$$T_0 \exp . u = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tu) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(t, e, u) = X^u(e) = u,$$

ce qui achève la preuve. □

Définition 2.41 (Coordonnées canoniques)**.** Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de $\mathfrak{g}$. Tout vecteur $u \in \mathfrak{g}$ se met sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i,$$

où x^i sont les composantes de u dans cette base. Comme exp est un difféomorphisme local en 0 de $\mathfrak{g}$ sur un voisinage ouvert e dans G, on peut prendre (x^i) comme coordonnées du point $g = \exp(\xi) \in G$. Les fonctions coordonnées $exp(\xi) \mapsto x^i$ sont appelées les *coordonnées canoniques* ou *normales* de g relativement à la base e_i de $\mathfrak{g}$.

Remarque 2.42. Attention, l'exponentielle n'est pas un *difféomorphisme global* pour autant. Elle n'est même pas *surjective* en général. On peut montrer cependant que si G est un groupe de Lie *compact et connexe* alors exp est surjective (voir par exemple [21]).

On a toutefois le résultat suivant qui peut s'avérer utile et dont la démonstration est laissée en exercice 2.12.

Proposition 2.43. *Tout élément g dans la composante de l'identité G_0 d'un groupe de Lie G peut s'écrire*

$$\exp(u_1)\cdots\exp(u_n)$$

où $u_1, \ldots, u_n$ sont des éléments de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Remarque 2.44. Ces produits d'exponentiels apparaissent également dans la modélisation des systèmes polyarticulés.

2.3 Les groupes de la mécanique classique

2.3.1 Le groupe de Galilée

En mécanique classique non relativiste apparaît le *groupe de Galilée* qui permet de formaliser le principe de relativité Galiléen : *les équations du mouvement d'un système isolé sont invariantes par le groupe de Galilée.* Ce groupe, que nous noterons $\mathbb{G}$ est un sous-groupe du groupe affine $\mathrm{GA}(4;\mathbb{R})$. Une fois fixé un référentiel spatio-temporel, il agit sur les coordonnées $(\mathbf{r}, t)$ d'un évènement par les formules :

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = & \mathbf{A}\mathbf{r} + \mathbf{b}t + \mathbf{c} \\ t' = & t + e \end{cases}$$

où $\mathbf{A} \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ et $e \in \mathbb{R}$. On peut le représenter matériellement sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est un groupe de Lie de dimension 10. Il est engendré par trois rotations, trois « boosts », trois translations spatiales et une translation temporelle. Son algèbre de Lie, $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ est représentée par les matrices

$$\begin{pmatrix} Z = & j(\boldsymbol{\omega}) & \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\gamma} \\ & 0 & 0 & \epsilon \\ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ et $\epsilon \in \mathbb{R}$.

2.3.2 Le groupe de Poincaré

En mécanique classique relativiste, l'espace temps est modélisé par l'*espace de Minkowski*, i.e. l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de la forme quadratique

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 \tag{2.5}$$

En *relativité restreinte*, on passe d'un référentiel d'inertie à un autre par le *groupe de Poincaré* (ou *groupe de Lorentz non homogène*), que nous noterons $\mathbb{P}$. C'est le groupe des isométries affines de l'espace de Minkowski, il opère sur l'espace de Minkowski de la manière suivante

$$a(X) = L\,X + C.$$

où $L \in O(3,1)$ (le groupe de Lorentz) et $C \in \mathbb{R}^4$. On peut le représenter matériellement de la façon suivante

$$g = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La composante connexe de l'identité du groupe de Poincaré est appelé *groupe de Poincaré restreint*. Ce sous-groupe est engendré par les translations dans les quatre directions x_1, x_2, x_3, x_4, par les *rotations euclidiennes*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dans le plans $x_i x_j$ au nombre de trois et par les *rotations hyperboliques*

$$\begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}$$

dans le plans $x_i x_4$ également au nombre de trois. Ce sont ces rotations hyperboliques qu'on appelle habituellement les *transformations de Lorentz*. En effet, si $x_\mu^{'}$ sont les coordonnées déduites de x_μ par une rotation hyperbolique dans le plan $x_1 x_4$, on a

$$x_1^{'} = x_1 \cosh\varphi + x_4 \sinh\varphi,$$
$$x_4^{'} = x_1 \sinh\varphi + x_4 \cosh\varphi.$$

Ces formules s'interprètent comme décrivant un repère en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un autre (le « train d'Einstein »), avec une vitesse $v = \tanh\varphi$ (donc inférieur à la vitesse de la lumière)

$$x_1^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,x_1 + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,x_4, \tag{2.6}$$
$$x_4^{'} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,x_1 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,x_4, \tag{2.7}$$

formules qui conduisent aux notions populaires de « retard des horloges » et de « contraction de Lorentz ».

Remarque 2.45. Ces dernières formules nous amènent à constater que la notion de simultanéité absolue n'existe plus en relativité restreinte. Deux évenements considéré comme simultanés (qui ont la même date t) dans une référentiel donné ne le sont plus forcément dans un autre référentiel, comme le montre les formules précédentes. Par conséquent, la notion de « *corps rigide* » issue de la mécanique classique est incompatible avec la relativité restreinte (puisque la notion de distance entre deux points nécessite la simultanéité).

Lorsque le choix des unités est tel que $c \neq 1$ et qu'on a posé $x_4 = ct$, les formules de Lorentz doivent être remplacées par les suivantes

$$x^{'} = \gamma\,(x + vt)\,, \qquad t^{'} = \gamma\left(\frac{v}{c^2}\,x + t\right),$$

où $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1}$. Lorsque l'on fait tendre c vers l'infini, ces formules nous ramène à la transformation de Galilée

$$x^{'} = x + vt, \qquad t^{'} = t.$$

Plus généralement (voir [50]), on peut montrer que le groupe de Galilée, dans son ensemble, est une approximation à l'ordre $O(c^{-2})$ du groupe de Poincaré.

Théorème 2.46 (Souriau)**.** *Tout élément du groupe de Lorentz restreint se met sous la forme*

$$a = \begin{pmatrix} A & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c^{-2}\begin{pmatrix} k(VV^t)A & 0 \\ V^t\,A & kv^2 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{pmatrix} A & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un élément du groupe de Galilée homogène et $k = (\sqrt{1 + v^2/c^2} + 1)$.

2.4 Le groupe des difféomorphismes

Si la définition classique d'un groupe de Lie requiert que G soit une variété de dimension finie, cette notion s'étend assez facilement à la catégorie des variétés *hilbertiennes* ou *banachiques*. Le groupe linéaire topologique d'un espace de Banach ou d'un espace de Hilbert fournissent des exemples de telles structures.

Il y a toutefois des groupes de dimension infinie très intéressants qui ne rentrent pas dans cette catégorie ; par exemple le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes C^∞ d'une variété différentielle M. Il est cependant possible d'équiper $\mathrm{Diff}(M)$ d'une structure de variété modelée sur un *espace de Fréchet* et telle que les opérations du groupe soient C^∞. On peut alors, au moins formellement considérer $\mathrm{Diff}(M)$ comme un groupe de Lie ; on parle alors de *groupe de Lie-Fréchet*. Dans ce cas, cependant, on prendra garde au fait que la notion de dérivabilité est affaiblie et limitée aux dérivées directionnelles (dérivées au *sens de Gâteaux*).

Remarque 2.47 (Espaces de Fréchet). Un espace vectoriel topologique E possède une *structure uniforme* canonique (on peut définir ce qu'est une suite de Cauchy). On dira que E est un espace de Fréchet si cette structure uniforme est *complète* et si de plus, la topologie de E peut-être induite par une famille dénombrable de *semi-normes*. Dans un espace de Fréchet, le théorème de *Cauchy-Lipschitz* et le théorème d'*inversion locale* ne sont plus vrai en général. L'exemple type d'un espace de Fréchet est l'espace des fonctions C^∞ sur une variété compacte de classe C^∞ ; la famille des semi-normes étant données par les normes C^k $(k = 0, 1, \dots)$.

Il existe en fait plusieurs définitions (pas toujours équivalentes) de « groupes de Lie » en dimension infinie. Il n'est pas question de rentrer ici dans ces subtilités mais nous renvoyons le lecteur intéressé aux références suivantes [14, 40, 15, 36, 41, 26, 27]. Dans la suite de cette section, on en restera à une vision un peu formelle de ce concept et on ne cherchera pas à donner des justifications rigoureuses des résultats.

2.5 L'algèbre de Lie du groupe des difféomorphismes

L'espace tangent à $\mathrm{Diff}(M)$ en l'identité $\mathrm{Id} \in \mathrm{Diff}(M)$ est l'espace des champs de vecteurs sur M, noté $\mathrm{Vect}(M)$. La justification est la suivante : considérons un arc $t \mapsto \varphi(t)$ de classe C^∞ dans $\mathrm{Diff}(M)$ et tel que $\varphi(0) = \mathrm{Id}$. Un vecteur tangent au point $\mathrm{Id} \in \mathrm{Diff}(M)$ est donc la dérivée en $t = 0$ d'un tel arc $\varphi(t)$ dans $\mathrm{Diff}(M)$. Autrement dit

$$\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)_{t=0}(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(0, x).$$

Mais l'application

$$X : x \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial t}(0, x), \qquad M \to TM$$

est une section de TM, i.e. $\pi(X(x)) = x$ (π désignant la projection canonique $TM \to M$) puisque $\varphi(0) = \mathrm{Id}$. Donc X est bien un champ de vecteur. D'une façon similaire, on voit qu'il est possible d'identifier l'espace tangent en un point $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ quelconque avec l'espace vectoriel des applications C^∞, $V : M \to TM$ telles que $\pi(V(x)) = \varphi(x)$. Ce ne sont pas des sections de TM (et donc pas des champs de vecteurs).

Définition 2.48 (Représentation adjointe de $\mathrm{Diff}(M)$)**.** L'action adjointe de $\mathrm{Diff}(M)$ sur $\mathrm{Vect}(M)$ s'écrit :

$$(\mathrm{Ad}_\varphi X)(x) = T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi.X(\varphi^{-1}(x)), \qquad x \in M$$

où $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ et $X \in \mathrm{Vect}(M)$. Cette action est souvent notée $\varphi_* X$ dans les ouvrages de géométrie différentielle.

Définition 2.49 (Représentation adjointe de $\mathrm{Vect}(M)$)**.** L'action adjointe de $\mathrm{Vect}(M)$ sur $\mathrm{Vect}(M)$ est l'application bilinéaire donnée par :

$$\mathrm{ad}_X\ Y = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_*^t\, Y$$

où $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$ et φ^t est le flot de X.

Remarque 2.50. L'application bilinéaire $(X, Y) \mapsto \mathrm{ad}_X Y$ définit sur $\mathrm{Vect}(M)$ une structure d'algèbre de Lie. Ce n'est toutefois pas la structure d'algèbre de Lie définie au chapitre précédent. On a :

$$[X, Y] = -\,\mathrm{ad}_X Y,$$

Le vérifier !

Du fait que la représentation adjointe est une représentation d'algèbre de Lie, on déduit immédiatement le résultat suivant.

Lemme 2.51. *Soient X, Y deux champs de vecteurs et φ un difféomorphisme, alors :*

$$[\varphi_* X, \varphi_* Y] = \varphi_* [X, Y].$$

Soit $X \in \mathrm{Vect}(M)$ un champ de vecteur sur M, autrement dit un élément de l'algèbre de Lie de $\mathrm{Diff}(M)$. Le champ de vecteur *invariant à droite* correspondant s'écrit :

$$\tilde{X}(\varphi) = X \circ \varphi, \qquad \varphi \in \mathrm{Diff}(M).$$

Le flot de $\tilde{X}$ sur $\mathrm{Diff}(M)$ est défini par l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = X(\varphi_t(x)).$$

cette équation admet des solutions locales en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz sur M. Elle n'admet pas de solution globale en général, donc pas de solution dans $\mathrm{Diff}(M)$. Contrairement à ce qui se passe pour un groupe de Lie de dimension finie, la proposition 2.34 n'est plus valable dans ce cas. Ainsi, le flot habituel du champ de vecteur X correspond (quand il est défini globalement) au sous-groupe à 1 paramètre engendré par *translation à droite* de l'élément X de l'algèbre de Lie $\mathrm{Vect}(M)$ sur le groupe $\mathrm{Diff}(M)$.

Remarque 2.52. Il y a une classe remarquable de groupes de Lie-Fréchet pour lesquels la proposition 2.34 reste vraie, ce sont les *groupes de Lie réguliers* introduits par Milnor [36]. Un groupe de Lie est régulier si pour tout arc (C^∞) $t \mapsto \omega(t)$ d'un intervalle I dans $\mathfrak{g}$, il existe une solution (C^∞) de l'équation $\dot{g}(t) = L_{g(t)}\omega(t)$ (elle est nécessairement unique si la condition initiale est fixée) et si de plus l'application $\omega \mapsto g(0)^{-1}g(1)$ de $\mathrm{C}^\infty(I, \mathfrak{g})$ dans G est C^∞. Le groupe des difféomorphismes d'une variété *compacte* est un exemple de tel groupe.

Remarque 2.53. Sur un groupe de Lie-Fréchet, rien ne garantit que l'*exponentielle* soit un difféomorphisme local. En particulier sur le groupe des difféomorphismes du cercle $\mathrm{Diff}(S^1)$, l'exponentielle n'est même pas *localement surjective* (voir [36]).

2.6 Action infinitésimale associée à un groupe de Lie

Définition 2.54. Une action (à gauche) d'un groupe de Lie G sur une variété M a été définie comme une application lisse

$$\psi : G \times M \to M, \qquad (g, x) \mapsto \psi(g, x)$$

telle que :

1. $\psi(e, x) = x$, pour tout $x \in M$,
2. $\psi(g_1 g_2, x) = \psi(g_1, \psi(g_2, x))$, pour tout $x \in M$ et tout $g_1, g_2 \in G$.

Un cas particulier important est obtenu lorsque $M = E$ est un espace vectoriel et que G agit *linéairement* sur E. Dans ce cas, on dit que ψ est une *représentation linéaire* de G sur E. On peut réinterpréter cette définition en disant qu'une représentation (lisse) de G sur un espace vectoriel E est un morphisme de groupe de Lie

$$\psi : G \to \mathrm{GL}(E),$$

où $\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des automorphismes linéaires de E. Si ψ est différentiable, alors comme nous l'avons vu, ψ induit un morphisme entre les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $L(E)$ (l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}(E)$). Celui-ci est donné par :

$$\tilde{\psi} := T_e\psi : \mathfrak{g} \to L(E), \qquad u \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi(\exp(tu)).$$

Autrement dit, $\tilde{\psi} : \mathfrak{g} \to L(E)$ est une application linéaire telle que :

$$\tilde{\psi}\left([u, v]_{\mathfrak{g}}\right) = \tilde{\psi}(u)\tilde{\psi}(v) - \tilde{\psi}(v)\tilde{\psi}(u).$$

Plus généralement, une action différentiable (à gauche) d'un groupe de Lie G sur une variété quelconque M peut être assimilée à un morphisme (de groupe de Lie) :

$$\psi : G \to \mathrm{Diff}(M).$$

Elle induit par dérivation un morphisme entre l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G et celle de $\mathrm{Diff}(M)$, c'est à dire $\mathrm{Vect}(M)$. Plus précisément, à tout élément u de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, on peut donc associer un champ de vecteur sur M, qu'on notera u_M et défini de la façon suivante :

$$u_M(x) = T_e\psi.u = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi(\exp(tu), x), \qquad x \in M,$$

où $\exp(tu) \in G$ est le sous-groupe à 1 paramètre engendré par $u \in \mathfrak{g}$. C'est l'*action infinitésimale de* $\mathfrak{g}$ *sur* M associée à l'action de G sur M. On a de plus

$$[u_M, v_M]_{\mathrm{Vect}(M)} = -\left([u, v]_{\mathfrak{g}}\right)_M, \qquad u, v \in \mathfrak{g}.$$

Dans cette formule, le signe $-$ est du à la définition du crochet de Lie sur $\mathrm{Vect}(M)$ qui correspond à $-\operatorname{ad}_X Y$.

Remarque 2.55. Si ψ est une représentation linéaire, alors le champ de vecteurs u_M dépend linéairement de $x \in E$. dans ce cas et avec les notations précédentes, on a $u_M(x) = \tilde{\psi}(u).x$.

Remarque 2.56. Dans le cas général, si G est de dimension infinie, il se peut que $\exp(tu)$ ne soit défini que localement (ou même pas du tout, sans définition plus précise sur la structure de G). Toutefois, si G est de dimension finie, ce sous-groupe à 1 paramètre $\exp(tu)$ est défini globalement (voir proposition 2.34) et par conséquent le flot du champ de vecteur u_M, qui s'écrit $\varphi^t(x) = \psi(\exp(tu), x)$, aussi.

2.7 La dérivée de Lie

A tout champ de vecteur X sur une variété M, on a associé une dérivation sur $\mathrm{C}^\infty(M)$, notée $\mathscr{L}_X$ et définie par :

$$(\mathscr{L}_X f)(x) = d_x f.X(x), \qquad f \in \mathrm{C}^\infty(M), x \in M.$$

Si φ^t désigne le flot du champ de vecteur X, on peut réécrire cette formule sous la forme :

$$(\mathscr{L}_X f)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\varphi^t(x))$$

Arrêtons-nous un instant sur cette définition. La formule

$$\varphi^* f := f \circ \varphi, \qquad f \in \mathrm{C}^\infty(M),\ \varphi \in \mathrm{Diff}(M)$$

définit une action (à droite) du groupe des difféomorphisme $\mathrm{Diff}(M)$ sur $\mathrm{C}^\infty(M)$ et la dérivation $\mathscr{L}_X$ correspond à l'action infinitésimale induite de $\mathrm{Vect}(M)$ sur $\mathrm{C}^\infty(M)$:

$$(\mathscr{L}_X f)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi^t)^* f\,(x).$$

Comme nous allons le voir, cette dérivation, appelée *dérivée de Lie*, peut être étendue à tous les objets sur lesquels on peut définir une action (lisse) du groupe des difféomorphismes. Considérons, par exemple, l'espace des champs de vecteurs $\mathrm{Vect}(M)$. Le groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(M)$ agit *à gauche* sur $\mathrm{Vect}(M)$ de la façon suivante

$$(\varphi_* X)(x) := T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi.X(\varphi^{-1}(x)), \tag{2.8}$$

qui est l'action adjointe, Ad_φ, de $\mathrm{Diff}(M)$ sur $\mathrm{Vect}(M)$. Il agit également *à droite* de la façon suivante

$$(\varphi^* X)(x) = (\varphi_*^{-1} X)(x) = T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}.X(\varphi(x)). \tag{2.9}$$

L'action infinitésimale associée s'écrit :

$$(\mathscr{L}_X Y)(x) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left((\varphi^t)^* Y\right)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_*^{-t} Y(x). \tag{2.10}$$

Le vecteur $\mathscr{L}_X Y$ définit un nouveau champ de vecteur qui est la dérivée de Lie du champ Y par rapport au champ X.

Remarque 2.57. Comme nous l'avons deja vu : $\mathscr{L}_X Y = [X, Y] = -\operatorname{ad}_X Y$.

La définition de la dérivée de Lie s'étend à tous les champs de tenseurs, comme nous allons le voir maintenant. L'action naturelle (à droite) sur les *champs de covecteurs* α (i.e. les sections du fibré cotangent T^*M) est donnée par :

$$(\varphi^*\alpha)(\xi_x) = \alpha_{\varphi(x)}(T_x\varphi.\xi_x). \tag{2.11}$$

A partir de l'action naturelle (à droite) sur les champs de vecteurs (2.9) et de l'action naturelle (à droite) sur les champs de covecteurs (2.11), on déduit par induction une action sur les champs de tenseurs T de type (p, q) en posant :

$$\varphi^*(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_q) = \varphi^*\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \varphi^*\alpha_p \otimes \varphi^* X_1 \otimes \cdots \otimes \varphi^* X_q \tag{2.12}$$

et la dérivée de Lie du champ de tenseurs T s'écrit :

$$\mathscr{L}_X T = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi^t)^* T.$$

Remarque 2.58. Plus généralement le calcul de la dérivée en t de $\varphi_*^t T$ au temps t s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\varphi_*^t T = \varphi_*^t \mathscr{L}_X T.$$

Remarque 2.59. On pourra noter, que du fait de la définition même de la dérivée de Lie $\mathscr{L}_X$ comme action infinitésimale de l'action du groupe des difféomorphismes, on a :

$$[\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y]\, T = \mathscr{L}_{[X,Y]} T$$

pour tout champ de tenseur T.

Remarque 2.60 (Dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteur dépendant du temps). Le fait même que la dérivée de Lie soit définie comme une action infinitésimale du groupe des difféomorphismes permet de justifier l'extension de la dérivée de Lie dans le cas d'un champ de vecteur $X(t)$ dépendant du temps. Plus précisément, si $\varphi_{t,s}$ désigne le flot de $X(t)$, alors la courbe $t \mapsto \varphi(t, s, m)$ vérifie :

$$\varphi(t, s, m) = m, \qquad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{t=s} (t, s, m) = X(t, m)$$

on peut donc définir :

$$\mathscr{L}_{X(t)} T := \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=s} \varphi_{t,s}^* T.$$

On a alors également :

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{t,s}^* T = \varphi_{t,s}^* \mathscr{L}_{X(t)} T.$$

2.8 Exercices

Exercice 2.1. Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative. Montrer que G est un groupe si et seulement si l'axiome suivant est vérifié :

$$\forall a, b, c \in G, \quad \exists x \in G; \quad a = bxc \qquad \text{(interposition)}$$

Exercice 2.2. Soit X un ensemble muni de l'action d'un groupe G. Monter que :

$$G_{g\cdot x} = gG_x g^{-1}.$$

Exercice 2.3. Monter que $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ est compact. On pourra utiliser la norme matricielle $\|P\| := \mathrm{tr}(PP^t)$.

Exercice 2.4. Montrer que $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.

Exercice 2.5. Montrer que $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

Exercice 2.6. Montrer que si $AB = BA$ alors $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. Inversement, montrer que si $\exp(t(A + B)) = \exp(tA)\exp(tB)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $AB = BA$.

Exercice 2.7. Montrer que $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ est surjective (utiliser la décomposition en sous-espaces caractéristiques).

Exercice 2.8. Soit Ω l'ensemble des éléments $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont le spectre est contenu dans la bande $|\mathrm{Im}(z)| < \pi$. Alors exp envoie Ω dans l'ouvert Ω' qui est l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont le spectre est contenu dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. Pour $A \in \Omega'$, on pose

$$f(A) = \int_{-\infty}^{0} \left[(sI - A)^{-1} - (s - 1)^{-1}I\right] ds.$$

Montrer que f est une application C^∞ de Ω' dans Ω. Montrer que $f(\exp(tA)) = tA$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $A \in \Omega'$. En déduire que $\exp : \Omega \to \Omega'$ est un difféomorphisme dont la réciproque est f que l'on notera donc Log.

Exercice 2.9. Montrer que $\mathrm{Log}(P^{-1}AP) = P^{-1}\mathrm{Log}(A)P$, pour tout $A \in \Omega'$ et tout $P \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Log}({}^tA) = {}^t\mathrm{Log}(A)$ et que $\mathrm{Log}(A^{-1}) = -\mathrm{Log}(A)$ si A est inversible.

Exercice 2.10. En utilisant la décomposition polaire, montrer que $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Montrer que tout sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est conjugué à $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. Montrer que pour $n = 2$ et $n = 3$, on a le résultat suivant plus fort : $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe maximal de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Exercice 2.11. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe de Lie injectif. Montrer que $T_e f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est injectif.

Exercice 2.12. Soit G un groupe de Lie. Montrer que tout élément $g \in G_0$ où G_0 est la composante connexe de l'identité peut s'écrire comme un produit $\exp(u_1) \cdots \exp(u_n)$, où $u_1, \ldots, u_n$ sont des éléments de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On pourra montrer que l'ensembles des éléments g qui vérifient cette propriété forment un ouvert-fermé de G.

Exercice 2.13. Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On introduit sur $\mathfrak{g}$ la *forme de Killing*

$$k(u, v) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_u\, \mathrm{ad}_u), \qquad u, v \in \mathfrak{g}.$$

Montrer que k est une forme bilinéaire symétrique invariante par la représentation adjointe de G sur $\mathfrak{g}$.

Exercice 2.14. Soient X, Y deux champs de vecteurs et $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$. Calculer $\mathscr{L}_{fX}Y$ et $\mathscr{L}_X fY$.

Exercice 2.15 (Formule de Leibnitz)**.** Montrer que si α est une 1-forme, X, un champ de vecteur et φ, un difféomorphisme, on a :

$$(\varphi^*\alpha)(\varphi^*X)(x) = \alpha(X)(\varphi(x) = \varphi^*(\alpha(X)).$$

En déduire que :

$$\mathscr{L}_X(\alpha(Y)) = (\mathscr{L}_X\,\alpha)(Y) + \alpha(\mathscr{L}_X Y).$$

Exercice 2.16. Soient S, T des champs de tenseurs sur une variété M et X un champ de vecteur. Montrer que

$$\mathscr{L}_X(S \otimes T) = \mathscr{L}_X S \otimes T + S \otimes \mathscr{L}_X T.$$

Exercice 2.17. Soit T un champ d'ordre (p, q) sur une variété M (avec $p, q > 0$) et X un champ de vecteur. Montrer que, pour toute contraction c, on a :

$$\mathscr{L}_X(c(T)) = c(\mathscr{L}_X T).$$

Chapitre 3

Formes différentielles

Les formes différentielles sont avec les champs de vecteurs à la base de la géométrie différentielles. On peut les intégrer sur des sous-variétés et elles permettent de formuler des équations bilan. Dans ce chapitre, on introduira d'abord les produits extérieurs et intérieurs, puis la différentielle extérieur. On formulera ensuite le théorème de Stokes dont découlent les formules intégrales classiques de l'analyse vectorielle. On introduira ensuite la notion de complexe différentiel, ce qui nous permettra de parler du lemme de Poincaré, d'introduire l'opérateur de Hodge et la co-différentielle. On donnera enfin deux applications de ce formalisme, les équations de Maxwell et les équations de compatibilité en élasticité linéaire (dans le cadre des complexes généralisés).

3.1 Formes différentielles extérieures

Étant donné un espace vectoriel E de dimension n, l'espace des formes k-linéaire alternées (i.e totalement antisymétriques) est noté $\bigwedge^k E^*$. On pourra noter que $\bigwedge^k E^* = \{0\}$ si $k \geq n$. Soit (e_i) une base de E et (e^i) la base duale. Étant donnée un sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_k\}$ de $\{1, \ldots, n\}$, on définit un élément de $\bigwedge^k E^*$ en posant :

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(\sigma) \xi_1^{\sigma(i_1)} \cdots \xi_k^{\sigma(i_k)},$$

où $\xi_p^{\sigma(j)}$ sont les composantes de ξ_p dans la base (e_i) et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ. Il est facile de vérifier que l'ensemble des formes $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ quand $\{i_1, \ldots, i_k\}$ parcourt l'ensemble des partie de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal k forme une base de $\bigwedge^k E^*$ et donc que

$$\dim \bigwedge^k E^* = \binom{n}{k}.$$

Définition 3.1 (Formes différentielles extérieures)**.** Une *forme différentielle extérieure de degré* k sur une variété M est une section lisse du fibré $\bigwedge^k T^*M$. On dénotera cet espace de sections $\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ par $\Omega^k(M)$.

Remarque 3.2. Une forme différentielle de degré 0 est simplement une fonction sur M à valeurs réelles.

Remarque 3.3. En coordonnées locales, définies sur une carte U de M, une forme différentielles α de degré k sur une variété M de dimension n s'écrit :

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \cdots i_k} \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

où (dx_i) est la base duale de la base (∂_{x^i}) de T_xM et $\alpha_{i_1\cdots i_k}$ sont des fonctions lisses sur U.

Remarque 3.4 (Pullback d'une forme différentielle). On pourra remarquer que la définition que nous avons donné de $\phi^*\alpha$ (où ϕ est un difféomorphisme) ne fait pas intervenir l'inverse de ϕ pour une forme différentielle (ni plus généralement pour un tenseur d'order $(0,p)$). On peut donc étendre cette définition dans le cas d'une application lisse $f : M \to N$ entre deux variétés (qui n'est pas nécessairement un difféomorphisme). Plus précisément, à tout $f \in \mathrm{C}^\infty(M,N)$ correspond une application linéaire

$$f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$$

définie par

$$(f^*\beta)_x(\xi_1,\ldots,\xi_k) := \beta_{f(x)}(T_xf.\xi_1,\ldots,T_xf.\xi_k), \qquad \beta \in \Omega^k(N)$$

pour tout $x \in M$ et $\xi_1,\ldots,\xi_k \in T_xM$.

3.1.1 Produit extérieur

Définition 3.5 (Produit extérieur)**.** Le *produit extérieur* de deux formes différentielle $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q(M)$ est une opération bilinéaire associative

$$\Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \to \Omega^{p+q}(M),$$

notée $\wedge$ et définie[1] par :

$$(\alpha\wedge\beta)_x(\xi_1,\ldots,\xi_{p+q}) := \frac{1}{p!\,q!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+q}} \epsilon(\sigma)\alpha(\xi_{\sigma(1)},\ldots,\xi_{\sigma(p)})\beta(\xi_{\sigma(p+1)},\ldots,\xi_{\sigma(p+q)}),$$

où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ et $\xi_1,\ldots,\xi_{p+q} \in T_xM$.

Exemple 3.6. Si $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$ alors

$$(\alpha\wedge\beta)_x(\xi_1,\xi_2) = \alpha_x(\xi_1)\beta_x(\xi_2) - \alpha_x(\xi_2)\beta_x(\xi_1),$$

où $\xi_1,\xi_2 \in T_xM$.

Lemme 3.7. *Soient $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q(M)$ alors :*

$$\alpha\wedge\beta = (-1)^{pq}\beta\wedge\alpha.$$

Lemme 3.8. *Soient ϕ un difféomorphisme et X un champ de vecteurs. Alors on a*

$$\phi^*(\alpha\wedge\beta) = \phi^*\alpha\wedge\phi^*\beta, \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L}_X(\alpha\wedge\beta) = \mathscr{L}_X\alpha\wedge\beta + \alpha\wedge\mathscr{L}_X\beta.$$

3.1.2 Produit intérieur

Le *produit intérieur* d'un champ de vecteur X et d'une forme différentielle α est obtenu par contraction.

Définition 3.9 (Produit intérieur)**.** Étant donné un champ de vecteur X sur une variété M, on définit l'opérateur linéaire

$$i_X : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$$

défini par :

$$(i_X\alpha)_x(\xi_1,\ldots,\xi_{p-1}) := \alpha_x(X_x,\xi_1,\ldots,\xi_{p-1}),$$

pour tout $\xi_1,\ldots,\xi_{p-1} \in T_xM$. Si $p = 0$ (i.e. si α est une fonction), alors $i_X\alpha = 0$.

1. Le facteur de normalisation $\frac{1}{p!\,q!}$ n'est pas universel et dépend des auteurs.

Lemme 3.10. *Soient $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q(M)$ alors :*

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_X\beta$$

Lemme 3.11. *Soient ϕ un difféomorphisme et X, Y des champs de vecteurs. Alors on a :*

$$\phi^*(i_X\alpha) = i_{\phi^* X}\, \phi^*\alpha, \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L}_Y(i_X\alpha) = i_{\mathscr{L}_Y X}\, \alpha + i_X(\mathscr{L}_Y\alpha).$$

3.1.3 La différentielle extérieure

Il existe sur l'*algèbre extérieure*

$$\Omega^\bullet(M) := \bigoplus_{p=1}^{n} \Omega^p(M)$$

un opérateur différentiel

$$d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$

appelé la *différentielle extérieure* et qui étend la différentielle d'une fonction aux formes différentielles extérieures. La définition intrinsèque de celle-ci est fournie par le théorème suivant qui permet de la calculer par induction sur le degré. Pour plus de détails et une démonstration rigoureuse, on pourra consulter [44, chapitre 2].

Théorème 3.12 (Formule de Cartan)**.** *Il existe une application linéaire et une seule, appelée* différentielle extérieure

$$d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$

qui satisfait pour tout p et quel que soit $X \in \mathrm{Vect}(M)$ à :

$$\mathscr{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d. \tag{3.1}$$

Une expression précise de $d\alpha$ est obtenue de façon inductive à partir de la formule de Cartan (3.1) et de la formule de Leibniz :

$$\mathscr{L}_X(\alpha(Y_1, \ldots, Y_p)) = (\mathscr{L}_X\alpha)(Y_1, \ldots, Y_p) + \sum_{k=1}^{p} \alpha((Y_1, \ldots, [X, Y_k], \ldots, Y_p)).$$

Exemple 3.13 (Cas $p = 0$)**.** $\Omega^0(M)$ est l'espace des fonctions lisses sur M à valeurs réelles. Dans ce cas, on a $i_X f = 0$ et on obtient :

$$df(X) = (i_X \circ d)f = \mathscr{L}_X f$$

qui correspond bien à la définition de la différentielle de la fonction f.

Exemple 3.14 (Cas $p = 1$)**.** Si $\alpha \in \Omega^1(M)$ et $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$, alors $i_X\alpha = \alpha(X)$ est une fonction. La formule de Leibnitz nous donne :

$$\mathscr{L}_X(\alpha(Y)) = (\mathscr{L}_X\alpha)(Y) + \alpha(\mathscr{L}_X Y),$$

et on obtient :

$$d\alpha(X, Y) = \mathscr{L}_X(\alpha(Y)) - \mathscr{L}_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

Exemple 3.15 (Cas $p = 2$)**.** Si $\alpha \in \Omega^1(M)$ et $X, Y, Z \in \mathrm{Vect}(M)$, on obtient :

$$\begin{aligned} d\alpha(X, Y, Z) = \mathscr{L}_X(\alpha(Y, Z)) + \mathscr{L}_Y(\alpha(Z, X)) + \mathscr{L}_Z(\alpha(X, Y)) \\ + \alpha(X, [Y, Z]) + \alpha(Y, [Z, X]) + \alpha(Z, [X, Y]). \end{aligned}$$

Plus généralement, on peut montrer la formule suivante.

Proposition 3.16. *Soit $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathrm{Vect}(M)$. on a :*

$$(d\alpha)(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \mathscr{L}_{X_i}(\alpha(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1})) \\ - \sum_{1 \le i < j \le p+1} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}),$$

où le symbole ˆ surmontant une lettre signifie qu'il faut l'omettre.

Les expressions locales de la différentielle extérieure d'une forme α s'obtiennent également facilement en remarquant que dans un système de coordonnées locales $[\partial_i, \partial_j] = 0$.

Exemple 3.17 (Cas d'une 0-forme)**.** Si f est une fonction, on obtient :

$$(df)_i = \partial_i f.$$

Exemple 3.18 (Cas d'une 1-forme)**.** Si $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, dx^i$ est une 1-forme, on obtient :

$$(d\alpha)_{ij} = \partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i.$$

Exemple 3.19 (Cas d'une 2-forme)**.** Si $\alpha = \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij} \, dx^i \wedge dx^j$ est une 2-forme, on obtient :

$$(d\alpha)_{ijk} = \partial_i \alpha_{jk} - \partial_j \alpha_{ik} + \partial_k \alpha_{ij}.$$

Exemple 3.20 (Cas d'une 3-forme)**.** Si $\alpha = \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ijk} \, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$ est une 3-forme, on obtient :

$$(d\alpha)_{ijkl} = \partial_i \alpha_{jkl} - \partial_j \alpha_{ikl} + \partial_k \alpha_{ijl} - \partial_l \alpha_{ijk}.$$

Proposition 3.21. *La différentielle extérieure possède les propriétés suivantes :*

1. $d \circ d = 0$;
2. $\mathscr{L}_X \circ d = d \circ \mathscr{L}_X$;
3. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$, *pour tout* $\alpha \in \Omega^p(M)$ *et* $\beta \in \Omega^q(M)$;
4. $f^* \circ d = d \circ f^*$, *pour tout* $f \in \mathrm{C}^\infty(M, N)$.

La démonstration de cette proposition est laissée à titre d'exercice, on pourra également consulter [44, 54, 31].

3.2 Intégration et formule de Stokes

Le support d'une forme différentielle α est l'adhérence de l'ensemble des points $x \in M$ tels que $\alpha(x) \neq 0$. C'est donc le plus petit ensemble fermé en dehors duquel $\alpha(x) = 0$. On notera $\Omega_c^p(M)$ le sous-espace des formes différentielles de degré p sur M à support compact. On peut développer une *théorie de l'intégration* pour les formes différentielles de degré n à support compact sur une variété M de dimension n, que nous résumerons brièvement ici (pour plus de détails voir [44, 54, 21]). On se limitera au cas où M est orientable (bien que ce ne soit pas vraiment nécessaire si on introduit le concept de *densité*, voir par exemple [53, 21]).

3.2.1 Formes volumes et orientation

Définition 3.22. Une *forme volume* sur une variété M de dimension n est un forme différentielle de degré n qui ne s'annule en aucun point.

On a le résultat suivant qui caractérise les variétés connexes orientables (voir [21, Section 1.G]).

Théorème 3.23. *Soit M une variété* connexe *de dimension n. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une forme volume sur M ;*
2. *Le fibré $\bigwedge^n T^*M$ est trivial ;*
3. *M est orientable.*

Définition 3.24 (Orientation d'une variété orientable)**.** Étant donné deux formes volumes ω et ω', il existe une fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ qui ne s'annule pas telle que $\omega' = f\omega$. Il y a donc deux possibilités (puisque M est connexe) soit f est strictement positive, soit f est strictement négative. On dit que ω et ω' définissent la même orientation si $f > 0$. C'est une relation d'équivalence. Le choix d'une *orientation* sur M revient à choisir une de ces deux classe d'équivalence. On dit alors que la variété M est orientée.

Remarque 3.25. Cette définition est à mettre en perspective avec la définition de l'orientation d'un espace vectoriel E de dimension finie. Celle-ci est définie de la façon suivante. On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E. Deux bases, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont équivalentes si le déterminant de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$ est positif. Il y a deux classes d'équivalence et le choix d'une d'entre elle définit une *orientation* sur E. La définition de l'orientation d'une variété M orientable est une extension de ce concept, une forme volume généralisant le concept de déterminant.

Remarque 3.26 (Orientation induite sur le bord d'une variété orientée). Considérons une variété à bord M orientable. Soit ω une forme volume sur M et $x \in \partial M$. Dans une carte locale au voisinage de x, on peut considérer la forme $i_n\omega$ où n est un vecteur avec une composante x_1 *strictement positive*. La classe de cette forme volume définit l'orientation induite sur ∂M, dite convention de la *normale sortante*. Par exemple, considérons le prototype d'une variété à bord, $]-\infty, 0]\times\mathbb{R}^{n-1}$ muni de l'orientation définie par la forme volume $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$. Alors l'orientation induite sur le bord $\mathbb{R}^{n-1}$ de $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ est représentée par la forme volume $dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

3.2.2 Intégrale d'une forme différentielle à support compact

Si M est une variété orientable, il existe un atlas formé par des cartes (U_α, ϕ_α) telles que les changements de cartes ont des Jacobiens positifs. Commençons par considérer une forme différentielle ω de degré n sur M et dont le support est inclus dans une carte locale (U_α, ϕ_α) de cet atlas. On peut alors considérer le pullback

$$\omega_\alpha := (\phi_\alpha^{-1})^*\omega = f_\alpha\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

qui est une forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ et où $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction à support compact contenu dans l'ouvert $\phi(U)$. On peut donc considérer l'intégrale (au sens de Riemann ou de Lebesgue)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x) dx^1 \cdots dx^n,$$

qui est une quantité finie. Si maintenant (U_β, ϕ_β) est une autre carte contenant le support de ω et telle que le changement de carte

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta).$$

ait un Jacobien positif, alors $y = \phi_{\alpha\beta}(x)$ et

$$\omega_\alpha = \left[(\phi_\alpha^{-1})^* \circ (\phi_\beta)^*\right] \omega_\beta = \phi_{\alpha\beta}^* \, \omega_\beta,$$

soit

$$f_\alpha(x)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = (f_\beta \circ \phi_{\alpha\beta})(x) J(\phi_{\alpha\beta})\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x)\, dx^1 \cdots dx^n &= \int_{\mathbb{R}^n} f_\beta(\phi_{\alpha\beta}(x))\, J(\phi_{\alpha\beta}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_\beta(y)\, dy^1 \cdots dy^n,\end{aligned}$$

en vertu de la *formule de changement de variables* dans les intégrales. On peut donc définir sans ambiguïté

$$\int_M \omega := \int_{\mathbb{R}^n} (\phi_\alpha^{-1})^* \omega$$

puisque cette quantité est indépendante de la carte (U_α, ϕ_α) choisie. On remarquera au passage que l'application

$$\omega \mapsto \int_M \omega,$$

est une application linéaire.

Pour définir l'intégrale d'une forme ω à support compact qui n'est pas contenu dans une carte, on utilise une *partition de l'unité* (voir [21, Chapitre 1, Appendice H] pour plus de détails et la preuve que ça existe), c'est à dire une famille de fonctions lisses définies sur M, ρ_α, à support compact et telles que :

1. Pour tout $x \in M$, $\rho_\alpha(x) \geq 0$;
2. chaque ρ_α à son support dans U_α ;
3. Pour chaque $x \in M$, il existe seulement un nombre fini de valeur α telles que $\rho_\alpha(x) \neq 0$;
4. $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$ (il s'agit d'une somme finie de termes non nuls).

On note alors que le support de $\rho_\alpha \omega$ est contenu dans une carte et on peut donc définir :

$$\int_M \omega := \int_M \left(\sum_\alpha \rho_\alpha\right) \omega = \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\alpha \omega$$

qui est une somme finie puisque ω est à support compact.

Remarque 3.27 (Mesure de Haar). Soit G un groupe de Lie de dimension n et $\omega_e \in \bigwedge^n T_e^* G$ un élément non nul. Alors la n forme différentielle sur G induite par translation à gauche

$$\omega_g(\xi_1, \ldots, \xi_n) := \omega_e(TL_{g^{-1}}.\xi_1, \ldots, TL_{g^{-1}}.\xi_g), \qquad \xi_1, \ldots, \xi_n \in T_g G$$

définie une forme volume sur G, ce qui montre que *tout groupe de Lie est une variété orientable.* Une telle forme volume invariante à gauche est unique à une constante multiplicative près. Cette forme volume permet d'intégrer les fonctions à support compact sur G :

$$\mu(f) := \int_G f\, \omega, \qquad f \in \mathrm{C}^\infty(G).$$

et on a de plus

$$\mu(f \circ L_g) = \mu(f).$$

C'est la *mesure de Haar* sur G. Si de plus G est compact, on peut normaliser cette mesure en la divisant par $\mu(1)$. Dans ce cas, on peut montrer que cette mesure est unique et invariante à la fois à droite et à gauche.

Exemple 3.28. Pour le groupe $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$, la mesure de Haar s'écrit :

$$\mu(f) = \frac{1}{2\pi}\int f(\theta)\,d\theta.$$

Exemple 3.29. Pour le groupe $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, avec les coordonnées fournies par les angles d'Euler :

$$\theta \in [0,\pi], \qquad \phi \in [0,2\pi], \qquad \psi \in [0,2\pi],$$

la mesure de Haar s'écrit :

$$\mu(f) = \frac{1}{8\pi^2}\iiint f(\theta,\phi,\psi)\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,d\psi.$$

3.2.3 La formule de Stokes

Le *théorème de Stokes* généralise le *théorème fondamental de l'intégration* qui stipule que :

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

si f est une fonction C^∞ sur l'intervalle $[a,b]$. Nous commencerons par le formuler avant de donner les grandes lignes d'une démonstration.

Théorème 3.30 (Théorème de Stokes)**.** *Soit M une variété différentielle orientée de dimension n, et ω une $(n-1)$-forme différentielle à support compact sur M de classe C^∞. Alors, on a :*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega$$

où d désigne la dérivée extérieure, ∂M le bord de M (éventuellement vide), muni de l'orientation sortante, et $i : \partial M \to M$ est l'injection canonique.

Esquisse de preuve. En utilisant une partition de l'unité, on peut se limiter à démontrer le théorème pour une forme différentielle ω dont le support est contenu dans une carte (U_α,ϕ_α) à valeur dans $]-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}$. Comme le *pullback* commute avec le différentielle extérieure, on a alors

$$\int_M d\omega := \int_{]-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}} (\phi_\alpha^{-1})^* d\omega = \int_{]-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}} d\omega_\alpha$$

et

$$\int_{\partial M} i^*\omega := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\phi_\alpha^{-1})^* i^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (i\circ\phi_\alpha^{-1})^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\phi_\alpha^{-1}\circ j)^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} j^*\omega_\alpha,$$

où $j : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ est l'injection canonique. Il nous suffit donc d'établir que

$$\int_{]-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}} d\omega_\alpha = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} j^*\omega_\alpha.$$

Une $(n-1)$-forme sur $]-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}$ s'écrit :

$$\omega_\alpha = \sum_{i=1}^n a_i(x^1,\dots,x^n)dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

où le chapeau désigne une omission. On trouve alors :

$$j^*\omega_\alpha = a_1(0,x^2,\dots,x^n)\,dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$$

et

$$\begin{aligned} d\omega_\alpha &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Comme ω_α est à support compact, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a_i}{\partial x^i}\, dx^i = 0, \qquad 2 \leq i \leq n$$

et

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial a_1}{\partial x^1}\, dx^1 = a_1(0, x^2, \ldots, x^n).$$

On en déduit :

$$\int_{]-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial a_i}{\partial x^i}\, dx^1 \cdots dx^n = 0, \qquad 2 \leq i \leq n$$

et

$$\int_{]-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial a_1}{\partial x^1}\, dx^1 \cdots dx^n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_1(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \cdots dx^n.$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} \int_{]-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}} d\omega_\alpha &= \int_{]-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial a_1}{\partial x^1}\, dx^1 \cdots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_1(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \cdots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} j^*\omega_\alpha. \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Il est intéressant de noter que toutes les formules intégrales issues de l'analyse vectorielle classique dans $\mathbb{R}^n$ sont des cas particuliers de cette formule générale.

Exemple 3.31 (Formule de Green–Riemann)**.** Soit Ω une sous-variété à bord de dimension 2, compact, lisse de $\mathbb{R}^2$ et $\alpha = P\,dx + Q\,dy$ une 1-forme différentielle définie un voisinage sur Ω. Alors, la formule de Stokes s'écrit :

$$\int_{\partial\Omega} j^*\alpha = \int_{\partial\Omega} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Exemple 3.32 (Formule de Green–Ostrogradski)**.** Considérons le cas particulier où Ω est un domaine compact de l'*espace euclidien* $\mathbb{R}^3$, bordé par une surface lisse $S = \partial\Omega$. Soit X un champ de vecteur lisse sur $\mathbb{R}^3$ et $\omega := dx \wedge dy \wedge dz$ la forme volume canonique sur $\mathbb{R}^3$. Alors on a :

$$di_X\omega = \mathbf{div}(X)\omega.$$

Dans un système de coordonnée locales (u, v) sur S, la surface S est représentée localement par :

$$\phi : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

La normale unitaire sortante n en un point de S s'écrit alors :

$$n = \frac{1}{H}\partial_u f \wedge \partial_v f, \qquad \text{(produit vectoriel)}$$

où $H = \|\partial_u f \wedge \partial_v f\|$ et l'élément d'aire sur S est donné par :

$$\sigma = H du \wedge dv.$$

On trouve alors

$$j^*(i_X\omega) = \det(X, \partial_u f, \partial_v f) du \wedge dv = (X \cdot n)\sigma,$$

où $j : S \to \mathbb{R}^3$ est l'inclusion canonique. La formule de Stokes s'écrit alors :

$$\iint_S (X \cdot n)\, \sigma = \iiint_\Omega \mathbf{div}(X)\, \omega.$$

C'est la formule de *Green–Ostrogradski* (qui est encore valable en dimension n).

Exemple 3.33 (Formule de Stokes–Ampère)**.** Soit S une surface orientée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ bordée par une courbe fermée C muni de l'orientation induite. Soit V un champ de vecteur lisse sur $\mathbb{R}^3$ et $\omega := dx \wedge dy \wedge dz$ la forme volume canonique sur $\mathbb{R}^3$. Considérons la 1-forme α sur $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\alpha := V^1 dx + V^2 dy + V^3 dz.$$

Alors la 2-forme $d\alpha$ s'écrit :

$$\begin{aligned} d\alpha &= \left(\frac{\partial V^3}{\partial y} - \frac{\partial V^2}{\partial z}\right) dy \wedge dz - \left(\frac{\partial V^1}{\partial z} - \frac{\partial V^3}{\partial x}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial V^2}{\partial x} - \frac{\partial V^1}{\partial y}\right) dx \wedge dy \\ &= i_{\mathbf{rot}\, V}\omega. \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, si $j : S \to \mathbb{R}^3$ est l'inclusion canonique, la restriction de la forme $d\alpha$ à S s'écrit :

$$j^*(d\alpha) = j^*(i_{\mathbf{rot}\, V}\omega) = (\mathbf{rot}\, V \cdot n)\sigma,$$

où n est la normale unitaire et σ l'élément d'aire. Considérons alors l'inclusion canonique $i : C \to S$, désignons par τ la tangente unitaire orientée à C et dl l'élément de longueur (qui est une forme volume sur C). Alors on a :

$$i^* j^* \alpha = (V \cdot \tau)\, dl$$

et la formule de Stokes nous donne :

$$\int_C (V \cdot \tau)\, dl = \int_C i^* j^*(\alpha) = \int_S dj^*(\alpha) = \int_S j^*(d\alpha) = \int_S (\mathbf{rot}\, V \cdot n)\sigma$$

C'est la formule de *Stokes–Ampère.*

3.3 Complexes différentiels

3.3.1 Le lemme de Poincaré

Soit M une variété de dimension n. Comme de plus $d \circ d = 0$, la différentielle extérieure d définit ce qu'on appelle un *complexe différentielle.* Plus exactement on a :

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \ \to \ \cdots \ \to \ \Omega^n(M), \tag{3.2}$$

avec

$$\mathrm{Im}\left[d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\right] \subset \ker\left[d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\right],$$

pour $k = 1, \ldots, n-1$.

Définition 3.34. Une forme différentielle $\alpha \in \Omega^k(M)$ est dite *fermée* si $d\alpha = 0$. Elle est dite *exacte* si elle s'écrit $d\beta$ avec $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$.

Une question naturelle qui se pose est de déterminer sous quelle conditions, une forme α est exacte. Comme $d \circ d = 0$, toute forme exacte est fermée. Une condition nécessaire pour être exacte est donc d'être fermée, c'est ce qu'on appelle une *condition de compatibilité*. Le résultat suivant, du à H. Poincaré établit que *toute forme fermée est localement exacte.*

Lemme 3.35 (Lemme de Poincaré)**.** *Soit B une boule ouverte centrée en 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \Omega^k(U)$ $(1 \leq k \leq n)$. Si $d\alpha = 0$, alors il existe $\beta \in \Omega^{k-1}(B)$ tel que $\alpha = d\beta$.*

Esquisse de preuve. Soit $\varphi(s, x) := e^s x$ où $x \in U$ et $s \in \mathbb{R}$. Alors φ^s est un sous-groupe à 1 paramètre qui préserve la boule B si $s \leq 0$. Son générateur infinitésimal est le champ de vecteur

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i \partial_{x^i}.$$

Introduisons l'application linéaire

$$H : \Omega^k(B) \to \Omega^k(B), \qquad H\alpha = \int_{-\infty}^{0} (\varphi^s)^* \alpha \, ds.$$

On pourra vérifier que l'intégrale est convergente et dépend de façon lisse de $x \in B$. On montre ensuite que H et d commutent. En effet (dérivation sous le signe somme) :

$$(d \circ H)\alpha = \int_{-\infty}^{0} d(\varphi^s)^* \alpha \, ds = \int_{-\infty}^{0} (\varphi^s)^* d\alpha \, ds = (H \circ d)\alpha.$$

Par ailleurs

$$(H \circ \mathscr{L}_X)\alpha = \int_{-\infty}^{0} (\varphi^s)^* \mathscr{L}_X \alpha \, ds = \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{ds} \left[(\varphi^s)^* \alpha\right] ds = \left[(\varphi^s)^* \alpha\right]_{-\infty}^{0} = \alpha.$$

Posons alors $K := H \circ i_X$. On trouve :

$$d \circ K + K \circ d = d \circ H \circ i_X + H \circ i_X \circ d = H \circ (d \circ i_X + i_X \circ d) = H \circ \mathscr{L}_X = \mathrm{Id}.$$

Par conséquent si $d\alpha = 0$ on a :

$$\alpha = (d \circ K + K \circ d)\alpha = d(K\alpha).$$

□

Remarque 3.36. Le lemme de Poincaré est encore valable dans $\mathbb{R}^n$.

Il résulte du théorème de Poincaré que toute forme fermée $\alpha \in \Omega^k(M)$ est *localement exacte*, c'est à dire que pour tout point $m \in M$, on peut trouver un voisinage ouvert U de m tel que la restriction de α à U soit une forme exacte sur U. Il ne faudrait pas croire toutefois qu'une forme fermée sur une variété M est toujours exacte comme nous le montre le contre-exemple suivant.

Exemple 3.37. Considérons la 1-forme

$$\alpha = \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2},$$

définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On vérifie facilement que $d\alpha = 0$. En raisonnant par l'absurde, nous allons montrer que α n'est pas exacte sur M. Soit $i : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ l'injection canonique du cercle unité (paramétré par θ) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On a alors $i^*\alpha = d\theta$ et donc

$$\int_{S^1} i^*\alpha = 2\pi.$$

Or si on avait $\alpha = df$ où $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, on aurait

$$\int_{S^1} i^*\alpha = \int_{S^1} i^*df = \int_{S^1} di^*f = 0$$

d'après le théorème de Stokes, car le bord du cercle est vide, ce qui mène à une contradiction.

Cet exemple illustre le fait que le lemme de Poincaré est vraiment un résultat *local et non global*. Nous rencontrerons d'autres problèmes où une condition de compatibilité entraîne l'existence d'un potentiel local mais pas global. Le lemme de Poincaré nous assure que

$$\mathrm{Im}\left[d : \Omega^{k-1}(U) \to \Omega^k(U)\right] = \ker\left[d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)\right], \qquad k = 1, \dots n,$$

ce qu'on appelle, en termes savants, l'*exactitude* (locale) du complexe (3.6). Toutefois, le complexe de de Rham (3.6) n'est en général pas *globalement exact*. On est donc conduit à définir ce *défaut d'exactitude* en introduisant les espaces vectoriels quotients

$$H^k(M) := \frac{\ker\left[d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\right]}{\mathrm{Im}\left[d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\right]}.$$

Ce sont les *groupes de cohomologie de de Rham*. De façon plus pragmatique, deux formes différentielles α_1 et α_2 définissent la même classe de cohomologie $[\alpha]$, si $\alpha_1 = \alpha_2 + d\beta$. Ces espaces vectoriels donnent des informations topologiques sur la variété M (comme le nombre de « trous » par exemple).

Exemple 3.38. Soit M une variété compacte sans bord (dans le jargon mathématique on appelle ça une *variété fermée*) et *orientable* de dimension n (par exemple la sphère ou le tore). Soit $\omega \in \Omega^n(M)$ une forme volume sur M. Alors $d\omega = 0$ mais ω n'est pas exacte, sinon on aurait d'après le théorème de Stokes

$$\int_M \omega = \int_M d\beta = \int_{\partial M} i^*\beta = 0,$$

ce qui mènerait à une contradiction. Ceci montre que $H^n(M) \neq 0$. En fait, on peut montrer que $H^n(M)$ est un espace vectoriel de dimension 1 et que la classe $[\omega]$ de n'importe quelle forme volume ω sur M fournit une base de cet espace vectoriel.

3.3.2 Opérateur de Hodge et co-différentielle

Considérons un espace vectoriel E de dimension n et fixons une n-forme alternée non nulle ω (ce qui fixe une orientation de E). On définit alors un opérateur p-linéaire alterné sur E en posant :

$$E \times \cdots \times E \to \bigwedge^{n-k} E^*, \qquad (X_1, \dots, X_p) \mapsto \omega(X_1, \dots, X_p, \cdot, \dots, \cdot)$$

qui induit lui-même un opérateur linéaire :

$$* : \bigwedge^k E \to \bigwedge^{n-k} E^*, \qquad k = 0, \dots, n$$

appelé l'*opérateur de Hodge*.

Exemple 3.39. Dans l'espace orienté $\mathbb{R}^3$ par le déterminant dans la base canonique $\omega = (\varepsilon_{ijk})$, nous avons introduit l'opérateur j qui associe à tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ la 2-forme

$$j(x)_{ij} := \varepsilon_{ijk} x^k.$$

C'est l'opérateur de Hodge.

Une base e_i est dite *adaptée* si ω correspond au déterminant dans cette base. Autrement dit si :

$$\omega = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n,$$

où (e^i) est la base duale de (e_i).

Une base de $\bigwedge^k E$ est fournie par les k-vecteurs

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k},$$

où $i_1 < \cdots < i_k$. Une base de $\bigwedge^{n-k} E^*$ est fournie par les $n-k$-formes

$$e^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n},$$

où $i_{k+1} < \cdots < i_n$. Nous allons maintenant expliciter l'opérateur de Hodge dans ces bases.

Pour chaque ensemble d'indice $I := (i_1, \ldots, i_k)$ dans $\{1, \ldots n\}$ avec $i_1 < \cdots < i_k$, désignons par $J := (i_{k+1}, \ldots, i_n)$ le $(n-k)$-uplet complémentaire de I avec $i_{k+1} < \cdots < i_n$ et par $\varepsilon(I, J)$ la signature de la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

Alors on a :

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) := \varepsilon(I, J) e^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n}.$$

L'opérateur de Hodge est un isomorphisme, son inverse étant défini par :

$$*^{-1}(e^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n}) := (-1)^{k(n-k)} \varepsilon(J, I) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k},$$

du fait que $\varepsilon(I, J)\varepsilon(J, I) = (-1)^{k(n-k)}$.

Supposons à présent que E soit un espace euclidien (ou pseudo-euclidien). Il existe alors un isomorphisme canonique entre E et son dual E^* qui est donné par

$$v \mapsto v^\sharp := \langle v, \cdot \rangle, \qquad E \to E^*$$

et dont l'inverse est noté

$$\alpha \mapsto \alpha^\flat, \qquad E^* \to E.$$

Ce sont les *isomorphismes musicaux*. En désignant par (η_{ij}) les composantes du produit scalaire dans une base quelconque et par (η^{ij}) son inverse, on trouve :

$$(v^\sharp)_i = \eta_{ij} X^j, \qquad (\alpha^\flat)^i = \eta^{ij} \alpha_j.$$

Définition 3.40 (Volume euclidien canonique)**.** Le choix d'une *base orthonormée* (e_i) de E permet de définir une forme volume

$$\omega := e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$$

à partir de la base duale (e^i). Si on choisit une nouvelle base orthonormée, alors la nouvelle forme volume diffère de l'ancienne par un signe. Le choix d'une orientation sur E fixe ce signe et fait de E un espace euclidien (ou pseudo-euclidien) *orienté*, ce que nous supposerons dorénavant. La forme ω ainsi définie apparaît donc comme canonique (elle ne dépend pas du choix d'une base orthonormée directe choisie pour la construire).

Dans ce cas, on peut redéfinir l'opérateur de Hodge comme un opérateur linéaire

$$* : \bigwedge^k E^* \to \bigwedge^{n-k} E^*, \qquad k = 0, \dots, n$$

en posant :

$$*(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) := *((e^{i_1})^\sharp \wedge \cdots \wedge (e^{i_k})^\sharp).$$

Remarque 3.41. Attention, si E un espace euclidien on a $(e^i)^\flat = e_i$ pour tout i mais ceci n'est plus vrai dans un espace pseudo-euclidien. où ces deux vecteurs peuvent différer par un signe. Dans ce cas, la formule correcte est $(e^i)^\flat = \langle e_i, e_i \rangle\, e_i$. L'opérateur de Hodge

$$* : \bigwedge^k E^* \to \bigwedge^{n-k} E^*, \qquad k = 0, \dots, n$$

s'écrit alors

$$*(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) := \varepsilon(I, J) \left\langle e^{i_1}, e^{i_1} \right\rangle \cdots \left\langle e^{i_k}, e^{i_k} \right\rangle e^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n}.$$

Remarque 3.42. On peut également voir l'opérateur de Hodge comme un opérateur

$$* : \bigwedge^k E \to \bigwedge^{n-k} E, \qquad k = 0, \dots, n.$$

C'est comme cela qu'on définit le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3.43. Sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, on a par exemple :

$$\begin{aligned} &* 1 = dx \wedge dy, \\ &* dx = dy, && *dy = -dx \\ &* (dx \wedge dy) = 1. \end{aligned}$$

Remarque 3.44. On notera que l'opérateur de Hodge envoie $\bigwedge^n (\mathbb{R}^2)^*$ sur $\mathbb{R}$. Mais attention, si on change d'orientation, cet isomorphisme change de signe. On désigne souvent ces quantités numériques qui change de signe avec l'orientation par le terme de pseudo-scalaire. Ainsi, le produit vectoriel de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ est un pseudo-scalaire.

Remarque 3.45. On notera que l'opérateur de Hodge envoie $\bigwedge^1 (\mathbb{R}^2)^*$ sur lui même. Plus généralement, si E est de dimension $n = 2p$ paire, l'opérateur de Hodge est un endomorphisme de $\bigwedge^p E^*$.

Exemple 3.46. Sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on a par exemple :

$$\begin{aligned} &* 1 = dx \wedge dy \wedge dz, \\ &* dx = dy \wedge dz, && * dy = -dx \wedge dz, && * dz = dx \wedge dy, \\ &* (dy \wedge dz) = dx, && * (dx \wedge dz) = -dy, && * (dx \wedge dy) = dz, \\ &* (dx \wedge dy \wedge dz) = 1. \end{aligned}$$

Remarque 3.47. D'une façon plus intrinsèque, si on introduit la métrique induite sur $\bigwedge^k E^*$, définie sur les vecteurs décomposables

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \qquad \beta = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k$$

par

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \det \langle \alpha_i, \beta_i \rangle,$$

alors l'opérateur de Hodge est caractérisé par :

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega.$$

Théorème 3.48. *Soient $\alpha \in \bigwedge^k E^*$. Alors*

$$* * \alpha = (-1)^{k(n-k)+s}\alpha$$

où s est la signature de la métrique η, c'est à dire le nombre de signe moins dans une forme diagonale de la métrique.

L'opérateur de Hodge permet de relier les opérateurs usuels de l'analyse vectorielle (gradient, divergence, rotationnel) aux formes différentielles. Ainsi, par exemple sur l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, on définit alors le *gradient*, la *divergence* et le *rotationnel* de la façon suivante (le détail des calculs est laissé au lecteur, à titre d'exercice) :

$$\mathbf{grad}\, f := (df)^\sharp, \qquad \mathbf{div}\, X = *d * X^\flat, \qquad \mathbf{rot}\, X := (*dX^\flat)^\sharp,$$

où $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ et $X \in \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^3)$. Comme $d^2 = 0$, on trouve immédiatement :

$$\mathbf{rot} \circ \mathbf{grad}\, f = 0, \qquad \mathbf{div} \circ \mathbf{rot}\, X = 0.$$

Le lemme de Poincaré nous permet alors de formuler les résultats suivants.

Corollaire 3.49. *La condition nécessaire (et localement suffisante) pour qu'un champ de vecteur E sur $\mathbb{R}^3$ soit le gradient d'une fonction U est :*

$$\mathbf{rot}\, E = 0.$$

La condition nécessaire (et localement suffisante) pour qu'un champ de vecteur B sur $\mathbb{R}^3$ soit le rotationnel d'un champ de vecteur A est :

$$\mathbf{div}\, B = 0.$$

L'opérateur de Hodge va également nous permettre de définir un complexe dual du complexe

$$\Omega^0(E) \xrightarrow{d} \Omega^1(E) \xrightarrow{d} \Omega^2(E) \ \to \ \cdots \ \to \ \Omega^n(E),$$

en introduisant l'« adjoint », noté δ, de la différentielle extérieure d.

Définition 3.50 (Co-différentielle)**.** Soit E un espace vectoriel euclidien (ou pseudo-euclidien) de dimension n. La *co-différentielle* δ est l'opérateur linéaire

$$\delta : \Omega^k(E) \to \Omega^{k-1}(E)$$

définie par :

$$\delta := (-1)^{n(k-1)+1+s} \ * d *$$

Remarque 3.51. Comme $d^2 = 0$, on en déduit que $\delta^2 = 0$.

Remarque 3.52. La co-différentielle δ peut être considérée comme l'adjoint de d si on introduit le produit scalaire suivant sur l'espace vectoriel de dimension infini $\Omega_c^k(E)$ des formes différentielles sur E à support compact :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_k := \int_E \alpha \wedge (*\beta).$$

En effet, soit $\alpha \in \Omega_c^{k-1}(E)$ et $\beta \in \Omega_c^k(E)$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle d\alpha, \beta \rangle_k &= \int_E d\alpha \wedge (*\beta) \\
&= \int_E d(\alpha \wedge (*\beta)) - (-1)^{k-1} \int_E \alpha \wedge (d * \beta) \\
&= \int_E d(\alpha \wedge (*\beta)) - (-1)^{k-1}(-1)^{(n-k+1)(n-(n-k+1))+s} \int_E \alpha \wedge *(*d * \beta) \\
&= \langle \alpha, \delta\beta \rangle_{k-1},
\end{aligned}$$

d'après le théorème de Stokes.

Comme $\delta^2 = 0$, on obtient un complexe différentiel dual :

$$\Omega^n(E) \xrightarrow{\delta} \Omega^{n-1}(E) \xrightarrow{\delta} \Omega^{n-2}(E) \ \to \ \cdots \ \to \ \Omega^0(E),$$

et on peut montrer qu'il est exact.

3.3.3 Les équations de Maxwell

Nous allons illustrer l'intérêt de ce formalisme à travers les *équations de Maxwell*. Celles-ci fournissent un modèle mathématique assez précis des phénomènes électromagnétiques à l'échelle macroscopique. Classiquement, les phénomènes électromagnétiques macroscopiques sont décrits par deux champs de vecteur E (le *champs électrique*) et B (l'*induction magnétique*) qui dépendent des trois variables d'espace (x, y, z) et du temps t. Les équations fondamentales vérifiées par ces champs on d'abord été décrites par Maxwell dans les années 1861-1862 (une vingtaine d'équations !) puis reformulées par Heaviside dans les années 1890 sous la forme de quatre équations. *Dans le vide* et en prenant $c = 1$, ces équations s'écrivent :

$$\mathbf{rot}\, E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \qquad \mathbf{div}\, B = 0, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{rot}\, B - \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \qquad \mathbf{div}\, E = 0. \tag{3.4}$$

L'unification des phénomènes électriques et magnétiques nous amène à regrouper les champs E et B dans une 2-forme définie sur l'espace de Minkowski, i.e. l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de la métrique de Lorentz :

$$\eta := -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2, \qquad x^4 = t.$$

Cette 2-forme, notée $\mathbf{F}$, est appelée le *tenseur de Faraday*. Elle s'écrit :

$$\mathbf{F} := B_1 dx^2 \wedge dx^3 - B_2 dx^1 \wedge dx^3 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 \\ E_1 dx^1 \wedge dx^4 + E_2 dx^2 \wedge dx^4 + E_3 dx^3 \wedge dx^4,$$

où sous forme matricielle :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que les deux premières équations de Maxwell (3.3) se réécrivent :

$$d\mathbf{F} = 0.$$

Le lemme de Poincaré nous assure alors l'existence d'une 1-forme $\mathbf{A}$ sur $\mathbb{R}^4$ telle que $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$. En désignant les composantes de cette 1 forme par $(A_1, A_2, A_3, -U)$, on retrouve :

$$E = -\,\mathbf{grad}\, U - \partial_t A, \qquad B = \mathbf{rot}\, A.$$

où $A = (A_1, A_2, A_3)$ est le vecteur potentiel magnétique et U, le potentiel électrique. Pour obtenir les deux autres équations de Maxwell, il nous faut faire intervenir l'opérateur de Hodge sur l'espace de Minkowski. On trouve alors :

$$*\,\mathbf{F} = B_1 dx^1 \wedge dx^4 + B_2 dx^2 \wedge dx^4 + B_3 dx^3 \wedge dx^4 \\ - E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^1 \wedge dx^3 - E_3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Remarque 3.53. $*\mathbf{F}$ revient à faire la substitution $E \mapsto B$ et $B \mapsto -E$.

On peut alors vérifier que le deuxième groupe des équations de Maxwell (3.4) se réécrit $d * \mathbf{F} = 0$, ou encore :

$$\delta \mathbf{F} = 0.$$

En présence d'une densité de charge ρ et d'une densité de courant j, il faut introduire deux champs supplémentaires, H (le *champs magnétique*) et D (le *déplacement électrique*) qui sont liés à E et B par une *loi de comportement* et remplacer le deuxième groupe d'équations de Maxwell (3.4) par les équations suivantes :

$$\mathbf{rot}\, H - \frac{\partial D}{\partial t} = j, \qquad \mathbf{div}\, D = \rho. \tag{3.5}$$

En introduisant la 2-forme

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & D_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & D_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & D_3 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

et la 1-forme *courant électrique*

$$\mathbf{J} := \rho dx^4 - j^1 dx^1 - j^2 dx^2 - j^3 dx^3$$

de sorte que

$$*\mathbf{J} := -\rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + j^1 dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 - j^2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + j^3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4$$

les équations (3.5) se réécrivent :

$$d * \mathbf{G} = *\mathbf{J}$$

ou encore

$$\delta \mathbf{G} = \mathbf{J}.$$

On déduit alors de $\delta^2 = 0$ l'équation $\delta \mathbf{J} = 0$ (conservation du courant) qui nous donne :

$$\partial_t \rho + \mathbf{div}\, j = 0.$$

C'est l'*équation de continuité*.

Remarque 3.54. Une loi de comportement linéaire entre $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ s'écrit :

$$G_{\mu\nu} = C^{\alpha\beta}_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}.$$

Le cas du vide, $\mathbf{G} = \mathbf{F}$, correspond à la loi isotrope (pour le groupe de Lorentz) $C^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu$.

En conclusion, on pourra observer le phénomène suivant. Les équations de Maxwell peuvent se reformuler à partir de deux *complexes duaux*. D'une part le complexe différentiel associé à la différentielle extérieure :

$$\Omega^0(\mathbb{R}^4) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R}^4) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathbb{R}^4) \xrightarrow{d} \Omega^3(\mathbb{R}^4) \xrightarrow{d} \Omega^4(\mathbb{R}^4), \tag{3.6}$$

et d'autre part le *complexe dual* associé à la co-différentielle :

$$\Omega^0(\mathbb{R}^4) \xleftarrow{\delta} \Omega^1(\mathbb{R}^4) \xleftarrow{\delta} \Omega^2(\mathbb{R}^4) \xleftarrow{\delta} \Omega^3(\mathbb{R}^4) \xleftarrow{\delta} \Omega^4(\mathbb{R}^4). \tag{3.7}$$

En effet, le premier groupe d'équations (3.3) se réécrit :

$$d\mathbf{A} = \mathbf{F}, \qquad d\mathbf{F} = 0, \qquad \mathbf{A} \in \Omega^1(\mathbb{R}^4),\ \mathbf{F} \in \Omega^2(\mathbb{R}^4),$$

alors que le deuxième groupe d'équation (3.5) se réécrit :

$$\delta\mathbf{G} = \mathbf{J}, \qquad \delta\mathbf{J} = 0, \qquad \mathbf{J} \in \Omega^1(\mathbb{R}^4),\ \mathbf{G} \in \Omega^2(\mathbb{R}^4),$$

en plus d'une loi de comportement $\mathbf{G} = \mathbf{CF}$, qui couple les deux complexes. Comme nous allons le voir dans la section suivante, cette interprétation de se limite pas aux équations de Maxwell.

Remarque 3.55. Il peut être intéressant de continuer de distinguer entre les indices covariants et contravariants. Alors l'opérateur de Hodge envoie $\bigwedge^k E$ sur $\bigwedge^{n-k} E^*$ et la co-différentielle agit sur les tenseurs contravariants antisymétriques. Le tenseur G devient un tenseur contravariant d'ordre 2 lié à F par la relation $G = F^\sharp$ (dans le cas du vide) et J, un tenseur contravariant d'ordre 1.

3.3.4 Équations de compatibilité en élasticité et complexes généralisés

En élasticité linéaire, on associe à tout champ de déplacement u (un champ de vecteur défini sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$), le *tenseur des déformations*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right)$$

qui est un champ de tenseur d'ordre 2 symétrique sur Ω.

Un problème naturel qui se pose est de savoir si tout champ de tenseur symétrique G_{ij} d'ordre 2 sur Ω, peut s'écrire comme le champ de déformation d'un déplacement u. Barré de Saint-Venant en 1864 a formulé des conditions nécessaires que doivent vérifier ε pour que ce soit le cas. Ces conditions se résument à l'annulation du tenseur d'ordre 4 suivant (le *tenseur de Saint-Venant*) :

$$W_{ijkl} = \frac{\partial^2 G_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 G_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 G_{il}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 G_{jk}}{\partial x_i \partial x_l}.$$

Beltrami a démontré en 1886 que ces conditions étaient (localement) suffisantes. Autrement dit si $W(G) = 0$, alors pour tout point $x_0 \in \Omega$, on peut trouver un voisinage U de x_0 et un champ de vecteur u défini sur U tel que $G = \varepsilon(u)$. Attention comme pour le problème des formes différentielles extérieures, *le résultat est seulement local.*

Nous allons maintenant montrer que ces équations peuvent s'interpréter à l'aide d'un complexe différentiel, comme les équations de Maxwell mais en faisant intervenir des tenseurs covariants qui ne sont pas des formes différentielles.

Modules de Schur

Une forme différentielle α de degré k sur $\mathbb{R}^n$ peut être considérée comme une application C^∞

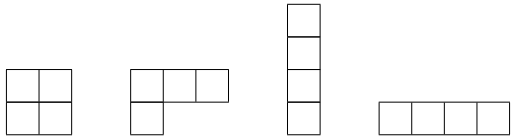
$$\alpha : \mathbb{R}^n \to \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^*$$

où $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)^*$ est l'espace des tenseurs covariants d'ordre k totalement antisymétriques sur $\mathbb{R}^n$. On va maintenant substituer l'espace tensoriel $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)^*$ par un autre sous-espace de tenseurs covariants d'ordre k avec un *type de symétrie indicielle différent* (pour plus de détails, on pourra consulter [20] ou [55]), pour définir des complexes différentiels qui nous permettrons d'interpréter de façon géométrique les équations de l'élasticité.

Définition 3.56. Une partition de l'entier k en p facteur est un p-uplet $(k_1, \cdots, k_p)$ avec $k_1 \geq k_2 \geq k_p \geq 1$ et tel que :

$$k = k_1 + \cdots + k_p.$$

On peut représenter graphiquement une telle partition par ce qu'on appelle un *diagramme d'Young* de taille k. Par exemple, les partitions $(2,2)$, $(3,1)$, $(1,1,1,1)$ et (4) du nombre entier 4 correspondent respectivement au diagrammes suivants :



Un même diagramme d'Young peut être numéroté de plusieurs façons différentes, par exemple :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Un diagramme d'Young numéroté est appelé un *tableau d'Young* et sera noté D.

À chaque tableau d'Young D de taille k, on va associer un sous-espace vectoriel de $\bigotimes^k(\mathbb{R}^n)^*$, noté $S^D\mathbb{R}^n$, défini de la manière suivante. Soit $T \in \bigotimes^k(\mathbb{R}^n)^*$, c'est à dire une application k-linéaire

$$T : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \ldots, x_k) \mapsto T(x_1, \ldots, x_k).$$

Alors, $T \in S^D\mathbb{R}^n$ si :

1. T est totalement antisymétrique sur chaque colonne de D ;
2. L'anti-symmetrisation totale de T sur une colonne de D et une case immédiatement à droite de cette colonne s'annule.

Exemple 3.57. Soit T dans $S^D\mathbb{R}^n$ où D est le tableau d'Young suivant :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Alors T possède les symétries suivantes :

$$T_{ijk} = -T_{kji}, \qquad T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0.$$

Exemple 3.58. Soit R dans $S^D\mathbb{R}^n$ où D est le tableau d'Young suivant :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$$

Alors R possède les symétries suivantes :

$$\begin{aligned} R_{jikl} &= -R_{ijkl}, \\ R_{ijlk} &= -R_{ijkl}, \\ R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} &= 0, \\ R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} &= 0. \end{aligned}$$

Ces symétries correspondent à celles du tenseur de courbure de Riemann. Il est connu que R possède la symétrie supplémentaire suivante $R_{klij} = R_{jikl}$, qui est une conséquence des précédentes.

Remarque 3.59. Un espace $S^D\mathbb{R}^n$ associé à un diagramme d'Young constitué d'*une seule ligne* correspond aux tenseurs totalement symétriques d'ordre k, alors qu'un espace $S^D(\mathbb{R}^n)$ associé à un diagramme d'Young constitué d'*une seule colonne* correspond aux tenseurs d'ordre k totalement antisymétriques.

Définition 3.60 (Projecteur d'Young)**.** Étant donné un tableau d'Young D de taille k et de type λ, on peut expliciter un projecteur de $\bigotimes^k(\mathbb{R}^n)^*$ sur $S^D\mathbb{R}^n$. Celui-ci s'écrit :

$$F_D T = \frac{1}{\mu(\lambda)} \sum_{\sigma\in R} \sum_{\tau\in C} \varepsilon(\tau)\, \tau\cdot(\sigma\cdot T), \tag{3.8}$$

où C est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_k$ qui préserve les colonnes de D, R celui qui préservent les lignes de D et $\mu(\lambda) = \prod_{i,j} h(i,j)$ est une constante de normalisation nécessaire pour avoir $F_D \circ F_D = F_D$.

Sur l'espace vectoriel $\bigotimes^k(\mathbb{R}^n)^*$, agit deux groupes. On a d'une part l'action linéaire (à gauche) du groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$:

$$(g,T) \mapsto g\cdot T, \qquad (g\cdot T)(x_1,\dots,x_k) := (g^{-1}\cdot x_1,\dots,g^{-1}\cdot x_k)$$

et d'autre part l'action linéaire (à droite) du groupe $\mathfrak{S}_k$:

$$(\sigma,T) \mapsto \sigma\cdot T, \qquad (\sigma\cdot T)(x_1,\dots,x_k) := (x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}).$$

Ces deux actions commutent. On peut montrer que les espaces $S^D\mathbb{R}^n$ sont des espaces irréductibles pour l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (voir [20] pour plus de détails). De plus, si D_1 et D_2 sont deux tableaux d'Young correspondant à un même diagramme d'Young λ (autrement dit, deux numérotages différents de λ), alors il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ tel que $D_2 = \sigma\cdot D_1$ et les espaces de tenseurs S_{D_1} et S_{D_2} sont isomorphes (en tant que représentation de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$), l'isomorphisme entre les deux étant donné explicitement par :

$$T \mapsto \sigma\cdot T, \qquad (\sigma\cdot T)(x_1,\dots,x_k) = T(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}).$$

Définition 3.61. Le *module de Schur* $S^\lambda(\mathbb{R}^n)$ est défini comme la classe d'équivalence des espaces $S^D\mathbb{R}^n$ (modulo isomorphismes équivariant par $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$) correspondant à un même diagramme d'young λ.

On peut montrer le théorème suivant [20].

Théorème 3.62 (Décomposition de Schur-Weyl)**.** *Toute représentation tensoriel de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *peut s'écrire comme une somme directe d'espaces vectoriels isomorphe (en tant que représentation de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*) à* $S^\lambda(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 3.63 (Tenseur d'ordre 2)**.** Tout tenseur covariant d'ordre 2 se décompose en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique, ce qu'on pourra écrire schématiquement :

$$\bigotimes^2(\mathbb{R}^n)^* = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Exemple 3.64 (Tenseur d'ordre 3)**.** Pour un tenseur covariant d'ordre 3, ca devient légèrement plus compliqué. La décomposition s'écrit :

$$\bigotimes^3(\mathbb{R}^n)^* = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1} \end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

Exemple 3.65 (Tenseur d'élasticité)**.** Le tenseur d'élasticité (d'ordre 4) sur $\mathbb{R}^3$ se décompose de la façon suivante :

$$\mathbb{E}\mathrm{la} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Le second facteur dans la décomposition étant en fait un sous espace isomorphe à celui-ci. L'isomorphisme explicite étant décrit par les équations

$$C_{ijkl} = R_{ikjl} - R_{ilkj}, \qquad R_{ijkl} = C_{ikjl} + C_{ilkj}$$

Proposition 3.66. *La dimension de $S^\lambda(\mathbb{R}^n)$ est donnée par la formule*

$$\dim S^\lambda \mathbb{R}^n = \frac{\prod_{i,j}(n+j-i)}{\prod_{i,j} h(i,j)}$$

où i, j indexent respectivement les lignes et les colonnes du tableau λ et $h(i,j)$ est la « longueur d'équerre » de la cellule (i,j) qui vaut 1 plus le nombre de cellules immédiatement à droite, plus le nombre de cellules immédiatement en dessous de la cellule (i,j).

Exemple 3.67. On a :

$$\dim S^{(2,2)}\mathbb{R}^n = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

En particulier, $\dim S^{(2,2)}\mathbb{R}^2 = 1$ et $\dim S^{(2,2)}\mathbb{R}^3 = 6$.

Complexes différentiels généralisés

On va donc introduire un complexe différentiel généralisé, que l'on notera $\Omega_N^\bullet(\mathbb{R}^n)$, et défini de la manière suivante. Étant donné $N \geq 1$, on introduit la suite de tableaux d'Young (D_p^N) $(p \geq 1)$ en commençant par

$$\boxed{1}$$

et en ajoutant, à chaque incrément de p, une case numéroté $p+1$ sur la première ligne si la longueur de celle-ci ne dépasse pas la longueur N ou sinon à la ligne suivante et ainsi de suite.

Exemple 3.68 (Cas $N = 1$)**.**

$$\boxed{1} \quad \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array} \quad \ldots$$

Exemple 3.69 (Cas $N = 2$)**.**

$$\boxed{1} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline 3 & \\\cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline 3 & 4\\\hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline 3 & 4\\\hline 5 & \\\cline{1-1}\end{array} \quad \ldots$$

Exemple 3.70 (Cas $N = 3$)**.**

$$\boxed{1} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3\\\hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3\\\hline 4 & & \\\cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3\\\hline 4 & 5 & \\\cline{1-2}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3\\\hline 4 & 5 & \\\cline{1-2}\end{array} \quad \ldots$$

Définition 3.71. Le complexe généralisé $\Omega_N^\bullet(\mathbb{R}^n)$ est défini par la suite des espaces de champs de tenseurs

$$\Omega_N^p(\mathbb{R}^n) := \Gamma(S^{D_p^N}\mathbb{R}^n),$$

avec $\Omega_N^0(\mathbb{R}^n) = \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et la différentielle

$$d : \Omega_N^p(\mathbb{R}^n) \to \Omega_N^{p+1}(\mathbb{R}^n)$$

est définie par :

$$(dT)(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1}) := F_{D_N^{p+1}}(\nabla_{\xi_{p+1}} T)(\xi_1, \ldots, \xi_p),$$

où $\nabla_{\xi_{p+1}} T$ désigne la différentielle du champ de tenseurs T dans la direction ξ_{p+1}.

Remarque 3.72. On note que $\Omega_1^\bullet(\mathbb{R}^n)$ n'est autre que le complexe de de Rham et que d n'est autre que la différentielle extérieure dans ce cas.

Remarque 3.73. On pourra noter que $\Omega_N^p(\mathbb{R}^n) = 0$ si $p > Nn$ (car tout tenseur covariant antisymétrique sur $n+1$ variables dans $\mathbb{R}^n$ est nul. En particulier, le complexe $\Omega_N^\bullet(\mathbb{R}^n)$ est fini.

Exemple 3.74 (Cas $N = 2$)**.** Si $f \in \Omega_2^0(\mathbb{R}^n) = \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$(df)_i = \partial_i f.$$

Si $Z \in \Omega_2^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$(dZ)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i Z_j + \partial_j Z_i).$$

Si $G \in \Omega_2^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$(dG)_{ijk} = \frac{2}{3}(\partial_k G_{ij} - \partial_i G_{jk}).$$

Si $T \in \Omega_2^3(\mathbb{R}^n)$, on a

$$(dT)_{ijkl} = \frac{1}{4}(\partial_l T_{ijk} + \partial_k T_{jil} + \partial_j T_{kli} + \partial_i T_{lkj}).$$

On remarquera en particulier que

$$(d^2G)_{ijkl} = \frac{1}{3}(\partial_i\partial_j G_{kl} + \partial_k\partial_l G_{ij} - \partial_j\partial_k G_{il} - \partial_i\partial_l G_{jk})$$

est égal au tenseur de Saint-Venant $W(G)$ à une constante multiplicative près.

Comme les champ de tenseurs dans $\Omega_N^p(\mathbb{R}^n)$ sont totalement antisymétriques sur chaque colonne, on déduit du lemme de Schwarz ($\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$) le résultat suivant.

Lemme 3.75. *Soit $N \geq 1$. Alors la différentielle*

$$d : \Omega_N^p(\mathbb{R}^n) \to \Omega_N^{p+1}(\mathbb{R}^n)$$

vérifie $d^{N+1} = 0$.

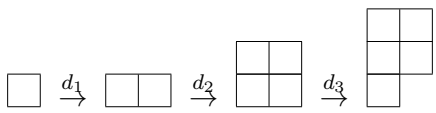
Pour obtenir un « vrai » complexe différentiel si $N \geq 1$ (i.e $d^2 = 0$) à partir de ce complexe généralisé, il est nécessaire de « sauter des étapes ». On se limitera ici au cas $N = 2$ et $n = 3$. Dans ce cas, le complexe généralisé s'écrit :

$$\Omega_2^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega_2^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega_2^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega_2^3(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega_2^4(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega_2^5(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega_2^6(\mathbb{R}^3),$$

duquel on tire un vrai complexe différentiel

$$\Omega_2^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d_1} \Omega_2^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d_2} \Omega_2^4(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d_3} \Omega_2^5(\mathbb{R}^3), \tag{3.9}$$

qu'on représentera schématiquement par :



où $d_1 = d$, $d_2 = d^2$ et $d_3 = d$. On a alors $d_{j+1} \circ d_j = 0$.

Le résultat remarquable est que *ce complexe est localement exacte* comme le complexe de de Rham, ce qui généralise le lemme de Poincaré sur les formes différentielles (voir [13] pour la démonstration). Ceci permet de retrouver, en particulier, le théorème de Beltrami sur le tenseur de Saint-Venant :

$$d_2 G = 0 \qquad \Rightarrow \qquad G = d_1 Z.$$

Duboix–Violette & Henneaux ont également montré qu'on peut généraliser l'opérateur de Hodge et la co-différentielle dans le cas des complexes généralisés et que *le complexe dual associé est également localement exacte.*

Comme on ne suppose pas ici la donnée d'un produit scalaire, on prendra garde à différencier les tenseurs covariants et contravariants et on notera $\Omega_p^N(\mathbb{R}^n)$ l'espace des sections à valeur dans le fibré des *tenseurs contravariants* ayant une symétrie associé au tableau d'Young (D_p^N). Dans le cas qui nous intéresse, $N = 2$ et $n = 3$, le complexe dual est donc un complexe de champs contravariants qu'on notera :

$$\Omega_1^2(\mathbb{R}^3) \overset{\delta_1}{\leftarrow} \Omega_2^2(\mathbb{R}^3) \overset{\delta_2}{\leftarrow} \Omega_4^2(\mathbb{R}^3) \overset{\delta_3}{\leftarrow} \Omega_5^2(\mathbb{R}^3), \tag{3.10}$$

En particulier, un élément u dans $\Omega_1^2(\mathbb{R}^3)$ est un champ de vecteur, un élément σ dans $\Omega_2^2(\mathbb{R}^3)$ est un champ de tenseur contravariant d'ordre 2 symétrique (comme le champs des contraintes $\sigma = (\sigma^{ij})), \ldots$.

Remarque 3.76 (Adjoint formel). On peut donner une interprétation formelle simple de la co-différentielle généralisée δ_i. On peut contracter ponctuellement un élément $\alpha = (\alpha_{i_1 \cdots i_p})$ dans $\Omega_N^p(\mathbb{R}^n)$ avec un élément $T = (T^{i_1 \cdots i_p})$ dans $\Omega_p^N(\mathbb{R}^n)$. On notera cette contraction par $\alpha \cdot T$. Si on fixe une forme volume ω sur $\mathbb{R}^n$, on peut alors former le « produit scalaire »

$$< \alpha, T >:= \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha \cdot T)\, \omega$$

qui a un sens si α et T sont à support compact. On a alors :

$$< d_i\alpha, T >= - < \alpha, \delta_i T >$$

Exemple 3.77. L'adjoint formel de

$$(d_1 Z)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i Z_j + \partial_j Z_i)$$

est

$$(\delta_1 \sigma)^i = \partial_k \sigma^{ik},$$

c'est à dire $\mathbf{div}\, \sigma$.

Considérons à présent l'équation $\mathbf{div}\, \sigma = 0$ et introduisons le champ de tenseur covariant

$$\tau_{ijkl} := \varepsilon_{mij}\varepsilon_{nkl}\sigma^{mn}.$$

On peut vérifier que $\tau \in \Omega_2^4(\mathbb{R}^3)$ et inversement que tout τ dans $\Omega_2^4(\mathbb{R}^3)$ peut s'écrire de cette façon. On peut vérifier également qu'on a :

$$d_3\tau = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{div}\, \sigma = 0.$$

L'exactitude du complexe (3.9) nous assure alors qu'il existe $\phi \in \Omega_2^2(\mathbb{R}^3)$ tel que $\tau = d_2\phi$ et on en déduit

$$\sigma^{ij} = \varepsilon^{imk}\varepsilon^{jnl}\partial_k\partial_l\phi_{mn}.$$

Le tenseur symétrique du deuxième ordre ϕ est connu en mécanique comme le *potentiel des contraintes de Beltrami.*

Remarquons enfin qu'on aurait pu aussi réécrire l'équation $\mathbf{div}\, \sigma = 0$ sous la forme $\delta_1\sigma = 0$ et déduire de l'exactitude locale du complexe (3.10) l'existence locale d'un champ de tenseur $R = (R^{ijkl})$ dans $\Omega_4^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $\delta_2 R = \sigma$, ce qui s'écrit (voir [13]) :

$$\sigma^{ij} = \partial_k\partial_l R^{ijkl}.$$

En dimension $n = 3$, le potentiel R possède possède 6 composantes indépendantes. En dimension 2, elle ne possède qu'une seule composante indépendante et les seules composantes non nulles sont :

$$R^{1122} = \varphi, \qquad R^{1221} = -\varphi, \qquad R^{2112} = -\varphi, \qquad R^{2211} = \varphi.$$

On obtient donc :

$$\sigma^{11} = \partial_y^2 \varphi, \qquad \sigma^{12} = -\partial_{xy}^2 \varphi, \qquad \sigma^{22} = \partial_x^2 \varphi,$$

où φ est le *potentiel d'Airy*.

Nous en resterons là sur ces questions. Ce qu'il faut retenir, c'est que ce soit pour les équations de l'electro-magnétisme ou les équations de l'élasticité linéaire, nous avons pu les ramener à deux complexes différentiels en dualité avec un couplage entre les deux correspondant à la loi de comportement. Pour aller plus loin, on pourra consulter [51, 12, 13, 56]

3.4 Exercices

Exercice 3.1. Soit X un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$ et $\omega := dx^1 \wedge \cdots dx^n$ la forme volume canonique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$di_X\omega = \mathbf{div}(X)\omega.$$

Exercice 3.2. Soit X un champ de vecteur, $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$. Montrer que sur les formes différentielles, on a :

$$\mathscr{L}_{fX} = f\mathscr{L}_X + df \wedge i_X$$

Exercice 3.3. Soit X un champ de vecteur (dépendant du temps ou non) et φ^t son flot. Monter que pour toute forme différentielle ω, on a :

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\omega = (\varphi^t)^*\mathscr{L}_X\omega$$

Exercice 3.4. Soit X un champ de vecteur dépendant du temps. Montrer que la formule de Cartan

$$\mathscr{L}_X\omega = i_X d\omega + di_X\omega$$

est toujours valable.

Exercice 3.5 (Preuve du théorème de la sphère chevelue)**.**

1. Soit ω une forme volume sur $\mathbb{R}^n$ et S une sous-variété de dimension $n-1$. Montrer que si n est un champ normal à S alors $i_n\omega$ est une forme volume sur S.
2. Soit $S^2(r)$ la sphère de rayon r dans $\mathbb{R}^3$ et $\alpha = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$. Montrer que
$$\int_{S^2(r)} \omega = Cr^3,$$
où C est une constante.
3. Supposons qu'il existe un champ X sur $S^2(1)$ qui ne s'annule pas (on peut supposer $\|X\| = 1$). Montrer que
$$f : x \to x + \epsilon X(x)$$
est un difféomorphisme de $S^2(1)$ sur $S^2(\sqrt{1+\epsilon^2})$. Montrer que
$$\int_{S^2(1)} f^*\omega$$
est un polynôme en ϵ et conclure.

Exercice 3.6. Démontrer la proposition 3.21.

Exercice 3.7. Montrer les formules suivantes sur $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{grad}\, f := (df)^\sharp, \qquad \mathbf{div}\, X = *d * X^\flat, \qquad \mathbf{rot}\, X := (*dX^\flat)^\sharp.$$

Exercice 3.8. Soit ε_{ijk} le tenseur de Levi-Civita et δ_{ij} le tenseur de Kronecker. Montrer que :

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr} + \delta_{jp}\delta_{kq}\delta_{ir} + \delta_{kp}\delta_{iq}\delta_{jr} - \delta_{kp}\delta_{jq}\delta_{ir} - \delta_{ip}\delta_{kq}\delta_{jr} - \delta_{jp}\delta_{iq}\delta_{kr}.$$

Chapitre 4

Lois de dérivation sur les fibrés vectoriels

Dans $\mathbb{R}^n$, on sait calculer la différentielle d'un champ de vecteur X en un point $x \in \mathbb{R}^n$. C'est une application linéaire

$$d_x X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Sur une variété différentielle M, on ne sait pas, en général, dériver un champ de vecteur car il faut pour cela effectuer des opérations linéaires sur des vecteurs *appartenant à des espaces vectoriels différents*. Pour remédier à ce problème, il faut se donner *arbitrairement* une *loi de dérivation*, ou une *connexion* « manière de relier entre eux » des espaces tangents voisins. Ce chapitre sera consacré à la définition de ces objets. On introduira la notion de dérivée covariante et on montera l'équivalence avec la notion de connexion linéaire sur le fibré des repères (théorie du repère mobile).

4.1 Lois de dérivation sur un fibré vectoriel

4.1.1 Loi de dérivation

Dans cette section, nous allons montrer, plus généralement, comment dériver les sections d'un fibré vectoriel $(\mathbb{E}, \pi, M)$ en restant dans $\mathbb{E}$. Il n'y a pas de moyen canonique de le faire : il faut *arbitrairement* introduire une *loi de dérivation*.

Définition 4.1. Une *loi de dérivation* ∇ sur le $C^\infty(M)$-module $\Gamma(\mathbb{E})$ des sections d'un fibré vectoriel $(\mathbb{E}, \pi, M)$ est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire

$$\nabla : \mathrm{Vect}(M) \times \Gamma(\mathbb{E}) \to \Gamma(\mathbb{E}), \qquad (X, s) \mapsto \nabla_X s$$

et telle que

1. Pour tout $X \in \mathrm{Vect}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(\mathbb{E})$,
$$\nabla_{fX} s = f \nabla_X s.$$
2. Pour tout $X \in \mathrm{Vect}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(\mathbb{E})$,
$$\nabla_X (fs) = (df.X)\, s + f \nabla_X s.$$

Remarque 4.2. L'opérateur ∇ est local : pour tout ouvert U de M, il existe une loi de dérivation ∇^U sur les sections du fibré $\mathbb{E}_U$ tel que

$$\nabla^U_{X_U} s_U = (\nabla_X s)_U,$$

l'indice U désignant la restriction à l'ouvert U.

Remarque 4.3. Si l'on désigne par $\Omega^p(M,\mathbb{E})$ l'espace des formes différentielles de degré p sur M à valeur dans $\mathbb{E}$ (i.e. l'espaces des section du fibré $\bigwedge^p T^*M \bigotimes \mathbb{E}$, alors

$$\nabla : s \mapsto \nabla s, \qquad \Gamma(\mathbb{E}) \to \Omega^1(M,\mathbb{E})$$

est une application $\mathbb{R}$-linéaire.

Exemple 4.4. Si l'on considère $C^\infty(M)$ comme l'espace des sections du fibré trivial $M \times \mathbb{R}$, alors la loi définie par

$$\nabla_X f = \mathscr{L}_X f = X \cdot f$$

est une loi de dérivation sur $\Gamma(M \times \mathbb{R})$ dite *loi de dérivation canonique.*

4.1.2 Lois de dérivation associées

Supposons qu'on se soit donné des lois de dérivation ∇^1 et ∇^2 sur les fibrés $\mathbb{E}_1$ et $\mathbb{E}_2$ au dessus de M. On peut alors fabriquer plusieurs autres lois de dérivation, en utilisant notamment la règle de Leibnitz.

1. Une loi de dérivation sur $\Gamma(\mathbb{E}_1 \bigoplus \mathbb{E}_2)$ en posant pour tout $s = s_1 + s_2$

$$\nabla_X s = \nabla^1_X s_1 + \nabla^2_X s_2.$$

2. Une loi de dérivation sur $\Gamma(\mathbb{E}_1 \bigotimes \mathbb{E}_2)$ en posant pour tout $s = s_1 \otimes s_2$

$$\nabla_X s = \nabla^1_X s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2_X s_2.$$

Exemple 4.5 (Loi de dérivation sur le fibré dual)**.** En partant de la loi de dérivation canonique sur $\mathrm{C}^\infty(M)$ et d'une loi sur $\Gamma(\mathbb{E})$, on obtient une lois de dérivation sur $\Gamma(\mathbb{E}^*)$ en posant :

$$(\nabla_X \alpha)(s) := \nabla_X(\alpha(s)) - \alpha(\nabla_X s)$$

où $s \in \Gamma(\mathbb{E})$ et $\alpha \in \Gamma(\mathbb{E}^*)$.

Exemple 4.6. En partant de lois de dérivation ∇^1 et ∇^2 sur $\Gamma(\mathbb{E}_1)$ et $\Gamma(\mathbb{E}_2)$, on obtient une loi de dérivation ∇^{12} sur le fibré vectoriel $\mathscr{L}(\mathbb{E}_1,\mathbb{E}_2)$ des endomorphismes linéaires de $\mathbb{E}_1$ dans $\mathbb{E}_2$ qui n'est autre que $\Gamma(\mathbb{E}_1^* \bigotimes \mathbb{E}_2)$:

$$(\nabla^{12}_X L)(s) = \nabla^2_X (Ls) - L(\nabla^1_X s).$$

où $L \in \mathscr{L}(\mathbb{E}_1,\mathbb{E}_2)$ et $s \in \Gamma(\mathbb{E}_1)$).

4.1.3 Courbure d'une loi de dérivation

Définition 4.7 (Courbure d'une loi de dérivation)**.** Soit ∇ une loi de dérivation sur un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ au dessus de M et posons :

$$R(X,Y)s := \nabla_X \nabla_X s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s,$$

où $s \in \Gamma(\mathbb{E})$ et $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$. Alors $R \in \Omega^2(M, \mathrm{End}(\mathbb{E}))$ et s'appelle la *courbure de* ∇.

On laisse le soin au lecteur de vérifier que R appartient bien à $\Omega^2(M, \mathrm{End}(\mathbb{E}))$, c'est à dire que :

$$R(fX,Y)s = fR(X,Y)s, \qquad R(Y,X)s = -R(X,Y)s,$$

pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, $s \in \Gamma(\mathbb{E})$ et $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$.

Remarque 4.8. Si on désigne par $[A,B] = AB - BA$ le commutateur habituel entre deux opérateurs linéaires A, B d'un espace vectoriel E, on peut réécrire la courbure R de ∇ sous la forme

$$R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}.$$

4.2 Dérivée covariante

4.2.1 Loi de dérivation sur TM

Définition 4.9. On appelle *dérivée covariante* sur une variété différentielle M la donnée d'*une loi de dérivation sur* $\mathrm{Vect}(M)$, l'espace des sections du fibré tangent. Une variété M muni d'une dérivée covariante ∇ est souvent appelée une *variété affine* (pour la distinguer d'une variété riemannienne).

Remarque 4.10 (Expression locale d'une dérivée covariante). Soit (x^i) un système de coordonnées locales. Une dérivée covariante ∇ est (localement) entièrement déterminée par la connaissance des champs de vecteurs

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Les Γ_{ij}^k, appelés *symboles de Christoffel*, sont donc les coordonnées de ∇ dans la carte locale (x^i). Attention, les symboles de Christoffel ne se comportent pas comme les composantes d'un champ de tenseur dans un changement de carte (voir exercice 4.10).

Exemple 4.11. Sur $\mathbb{R}^n$ considéré comme variété C^∞ on a la connexion définie par

$$\nabla_X Y = dY.X,$$

où dY désigne la différentielle usuelle de la fonction vectorielle Y. On l'appelle la connexion canonique de $\mathbb{R}^n$. Dans les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$, les symboles de Christoffel de cette dérivée covariante sont nuls.

Remarque 4.12. Une dérivée covariante sur M induit donc, en vertu des remarques précédentes, une loi de dérivation sur $\Gamma(T^*M)$ définie par :

$$(\nabla_X \alpha)(Y) = X \cdot \alpha(Y) - \alpha(\nabla_X Y),$$

et plus généralement sur tous les champs de tenseurs sur M. Inversement, toute loi de dérivation sur $\Gamma(T^*M)$ induit une dérivée covariante sur M.

Remarque 4.13. Une dérivée covariante sur une variété M n'est pas un champ de tenseur mais *la différence entre deux dérivées covariantes est un champ de tenseur de type* $(1,2)$. Par conséquent, l'espace des dérivées covariantes sur une variété M, qu'on notera $\mathscr{A}(M)$ est un espace affine de dimension infinie dont l'espace vectoriel directeur est $\mathscr{T}_1^2(M)$.

Le groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(M)$ agit (à gauche) sur $\mathscr{A}(M)$ de la façon suivante :

$$(\varphi_* \nabla)_X (Y) := \varphi_*(\nabla_{\varphi_*^{-1} X} \varphi_*^{-1} Y).$$

Les difféomorphismes qui préservent une dérivée covariante ∇ sur M forment un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(M)$, appelé le *groupe affine* de (M, ∇) (voir exercice 4.4).

4.2.2 Courbure et torsion

La *courbure* de ∇ définie par :

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

est une 2 forme à valeur dans $\mathrm{End}(TM)$, autrement dit un élément de $\Omega^2(M, \mathrm{End}(TM))$. On peut également la considérer comme un champ de tenseur de type $(1,3)$. En plus de la courbure, on peut fabriquer un autre champ de tenseur, la *torsion* de ∇ définie par :

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],$$

Définition 4.14. Une dérivée covariante est dite *symétrique* si sa torsion est nulle. Si, de plus sa courbure est nulle, on dit qu'elle est *plate*.

Lemme 4.15 (première identité de Bianchi)**.** *Soit ∇ une dérivée covariante symétrique sur une variété M. Alors*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathrm{Vect}(M)$.

Démonstration. C'est une conséquence de l'identité de Jacobi pour le crochet de Lie des champs de vecteurs. □

La courbure R d'une dérivée covariante ∇ sur une variété M de dimension n étant un champ de tenseur de type $(1,3)$, il y a trois contractions possibles. Celles-ci s'écrivent en coordonnée locales :

$$\mathrm{tr}^1_{ij} := R^k_{kij}, \qquad \mathrm{tr}^2_{ij} := R^k_{ikj}, \qquad \mathrm{tr}^3_{ij} := R^k_{ijk}.$$

Le *tenseur de Ricci* est par définition la deuxième contraction tr^2. Attention, celui-ci n'est pas symétrique en général (voir exercice 4.7).

Remarque 4.16. Dans le cas d'une dérivée covariante symétrique, ces trois contractions sont linéairement dépendantes et s'expriment toutes en fonction du tenseur de Ricci.

4.2.3 Dérivée covariante canonique sur un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie. Une dérivée covariante sur G est invariante à gauche si elle est invariante par toutes les translations à gauche L_g, $g \in G$, elle est invariante à droite si elle est invariante par toutes les translations à droite R_g, $g \in G$.

Définition 4.17 (dérivée covariante canonique sur un groupe de Lie)**.** Soit G un groupe de Lie. Il existe une dérivée covariante symétrique sur G bi-invariante. Celle-ci est définie par

$$\nabla_{X^u} X^v = \frac{1}{2}\,[X^u, X^v\,], \qquad u, v \in \mathfrak{g} \tag{4.1}$$

où X^u désigne le champ de vecteur invariant à gauche engendré par le vecteur $u \in \mathfrak{g}$.

Remarque 4.18. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de l'addition des vecteurs est un groupe de Lie. Son algèbre de Lie s'identifie à $\mathbb{R}^n$ avec le crochet de Lie $[u, v\,] = 0$ pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$. La connexion canonique sur $\mathbb{R}^n$ est donc définie par :

$$\nabla_{X^u} X^v = 0$$

lorsque X^u, X^v sont des champs de vecteurs invariants à gauche, c'est à dire des champs constants (le vérifier !). Si X et Y sont des champs de vecteurs quelconques, on obtient (le vérifier !) :

$$\nabla_X Y = dY.X.$$

Cette connexion est plate.

4.2.4 Dérivée covariante le long d'une courbe

On peut étendre la notion de dérivée covariante pour des champs de vecteurs qui ne sont définis que le long d'une courbe $c(t)$ ou une nappe paramétrée $c(t,s)$ sur une variété M.

Définition 4.19 (Champ de vecteur le long d'une courbe)**.** Soit c une courbe paramétrée sur M. Un *champ de vecteur le long de c, ou relèvement de c* est une courbe $X : I \to TM$ (de classe C^∞), telle que $(\pi \circ X)(t) = c(t)$. On notera $L(c)$ l'ensemble des champs de vecteurs définis le long de c

Définition 4.20 (Dérivée covariante le long d'une courbe)**.** Une *dérivée covariante le long de c* est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $L(c)$ dans $L(c)$ notée D_t et telle que

$$D_t\, fX = f_t X + f\, D_t\, X.$$

pour tout fonction réelle $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ et tout $X \in L(c)$.

Une dérivée covariante ∇ sur M induit une dérivée covariante sur $L(c)$ pour toute courbe c de classe C^∞ sur M. Elle est définie localement par l'expression

$$(D_t\, X)^k = X_t^k + \Gamma_{ij}^k\, c_t^i\, X^j,$$

où c_t^i désigne la dérivée par rapport au temps de la fonction $c^i(t)$.

Remarque 4.21. Si X un champ de vecteurs sur M, c une courbe sur M et $X(t) = X(c(t))$ alors on a

$$(D_t\, X)\,(t) = (\nabla_{c_t}\, X)(c(t)).$$

On également le résultat suivant.

Lemme 4.22. *Soit ∇ une connexion linéaire* symétrique *sur M, $\sigma : I_1 \times I_2 \to M$ une application C^∞ et X un relèvement de σ. Alors on a :*

$$D_t \partial_s \sigma = D_s \partial_t \sigma, \tag{4.2}$$

et

$$D_t D_s - D_t D_s = R(\partial_t \sigma, \partial_s \sigma), \tag{4.3}$$

où R désigne le tenseur de courbure de la connexion.

Définition 4.23 (Géodésique)**.** Soit ∇ une dérivée covariante sur une variété M. Une géodésique c est une courbe paramétrée c sur M telle que :

$$D_t\, c_t = 0,$$

autrement dit une courbe dont « l'accélération est nulle ».

Remarque 4.24. Plus généralement, étant donné une courbe c sur M, on dit qu'un champ $X(t)$ est *parallèle le long de c* s'il vérifie l'équation

$$D_t\, X = 0.$$

Cette dernière équation est une équation linéaire du premier ordre en X. La solution au temps $t = 1$ dépend linéairement et bijectivement de la valeur de $X(0)$ et définit une application linéaire bijective entre les espaces tangents aux points $c(0)$ et $c(1)$. Cette application, s'appelle le *transport parallèle*. Elle permet de *connecter* les deux espaces tangents $T_{c(0)}$ et $T_{c(1)}$. Attention, ce transport parallèle dépend, en général, du chemin suivi c.

Sur $\mathbb{R}^n$, la notion de *champ de vecteur constant* a un sens mais pas sur une variété M quelconque. La définition suivante étend ce concept dans le cas général.

Définition 4.25. Soit M une variété et ∇ une dérivée covariante sur M. Un champ de vecteur Y est dit *parallèle* si

$$\nabla_X Y = 0, \qquad \forall\, X \in \mathrm{Vect}(M).$$

Cette définition s'étend, bien entendu, à tous les champs de tenseurs.

4.3 Le flot géodésique

4.3.1 Le flot géodésique

Soit ∇ une dérivée covariante sur une variété M de dimension n. Considérons à nouveau l'équation des géodésiques en coordonnées locales :

$$c^k_{tt} + \Gamma^k_{ij}\, c^i_t\, c^j_t = 0 \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Cette équation du deuxième ordre peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} c^i_t &= v^i \\ v^i_t &= -\Gamma^k_{ij}\, v^i\, v^j \end{cases} \tag{4.4}$$

Ce système du premier ordre sur les variables « positions, vitesses » va pouvoir s'interpréter comme un champ de vecteur, non pas sur M mais sur TM.

A partir d'une carte locale U et des coordonnées (x^i) sur M, on obtient une carte locale $U \times \mathbb{R}^n$ de TM et des coordonnées locales (x^i, v^j), puis une carte locale $U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de TTM et des coordonnées locales (x^i, v^j, u^k, w^l). En posant $x = (x^i)$, $v = (v^j)$, $u = (u^k)$ et $w = (w^l)$, un champ de vecteur F sur TM est donc définie localement par une application

$$(x, v) \mapsto (x, v, U(x, v), W(x, v)), \qquad U \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

On dit que F un *champ de vecteur du deuxième ordre sur* M si $U(x, v) = v$.

Remarque 4.26. La définition d'un champ de vecteur du deuxième ordre peut être définie de manière intrinsèque. Soit $\pi : TM \to M$ la projection canonique et $F : TM \to TTM$ un champ de vecteur sur TM. Alors, F est un champ de vecteur du deuxième si $T\pi \circ F = \mathrm{Id}_{TM}$.

Une courbe intégrale d'un champ de vecteur du deuxième ordre F est une courbe β sur TM solution de l'équation

$$\frac{d\beta}{dt} = F(\beta(t)).$$

En coordonnées locales, $\beta(t) = (x(t), v(t))$ et cette équation s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= f_2(x, v) \end{cases}$$

ce qui justifie son appellation. On peut alors vérifier que l'expression locale

$$F : (x, v) \mapsto (x, v, v, -\Gamma^k_{ij}(x)\, v^i\, v^j)$$

définit bien un champ de vecteur du deuxième ordre sur M, c'est le *champ géodésique*, qui est un champ de vecteur sur TM.

4.3.2 L'application exponentielle

On pourra remarquer que F est quadratique en la variable v. Cette particularité du champ géodésique F a des conséquences importantes sur son flot. En effet, on peut montrer [31] que si $\varphi(t, x, v)$ est le flot de F alors :

$$\varphi(st, x, v) = \varphi(t, x, sv),$$

pour tout $s > 0$, pourvu que le flot soit défini. On déduit de cette observation et du théorème de Cauchy-Lipschitz que pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U_x de 0 dans T_xM tel que pour tout $v \in U_x$, $\varphi(1, x, v)$ soit définie.

Définition 4.27 (Application exponentielle géodésique)**.** Soit M une variété M muni d'une dérivée covariante ∇. Alors, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U_x dans T_xM tel que l'application

$$\exp_x : U_x \subset T_xM \to M, \qquad v \mapsto \pi \circ \varphi(1, x, v),$$

où $\pi : TM \to M$ est la projection canonique, soit bien définie et lisse. On l'appelle l'*application exponentielle géodésique.*

Remarque 4.28. Cette application dépend du point $x \in M$ contrairement à l'exponentielle d'un groupe de Lie.

On peut montrer le résultat suivant (voir [31]).

Théorème 4.29. *Soit $x \in M$. L'application $\exp_x$ est un difféomorphisme local d'un voisinage ouvert de 0 dans T_xM sur un voisinage ouvert de x dans M.*

4.3.3 Les coordonnées géodésiques

L'application exponentielle géodésique au point x, étant un difféomorphisme local d'un voisinage ouvert de $0 \in T_xM \simeq \mathbb{R}^n$ sur un voisinage ouvert de x dans M, permet de définir une carte locale particulière, qu'on appelle la *carte exponentielle.* Étant donnée une base (e_i) de T_xM, tout vecteur v de T_xM se met sous la forme

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Comme dans le cas des groupes de Lie, on peut prendre (x_i) comme coordonnées du point $x = \exp_x(v) \in M$. Ces coordonnées sont appelées les *coordonnées géodésiques* ou *normales* de x relativement à la base e_i de T_xM.

Remarque 4.30. Dans ce système de coordonnées, une géodésique issue du point x dans la direction $v = \sum_i \xi^i e_i$ s'écrit simplement

$$x^k(t) = t\,\xi^k, \qquad k = 1, \dots n.$$

4.3.4 Signification locale de la nullité de la torsion et de la courbure

Nous citerons ici deux théorèmes qui illustrent la signification locale de la nullité de la torsion ou de la courbure d'une dérivée covariante.

Théorème 4.31. *Soit ∇ une connexion linéaire sur une variété M. Sa* torsion est nulle *si et seulement si, pour tout point x_0, il est possible de trouver des coordonnées locales (x^i) pour lesquelles on a $\Gamma^k_{ij}(x_0) = 0$.*

Démonstration. Supposons d'abord que pour tout point x_0, il soit possible de trouver des coordonnées locales (x^i) où $\Gamma^k_{ij}(x_0) = 0$. Alors on a :

$$T^k_{ij}(x_0) = \Gamma^k_{ij}(x_0) - \Gamma^k_{ji}(x_0) = 0$$

pour tout i, j, k et donc $T(x_0) = 0$. Le point x_0 étant arbitraire, on a donc $T = 0$ partout.

Inversement supposons que le tenseur T soit identiquement nul. Fixons un point x_0 et choisissons les coordonnées géodésiques en ce point. Dans ces coordonnées, la géodésique issue de x_0 dans la direction ξ a pour expression

$$x^k(t) = t\,\xi^k$$

et l'équation des géodésiques s'écrit :

$$\Gamma^k_{ij}((t\,\xi))\,\xi^i\,\xi^j = 0, \qquad k = 1, \ldots, n$$

pour tout vecteur ξ. En particulier au point x_0 on a

$$\Gamma^k_{ij}(0)\,\xi^i\,\xi^j = 0, \qquad \forall \xi$$

et comme $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ $(T = 0)$, on a nécessairement $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$ pour tout i, j, k. □

Le résultat suivant est un corollaire du théorème 4.54, qui sera démontré dans la section 4.4.

Théorème 4.32. *Soit ∇ une connexion linéaire symétrique sur une variété M. Sa* courbure est nulle *si et seulement si, il est possible en tout point x_0, de trouver des coordonnées locales (x^i) pour lesquelles on a $\Gamma^k_{ij}(x) = 0$ sur un voisinage de x_0.*

Remarque 4.33. Sans entrer dans les détails de la démonstrations, faisons remarquer que si dans une carte locale

$$\Gamma^k_{ij} := (\nabla_{\partial_i}\partial_j)^k = 0$$

en tout point, alors les champs ∂_i sont parallèles et par conséquent $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = 0$, pour tout i, j, k. La démonstration de la réciproque, plus laborieuse, fait en fait apparaître que, si $R = 0$, alors, *dans un système de coordonnées géodésiques* (x^i), les champs ∂_i sont parallèles et donc les Γ^k_{ij} sont nuls.

4.3.5 La gravitation galiléenne

Vers 1590, Galilée établit les premières lois de la chute des corps. Elles expriment l'existence, en chaque point de l'Univers, d'un « vecteur accélération » g que subit tout corps tombant dans cette région de l'espace. Trois paramètres donc pour caractériser la pesanteur. Mais les expérience de Foucault (pendule, gyroscope) nous indiquent que la pesanteur est plus riche que ça. Elles suggèrent l'idée que la gravitation galiléenne puisse être décrite par une connexion linéaire symétrique sur l'Univers. Pourquoi symétrique ? Parce qu'il est possible de l'annuler en tout point de l'Univers : il suffit d'être en chute libre pour ne plus peser (voir chapitre 1). Avec ce point de vue, la *gravitation galiléenne* est représentée par un objet souple D, une connexion affine symétrique sur l'Univers M. Le groupe souple (groupe des difféomorphismes C^∞ de M) agit sur l'Univers et son contenu, mais cette action est globale et inobservable. C'est ce que suggérait Einstein en parlant du « principe général de relativité ».

Considérons l'équation de Newton d'une particule soumise à une de force :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, v, t).$$

Dans cette équation, apparaît un mystérieux coefficient m (la « masse ») que nous renommerons m_i. Si la force f provient du champ de pesanteur à la surface de la Terre, alors elle s'écrit $f = mg$ avec, à nouveau un mystérieux coefficient m que nous renommerons m_g. L'équation de Newton s'écrit dans ce cas :

$$m_i\frac{d^2x}{dt^2} = m_g g.$$

On trouve difficilement, dans la littérature, une définition (mathématique) rigoureuse de ces deux coefficients, à part pour m_i (voir le travail de Souriau dans [50]). D'autre part, il n y a pas *a priori* de raison que les coefficients m_i et m_g soient les mêmes (justement parce que les définitions qu'on en trouve laissent à désirer). Le *principe d'équivalence* d'Einstein consiste à postuler que $m_i = m_g$. C'est seulement un principe (vérifié, par ailleurs, avec une excellente précision par de nombreuses expériences).

Si on admet le principe d'équivalence, on peut alors réécrire l'équation de Newton pour une particule dans un champ de pesanteur :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g.$$

Une autre difficulté de cette équation, c'est qu'elle dépend du système de coordonnées choisis. En effet, le postulat de Newton impose que cette équation n'est valable que dans certains référentiels baptisés *référentiels d'inertie* (dont la définition rigoureuse reste égalent assez obscure). Si par exemple, on se place dans un « référentiel tournant », de nouveaux termes vont apparaître, comme la « force centrifuge », la « force de Coriolis », ..., termes généralement décrits comme des « forces d'inertie ».

Comme c'est le cas dans le cadre de l'electro-magnétisme, où les forces électriques et magnétiques ont été unifiées sous la forme d'une 2-forme F (le tenseur de Faraday) définie sur l'espace de Minkowski, le principe d'équivalence nous invite à « unifier » les forces de pesanteur et les forces d'inertie sous la forme d'une dérivée covariante sur l'espace $\mathbb{R}^4$ (espace + temps). C'est la théorie de la *gravitation galiléenne* formulée par Cartan [4].

Exemple 4.34. À la surface de la Terre, dans un système de cordonnées (x, y, z, t) liés à la Terre, cette dérivée covariante s'écrit :

$$\Gamma^j_{44} = g^j, \quad \Gamma^j_{4k} = \Gamma^j_{k4} = \Omega^j, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{4.5}$$

où g^j est l'accélération de la pesanteur (à la surface de la Terre) et Ω^j la vitesse de rotation angulaire de la Terre sur elle-même, les autres composantes étant nulles. Le champ de pesanteur « observé » dépend de la latitude.

Remarque 4.35. On remarque que la dérivée covariante est symétrique. En vertu du théorème 4.31, cela signifie qu'il est toujours possible de trouver des coordonnées dans lesquelles les Christoffel s'annulent ponctuellement (l'expérience des cosmonautes en chute libre dans la station spatiale internationale semble confirmer cette hypothèse). Dans la théorie de Cartan, la gravitation n'est plus modélisée par un champ de vecteur dépendant des variables (x, y, z, t) (donc 4 composantes) mais par une dérivée covariante symétrique (donc 24 composantes).

Remarque 4.36. Ce formalisme permet de décrire les équations fondamentales de la dynamique d'une particule dans un champ de gravitation dans n'importe quel système de coordonnées.

4.4 Connexions linéaires

4.4.1 Le fibré des repères

Soit M une variété de dimension n. Un *repère* en $x \in M$ est une base $p := (e_i)$ de l'espace vectoriel tangent T_xM. On peut également voir p comme un isomorphisme linéaire

$$p : \mathbb{R}^n \to T_xM, \qquad (X^1, \dots, X^n) \mapsto \sum_{i=1}^n X^i e_i.$$

Désignons par P_x l'ensemble de tous les repères au point $x \in M$ et par

$$L(M) := \bigcup_{x \in M} P_x,$$

l'union disjointe de tous les P_x. Soit

$$\pi : L(M) \to M, \qquad p_x \mapsto x,$$

l'application qui associe à p_x son point de base x (origine du repère). Alors $L(M)$ peut être muni d'une structure de variété. En effet, soit (U_α, ϕ_α) une carte locale de M et (x^i) les coordonnées locales dans cette carte. Alors les (x^i, X^k_j), où X^k_j sont les composantes de e_j dans la base (∂_{x^k}) de T_xM, constituent un système de coordonnées locales sur $\pi^{-1}(U_\alpha)$, ce qui définit une structure de variété sur $L(M)$, pour laquelle, la projection canonique π est lisse.

La variété $L(M)$ est munie naturellement d'une action (à droite) lisse du groupe de Lie $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ définie de la façon suivante :

$$(g,p) \mapsto R_g p := \left[(X^1, \dots, X^n) \mapsto \sum_{i,k} g^i_j X^j e_i \right], \qquad \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times L(M) \to L(M).$$

Cette action est *sans point fixe* et les orbites sont exactement les fibres $\pi^{-1}(x)$ de π (le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ agit transitivement sur chaque fibre). Chaque fibre est donc en bijection avec $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sans avoir une structure naturelle de groupe (pour cela, il faudrait fixer une repère préféré, de la même façon qu'un espace affine n'est pas un espace vectoriel.).

Le système de carte sur $L(M)$ que nous avons défini montre de plus que pour chaque carte U_α de M, on a un difféomorphisme

$$\varphi : U_\alpha \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

satisfaisant à

$$\varphi(x, gh) = R_h \varphi(x,g), \qquad \text{et} \qquad \pi \circ \varphi(x,g) = x$$

pour tout $g, h \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et $x \in U_\alpha$. On dit que $L(M)$ est un *fibré principal* localement trivial, de groupe structural $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et de base M.

Remarque 4.37 (Réduction du groupe structural). On peut faire la même construction pour les repères orthonormés d'une variété riemannienne M. On obtient alors le fibré des repères orthonormés $O(M)$ qui est un fibré principal de groupe structural $O(n,\mathbb{R})$. Plus généralement, si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, on peut réduire le groupe structural à G et on obtient un fibré principal $G(M)$ (sous-fibré de $L(M)$ de groupe structural G, c'est ce qu'on appelle une *réduction du groupe structural*. La donnée d'un fibré principal $G(M)$ au dessus de M s'appelle une G-structure.

Exemple 4.38. Une $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$-structure est la donnée d'un fibré principal $SL(M)$ au dessus de M. Celui-ci correspond au repères de M qui préservent une forme volume donnée ω sur M.

Définition 4.39 (Repère mobile)**.** Un section de $L(M)$ est une application $s : M \to L(M)$ tel que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_M$, une section locale est une section définie seulement sur un ouvert U de M. Une section (locale ou globale) est appelée un *repère mobile* (à chaque point x de M, on associe un repère qui dépend de manière lisse de $x \in M$).

Remarque 4.40. En général, il n'existe pas de repère mobile global (exemple : sur la sphère S^2). Si c'est le cas, la variété est parallélisable, autrement dit le fibré tangent est trivial ($TM \simeq M \times \mathbb{R}^n$). Par contre, à chaque carte locale de M est associée une section locale (autrement dit un repère mobile local).

Remarque 4.41 (Microstructures et milieux de Cosserat). En mécanique, il peut être utile de remplacer le traditionnel *body* B, qui est généralement une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ par son fibré des repères $L(B)$, pour modéliser des matériaux possédant une *microstructure*. C'est le formalisme qui a été adopté par Eringen au début des années 1960 pour la description des milieux dits *micromorphes*. L'espace des configurations du système est alors représenté par la variété de dimension infinie constitué par les morphismes de fibrés principaux $f : L(B) \to L(\mathbb{R}^3)$ et tel que le morphisme de base $\bar{f} : B \to \mathbb{R}^3$ soit un plongement (comme dans le cas des matériaux classiques). Les *milieux de Cosserat* forment un cas particulier de ce formalisme où le groupe structural est réduit à $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

4.4.2 Connexion linéaire

Définition 4.42 (Vecteurs verticaux)**.** Soit M une variété de dimension n et $L(M)$ son fibré des repères. Un vecteur tangent χ_p à $L(M)$ au point $p \in L(M)$ est dit *vertical* (ou tangent aux fibres) si $T_p\pi.\chi_p = 0$. On notera $V_p = \ker T_p\pi$, le sous-espace vectoriel de T_pV constitué par les vecteurs verticaux. C'est un espace vectoriel de dimension n^2.

Remarque 4.43. Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ agit (à droite) sur $L(M)$ et induit une action infinitésimale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ sur $L(M)$ qui s'écrit :

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Vect}(L(M)), \qquad A \mapsto \chi^A(p)$$

Du fait que l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sur $L(M)$ est sans point fixe, on a :

$$\chi^A(p) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0.$$

De plus, les fibres $\pi^{-1}(x)$ étant les orbites de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, on a :

$$\chi^A(p) \in \ker T_p\pi = V_p$$

et si (A_i) est une base de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ alors les vecteurs $\chi^{A_i}(p)$ forment une base de V_p.

La famille V des sous-espaces (V_p) dépend de manière lisse du point de base $p \in L(M)$, on l'appelle une *distribution*. Cette distribution est invariante par $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, c'est à dire :

$$V_{R_gp} = TR_g(V_p), \qquad \forall p \in L(M) \quad \forall g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}).$$

Il n'existe par contre aucun supplémentaire naturel à V_p. Une connexion linéaire est justement le choix d'une distribution H supplémentaire à V et invariante par $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Définition 4.44 (Connexion linéaire)**.** Une connexion linéaire sur $L(M)$ est une distribution (H_p) de sous-espaces de $T_p(L(M))$ tels que :

1. $V_p \oplus H_p = T_pL(M)$, pour tout $p \in L(M)$;
2. $H_{R_gp} = TR_g(H_p)$ pour tout $p \in L(M)$ et tout $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

On pourra démontrer à titre d'exercice que la donnée d'une connexion linéaire H sur $L(M)$ est équivalent à la donnée d'une 1-forme ω à valeur dans $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ telle que :

1. $\omega(\chi^A) = A$, pour tout $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$,
2. $R_g^*\omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\,\omega$, pour tout $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$,

appelée une *forme de connexion*. Dans ce cas, $H_p := \ker \omega_p$.

Remarque 4.45 (Connexion sur une G-structure). Dans le cas d'une G-structure, on parle de G-connexion et dans les définitions précédentes on doit remplacer $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ par G et $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ par $\mathfrak{g}$.

4.4.3 Dérivée covariante et connexion linéaire

Le but de cette section est de faire le lien entre *dérivée covariante* sur une variété M et *connexion linéaire* sur son fibré des repères $L(M)$. Cela justifiera pourquoi de nombreux auteurs appelle connexion (ou connexion affine pour signifier qu'elle n'est pas liée à une métrique) une dérivée covariante. L'approche que nous avons choisie est celle du repère mobile (il y en a d'autres).

D'une connexion linéaire à une dérivée covariants

Supposons que $L(M)$ soit muni d'une connexion linéaire et désignons par ω la forme de connexion. Soit $p_\alpha : U_\alpha \to P$ une section locale de $L(M)$ (i.e. un repère mobile défini sur U_α) et posons $A_\alpha = p_\alpha^*\omega$. Soit Y un champ de vecteur défini sur U_α et désignons par $v_\alpha := p_\alpha^{-1}(Y) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur (dans $\mathbb{R}^n$) des composantes de Y dans le repère p_α. On peut alors vérifier que l'expression

$$\nabla_X^\alpha Y := p_\alpha \left(dv_\alpha(X) + A_\alpha(X)v_\alpha\right)$$

vérifie les axiomes d'une dérivée covariante sur l'ouvert U_α de M.

Considérons à présent une autre section locale $p_\beta : U_\beta \to P$. Si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, alors il existe une fonction lisse

$$g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

telle que :

$$p_\beta = R_{g_{\beta\alpha}} p_\alpha.$$

Dans la suite, afin de ne pas alourdir les notations on écrira $g_{\beta\alpha} = g$ en omettant d'ajouter les indices. On calcule alors (le vérifier !) :

$$v_\beta = g^{-1}v_\alpha, \qquad dv_\beta(X) = -g^{-1}dg(X)g^{-1}v_\alpha + g^{-1}dv_\alpha(X)$$

et

$$A_\beta(X) = g^{-1}dg(X) + g^{-1}A_\alpha(X)g.$$

On en déduit que :

$$p_\beta \left(dv_\beta(X) + A_\beta(X)\right) = p_\alpha \left(dv_\alpha(X) + A_\alpha(X)\right)$$

sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Par conséquent, les dérivée covariantes locales ∇^α et ∇^β se recollent pour définir une dérivée covariante sur $U_\alpha \cap U_\beta$. En prenant un recouvrement de M où sont définies des sections locales (par exemple un atlas de M) on obtient une dérivée covariante définie sur tout M.

D'une dérivée covariants à une connexion linéaire

Le passage d'une dérivée covariante à une connexion linéaire est plus laborieux à démontrer. On citera donc le théorème suivant sans en donner la démonstration. Le lecteur intéressé pourra consulter [39].

Théorème 4.46. *Soit (U_α) un recouvrement ouvert de M et p_α une section locale définie sur U_α pour tout α. Soient des 1-formes A^α sur chaque U_α, à valeur dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, vérifiant pour tout $\alpha \neq \beta$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ et $X \in T_xM$:*

$$A_\beta(x)(X) = g_{\beta\alpha}^{-1}(x)d_x g_{\beta\alpha}(X) + g_{\beta\alpha}(x)^{-1}A_\alpha(x)(X)g_{\beta\alpha}(x),$$

où les $g_{\beta\alpha}$ sont les fonctions de transition entre p_α et p_β. Alors il existe une unique 1-forme de connexion ω sur $L(M)$ telle que $A^\alpha = p_\alpha^*\omega$ pour tout α.

Forme de soudure, courbure et torsion

Définition 4.47 (Forme de soudure)**.** Sur le fibré des repères (et plus généralement sur n'importe quelle G-structure sur M), il existe une 1-forme naturelle, à valeur dans $\mathbb{R}^n$ et appelée *forme de soudure canonique*. Celle-ci, notée θ est définie de la manière suivante :

$$\theta_p(\chi_p) := p^{-1}(T_p\pi.\chi_p)$$

Elle a une interprétation naturelle locale. Soit p_α une section du fibré des repères $L(M)$, définie sur un ouvert U_α de M. Alors, on pourra vérifier que :

$$(p_\alpha^*\theta)(X) = p_\alpha^{-1}(X).$$

Ainsi, le pullback de θ par une section locale p_α n'est autre que la 1-forme qui associe à un vecteur $X \in TU_\alpha$ le vecteur dans $\mathbb{R}^n$ formé par ses composantes dans le repère p_α.

Définition 4.48 (Extension du produit extérieur)**.** Soit V une variété, E, F, K des espaces vectoriels et supposons donné une application bilinéaire $b : E \times F \to K$. On définit alors un produit extérieur

$$\Omega^1(V, E) \times \Omega^1(V, F) \to \Omega^1(V, K), \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

où

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) := b(\alpha(X), \beta(Y)) - b(\alpha(Y), \beta(X))$$

Par exemple, si $E = F = K = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ et b est le crochet de Lie sur $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, on a :

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = [\alpha(X), \beta(Y)] - [\alpha(Y), \beta(X)].$$

Si $E = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $F = K = \mathbb{R}^n$ et b est le produit matriciel entre une matrice et un vecteur, on a :

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X)$$

On introduit alors les formes suivantes qui pourront apparaître totalement abstraites dans un premier temps.

Définition 4.49 (Courbure et torsion)**.** Étant donné une forme de connexion ω sur le fibré des repères $L(M)$ (ou plus généralement n'importe quelle G-structure sur M) et θ, la forme de soudure, on introduit les formes suivantes :

1. La *courbure* :
$$\Omega := d\omega + \frac{1}{2}\omega \wedge \omega$$
2. La *torsion* :
$$\Theta := d\theta + \omega \wedge \theta$$

De même que pour la forme de soudure, Ω et Θ ont l'interprétation naturelle locale qui résulte de leur dénomination. Soit p_α une section du fibré des repères $L(M)$, définie sur un ouvert U_α de M. On pourra alors vérifier par un calcul direct que :

$$(p_\alpha^*\Omega)(X, Y) = p_\alpha^{-1}(R(X, Y))$$
$$(p_\alpha^*\Theta)(X, Y) = p_\alpha^{-1}(T(X, Y))$$

R et T étant respectivement la courbure et la torsion de la dérivée covariante ∇ associée à la connexion ω. Autrement dit $(p_\alpha^*\Theta)(X, Y)$ et $(p_\alpha^*\Omega)(X, Y)$ représentent respectivement les composantes de la torsion et de la courbure dans le repère p_α.

Remarque 4.50 (Connexion affine). Soit M une variété de dimension n. On peut considérer chaque espace tangent T_xM comme un espace affine en « oubliant l'origine ». On peut alors considérer les repères affines sur M et fabriquer le fibré des repères affines de M, qu'on notera $A(M)$. C'est un fibré principal de groupe structural $\mathrm{GA}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$. En considérant les repères affines qui fixe l'origine, on voit apparaître le fibré des repères (vectoriels) $L(M)$ comme un sous-fibré de $A(M)$, ce qui donne naissance à une injection canonique $i : L(M) \to A(M)$. La donnée d'une forme de connexion $\tilde{\omega}$ sur $A(M)$ induit alors par pullback un couple de

1-formes (ω, θ) telles que ω soit une 1-forme de connexion sur $L(M)$ et θ une 1-forme à valeur dans $\mathbb{R}^n$ qui vérifie :

$$\theta(\chi^A) = 0, \qquad g^*\theta = \theta,$$

pour tout $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et donc induit un champ de tenseur η de type $(1,1)$ sur M. Inversement on peut montrer qu'un tel couple (ω, θ) définit une connexion affine sur $A(M)$. Par exemple la donnée d'une forme de connexion ω sur $L(M)$ plus la forme de soudure canonique sur $L(M)$ induit une forme de connexion affine, c'est la connexion affine canonique sur $A(M)$ associée à une connexion linéaire. Pour résumer, on dira qu'une connexion affine est la donnée d'une connexion linéaire et d'un champ de tenseur η de type $(1,1)$ sur M (induit par la forme θ).

4.4.4 Intégrabilité d'une G-structure

Le problème qui va nous intéresser ici est le suivant. Considérons une G-structure au dessus d'une variété M. Soit $p = (e_i)$ un repère mobile à valeur dans $G(M)$. Sous quelle condition existe-t-il des coordonnées locales (x^i) sur M telles que $e_i := \partial_i$, pour tout i. C'est le problème de l'intégrabilité d'une G-structure. De nombreux problèmes difficiles en mathématiques se réduisent à cette question.

Le théorème de Darboux

Un groupe de Lie G est muni d'une 1-forme canonique (*forme de Maurer-Cartan*) à valeur dans $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie du groupe. Elle est définie par :

$$\theta_g(X_g) = TL_{g^{-1}}X_g, \qquad X_g \in T_gM.$$

Pour chaque $g \in G$, θ_g défini un isomorphisme de T_gG sur $\mathfrak{g}$. Cette forme est invariante à gauche et vérifie les équations :

$$d\theta + \frac{1}{2}\theta \wedge \theta = 0,$$

Soit maintenant M une variété et $g : M \to G$ une application lisse, alors la forme différentielle $\varpi = g^*\theta \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ (*forme de Darboux*) vérifie également les équations de structure :

$$d\varpi + \frac{1}{2}\varpi \wedge \varpi = 0. \tag{4.6}$$

Remarque 4.51. Si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, alors la forme de Darboux s'écrit :

$$\varpi = g^{-1}dg$$

Inversement, supposons donnée une forme $\varpi \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$. Alors, une condition nécessaire qu'il existe une fonction lisse $g : M \to G$ telle que $\varpi = g^*\theta$ est que l'équation de structure (4.7) soit vérifiée. Le résultat suivant, du à Darboux, montre que cette condition est également suffisante (voir [32] par exemple).

Théorème 4.52 (Théorème de Darboux)**.** *Soit $\varpi \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ une forme différentielle satisfaisant les équations :*

$$d\varpi + \frac{1}{2}\varpi \wedge \varpi = 0. \tag{4.7}$$

Alors pour tout $x_0 \in M$ et tout $g_0 \in G$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et une unique application lisse $g : U \to G$ telle que $\varpi = g^*\theta$, où θ est la forme de Maurer-Cartan sur G.

Remarque 4.53 (Forme de Maurer-Cartan invariante à droite). Bien évidement, tout ce qui précède est valable également si on remplace la forme de Maurer-Cartan invariante à gauche par la forme de Maurer-Cartan invariante à droite :

$$\theta_g(X_g) = TR_{g^{-1}}X_g, \qquad X_g \in T_gM.$$

G-structures intégrables

Théorème 4.54. *Soit M une variété de dimension n, G un sous-groupe fermé de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *et $G(M)$ une G-structure sur M, munie d'une connexion ω G-invariante. Soit $p_\alpha = (e^i)$ une section locale de $G(M)$ définie sur un ouvert U_α. Une condition suffisante pour qu'il existe des coordonnées locales (x^i) de M définies sur un ouvert $U \subset U_\alpha$ et telles que $e_i = \partial_{x^i}$ est la* nullité de la torsion est de la courbure *sur $\pi^{-1}(U_\alpha)$.*

Démonstration. Soit (ω^i) la base duale de (e^i) définie sur un ouvert U_α de M. Pour démontrer le théorème, il suffit d'arriver à montrer que $d\omega^i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, en vertu du lemme de Poincaré. On va donc introduire la 1-forme $B_\alpha := (\omega^1, \ldots, \omega^n) = p_\alpha^* \theta$ sur U_α à valeur dans $\mathbb{R}^n$. Soit égalent $A_\alpha := p_\alpha^* \omega$ où ω est la forme de connexion sur $G(M)$. Alors A_α est une 1-forme à valeur dans $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie du groupe $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Si $\Omega = 0$ et $\Theta = 0$, on a donc :

$$dB_\alpha + A_\alpha \wedge B_\alpha = 0,$$
$$dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha = 0,$$

et ces formules sont évidement valables pour n'importe quel autre section locale de $G(M)$ définie sur U_α. Considérons donc un second repère mobile $p_\beta = (\bar{e}_i)$ défini sur U_β. Alors $p_\beta = p_\alpha g$ où g est une fonction définie sur $U_\alpha \cap U_\beta$ à valeur dans G et on a :

$$A_\beta = g^{-1} dg + g^{-1} A_\alpha g.$$

Il suffit donc de trouver une telle fonction g telle que

$$(dg) g^{-1} = -A_\alpha,$$

afin d'avoir $A_\beta = 0$ puis $dB_\beta = 0$. Or d'après le théorème de Darboux 4.52, ceci est possible si :

$$dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha = 0,$$

ce qui achève la preuve □

4.5 Exercices

Exercice 4.1. Est-ce que la dérivée de Lie des champs de vecteurs définie une loi de dérivation sur les sections du fibré tangent d'une variété M. pourquoi ?

Exercice 4.2. Soit ∇ et ∇' deux lois de dérivation sur $\Gamma(E)$ et $s \in \Gamma(E)$. Montrer que si $h(x) = \nabla_X s - \nabla_X s'$, alors :

$$h(f\,X) = f\,h(X).$$

Exercice 4.3. Soit ∇ une dérivée covariante sur une variété M et α, une 1-forme différentielle sur M. Montrer que ∇ est symétrique ssi

$$d\alpha\,(X,Y) = (\nabla_X\,\alpha)(Y) - (\nabla_Y\,\alpha)(X),$$

pour tout $\alpha \in \Omega^1(M)$ et $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$.

Exercice 4.4. Considérons $\mathbb{R}^n$ muni de la dérivée covariante canonique. Montrer que les difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui préservent cette connexion sont les transformations affines de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4.5. Soit G un groupe de Lie. Vérifier que la connexion canonique est bi-invariante.

Exercice 4.6. Soit G un groupe de Lie. Montrer que la courbure de la connexion canonique s'écrit :

$$R(X^u, X^v)X^w = \frac{-1}{4}\,[[X^u, X^v\,], X^w\,]$$

Exercice 4.7. Soit M une variété de dimension n, munie d'une dérivée covariante ∇. Celle-ci induit une loi de dérivation sur le fibré $\bigwedge^n T^*M$.

1. Montrer que la courbure de cette loi de dérivation s'écrit :

$$R(X,Y)\omega = (\mathbf{Ric}(X,Y) - \mathbf{Ric}(Y,X))\omega$$

2. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'existence locale d'une forme volume parallèle est la symétrie du tenseur de Ricci.

Exercice 4.8. Calculer les composantes $(\nabla_X Y)^k$ et $(\nabla_X \alpha)_k$ des dérivées covariantes d'un champ de vecteur X et d'une 1-forme α en coordonnées locales.

Exercice 4.9. Montrer que dans une carte locale les composantes de la torsion et du tenseur de courbure s'écrivent respectivement :

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\,,$$
$$R^l_{ijk} = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js}\,.$$

Exercice 4.10. Montrer que si (y^i) est un autre système de coordonnées et $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ sont les symboles de Christoffel dans ce nouveau système de coordonnées, on a

$$\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \sum_{i,j,k} \Gamma^k_{ij}\,\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\,\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\,\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\,\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^l}\,.$$

Comme on s'y attend, les fonctions Γ^k_{ij} ne se comportent pas comme les composantes d'un champ de tenseurs de type $(2,1)$.

Exercice 4.11. Soit G un groupe de Lie. Montrer que la forme de Maurer-Cartan θ est invariante à gauche et qu'elle vérifie :

$$d\theta + \frac{1}{2}\theta \wedge \theta = 0,$$

Exercice 4.12. Soit G un groupe de Lie. Calculer les géodésiques issue de l'élément neutre du groupe pour la connexion canonique et montre qu'elle correspondent aux sous-groupes à un paramètre de G.

Exercice 4.13 (Parallélisme absolu)**.** On considère le fibré des repères $L(M)$. Soit ω une 1-forme de connexion sur $L(M)$ et θ la forme de soudure canonique. Montrer que l'application :

$$TL(M) \to L(M) \times \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^n, \qquad \chi_p \mapsto (p, \omega_p(\chi_p), \theta_p(\chi_p))$$

est un isomorphisme de fibré vectoriel (dénommé *parallélisme absolu* par Cartan).

Chapitre 5

Géométrie Riemannienne

La donnée d'une *métrique riemannienne* sur une variété M enrichit la structure différentielle. Il y a alors une dérivée covariante canonique (la *connexion riemannienne*) et les géodésiques de cette connexion sont aussi les courbes qui « minimisent l'énergie cinétique ». La métrique riemannienne permet également de définir une distance intrinsèque sur M. Sur une variété riemannienne, on peut définir le gradient, le Hessien, le Laplacien qui sont des objets intrinsèques. Parmi les difféomorphismes de M, ceux qui préservent la métrique sont les *isométries*. Ceux-ci forment un groupe de Lie de dimension finie dont l'algèbre de Lie sont les *champs de Killing* (qui correspondent aux champs équiprojectifs de la mécanique dans le cas de l'espace euclidien). Il est également intéressant de regarder l'ensemble de toutes les métriques riemanniennes sur une variété donnée M. Cet ensemble est une variété de dimension infinie qui est elle-même une variété riemannienne. Sur celle-ci existe une fonctionnelle, la *fonctionnelle d'Einstein-Hilbert* qui joue un rôle fondamental en relativité générale. Le calcul de sa dérivée est instructif. Il permet d'obtenir le *tenseur d'Einstein* comme son gradient et de réaliser le *tenseur de Saint-Venant* comme la linéarisation du *tenseur de Riemann*. Le fait que cette fonctionnelle soit invariante par le groupe des difféomorphismes a pour conséquence la nullité de la divergence du tenseur d'Einstein.

5.1 Métriques riemanniennes et pseudo-riemanniennes

Soit M une variété de classe C^∞ de dimension n. Désignons par S^2T^*M, le fibré des tenseurs covariants symétriques sur M et par $\pi : S^2T^*M \to M$, la projection canonique.

Définition 5.1. Une *métrique riemannienne* (resp. *pseudo-riemannienne*) g sur M est une section C^∞ de S^2T^*M telle que, pour tout $x \in M$, g_x soit définie positive (resp. non dégénérée et de signature constante).

Remarque 5.2. En d'autres termes, une métrique riemannienne est la donnée d'un produit scalaire sur chaque espace tangent T_xM et qui dépend de manière C^∞ du point de base $x \in M$. On écrira indifféremment $g(x)(X, Y)$ ou $\langle X, Y \rangle_x$ pour désigner le produit scalaire de deux vecteurs $X, Y \in T_xM$ ou tout simplement $\langle X, Y \rangle$ si il n y a pas d'ambiguïté.

Remarque 5.3. Localement, une métrique riemannienne g est représentée dans une carte locale (x^i) par ses $n(n+1)/2$ composantes :

$$g_{ij} = g_{ji} :=< \partial_i, \partial_j > .$$

Exemple 5.4. Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par le plongement :

$$f : D \to \mathbb{R}^3; \qquad (u, v) \mapsto f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

On définit une métrique riemannienne g sur S en posant :

$$g_{uu} := \partial_u f \cdot \partial_u f, \qquad g_{uv} := \partial_u f \cdot \partial_v f, \qquad g_{vv} = \partial_v f \cdot \partial_v f$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 5.5. Un métrique riemannienne g sur M induit une application :

$$g : TM \to T^*M, \qquad X \mapsto X^\sharp :=< X, \cdot > .$$

Comme cette application est inversible, elle définit une application

$$g^{-1} : T^*M \to TM, \qquad \alpha \mapsto \alpha^\flat.$$

En coordonnées locales, on a :

$$(X^\sharp)_i = g_{ij} X^j, \qquad (\alpha^\flat)^i = g^{ij}\alpha_j.$$

Le champ de tenseur g^{-1} définit une métrique riemannienne sur le fibré cotangent T^*M. Plus généralement, une métrique riemannienne sur M induit une métrique riemannienne sur tous les fibrés tensoriels de M.

Remarque 5.6. Soit (M, g) une variété riemannienne et S un sous-variété de M. Alors g induit par restriction une structure riemannienne sur S. Attention ce n'est pas nécessairement le cas pour une sous-variété d'une variété pseudo-Riemannienne (penser au cas du cône de lumière dans l'espace de Minkowski).

Définition 5.7 (Isométries)**.** Une *isométrie* entre deux variétés riemanniennes (M, g) et (N, h) est un difféomorphisme $f : M \to N$ tel que $f^*h = g$, autrement dit tel que :

$$h_{f(x)}(T_x f.X, T_x f.Y) = g_x(X, Y), , \qquad \forall x \in M, \quad \forall X, Y \in T_x M.$$

Remarque 5.8. Avec les notations usuelles des mécaniciens, cette relation s'écrirait $F^t H F = G$ si G représente la matrice de Gram de la métrique g, H celle de h et F la matrice du « gradient » de la transformation f.

Définition 5.9 (Transformations conformes)**.** Une *transformation conforme* entre deux variétés riemanniennes (M, g) et (N, h) est un difféomorphisme $f : M \to N$ tel que $f^*h = \kappa g$, où $\kappa \in \mathrm{C}^\infty(M)$ est strictement positive, autrement dit tel que :

$$h_{f(x)}(T_x f.X, T_x f.Y) = \kappa(x) g_x(X, Y), \qquad \forall x \in M, \quad \forall X, Y \in T_x M.$$

Coordonnées canoniques pour la métrique

Considérons une variété riemannienne (M, g) de dimension n. En général (voir théorème 5.24), il n'existe pas de coordonnées locales dans lesquelles la métrique s'écrive :

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^1)^2.$$

Par contre, on peut espérer trouver des systèmes de coordonnées (pour une métrique quelconque) dans lesquelles l'expression de la métrique soit la plus simple possible. Ceci est possible en dimension 2 et 3. Commençons par un raisonnement euristique. Une métrique sur M est définie localement par $n(n+1)/2$ fonctions et un changement de coordonnées par n fonctions. On espère donc pouvoir trouver un système de coordonnées dans lesquelles la métrique soit représenté par $n(n+1)/2 - n = n(n-1)/2$ composantes, c'est à dire 1 composante en dimension 2 et 3 composantes en dimension 3. Les résultats suivants sont des résultats profonds et difficiles à démontrer.

Théorème 5.10 (Théorème de Gauss)**.** *Soit* (M, g) *une variété riemannienne de dimension* 2*. Alors, en tout point, il existe localement des coordonnées, dites* isothermes*, dans lesquelles la métrique s'écrit :*

$$ds^2 = \mathrm{e}^{\varphi}(dx^2 + dy^2),$$

où φ *est une fonction lisse sur* M*.*

Remarque 5.11. Ce résultat é été établi d'abord par Gauss en 1822 dans le cadre des métriques avec des coefficients analytiques puis généralisé par une multitude d'auteurs. On pourra consulter [9] pour plus de détails sur le sujet et [7] pour une preuve moderne. Noter que l'existence de coordonnées isothermales sur la sphère est un résultat très important pour la navigation maritime. La navigation se faisant « au compas », il essentiel que les cartes marines préservent les angles. En dimension strictement supérieure à 2, l'existence de coordonnées isothermales nécessite des conditions de compatibilité (annulation du tenseur de Weyl et du tenseur de Cotton).

Théorème 5.12 (Théorème de Cartan)**.** *Soit* (M, g) *une variété riemannienne de dimension* 3*. Alors, en tout point, il existe localement des coordonnées, dites* orthogonales*, dans lesquelles la métrique s'écrit :*

$$ds^2 = \lambda_1 dx^2 + \lambda_2 dy^2 + \lambda_3 dz^2.$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *sont des fonctions lisses, strictement positives sur* M*.*

Remarque 5.13. Ce résultat é été établi d'abord par Cartan dans le cadre des métriques avec des coefficients analytiques puis démontré par DeTurck [8] en 1984 dans le cadre C^∞. En dimension strictement supérieure à 3, l'existence de coordonnées orthogonales nécessite des conditions de compatibilité (annulation du tenseur de Weyl).

5.2 La connexion Riemannienne

Sur une variété M *nue* (i.e. sans structure supplémentaire), il n'existe pas de dérivée covariante naturelle mais ceci est différent si la variété est munie d'une métrique riemannienne ou pseudo-riemannienne g.

Définition 5.14 (Connexion compatible)**.** Une connexion linéaire ∇ est dite compatible avec la métrique g si

$$\nabla g = 0,$$

ce qui se traduit aussi par :

$$X\cdot < Y, Z >= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \qquad \forall X, Y, Z \in \mathrm{Vect}(M).$$

Théorème 5.15. *Sur une variété* M *munie d'une métrique riemannienne (ou pseudo-riemannienne)* g*, il existe une unique dérivée covariante* symétrique ∇ *telle que* $\nabla g = 0$*. On l'appelle la* connexion de Lévi-Civita *ou* connexion riemannienne *de* (M, g)*.*

Remarque 5.16 (Connexion de Weitzenböck)*.* Dans la modélisation des dislocations, il peut être intéressant de considérer une connexion affine ∇ qui préserve la métrique ($\nabla g = 0$) mais qui ne sois pas symétrique. On parle alors de *connexion de Riemann-Cartan.* Si de plus la courbure est nulle, on parle de *connexion de Weitzenböck.*

On donnera de ce théorème deux démonstrations. La première est classique, la deuxième, plus conceptuelle, est peu connue.

Première preuve. Soit ∇ une loi de dérivation symétrique et compatible avec la métrique g, alors on a :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

et

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

pour tous champs de vecteurs X, Y, Z. En écrivant la deuxième équation pour toutes les permutations circulaires de X, Y, Z et en faisant la somme alternée, on trouve :

$$\begin{aligned} 2\, g(\nabla_X Z, Y) = X \cdot g(Y, Z) - Y \cdot g(Z, X) + Z \cdot g(X, Y) + \\ - g([X, Y], Z) + g([Y, Z], X) - g([Z, X], Y), \end{aligned} \tag{5.1}$$

ce qui établit l'unicité d'une telle dérivée covariante. Inversement, l'équation (5.1) définit un opérateur ∇ qui est une dérivée covariante symétrique et compatible avec g, ce qui établit l'existence. □

Deuxième preuve. Comme nous l'avons vu, la donnée d'une loi de dérivation sur TM induit une loi de dérivation sur T^*M et réciproquement. Cherchons donc à déterminer les propriétés de la connexion induite sur T^*M par une connexion sur TM qui vérifie :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \qquad \forall X, Y \in \mathrm{Vect}(M), \tag{5.2}$$

et

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \qquad \forall X, Y \in \mathrm{Vect}(M). \tag{5.3}$$

La première condition (5.2) se traduit par (voir exercice 4.3) :

$$d\alpha\,(X, Y) = (\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X), \tag{5.4}$$

pour tout $\alpha \in \Omega^1(M)$ et $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$. la deuxième condition (5.2) se réécrit (le vérifier !) :

$$\mathscr{L}_{\alpha^\flat} g(X, Y) = (\nabla_X \alpha)(Y) + (\nabla_Y \alpha)(X), \tag{5.5}$$

pour tout $\alpha \in \Omega^1(M)$ et $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$. Ceci démontre l'existence et l'unicité d'une telle connexion. □

Remarque 5.17. En coordonnées locales, les *symboles de Christoffel* de la connexion riemannienne s'écrivent :

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{ks} \left\{ \partial_i\, g_{sj} + \partial_j\, g_{is} - \partial_s\, g_{ij} \right\},$$

où les g_{ij} sont les composantes de la métrique et les g^{ij}, celles de son inverse.

On a les deux résultats suivants dont les preuve seront laissées à titre d'exercice.

Lemme 5.18. *Soit g une métrique (riemannienne ou pseudo-riemannienne) sur M et $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$. Désignons par ∇^g la connexion riemannienne de g. Alors on a :*

$$\nabla^{\varphi^* g} = \varphi^* \nabla^g.$$

Lemme 5.19. *Soit (M, g) une variété riemannienne (ou pseudo-riemannienne) et ∇ sa connexion riemannienne. Soient $X, Y \in \mathrm{Vect} M$ et $\alpha \in \Omega^1(M)$, alors on a :*

$$(\nabla_X Y)^\sharp = \nabla_X (Y^\sharp), \qquad (\nabla_X \alpha)^\flat = \nabla_X (\alpha^\flat)$$

Définition 5.20. Étant donné une variété riemannienne (ou pseudo-riemannienne) orientable (M, g), il existe une unique forme volume ω qui vaut 1 évalué sur toutes les bases orthonormées directes. Celui-ci est donné en coordonnées locales par :

$$\omega = \sqrt{|\det g_{ij}|}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

c'est le *volume riemannien*.

On laissera au lecteur le soin de vérifier le fait que $\nabla\omega = 0$ (voir exercice 5.5).

Remarque 5.21 (opérateur de Hodge et co-différentielle). Comme sur $\mathbb{R}^n$, on peut également définir un opérateur de Hodge $*$ sur une variété riemannienne et une co-différentielle δ qui définit un complexe dual au complexe différentiel $(\Omega^k(M), d)$. Les résultats du chapitre 4 s'étendent dans ce cas.

Les opérateurs usuels suivants de l'analyse vectoriel admettent des *extensions intrinsèques* dans le cas d'une variété riemannienne :

1. Le *gradient* d'une fonction $f \in \mathrm{C}^\infty$ est définit par :

$$\mathbf{grad}\, f = (df)^\sharp,$$

2. La divergence d'un champ de vecteur X est définit par :

$$\mathbf{div}\, X = \operatorname{tr} \nabla X.$$

   Cette définition s'étend, sans difficulté, pour un tenseur (covariant ou contravariant) *totalement symétrique* d'ordre supérieur. Dans le cas d'un champ de vecteur, on a également :

$$\mathscr{L}_X \omega = d i_X \omega = (\mathbf{div}\, X)\omega,$$

   si ω est le volume riemannien.

3. Le *Hessien* d'une fonction $f \in \mathrm{C}^\infty$ est définit par :

$$\mathbf{Hess}(f)(X, Y) = (\nabla_X df)(Y).$$

   On peut vérifier que c'est un opérateur symétrique.

4. Le *laplacien* (ou laplacien de Beltrami) d'une fonction $f \in \mathrm{C}^\infty$ est défini par

$$\triangle f = \operatorname{tr} \mathbf{Hess}(f) = \mathbf{div}\, \mathbf{grad}\, f.$$

Remarque 5.22 (D'alembertien). Le D'alembertien n'est autre que le laplacien de Beltrami pour la métrique de Lorentz sur l'espace de Minkowski.

5.3 Le tenseur de Riemann

Considérons une variété riemannienne (M, g) et soit ∇ la connexion linéaire. Le tenseur de courbure R est un tenseur 3 fois covariants et 1 fois contravariant. On peut fabriquer un tenseur 4 fois covariants à partir de R grâce à la métrique :

$$\mathbf{R}(X, Y, Z, T) := \langle R(X, Y)Z, T \rangle .$$

C'est le *tenseur de Riemann*. Localement il est donc défini par :

$$R_{ijkl} = g_{lm} R^m_{ijk}.$$

Il possède les symétries indicielles représentées par le tableau d'Young suivant

1	3
2	4

ou en notation indicielles :

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}, \qquad R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0, \qquad R_{ijkl} + R_{jlki} + R_{likj} = 0.$$

Le tenseur de Ricci $\mathbf{Ric} = (R_{ij})$ correspond à la deuxième contraction du tenseur de courbure, autrement dit :

$$R_{ij} = R^k_{ikj} = g^{mn} R_{imjn}.$$

La trace du tenseur de Ricci

$$s := g^{ij} R_{ij}$$

est la *courbure scalaire.*

Lemme 5.23. *Soit g une métrique (riemannienne ou pseudo-riemannienne) sur M et $\varphi \in$ $\mathrm{Diff}(M)$. Désignons par $\mathbf{R}(g)$, $\mathbf{Ric}(g)$ et $s(g)$ les tenseurs de courbures associés à g. Alors on a :*

$$\mathbf{R}(\varphi^* g) = \varphi^* \mathbf{R}(g), \qquad \mathbf{Ric}(\varphi^* g) = \varphi^* \mathbf{Ric}(g), \qquad s(\varphi^* g) = \varphi^* s(g).$$

Décomposition du tenseur de Riemann

On peut décomposer le tenseur de Riemann (en composantes irréductibles par rapport au groupe orthogonal) à l'aide de ses traces :

$$\mathbf{R} = \mathbf{W} + \frac{1}{(n-2)}\, g \otimes_{(2,2)} \mathbf{Ric}^0 + \frac{1}{2n(n-1)}\, s\, g \otimes_{(2,2)} g$$

où $\mathbf{W}$ est un tenseur d'ordre 4 dont toutes les traces sont nulles, dénommé le *tenseur de Weyl*,

$$\mathbf{Ric}^0 := \mathbf{Ric} - \frac{1}{n} sg$$

et le produit tensoriel symétrisé $\otimes_{(2,2)}$ (produit de Kulkarni-Nomizu) est défini par :

$$a \otimes_{(2,2)} b := 12\, F^D(a \otimes b),$$

F^D étant le projecteur d'Young associé au diagramme suivant :

1	3
2	4

En coordonnées locales, on trouve :

$$(a \otimes_{(2,2)} b)_{ijkl} = a_{ik} b_{jl} - a_{il} b_{jk} + a_{jl} b_{ik} - a_{jk} b_{il},$$

d'où l'on tire :

$$\mathrm{tr}_{12}(g \otimes_{(2,2)} a) = (n-2)a + (\mathrm{tr}\, a) g.$$

Le théorème de Riemann

Théorème 5.24 (Théorème de Riemann)**.** *Soit* (M, g) *une variété riemannienne de dimension* n*. Alors la métrique est localement isométrique à la métrique euclidienne ssi* $\mathbf{R} = 0$*.*

Démonstration. Il est d'abord clair que la condition $\mathbf{R} = 0$ est nécessaire. Le fait qu'elle soit suffisante est un corollaire du théorème 4.54. En effet, considérons un ouvert U de M sur lequel soit défini un repère mobile orthonormé $p = (e^i)$. Soit (ω^i) la base duale. Alors la métrique g s'écrit :

$$g = (\omega^1)^2 + \cdots + (\omega^n)^2.$$

Or d'après le théorème 4.54, si la courbure R et la torsion T sont nulles, on peut trouver un ouvert $W \subset U$ sur lequel $\omega^i = dx^i$ pour $i = 1, \ldots, n$. □

Remarque 5.25 (Condition de compatibilité en élasticité non-linéaire)*.* En élasticité, on est amené à considérer le tenseur des déformation (tenseur de Green-Lagrange) :

$$D = \frac{1}{2}(\varphi^* g - g) \tag{5.6}$$

où g est la métrique euclidienne sur le *Body* et φ un difféomorphisme du *Body* représentant une configuration ultérieur du milieux. D est donc un champ de tenseur covariant, symétrique d'ordre 2. Une question naturelle est de savoir à quelle condition un tenseur D arbitraire correspond à une déformation, i.e. à quelle condition peut-on trouver φ tel que (5.6). En réécrivant cette équation sous la forme $\varphi^* g = 2D + g$, on voit que $2D + g$ doit être une métrique plate et donc que son tenseur de courbure doit s'annuler. C'est la *condition de compatibilité*. Le théorème de Riemann nous assure que c'est également une condition suffisante pour l'existence locale de φ.

Remarque 5.26*.* Le tenseur des déformations étant symétrique, il est diagonalisable dans une base orthonormée. Les directions propres sont les directions principales de déformation et les valeurs propres λ_i, les déformations principales (on peut montrer que $\lambda_i > -1/2$). Un problème plus subtil est le suivant : étant donné 3 fonctions réelles arbitraires (à valeur dans $]-1/2, +\infty[$), existe-t-il une transformation φ, dont le tenseur des déformations de Green-Lagrange avec les λ_i comme déformations principales. La réponse est oui sans condition de compatibilité. Le problème a été résolu dans [8].

5.4 Le flot géodésique d'une variété riemannienne

A la différence d'une variété affine (M, ∇), les géodésiques d'une variété riemannienne sont les extrémales d'un problème variationnel et le flot géodésique s'interprète comme un flot hamiltonien.

Interprétation hamiltonienne du flot géodésique

On peut également donner une interprétation hamiltonienne du flot géodésique. Sur le fibré cotangent T^*M d'une variété M, il y a une 1-forme canonique appelée la *forme de Liouville* et définie de la façon suivante :

$$\theta_\alpha(X_\alpha) = \alpha(T\pi(X_\alpha)), \qquad X_\alpha \in T_\alpha T^*M.$$

où $\pi : T^*M \to M$ est la projection canonique et $T\pi : TT^*M \to TM$, son application linéaire tangente. Dans un système de coordonnées locales (q^i, p_i) de T^*M, elle s'écrit :

$$\sum_i p_i dq^i$$

Sa différentielle extérieure $\omega = d\theta$ est fermée et non dégénérée et définit donc une forme *symplectique* sur T^*M. Dans un système de coordonnées locales (q^i, p_i), elle s'écrit :

$$\sum_i dp_i \wedge dq^i$$

Soit maintenant, une variété riemannienne (M, g). Alors la métrique induit un isomorphisme

$$g : TM \to T^*M, \qquad X \mapsto \langle X, \cdot \rangle$$

qui permet de ramener par *pullback* les deux *formes canoniques* de T^*M sur TM :

$$\theta_g = g^*\theta, \qquad \omega_g = g^*\omega.$$

Ainsi, le fibré tangent TM d'une variété riemannienne (M, g) est muni d'une structure symplectique. Soit $H : TM \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$E(X) = \frac{1}{2} \langle X, X \rangle .$$

Le *gradient symplectique* de H, ou *champ hamiltonien* définit par H est le flot géodésique de (M, g). C'est un champ de vecteur sur TM.

Le problème variationnel des géodésiques

Sur une variété riemannienne (M, g), on introduit la *fonctionnelle d'énergie* :

$$E(c) = \int_0^1 \frac{1}{2} g(c_t, c_t)\, dt,$$

et la *fonctionnelle de longueur* :

$$L(c) = \int_0^1 \sqrt{g(c_t, c_t)}\, dt,$$

où c est un chemin C^1 par morceaux entre deux points a et b de M.

Proposition 5.27 (Première variation de l'énergie)**.** *La première variation de l'énergie s'écrit :*

$$dE(c).X = -\int_0^1 g(X, D_t c_t) dt$$

Démonstration. Soit σ une variation de la courbe $c(t)$, c'est à dire une nappe paramétrée $\sigma(s, t)$ telle que :

$$\sigma(0, t) = c(t), \qquad \sigma(s, 0) = c(0), \qquad \sigma(s, 1) = c(1), \qquad \forall s, t$$

et posons $X(t) := \partial_s \sigma(o, t)$. Comme la connexion est symétrique, on a :

$$D_t \partial_s \sigma = D_s \partial_t \sigma.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} dE(c).X &= \int_0^1 \frac{1}{2} \partial_s g(\partial_t \sigma, \partial_t \sigma)(0, t)\, dt \\ &= \int_0^1 g(D_s \partial_t \sigma, \partial_t \sigma)(0, t)\, dt \\ &= \int_0^1 g(D_t \partial_s \sigma, \partial_t \sigma)(0, t)\, dt \\ &= \int_0^1 \left(\partial_t g(\partial_s \sigma, \partial_t \sigma) - g(\partial_s \sigma, D_t \partial_t \sigma)\right)(0, t) dt \\ &= -\int_0^1 g(X, D_t \partial_t c) dt \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Remarque 5.28. On pourra vérifier que la *fonctionnelle de longueur* est indépendante du paramétrage, ce qui n'est pas le cas de E, et que toute extrémale de E est également une extrémale de L mais que la réciproque est fausse (voir exercice 5.12).

Proposition 5.29 (distance géodésique)**.** *Soit (M, g) une variété riemannienne connexe de dimension finie (ou banachique). Alors la fonction suivante :*

$$d(a, b) = \inf_c L(c),$$

où c est un chemin C^1 par morceaux entre a et b, est une distance sur M.

Remarque 5.30. Ce n'est pas nécessairement le cas sur une variété de Fréchet (voir [35] par exemple).

Définition 5.31 (complétude métrique)**.** L'espace métrique (M, d) est complet si tout suite de Cauchy converge.

Définition 5.32 (complétude géodésique)**.** La variété riemannienne (M, g) est complète si toute géodésique est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On peut alors montrer le résultat suivant (voir [31].

Théorème 5.33. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension finie et soit d la distance géodésique. Alors (M, d) est complet ssi (M, g) est complète.*

Remarque 5.34. Le résultat n'est plus vrai en dimension infinie. Dans le cas d'une variété banachique, on a toutefois :

$$(M, d) \text{ complet} \qquad \Rightarrow \qquad (M, g) \text{ complète.}$$

Proposition 5.35 (Seconde variation de l'énergie)**.** *Soit α une géodésique. La seconde variation de l'énergie (en α) s'écrit :*

$$dE(\alpha).(X, Y) = \int_0^1 \|D_t X\|^2 + \mathbf{R}(\alpha_t, X, \alpha_t, X)\, dt.$$

Démonstration. Soit $\sigma(s, t)$ une famille à un paramètre de chemins joignant a et b et vérifiant

$$\sigma(s, 0) = a, \quad \sigma(s, 1) = b, \quad \sigma(0, t) = \alpha(t), \quad \partial_s \sigma(0, t) = X(t).$$

Soit $X(s, t)$ un relèvement de $\sigma(s, t)$ tel que $X(0, t) = X(t)$. La variation seconde de E s'écrit :

$$\begin{aligned} d^2E(\alpha).(X, X) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} dE(\sigma_s).\partial_s\sigma = -\int_0^1 \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \langle \partial_s\sigma, D_t\partial_t\sigma \rangle (s, t)\, dt \\ &= -\int_0^1 \left(\langle D_s\partial_s\sigma, D_t\partial_t\sigma \rangle + \langle \partial_s\sigma, D_sD_t\partial_t\sigma \rangle (0, t)\right) dt. \end{aligned}$$

Or $D_t\partial_t\sigma(0, t) = D_t\partial_t\alpha = 0$ si α est une géodésique. Par ailleurs, voir (4.2) et (4.3), on a :

$$D_sD_t\partial_t\sigma(0, t) = D_t^2 X - R(\alpha_t, X)\alpha_t.$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} d^2E(\alpha)(X, X) &= -\int_0^1 \left(\langle X, D_t^2 X \rangle - \langle X, R(\alpha_t, X)\alpha_t \rangle\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\|D_t X\|^2 + \langle X, R(\alpha_t, X)\alpha_t \rangle\right) dt. \end{aligned}$$

□

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 5.36. *Soit α une géodésique joignant les points a et b dans M. Alors une condition suffisante pour que α minimise l'énergie est que la forme quadratique $d^2E(\alpha)$ soit définie positive.*

Remarque 5.37. On peut montrer que si la longueur de la géodésique α est suffisamment petite, alors $d^2E(\alpha)$ est définie positive et donc que la géodésique est minimisante (voir [10]).

Quand une géodésique α cesse d'être minimisante, il existe donc un champ J le long de α, tel que $J(0) = 0$ et $J(1) = 0$ et qui est dans le noyau de la forme bilinéaire symétrique $d^2E(\alpha)(X, Y)$. Ce champ est donc solution de l'équation différentielle linéaire :

$$D_t^2 J = R(\alpha_t, J)\alpha_t, \tag{5.7}$$

appelée l'*équation de Jacobi*. Les solutions de cette équation sont les *champs de Jacobi*.

Remarque 5.38. Comme l'équation de Jacobi est une équation linéaire du second ordre, ses solutions forment un espace vectoriel de dimension $2n$ (où $n = \dim M$). Chaque champ $J(t)$ est défini par les valeurs initiales $J(0)$ et $D_tJ(0)$.

On a également le résultat utile suivant.

Proposition 5.39. *Soit $\alpha(t)$ une géodésique et $\sigma(s, t)$, une variation de α telle que pour chaque s fixé, $t \mapsto \sigma(s, t)$ soit une géodésique. Alors $J(t) := \partial_s\sigma(o, t)$ est un champ de Jacobi.*

Démonstration. On a :

$$D_t^2 J = D_t D_t \partial_s \sigma\,(0, t) = D_t D_s \partial_t \sigma\,(0, t) = R(\alpha_t, J)\alpha_t$$

car

$$D_s D_t \partial_t\,(s, t) = 0, \quad \forall s, t$$

□

5.5 Isométries et champs de Killing

5.5.1 Isométries

Soit (M, g) une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne.

Définition 5.40. Un difféomorphisme φ de (M, g) est une *isométrie* si il préserve la métrique g, autrement dit si :

$$\varphi^* g = g. \tag{5.8}$$

L'ensemble des isométries de (M, g), forme un groupe noté $\mathrm{Isom}(M, g)$. Il se trouve que c'est également un groupe de Lie (voir [38, 29] pour les détails).

Théorème 5.41 (Myers et Steenrod, 1939)**.** *Le groupe des isométries d'une variété riemannienne (M^n, g) est un groupe de Lie de dimension $\leq n(n + 1)/2$.*

Exemple 5.42. Si $M = \mathbb{R}^3$ est muni de la métrique euclidienne canonique alors son groupe d'isométrie est le groupe des déplacements euclidiens $\mathscr{D}_3$, de dimension (maximale) 6.

Exemple 5.43. Si $M = \mathbb{R}^4$ est muni de la métrique de Minkowski alors son groupe d'isométrie est le groupe de Poincaré $\mathbb{P}$ de dimension (maximale) 10.

Remarque 5.44 (Transformations affines). Plus généralement, soit (M, ∇) une variété munie d'une connexion affine, l'ensemble des difféomorphismes qui satisfont :

$$\nabla^{\varphi^*} = \varphi^* \nabla$$

est également un groupe de Lie de dimension finie et de dimension $\leq n(n + 1)$ (voir [38, 29]). C'est le groupe des *transformations affines* de (M, ∇).

5.5.2 Champs de vecteurs de Killing

Une *isométrie locale* est un difféomorphisme *local*, défini sur un ouvert U de M et qui vérifie l'équation (5.8) sur U.

Définition 5.45. Un champ de vecteur X sur M est un *champ de vecteurs de Killing* si chaque élément φ^t de son flot est une isométrie locale.

Théorème 5.46. *Soit X un champ de vecteur sur M. On a l'équivalence suivante :*

1. *X est un champ de Killing*
2. $\mathscr{L}_X\, g = 0$
3. $\mathscr{L}_X\, \langle A, B\rangle = \langle \mathscr{L}_X A, B\rangle + \langle A, \mathscr{L}_X B\rangle$
4. $\langle \nabla_A X, B\rangle + \langle \nabla_B X, A\rangle = 0$

De la propriété $\mathscr{L}_{[X,Y]} = \mathscr{L}_X \mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_Y \mathscr{L}_X$ et du théorème précédent, on obtient tire le résultat suivant.

Corollaire 5.47. *Le sous-espace* $\mathrm{Kill}(M, g)$ *des champs de Killing de M est une sous-algèbre de Lie de* $\mathrm{Vect}(M)$

Remarque 5.48. Désignons par $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie du groupe de Lie $G = \mathrm{Isom}(M, g)$. Alors $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Kill}(M, g)$ et ces deux algèbres de Lie sont égales si la variété est complète (voire [29]) mais peuvent être différentes dans le cas général.

Exemple 5.49. Si $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ alors $\mathrm{Isom}(M, g) = \mathrm{SO}(3)$ alors que tout champ de vecteurs de Killing de $\mathbb{R}^3$ induit un champ de Killing sur $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par restriction. Dans cet exemple (cas d'une variété riemannienne non complète), l'inclusion est stricte.

Lemme 5.50. *Soit X un champ de vecteurs. Alors X est un champ de Killing si et seulement si pour toute géodésique α on a*

$$\left\langle X \circ \alpha, \alpha' \right\rangle = Cste \tag{5.9}$$

Démonstration. Pour établir la nécessité, il suffit de dériver l'équation (5.9), ce qui nous donne :

$$\frac{d}{dt}\left\langle X \circ \alpha, \alpha' \right\rangle = \left\langle \nabla_{\alpha'} X, \alpha' \right\rangle + \left\langle X, \nabla_{\alpha'} \alpha' \right\rangle = 0.$$

Inversement, si l'équation (5.9) est satisfaite pour toute géodésique alors $\langle \nabla_A X, A\rangle = 0$ pour tout champ de vecteurs A. Donc X est bien un champ de Killing. □

Exemple 5.51. Quand $M = \mathbb{R}^n$, et $\alpha(t) = tB + (1-t)A$, la relation précédente s'écrit

$$\mathbf{X}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \mathbf{X}(B) \cdot \overrightarrow{AB},$$

et caractérise les champs de vecteurs *équiprojectifs* de $\mathbb{R}^n$, qui sont utilisés dans les cours de mécanique du solide. Les *torseurs* correspondent aux éléments du dual de l'espace des champ équiprojectifs.

Remarque 5.52. Si $X \in \mathrm{Kill}(M, g)$, $(\nabla X)(a)$ est un endomorphisme *antisymétrique*. En particulier, $\mathrm{Kill}(M, g)$ est de dimension inférieure ou égale à $n(n+1)/2$. Si $M = \mathbb{R}^n$, muni de la métrique euclidienne, on appelle $X(a)$ et $\nabla X(a)$, les *éléments de réduction* du champ X au point a.

On peut donner une formulation covariante de l'équation $\mathscr{L}_X g = 0$. En effet, soit $Z = X^\flat$, alors :

$$DZ(A,b) := (\nabla_A Z)(B) + (\nabla_B Z)(A) = 0, \qquad \forall A, B.$$

Un champ de vecteurs covariants Z solution de cette équation sera également appelé un champ de Killing (covariant).

Remarque 5.53. Ce qui est remarquable dans cette formulation covariante, c'est que l'équation $DZ = 0$ a un sens dans le cas d'une variété affine, et ceci, indépendamment de l'existence d'une métrique, contrairement à la définition contravariante.

Proposition 5.54. *Soit (M, ∇) une variété affine et Z un champ de Killing (covariant), alors $Z(\alpha(t))$ est une intégrale première du flot géodésique sur M.*

Démonstration. On a :

$$\frac{dZ(\alpha)}{dt} = (\nabla_{\alpha_t} Z)(\alpha_t) + Z(D_t\alpha) = 0.$$

□

Remarque 5.55. On peut étende la définition d'un champ de Killing à tous les tenseurs covariants symétriques. Ainsi si K est un champ de tenseurs covariants symétrique d'ordre p, on dira que K est un champ de Killing si :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1}} (\nabla_{A_{\sigma(p+1)}} K)(A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(p)}) = 0, \qquad \forall A_1, \dots, A_{p+1}.$$

On peut également montrer qu'un champ de Killing K d'ordre p définit une intégrale première du flot géodésique.

5.6 La variété des métriques riemanniennes

L'ensemble des métriques riemanniennes ou pseudo-riemanniennes de signature fixée sur une variété donnée M est un ouvert de l'espace vectoriel $S^2(M)$ des sections du fibré S^2T^*M, des tenseurs covariants symétriques d'ordre 2. Dans le cas des métriques riemanniennes, c'est même un ouvert convexe (le vérifier !). Lorsque M est compact, l'espace vectoriel $S^2(M)$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel de Fréchet. La théorie est un peu plus subtil si M n'est pas compact mais il est hors de propos ici de rentrer dans ces problèmes techniques. On en restera donc à un niveau formel et on notera $\mathscr{M}$ la « variété des métriques » sur M. On notera également que puisque $\mathscr{M}$ est un ouvert de $S^2(M)$, l'espace tangent $T_g\mathscr{M}$ (où $g \in \mathscr{M}$) est égal à $S^2(M)$. On supposera de plus M orientable de sorte qu'à chaque métrique g correspond une forme volume, noté ω_g, qui est le volume riemannien. Enfin, on notera que chaque métrique g induit une métrique sur $S^2(M)$ définie localement par :

$$g(h,k) := g^{ij} g^{pq} h_{ip} k_{jq}.$$

Définition 5.56 (Métrique L^2)**.** On appelle métrique L^2 ou métrique d'Ebin sur $\mathscr{M}$, la famille de produits scalaires :

$$\langle h, k \rangle_g = \int_M g(h,k)\, \omega_g.$$

Cette famille définie une « métrique riemannienne (ou pseudo-riemannienne) » sur $\mathscr{M}$.

Remarque 5.57. Cette définition a bien sûr un sens dans le cas où M est compact, il faut la préciser sinon (en se limitant à des sections avec un comportement adéquate à l'infini) pour que l'intégrale soit finie.

Remarque 5.58. On pourra noter que $\mathrm{Diff}(M)$ est un groupe d'isométrie pour cette métrique puisque :

$$\langle \varphi^* h, \varphi^* k \rangle_{\varphi^* g} = \langle h, k \rangle_g, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{Diff}(M).$$

Remarque 5.59. Dans ce cadre, on peut considérer le tenseur de Ricci comme un champ de vecteur sur $\mathscr{M}$. En effet, pour tout $g \in \mathscr{M}$, $\mathbf{Ric}(g)$ appartient à $S^2(M)$ qui est l'espace tangent à $\mathscr{M}$ au point g. Il permet de définir un flot sur $\mathscr{M}$, le *flot de Ricci* :

$$\partial_t g = \mathbf{Ric}(g)$$

introduit par Hamilton (voir [24]) et qui s'est avéré avoir une importance très importante en géométrie.

Nous nous intéresserons maintenant à l'étude d'une fonctionnelle, la *fonctionnelle d'Einstein-Hilbert*, définie sur $\mathscr{M}$ et qui est à la base de la relativité générale lorsque $\mathscr{M}$ est l'espace des métrique de Lorentz sur une variété de dimension 4. Celle-ci s'écrit :

$$\mathscr{H}(g) = \int_M (a\, s(g) + b)\, \omega_g, \tag{5.10}$$

où $s(g)$ est la courbure scalaire, ω_g le volume riemannien et a, b, des constante réelles.

Remarque 5.60. En relativité générale, a et b sont reliées à la *constante d'Einstein* $\chi = 8\pi G/c^4$ et la *constante cosmologique* Λ par les relations $\chi = 1/a$ et $\Lambda = b/2a$.

On pourra tout de suite remarquer que cette fonctionnelle est invariante par $\mathrm{Diff}(M)$. En effet :

$$\mathscr{H}(\varphi^* g) = \mathscr{H}(g), \qquad \forall \varphi \in \mathrm{Diff}(M).$$

On en déduit alors immédiatement la propriété suivante qui aura des conséquences importantes en mécanique (voir chapitre 7).

Lemme 5.61. *La dérivée variationnelle de $\mathscr{H}$ vérifie l'équation :*

$$d_g\mathscr{H}.(\mathscr{L}_X g) = 0, \qquad \forall X \in \mathrm{Vect}(M).$$

Démonstration. Soient φ^t le flot de X. Alors le résulta découle directement du calcul de la dérivée par rapport à t en $t = 0$ de la relation :

$$\mathscr{H}(\varphi^{t*} g) = \mathscr{H}(g).$$

□

Proposition 5.62. *La dérivée variationnelle de $\mathscr{H}$ s'écrit :*

$$d_g\mathscr{H}.G = \int_M \left((aR^{ij} - \frac{1}{2}(a\, s + b) g^{ij} \right) G_{ij}\, \omega_g.$$

Le tenseur $S^{ij} := aR^{ij} - \frac{1}{2}(a\, s + b) g^{ij}$ est le tenseur d'Einstein.

Démonstration. La proposition résulte des lemmes 5.64 et 5.70. Le terme de divergence disparaît dans l'intégrale. □

Remarque 5.63. La divergence du tenseur d'Einstein est nulle (le vérifier en utilisant le lemme 5.61 !).

Le reste de cette section sera consacré à détailler le calcul de la variation de $\mathscr{H}$. Pour cela, on introduit une famille à 1 paramètre $g(t)$ de métriques sur M, telle que :

$$g(0) = g, \qquad \dot{g}(0) = \delta g$$

On a donc :

$$\begin{aligned} d_g\mathscr{H}.\delta g &= \int_M \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (a\, s(g(t)) + b)\, \omega_{g(t)} \\ &= \int_M \left[a\, \delta s \omega_g + (a\, s(g) + b)\, \delta\omega\right]. \end{aligned}$$

Il nous reste donc à calculer :

$$\delta s = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} s(g(t)), \qquad \delta\omega = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \omega_{g(t)}.$$

Le calcul de $\delta\omega$ est assez simple et laissé à titre d'exercice.

Lemme 5.64. *On a :*

$$\delta\omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_g(\delta g)\omega_g,$$

où $\mathrm{tr}_g\, h := g^{ij}h_{ij}$.

Le calcul de δs nécessite plusieurs étapes qui sont intéressantes en elles-mêmes. On va commencer par calculer la variation de la connexion riemannienne, puis celle du tenseur de courbure, puis celle de la courbure scalaire.

Commençons par la variation de la connexion riemannienne ∇^g en fonction de la métrique g. L'espace des connexions sur M est un espace affine $\mathscr{A}(M)$ de dimension infinie et d'espace vectoriel directeur $\mathscr{T}_1^2(M)$. La connexion riemannienne est donc une application :

$$\mathscr{M} \to \mathscr{A}(M), \qquad g \mapsto \nabla^g,$$

où ∇^g est déterminer par la formule de Koszul :

$$\begin{aligned} 2\, g(\nabla^g_X Z, Y) = X \cdot g(Y,Z) - Y \cdot g(Z,X) + Z \cdot g(X,Y) + \\ - g([X,Y\,], Z) + g([Y,Z\,], X) - g([Z,X\,], Y). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 2\, \delta g(\nabla^g_X Z, Y) + 2\, g(\delta\nabla(X,Z), Y) = X \cdot \delta g(Y,Z) - Y \cdot \delta g(Z,X) + Z \cdot \delta g(X,Y) \\ - \delta g([X,Y\,], Z) + \delta g([Y,Z\,], X) - \delta g([Z,X\,], Y), \end{aligned}$$

qui se réécrit :

$$g(\delta\nabla(X,Z), Y) = \frac{1}{2}\left[(\nabla^g_X \delta g)(Y,Z) - (\nabla^g_Y \delta g)(Z,X) + (\nabla^g_Z \delta g)(X,Y)\right].$$

Remarque 5.65. En coordonnées locales, on a donc :

$$\delta\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{kl}\left\{\delta g_{jl;i} - \delta g_{ij;l} + \delta g_{li;j}\right\},$$

où $G_{ij;k} = (\nabla_{\partial_k} G)(\partial_i, \partial_j)$.

Soit $R^g(X,Y)Z$ le tenseur de courbure de la connexion ∇. On laisser au lecteur le soin de vérifier le résultat suivant.

Lemme 5.66. *On a :*

$$\delta R(X,Y,Z) = (\nabla_X \delta\nabla)(Y,Z) - (\nabla_Y \delta\nabla)(X,Z)$$

Remarque 5.67. En coordonnées locales, on a donc :

$$\delta R^l_{ijk} = \delta\nabla^l_{jk;i} - \delta\nabla^l_{ik;j}.$$

Corollaire 5.68. *La variation du tenseur de Riemann s'écrit :*

$$\delta R_{ijkl} = \delta g_{lm} R^m_{ijk} + \frac{1}{2}\left(\delta g_{kl;ji} - \delta g_{jk;li} + \delta g_{lj;ki} - \delta g_{kl;ij} + \delta g_{ik;lj} - \delta g_{li;kj}\right),$$

où

$$G_{ij;kl} := (\nabla^2_{\partial_l,\partial_k} G)(\partial_i,\partial_j) = (\nabla_{\partial_l}\nabla_{\partial_k} G - \nabla_{\nabla_{\partial_l}\partial_k} G)(\partial_i,\partial_j)$$

Remarque 5.69. Si la variation du tenseur de Riemann est calculée en $g = \eta$ une métrique plate, on obtient :

$$d_\eta \mathbf{R}^g.G = \frac{1}{2}\left(G_{lj;ki} + G_{ik;lj} - G_{li;kj} - G_{jk;li}\right),$$

qui n'est autre que le tenseur de Saint-Venant à un facteur multiplicatif près (il faut également faire attention à la place des indices ; il faut ici effectuer la permutation (jk))

Lemme 5.70. *La variation de la courbure scalaire s'écrit :*

$$\delta s = -R^{kl}\delta g_{kl} + \mathbf{div}\, X,$$

pour un certain champ de vecteur X.

Démonstration. On a :

$$\delta R_{ij} = \delta\nabla^k_{kj;i} - \delta\nabla^k_{ij;k}$$

et

$$\delta s = \delta g^{ij}\, R_{ij} + g^{ij}\, \delta R_{ij}.$$

Or

$$\delta g^{ij} = -g^{ik} g^{jl} \delta g_{kl}$$

car $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$. On a donc finalement :

$$\begin{aligned}\delta s &= -g^{ik} g^{jl} R_{ij} \delta g_{kl} + g^{ij}(\delta\nabla^k_{kj;i} - \delta\nabla^k_{ij;k}) \\ &= -R^{kl}\delta g_{kl} + \mathbf{div}\, X,\end{aligned}$$

où $X^i = g^{ij}\delta\nabla^k_{kj} - g^{kl}\delta\nabla^i_{kl}$. □

5.7 Exercices

Exercice 5.1 (Projection de Mercator (1569) et cartes conformes)**.** La *projection Mercator* est une carte de la Terre réalisée en coinçant la sphère terrestre dans un cylindre, de sorte que la zone de contact soit l'équateur terrestre. La projection est obtenue en faisant partir un rayon depuis le centre de la Terre ; il coupe la surface du globe, puis le cylindre (sauf pour des rayons qui passent par les pôles Nord ou Sud). Le point d'intersection du rayon avec le cylindre correspond à la projection. Si la Terre est paramétrée en latitude ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) et longitude ($-\pi \leq \phi \leq \pi$), la carte obtenue est de la forme :

$$x = \phi, \qquad y = f(\theta), \tag{5.11}$$

ce qui est le cas des cartes marines. Calculer cette projection. Cette carte est-elle conforme ? On cherche à fabriquer une carte conforme de la Terre et satisfaisant (5.11). Déterminer $f(\theta)$. Montrer qu'elle coïncide avec la projection de Mercator, en un point de l'équateur, au deuxième ordre.

Exercice 5.2. Soit ∇ une dérivée covariante sur une variété riemannienne (M, g). Montrer que les deux équation suivantes sont équivalentes

$$\nabla_X g = 0, \quad \forall X \in \mathrm{Vect}(M) \tag{5.12}$$

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathrm{Vect}(M) \tag{5.13}$$

Exercice 5.3. Soit (M, g) une variété riemannienne et $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$. On pose :

$$\nabla^{\varphi}_X Y = \varphi^* \left(\nabla_{\varphi^{-1*}X} \varphi^{-1*} Y \right),$$

pour $X, Y \in \Gamma(TM)$. Montrer que ∇^{φ} est une dérivée covariante. En déduire que si φ est une isométrie alors ∇^{φ} est symétrique, préserve la métrique g et en conclure que $\nabla^{\varphi} = \nabla$.

Exercice 5.4. Soit g une métrique (riemannienne ou pseudo-riemannienne) sur M, $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ et ∇^g la connexion riemannienne de g. Montrer que :

$$\nabla^{\varphi^* g} = \varphi^* \nabla^g.$$

En déduire que :

$$\mathbf{R}(\varphi^* g) = \varphi^* \mathbf{R}(g), \qquad \mathbf{Ric}(\varphi^* g) = \varphi^* \mathbf{Ric}(g), \qquad s(\varphi^* g) = \varphi^* s(g).$$

Exercice 5.5. Soit (M, g) une variété riemannienne orientée. Montrer que $\nabla \omega = 0$ (on pourra considérer un repère mobile local orthonormé). En déduire que le tenseur de Ricci de la connexion est symétrique.

Exercice 5.6. Soit (M, g) une variété riemannienne. Montrer que le Hessien

$$\mathrm{Hess}(f)(X, Y) = (\nabla_X df)(Y)$$

est symétrique en X, Y.

Exercice 5.7. Soit R_{ijkl} un tenseur possédant les symétries indicielles :

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}, \qquad R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0, \qquad R_{ijkl} + R_{jlki} + R_{likj} = 0.$$

Montrer que $R_{ijkl} = R_{klij}$.

Exercice 5.8. Soit R_{ijkl} un tenseur possédant les symétries indicielles du tenseur de Riemann. Posons

$$C_{ijkl} = R_{ikjl} - R_{ilkj}, R_{ijkl} = C_{ikjl} + C_{ilkj}$$

Montrer que C possède les symétries indicielles suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}, \qquad C_{ijkl} + C_{jkil} + C_{kijl} = 0, \qquad C_{ijkl} + C_{jlki} + C_{likj} = 0.$$

Montrer que la transformation $R \mapsto C$ est inversible et que son inverse s'écrit :

$$R_{ijkl} = C_{ikjl} + C_{ilkj}.$$

Exercice 5.9 (Identité de Ricci)**.** On introduit :

$$\nabla^2_{A,B} X := \nabla_A \nabla_B X - \nabla_{\nabla_A B} X.$$

1. Montrer que

$$\nabla^2_{A,B} X - \nabla^2_{B,A} X = R(A, B) X.$$

2. Plus généralement, soit T un tenseur p fois covariant. Montrer l'identité de Ricci

$$[Q(A,B)T - Q(B,A)T]\,(X_1,\dots,X_p) = -\sum_{i=1}^{p} T(X_1,\dots,\mathbf{R}(A,B)X_i,\dots,X_p).$$

Exercice 5.10. Montrer que dans le cas riemannien ou pseudo-riemannien, le tenseur de Ricci est symétrique.

Exercice 5.11. Montrer que l'action standard de $\mathrm{Diff}(M)$ sur T^*M préserve la forme de Liouville θ et sa dérivée extérieure ω.

Exercice 5.12.
1. Montrer que toute courbe c qui minimise l'énergie minimise également la longueur.
2. Montrer que si c minimise la longueur, il en est de même de $c\circ\varphi$ pour tout difféomorphisme φ de l'intervalle $[0,1]$. En déduire que si c est un minimum de la fonctionnelle de longueur paramétré par sa longueur, alors c'est également un minimum pour l'énergie.

Exercice 5.13. On considère la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par latitude et longitude

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta\cos\varphi \\ y &= \cos\theta\sin\varphi \\ z &= \sin\theta \end{aligned}$$

où θ appartient à l'intervalle $[-\pi/2,\pi/2]$ et φ à l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

1. Calculer la métrique dans les coordonnées (θ,φ).
2. Calculer les équations d'Euler-Lagrange des géodésiques et en déduire les Christoffel.
3. Calculer le tenseur de courbure.
4. Calculer les champs de Jacobi.
5. Montrer que pour $\varphi=\pi$, une géodésique issue de $\varphi=0$ cesse d'être minimisante.

Exercice 5.14. Montrer que les champs de vecteurs de Killing de $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique canonique sont les champs de vecteurs équiprojectifs définis par :

$$\mathbf{X}(A)\cdot\overrightarrow{AB} = \mathbf{X}(B)\cdot\overrightarrow{AB} \qquad A,B\in\mathbb{R}^n.$$

Quelle est la dimension de $\mathrm{Kill}(\mathbb{R}^n, Can)$?

Exercice 5.15. Soit ω_g la forme volume riemannienne correspondant à la métrique g. Montrer que la variation en g de ω_g s'écrit :

$$\delta\omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_g\,\delta g\,\omega_g.$$

Exercice 5.16. Soit M une surface compacte sans bord et g une métrique sur M. Montrer que l'intégrale

$$\int_M R(g)\,\Omega_g$$

est indépendante de la métrique g.

Chapitre 6

Géométrie Riemannienne sur un groupe de Lie

Une application intéressante de la géométrie riemannienne en mécanique (et plus généralement en physique mathématique) est fournie par le flot géodésique d'une métrique riemannienne invariante à gauche (ou à droite) sur un groupe de Lie. Dans ce cas, les équations des géodésiques se réduisent à une équation dans l'algèbre de Lie du groupe dénommée l'*équation d'Euler-Arnold*. Le prototype de ce formalisme est représenté par les équations du mouvement d'un corps rigide libre, auquel cas, ces équations se réduisent aux célèbres équations formulées par Euler en 1765. Pour le bicentenaire de la découverte de celles-ci, Vladimir Arnold a montré que les équations d'Euler d'un fluide parfait (sans frontière libre) pouvaient également s'interpréter dans le cadre de ce formalisme.

6.1 Les équations du mouvement d'un corps rigide

6.1.1 L'espace de configuration d'un corps rigide

Les configurations d'un corps rigide Σ sont représentés par les différentes positions de celui-ci dans l'espace, autrement dit, par une famille de plongements

$$\varphi : \Sigma \to \mathscr{E}_3$$

tels que pour tous points M, N de Σ, la distance euclidienne

$$d\big(\varphi(M), \varphi(N)\big)$$

soit indépendante du plongement φ.

En vertu du théorème de prolongement des isométries affines (voir exercice 6.1), la dimension du sous-espace affine de $\mathscr{E}_3$ engendré par $\varphi(\Sigma)$ est indépendante de φ, c'est le *rang du corps rigide*. Il en résulte alors, que le choix d'une configuration initiale Σ_0 d'un *corps rigide de rang* ≥ 2 est déterminé de manière unique par un un déplacement euclidien, ce qui permet *d'identifier son espace de configuration avec le groupe euclidien*.

Considérons le cas particulier du mouvement d'*corps rigide libre*, c'est à dire qui n'est soumis à aucune *force extérieure*, alors en vertu du principe de Galilée, on peut supposer que son centre d'inertie O est fixe (en se plaçant dans le bon référentiel), les mouvements de ce corps rigide pourront alors s'identifier avec une courbe $g(t)$ sur le groupe des rotations $\mathrm{SO}(3)$ paramétré par le temps.

Soit $\mathscr{B}$ un repère orthonormé de $\mathscr{E}_3$, d'origine O. On repère un point M de Σ_0 à l'aide de ses coordonnées $\mathbf{a} = (a^k)$ dans le repère $\mathscr{B}$ (les *coordonnées matérielles ou Lagrangiennes*). A

l'instant t, le point M occupe une position $M_t = \varphi(M,t)$. On notera $\mathbf{x} = (x^k(t))$ ses coordonnées dans le repère $\mathscr{B}$: ce sont les *coordonnées spatiales*. Entre ces deux jeux de coordonnées, on a la relation suivante :

$$\mathbf{x}(t) = g(t)\mathbf{a}, \qquad g(t) \in \mathrm{SO}(3).$$

Il peut être utile de considérer un repère $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}_3$ comme une application affine de $\mathbb{R}^3 \to \mathscr{E}_3$, $\mathbf{a} \mapsto M$ telle que :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{k=1}^{3} a^k e_k.$$

Alors le groupe des rotations $SO(3)$ agit sur les repères par composition à droite. En notant $\mathscr{B}(t) = \mathscr{B}g(t)$, on a :

$$\varphi(M,t) = \mathscr{B}\mathbf{x}(t) = \mathscr{B}g(t)\mathbf{a} = \mathscr{B}(t)\mathbf{a}.$$

Définition 6.1 (Vitesse lagrangienne)**.** La vitesse instantanée d'un point M à l'instant t s'écrit :

$$\mathbf{v}(M,t) = \frac{\partial}{\partial t}\big(\mathscr{B}\mathbf{x}(t)\big) = \mathscr{B}(\dot{g}\mathbf{a}) = \mathscr{B}\big[(\dot{g}g^{-1})\mathbf{x}(t)\big] = \mathscr{B}(t)\big[(g^{-1}\dot{g})\mathbf{a}\big].$$

C'est la *vitesse lagrangienne* du point M.

Définition 6.2 (Vitesse spatiale)**.** Le vecteur $(\dot{g}g^{-1})\mathbf{x}(t)$ de $\mathbb{R}^3$ correspond aux composantes de la vitesse dans la base $\mathscr{B}$ *fixe*. C'est la *vitesse spatiale*.

Définition 6.3 (Vitesse matérielle)**.** Le vecteur $(g^{-1}\dot{g})\mathbf{a}$ de $\mathbb{R}^3$ correspond aux composantes de la vitesse dans la base $\mathscr{B}(t)$ *mobile*. C'est la *vitesse matérielle*.

Définition 6.4 (Vitesses angulaires)**.** Ces définitions font apparaître la *vitesse angulaire par rapport au solide*

$$\Omega_L = g^{-1}\dot{g},$$

et la *vitesse angulaire par rapport à l'espace*

$$\Omega_R = \dot{g}g^{-1}.$$

Remarque 6.5. On notera que Ω_L et Ω_R sont des matrices antisymétriques et appartiennent à $\mathfrak{so}(3)$ mais pas $\dot{g}$ qui est simplement un *vecteur tangent* au groupe SO(3) au point g. L'isomorphisme

$$(\mathbb{R}^3, \wedge) \to \mathfrak{so}(3), \qquad \omega \mapsto j(\omega) \in \mathfrak{so}(3),$$

où $j(\omega)x = \omega \wedge x$ et qui vérifie

$$[j(\omega_1), j(\omega_1)\,] = j(\omega_1 \wedge \omega_2),$$

permet d'identifier Ω_L et Ω_R avec les *vecteurs vitesses instantanées de rotation* ω_R et ω_L de $\mathbb{R}^3$ définis par $\Omega_R = j(\omega_R)$ et $\Omega_L = j(\omega_L)$.

Lemme 6.6. *On a :*

$$\omega_R(t) = g(t)\omega_L(t).$$

Démonstration. Cela résulte des relations

$$\Omega_R = g\Omega_L g^{-1}, \qquad gj(\omega)g^{-1} = j(g\omega).$$

□

6.1.2 Les équations d'Euler du corps rigide

L'énergie cinétique du corps rigide s'écrit (le vérifier !) :

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_\Sigma \|\omega_L \wedge \mathbf{a}\|^2 \, \rho \, d\tau$$

où ρ est la densité de masse sur Σ. Cette formule peut se réécrire :

$$K(t) = \frac{1}{2} A\omega_L \cdot \omega_L$$

où

$$A\omega = \int_\Sigma \mathbf{a} \wedge (\omega \wedge \mathbf{a}) \rho \, d\tau.$$

A est un opérateur symétrique défini positif sur $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$ qui correspond à un *produit scalaire* sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$:

$$\begin{aligned} < \omega_1, \omega_2 > &= A\omega_1 \cdot \omega_2 \\ &= \int_\Sigma [\mathbf{a} \wedge (\omega_1 \wedge \mathbf{a})] \cdot \omega_2 \, \rho \, d\tau \\ &= \int_\Sigma \left[(\omega_1 \cdot \omega_2) \, \|\mathbf{a}\|^2 - (\omega_1 \cdot \mathbf{a})(\omega_2 \cdot \mathbf{a}) \right] \rho \, d\tau. \end{aligned}$$

C'est le *tenseur d'inertie* du solide. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on retrouve les formules habituelles :

$$A_{xx} = \int_\Sigma \left(y^2 + z^2\right) \, d\mu, \quad A_{xy} = A_{yx} = -\int_\Sigma xy \, d\mu, \quad \ldots$$

Les directions propres de A sont les *axes principaux d'inertie du solide* et ses valeurs propres I_k sont les *moments principaux d'inertie*. Dans une base orthonormée de vecteurs propres de A, on a :

$$K(\omega) = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right).$$

Ce sont les *équations d'Euler du corps rigide*.

Remarque 6.7. Par translation à gauche sur le groupe SO(3), A induit une *métrique riemannienne* invariante à gauche sur le groupe SO(3). Son expression en un point $g \in \mathrm{SO}(3)$, est simplement l'expression de l'énergie cinétique à l'aide des variables lagrangiennes :

$$K(g, \dot{g}) = \frac{1}{2}\int_\Sigma \|\dot{g}\mathbf{a}\|^2 \, \rho \, d\tau.$$

Le moment cinétique du solide au point fixe O s'écrit (le vérifier !) :

$$\mathscr{M}_O = gA\omega_L.$$

Introduisons $m_L := A\omega_L$. En l'absence de *forces extérieures*, il y a conservation du moment cinétique au cours du mouvement et donc :

$$\frac{d\mathscr{M}_O}{dt} = \dot{g}m_L + g\dot{m}_L = 0,$$

Ce qui nous donne :

$$\dot{m}_L = -\left(g^{-1}\dot{g}\right) m_L = -\Omega_L m_L = m_L \wedge \omega_L.$$

En désignant par $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ les composantes de ω_L dans une base orthonormée de vecteur propres de A, on arrive aux équations obtenues par Euler en 1765 et connues sous le nom d'*équations d'Euler de mouvement du corps rigide* :

$$\dot{\omega}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}\omega_2\omega_3, \qquad \dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\omega_1\omega_3, \qquad \dot{\omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_1\omega_2.$$

Remarque 6.8. Il est possible d'intégrer explicitement les équations du mouvement à l'aide des fonctions elliptiques (voir [33]). L'ingrédient essentiel qui permet cette intégration est l'existence des deux grandeurs conservées suivantes :

$$\begin{aligned} 2K(\omega_L) &= I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 \\ \|m_L\|^2 &= I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2. \end{aligned}$$

On peut également établir, par des méthodes géométriques que les rotations autour du grand axe ou du petit axe (qui sont des solutions stationnaires) sont stables (au sens de Lyapunov) mais pas la rotation autour de l'axe médian.

6.2 Métrique riemannienne invariante sur un groupe de Lie

Nous allons à présent reprendre les calculs de la section précédente dans le cadre général d'un groupe de Lie abstrait G. On pourra consulter l'article original d'Arnold [1]. Ce formalisme général sera valable, chaque fois que l'espace des configurations d'un système mécanique peut s'identifier à un groupe de Lie, autrement si il existe un groupe de Lie qui agit *simplement transitivement* sur l'espace des configurations, comme c'est le cas pour un solide de rang ≥ 2.

6.2.1 Métrique invariante à gauche sur un groupe de Lie

Toute métrique invariante à gauche sur G est entièrement déterminée par sa valeur à l'élément neutre du groupe, autrement dit par un produit scalaire sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, ou ce qui est équivalent, par un opérateur

$$A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$$

symétrique, c'est à dire :

$$(Au, v) = (Av, u), \qquad \forall u, v \in \mathfrak{g}$$

et qu'on nomme *opérateur d'inertie*. Inversement, tout opérateur symétrique $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ inversible, définit une métrique riemannienne sur G invariante à gauche. Celle-ci s'écrit :

$$< X_g, Y_g >_g = (ATL_{g^{-1}}X_g, TL_{g^{-1}}Y_g).$$

Remarque 6.9. Dans le cas du mouvement du corps rigide, on a identifié $\mathfrak{g}$ avec l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, ce qui a rendu indiscernable $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}^*$.

6.2.2 Connexion riemannienne d'une métrique invariante à gauche

La connexion de Levi-Civita ∇ d'une métrique invariante à gauche est également invariante à gauche. Par suite, en désignant par ∇^0 la connexion canonique sur G,

$$B(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla^0_X Y$$

est un champ de tenseurs invariant à gauche et la formule de Koszul (évaluée sur des champs de vecteurs invariants à gauche) nous donne (le vérifier !) :

$$\langle B(u, v), w \rangle = -\frac{1}{2} \left(\langle \mathrm{ad}_u\, w, v \rangle + \langle \mathrm{ad}_v\, w, u \rangle \right),$$

soit :

$$B(u, v) = -\frac{1}{2} \left(\mathrm{ad}^t_u\, v + \mathrm{ad}^t_v\, u \right).$$

Remarque 6.10. Pour une métrique bi-invariante, on a :

$$\langle \mathrm{Ad}_g\, u, \mathrm{Ad}_g\, v \rangle = \langle u, v \rangle, \qquad \forall g \in G,\ \forall u, v \in \mathfrak{g}$$

et donc

$$\mathrm{ad}_u^t\, v = -\,\mathrm{ad}_u\, v.$$

Par suite, $B(u, v) = 0$ et la connexion riemannienne coïncide avec la connexion canonique de G

6.2.3 L'équation d'Euler-Arnold

Soit θ la 1-forme de Maurer-Cartan (invariante à gauche). On montre facilement (exercice 6.4) que :

$$(\nabla_X \theta)(Y) = -\frac{1}{2}\,[\theta(X), \theta(Y)] - B(\theta(X), \theta(Y)).$$

Soit $g(t)$ une géodésique et

$$u := \theta(\dot g) = TL_{g^{-1}} \dot g.$$

On a alors :

$$\dot u = (D_t\theta)(\dot g) + \theta(D_t \dot g) = (\nabla_{\dot g}\theta)(\dot g) = -B(u, u) = \mathrm{ad}_u^t\, u.$$

Définition 6.11. L'équation

$$\dot u = \mathrm{ad}_u^t\, u \tag{6.1}$$

est l'*équation d'Euler-Arnold* pour une métrique invariante à gauche sur un groupe de Lie G. Elle généralise les équations d'Euler du mouvement d'un corps rigide (6.1.2).

L'équation des géodésiques se ramène ainsi à un système triangulaire :

$$\begin{cases} \dot g &= TL_g\, u\,, \\ \dot u &= \mathrm{ad}_u^t\, u\,. \end{cases} \tag{6.2}$$

Remarque 6.12. Lorsque la métrique est bi-invariante, on a $\mathrm{ad}_u^t\, u = 0$ et donc $\dot u = 0$. Les géodésiques (issues de l'élément neutre) d'une métrique bi-invariante sont les sous-groupes à un paramètre de G.

6.2.4 Les théorèmes d'Euler

Introduisons sur $\mathfrak{g}$ l'action adjointe Ad_g et sa dérivée ad_u. Par dualité, on obtient les actions co-adjointes sur $\mathfrak{g}^*$ (actions à droite), qui s'écrivent :

$$(\mathrm{Ad}_g^*\, m)(w) := m(\mathrm{Ad}_g\, w), \qquad (\mathrm{ad}_m^*)(w) := m(\mathrm{ad}_u\, w),$$

où $w \in \mathfrak{g}$ et $m \in \mathfrak{g}^*$. Soit $g(t)$ une géodésique et $u := \theta(\dot g)$. Introduisons alors :

$$m_L = Au, \qquad m_R = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}^*\, m_L,$$

qu'on dénommera respectivement *moment à gauche* (m_L) et *moment à droite* (m_R).

Le premier théorème d'Euler représente une généralisation de la *conservation du moment cinétique* du mouvement d'un corps rigide libre autour d'un point fixe.

Théorème 6.13 (Premier théorème d'Euler)**.** *Le moment à droite m_R d'une métrique riemannienne invariante à gauche sur G est indépendant de t :*

$$\frac{dm_R}{dt} = 0, \tag{6.3}$$

Le deuxième théorème d'Euler est une réécriture, sur un groupe de Lie quelconque, de l'équation d'évolution des vitesses angulaires d'un solide en rotation autour d'un point fixe.

Théorème 6.14 (Deuxième théorème d'Euler)**.** *Le moment à gauche m_L d'une métrique riemannienne invariante à gauche sur G vérifie l'équation différentielle du premier ordre suivante :*

$$\frac{dm_L}{dt} = \operatorname{ad}_u^* m_L, \tag{6.4}$$

Remarque 6.15. L'équation (6.4) s'appelle l'*équation d'Euler-Poincaré*. Elle avait déjà été obtenue par Poincaré [43] en 1901 dans le cadre plus général des systèmes Lagrangiens sur lesquels agit transitivement un groupe de Lie. Une version encore plus général de ce formalisme a été proposé par Hamel en 1904 [22] (voir également [3]).

Preuve des théorèmes d'Euler. Le deuxième théorème d'Euler s'obtient immédiatement par substitution :

$$\dot{m}_L(w) = \left\langle \operatorname{ad}_u^t u, w \right\rangle = \langle u, \operatorname{ad}_u w \rangle = (\operatorname{ad}_u^* m_L)(w).$$

le premier théorème d'Euler en résulte :

$$\dot{m}_R(w) = -\operatorname{Ad}_{g^{-1}}^* \operatorname{ad}_u^* m_L + \operatorname{Ad}_{g^{-1}}^* \dot{m}_L = 0.$$

□

6.2.5 Cas d'une métrique invariante à droite

Dans le cas d'une métrique invariante à droite, on introduit $u = TR_{g^{-1}}\dot{g}$ et l'équation d'Euler-Arnold s'écrit :

$$\dot{u} = -\operatorname{ad}_u^t u \tag{6.5}$$

On introduit alors :

$$m_R = Au, \qquad m_L = \operatorname{Ad}_g^* m_R,$$

et les théorèmes d'Euler deviennent :

$$\frac{dm_L}{dt} = 0, \qquad \frac{dm_R}{dt} = -\operatorname{ad}_u^* m_R.$$

6.3 Application à l'hydrodynamique

En appliquant les méthodes générales présentées dans la section précédente au groupe des difféomorphismes qui préservent le volume d'un domaine régulier de l'espace, on retrouve les *équations d'Euler* du mouvement d'un fluide parfait dans un *domaine fixe* de l'espace. Cette formulation a été introduite par Arnold dans [1]. Cette description de l'hydrodynamique avait déjà été brièvement signalée par Moreau [37] en 1959. On peut légitimement se demander si Euler lui-même ne l'avait pas, d'une certaine manière, déjà remarqué !

6.3.1 Fluides parfaits, homogènes et incompressibles

On dit qu'un milieu continu est un fluide *parfait* si le tenseur des contraintes en tout point et à tout instant s'écrit :

$$\sigma_{ij} = p\,\delta_{ij}.$$

On appelle p, la pression du fluide. On dit que ce fluide est *incompressible* si $\mathbf{div}\,\mathbf{u} = 0$ et *homogène* si ρ est constante dans tout le fluide.

Pour un fluide parfait, homogène et incompressible, les seules inconnues qui demeurent sont donc le champ des vitesses $\mathbf{u}(x,t)$ et le champ des pressions $p(x,t)$. Les relations fondamentales se réécrivent alors (après avoir choisi une unité de masse de telle sorte que $\rho = 1$) :

$$\mathbf{div}\,\mathbf{u} = 0, \qquad \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} + \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{grad}\,p = \mathbf{f},$$

où ∇ désigne la connexion canonique de $\mathbb{R}^3$. Afin de permettre éventuellement de déterminer la solution du problème, c'est à dire les fonctions $\mathbf{u}(x,t)$ et $p(x,t)$, il est nécessaire de préciser les *conditions aux limites* sur le bord $\partial\Omega_t$ du domaine Ω_t ainsi que des *conditions initiales*.

Dans le cas particulier d'un fluide qui n'est soumis à aucune action extérieure ($\mathbf{f} = 0$), en utilisant la formule vectorielle :

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \mathbf{rot}\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{grad}\,\frac{u^2}{2},$$

et en introduisant l'*enthalpie spécifique* (également dénommée *fonction de Bernoulli*) :

$$h = \frac{1}{2}\,\|u\|^2 + p,$$

on obtient donc :

$$\mathbf{div}\,\mathbf{u} = 0, \qquad \partial_t \mathbf{u} = -\,\mathbf{rot}\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} - \mathbf{grad}\,h \tag{6.6}$$

en tout point du domaine Ω.

Dans le cas d'un problème sans *frontière libre*, les configurations du fluide s'identifient avec le groupe des difféomorphismes de Ω sur lui même qui *préservent le volume*. Le champ des vitesses $\mathbf{u}$ est alors astreint à vérifier :

$$\mathbf{div}\,\mathbf{u} = 0, \qquad \text{à l'intérieur du domaine } \Omega$$

et

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad \text{sur le bord } \partial\Omega \text{ de } \Omega,$$

$\mathbf{n}$ désignant la normale sortante au bord $\partial\Omega$.

Remarque 6.16. On se retrouve donc dans une situation analogue à celle de celui d'un corps rigide non dégénéré où *l'espace des configurations est muni d'une action simplement transitive d'un groupe de Lie* : le groupe des rotations dans le cas du corps rigide, le groupe des difféomorphismes qui préservent le volume dans le cas du mouvement d'un fluide parfait incompressible sans frontière libre.

6.3.2 La reformulation d'Arnold

Soit $\mathrm{SDiff}(\Omega)$ le groupe de difféomorphismes C^∞ de Ω qui *préservent le volume*. Son algèbre de Lie, notée $\mathrm{SVect}(\Omega)$ est le sous-espaces des champs de vecteurs $\mathbf{u}$ définis sur (un voisinage) Ω et tels que :

$$\mathbf{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad \text{et} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Sur $\mathrm{Vect}(\Omega)$, on introduit la forme bilinéaire symétrique :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, d\tau.$$

Cette forme bilinéaire est définie positive et donc non dégénérée :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0,\ \forall v \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = 0.$$

Par restriction, on obtient un produit scalaire défini positif sur le sous-espace $\mathrm{SVect}(\Omega)$.

Remarque 6.17. Attention, elle n'induit pas une structure *hilbertienne* sur $\mathrm{Vect}(\Omega)$, l'espace des champs de vecteurs C^∞ sur Ω (qui n'en possède pas du reste). On parle alors de métrique riemannienne *faible*.

En translatant à droite ce produit scalaire sur tous les espaces tangents au groupe $\mathrm{SDiff}(\Omega)$, on obtient une *métrique riemannienne faible* sur $\mathrm{SDiff}(\Omega)$, invariante à droite. Celle-ci s'interprète (comme dans le cas du corps rigide) comme l'énergie cinétique.

Remarque 6.18 (Connexion riemannienne en dimension infinie). Pour une métrique riemannienne *faible* en dimension infinie, l'existence d'une connexion symétrique compatible avec la métrique n'est pas assurée automatiquement. Dans le cas d'une métrique invariante à droite sur un groupe de Lie G (de dimension infinie), l'existence de celle-ci est équivalente à l'existence de l'opérateur bilinéaire

$$B(u,v) := \mathrm{ad}_u^t\, v + \mathrm{ad}_v^t\, u, \qquad u,v \in \mathfrak{g}.$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse, l'opérateur $\mathrm{ad}_{\mathbf{u}}^t$ est défini implicitement par l'équation :

$$< \mathbf{v}, \mathrm{ad}_{\mathbf{u}}^t\, \mathbf{w} >=< \mathrm{ad}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}, \mathbf{w} >= - < [\mathbf{u},\mathbf{v}], \mathbf{w} >,$$

où $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathrm{SVect}(\Omega)$. En utilisant les formules d'analyse vectorielle :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}) = \mathbf{div}(\mathbf{v})\mathbf{u} - \mathbf{div}(\mathbf{u})\mathbf{v} - [\mathbf{u},\mathbf{v}], \tag{6.7}$$

et :

$$\mathbf{div}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{v}, \tag{6.8}$$

où $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathrm{Vect}(\Omega)$. On obtient donc :

$$- < [\mathbf{u},\mathbf{v}], \mathbf{w} >=< \mathbf{rot}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}), \mathbf{w} >=< \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}, \mathbf{rot}\,\mathbf{w} >=< \mathbf{rot}(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}), \mathbf{v} >,$$

pour tout $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathrm{SVect}(\Omega)$. On ne peut toutefois pas en conclure que

$$\mathrm{ad}_{\mathbf{u}}^t\, \mathbf{w} = \mathbf{rot}(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u})$$

car celui-ci n'est pas nécessairement dans $\mathrm{SVect}(\Omega)$.

Remarque 6.19 (Décomposition de Helmholtz). Dans $\mathrm{Vect}(\Omega)$, le sous-espace $\mathrm{SVect}(\Omega)$ des champs de vecteurs à divergence nul (et tangentiel au bord) est orthogonal au sous-espace :

$$\{\mathbf{grad}\, f;\ f \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)\,\mathrm{et}\,\partial_{\mathbf{n}} f = 0\}\,.$$

des gradients pour le produit scalaire L^2 défini par :

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\,\rangle := \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\, d\tau.$$

De plus, étant donné un champ de vecteur $\mathbf{v} \in \mathrm{Vect}(\Omega)$, on peut trouver une fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$, définie de manière unique à une constante près (voir par exemple [45]), solution du *problème de Neumann* :

$$\triangle f = \mathbf{div}\,\mathbf{v}, \qquad \partial_{\mathbf{n}} f = 0,$$

$\mathbf{n}$ désignant la normale au bord de Ω. On a donc bien une décomposition unique :

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{grad}\, f, \qquad \mathbf{div}\,\mathbf{u} = 0.$$

On en déduit donc :

$$\mathrm{ad}^t_{\mathbf{u}}\,\mathbf{w} = \mathbf{rot}\,\mathbf{w} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{grad}\,h$$

où h est la fonction, définie à une constante près, par le problème de Neumann :

$$\triangle h = -\,\mathbf{div}(\mathbf{rot}\,\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) \text{ dans } \Omega, \qquad \partial_{\mathbf{n}} h = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

L'équation d'Euler correspondante (cas d'une métrique invariante à droite) :

$$\dot{\mathbf{u}} = -\,\mathrm{ad}^t_{\mathbf{u}}\,\mathbf{u}$$

s'écrit donc :

$$\partial_t \mathbf{u} = -\,\mathbf{rot}\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} - \mathbf{grad}\,h. \tag{6.9}$$

Remarque 6.20 (Généralisation). On peut généraliser le formalisme précédent à n'importe quelle variété riemannienne compacte (avec ou sans bord). On définit l'*équation d'Euler d'un fluide incompressible idéal* sur une variété riemannienne (M, g) :

$$\partial_t \mathbf{u} = -\nabla_{\mathbf{u}}\,\mathbf{u} - \mathbf{grad}\,h, \qquad \mathbf{div}\,\mathbf{u} = 0.$$

Bien que ceci soit de peu d'intérêt pour la physique, cette formulation peut par contre permettre de mieux comprendre la structure de l'équation d'Euler d'un point de vue mathématique et la géométrie des groupes de difféomorphismes (voir [2]).

Remarque 6.21 (Solutions stationnaires). Les solutions stationnaires de l'équation d'Euler sont les champs $\mathbf{u}$ qui vérifient :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{rot}\,\mathbf{u} = \mathbf{grad}\,h.$$

On en déduit deux propriétés importantes de flots stationnaires :

— h est une intégrale première commune des champs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{rot}\,\mathbf{u}$.

— les champs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{rot}\,\mathbf{u}$ (et donc également leur flot) commutent : $[\mathbf{u}, \mathbf{rot}\,\mathbf{u}] = 0$.

On peut en déduire une classification topologique des flots stationnaires de dimension 3 (voir [2]).

6.3.3 L'équation de Helmholtz et l'isovorticité

Dans cette section, on va interpréter le premier théorème d'Euler, autrement dit la conservation du moment m_L, dans le cas de l'hydrodynamique. Rappelons, à ce sujet, que la conservation du moment m_R, dans le cas du corps rigide, correspond à la conservation du moment cinétique.

Formellement, le dual de $\mathrm{SVect}(\Omega)$ est un espace de *distributions*. Une des propriétés utilisée au chapitre 3 concernant l'opérateur d'inertie $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ était son inversibilité. Dans le cas présent (produit scalaire faible) on peut seulement dire que A est injectif. On va donc utiliser non pas le dual topologique tout entier de $\mathrm{SVect}(\Omega)$ mais seulement le sous-espace de ce dual correspondant à l'image de A. Celui-ci est constitué par les distributions m sur $\mathrm{SVect}(\Omega)$ qui s'écrivent :

$$m(\mathbf{v}) = \int_\Omega \alpha(\mathbf{v})\, d\tau$$

où $\alpha \in \Omega^1(\Omega)$. Attention, m ne détermine pas α de manière unique. En effet, on peut ajouter une différentielle totale, autrement dit remplacer α par $\alpha + df$, sans changer la valeur de l'intégrale et donc m. C'est la seule liberté possible dans le choix de α (voir [2]). On peut donc identifier l'espace de ces distributions particulières avec :

$$\Omega^1(\Omega)/d\Omega^0(\Omega)$$

qu'on notera $\mathrm{SVect}^*(\Omega)$ et qu'appellera le *dual régulier* de $\mathrm{SVect}(\Omega)$.

Remarque 6.22. Dans le cas particulier où $H^1(\Omega, \mathbb{R}) = 0$ (par exemple si Ω est un domaine convexe), alors l'application

$$d : \Omega^1(\Omega)/d\Omega^0(\Omega) \to d\Omega^1(\Omega)$$

est un isomorphisme, ce qui permet d'identifier $\mathrm{SVect}^*(\Omega)$ avec $d\Omega^1(\Omega)$.

Supposons à présent que $H^1(\Omega, \mathbb{R}) = 0$. On peut donc identifier $\mathrm{SVect}^*(\Omega)$ avec $d\Omega^1(\Omega)$, l'espace des 2-formes exactes $d\alpha$, que l'on peut lui-même identifier avec l'*espace des rotationnels* ω en posant $d\alpha = i_\omega d\tau$. Avec ces identifications, le crochet de dualité est défini par :

$$(\mathbf{rot}\, w, v) := \int_\Omega w \cdot v \, d\tau.$$

et l'opérateur d'inertie A s'écrit :

$$m = A\mathbf{u} = \mathbf{rot}\, \mathbf{u}.$$

Lemme 6.23. *Les actions coadjointes de* $\mathrm{SDiff}(\Omega)$ *et* $\mathrm{SVect}(\Omega)$ *sur l'espace des rotationnels* $\mathrm{SVect}^*(\Omega)$ *s'écrivent respectivement :*

$$\mathrm{Ad}^*_\varphi\, \omega = \varphi^*\omega, \qquad \mathrm{ad}^*_{\mathbf{u}}\, \omega = \mathscr{L}_{\mathbf{u}}\omega, \tag{6.10}$$

où $\varphi \in \mathrm{SDiff}(\Omega)$, $\mathbf{u} \in \mathrm{SVect}(\Omega)$ *et* $\omega \in \mathrm{SVect}^*(\Omega)$ *est un rotationnel.*

Démonstration. Soit $m \in \mathrm{SVect}^*(\Omega)$ représenté par la 1-forme α :

$$m(\mathbf{v}) = \int_\Omega \alpha(\mathbf{v})\, d\tau, \qquad \mathbf{v} \in \mathrm{SVect}(\Omega).$$

(1) On a :

$$\mathrm{Ad}^*_\varphi\, m\,(\mathbf{v}) = m(\varphi_*\mathbf{v}) = \int_\Omega \alpha(\varphi_*\mathbf{v})\, d\tau = \int_\Omega (\varphi^*\alpha)(\mathbf{v})\, d\tau.$$

Désignons par ω le rotationnel correspondant à m et $\tilde{\omega}$ celui correspondant à $\mathrm{Ad}^*_\varphi\, m$. On a donc :

$$i_{\tilde{\omega}} d\tau = d\varphi^*\alpha = \varphi^* d\alpha = \varphi^*(i_\omega d\tau) = i_{\varphi^*\omega} d\tau,$$

ce qui nous donne : $\tilde{\omega} = \varphi^*\omega$.

(2) On a :

$$\mathrm{ad}^*_{\mathbf{u}}\, m\,(\mathbf{v}) = m(\mathrm{ad}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}) = -\int_\Omega \alpha([\mathbf{u}, \mathbf{v}])\, d\tau = -\int_\Omega \alpha(\mathscr{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})\, d\tau = \int_\Omega (\mathscr{L}_{\mathbf{u}}\alpha)(\mathbf{v})\, d\tau.$$

Désignons par ω le rotationnel correspondant à m et $\tilde{\omega}$ celui correspondant à $\mathrm{ad}^*_{\mathbf{u}}\, m$. On a donc :

$$i_{\tilde{\omega}} d\tau = d(\mathscr{L}_{\mathbf{u}}\alpha) = \mathscr{L}_{\mathbf{u}} d\alpha = \mathscr{L}_{\mathbf{u}}(i_\omega d\tau) = i_{\mathscr{L}_{\mathbf{u}}\omega} d\tau,$$

ce qui nous donne : $\tilde{\omega} = \mathscr{L}_{\mathbf{u}}\omega$. □

La conservation du moment m_L se traduit donc ici par la loi de conservation :

$$\omega(t) = \varphi^t_*\omega(0), \qquad \omega = \mathbf{rot}\, \mathbf{u} \tag{6.11}$$

relation qui traduit le fait, bien connu en mécanique des fluides, que *la vorticité*, c'est à dire le vecteur $\omega = \mathbf{rot}\, \mathbf{u}$ est transporté le long du flot. On parle de « gel du rotationnel » ou « d'*isovorticité* ». La version infinitésimale de cette équation s'écrit :

$$\partial_t\, \mathbf{rot}\, \mathbf{u} = -\mathscr{L}_u\, \mathbf{rot}\, \mathbf{u}. \tag{6.12}$$

C'est l'équation de *Helmholtz*.

6.4 Exercices

Exercice 6.1 (Prolongement des isométries affines)**.** Soit Σ une partie non vide d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}_n$ et $f : \Sigma \to \mathscr{E}_n$ une isométrie. Montrer que f s'étend de manière unique en une isométrie affine $\bar{f} : \mathrm{Aff}(\Sigma) \to \mathscr{E}_n$.

Exercice 6.2. Montrer qu'un mouvement $t \mapsto \varphi^t$ est un mouvement de corps rigide, si et seulement si, à chaque instant t, le champs de ses vitesses est *équiprojectif*, c'est à dire qu'il vérifie :

$$(\mathbf{V}_t(M) - \mathbf{V}_t(N)) \cdot \overrightarrow{MN} = 0.$$

Exercice 6.3 (Paire de Lax)**.** Soit X un champ de vecteur sur une variété M. On suppose qu'il existe une application $L : M \to \mathfrak{gl}(p, \mathbb{R})$ tel que :

$$\frac{d}{dt} L(x(t)) = [L(x(t), B(t)\,], \qquad B(t) \in \mathfrak{gl}(p, \mathbb{R}),$$

si $x(t)$ est une courbe intégrale de X.

1. Montrer que les valeurs propres de $L(x)$ sont des intégrales premières du flot de X.
2. Appliquer la construction à l'équation d'Arnold-Euler sur $\mathrm{O}(n)$ en prenant :

$$L : \mathfrak{o}(n) \to \mathfrak{o}(n)^*, \qquad u \mapsto m := Au$$

(on identifiera $\mathfrak{o}(n)$ et $\mathfrak{o}(n)^*$ grâce au produit scalaire $\mathrm{tr}(uv^t)$).

Exercice 6.4. Soit G un groupe de Lie et ∇ une connexion affine invariante à gauche sur G. Soit ω la 1-forme de Maurer-Cartan (invariante à gauche). Alors ∇ s'écrit :

$$\nabla_X Y = \nabla^0_X Y + B(X, Y),$$

où B est un champ de tenseur invariant à gauche. Montrer que :

$$(\nabla_X \omega)(Y) = -\frac{1}{2}\,[\omega(X), \omega(Y)\,] - B(\omega(X), \omega(Y)).$$

Exercice 6.5. Soit $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$ une p-forme et $\mathbf{u} \in \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^n)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, tous deux dépendant d'un paramètre t. Soit Δ une sous-variété de dimension p et Δ_t son image par le flot φ^t de $\mathbf{u}$. Posons :

$$I(t) = \int_{\Delta_t} \omega$$

Montrer que :

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Delta_t} (L_{\mathbf{u}}\omega + \partial_t \omega).$$

Exercice 6.6. Le but de cet exercice est de vérifier directement que l'espace tangent à $\mathrm{SDiff}(\Omega)$ en l'identité, défini par les équations :

$$\mathbf{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } \omega, \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur le bord } \partial\Omega$$

est bien une algèbre de Lie.

1. Montrer que si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{SVect}(\Omega)$, alors :

$$\mathbf{div}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0, \quad \text{dans } \omega$$

2. Montrer que si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{SVect}(\Omega)$, alors :

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur le bord } \partial\Omega$$

[Indication : on pourra considérer le flot de $\mathbf{u}$.]

Chapitre 7

Un principe de covariance général d'après J. M. Souriau

Ce chapitre est une introduction à l'équation universelle formulée par Jean-Marie Souriau

$$TD = 0,$$

qui représente une alternative aux principe des puissances virtuelles. On peut, à partir de celle-ci, dériver la plupart des équations fondamentales de la mécanique, ce qu'on illustrera à travers de nombreux exemples. Si cette formulation est un principe en mécanique classique, il acquiert le statut de théorème dans le cadre de la relativité générale, où il apparaît comme un simple corollaire du principe de relativité général. Ce chapitre reprend essentiellement l'article original de Souriau [52].

7.1 Statique

Dans la théorie classique des milieux continus, les tensions internes sont décrites par σ, le *tenseur des contraintes* caractérisé par des composantes σ^{jk} supposées symétriques : $\sigma^{jk} = T\sigma kj$. L'équilibre du milieu s'exprime par les trois équations :

$$(\mathbf{div}\,\sigma)^k = \partial_j \sigma^{jk} = 0. \tag{7.1}$$

7.1.1 Matière distribuée

Les coques, les fils, nous donnent l'image de milieux condensés sur une *sous-variété* (surface ou courbe). Pour étendre simplement la description précédente, une possibilité est de traiter l'objet mathématique σ comme une *distribution*, i.e. une fonctionnelle linéaire (continue) agissant sur une *variable d'essai* G, un champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques et à support compact. Dans le cas d'un milieu tridimensionnel, on définira cette fonctionnelle T par la formule :

$$TG = \iiint_{\mathbb{R}^3} \sigma^{jk} G_{jk}\,\omega,$$

où ω est la forme volume canonique sur $\mathbb{R}^3$. Réécrivons alors les équations d'équilibre (7.1) sous la forme dite *faible*, c'est à dire :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{div}\,\sigma)^k Z_k\,\omega = 0, \qquad \forall Z \in \Omega^1_c(\mathbb{R}^3).$$

Une intégration par partie nous donne (le vérifier !)

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{div}\,\sigma)^k Z_k\,\omega = -\frac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3} \sigma^{jk}(\partial_j Z_k + \partial_k Z_j)\,\omega.$$

En introduisant alors l'opérateur différentiel $D : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \to S^2(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$(DZ)_{jk} = \partial_j Z_k + \partial_k Z_j,$$

les équations d'équilibres se réécrivent donc :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \sigma^{jk} (DZ)_{jk}\, \omega = 0, \qquad \forall Z \in \Omega^1_c(\mathbb{R}^3),$$

ou encore :

$$T(DZ) = 0, \qquad \forall Z \in \Omega^1_c(\mathbb{R}^3),$$

et plus brièvement :

$$TD = 0.$$

Remarque 7.1. La *formulation faible* $TD = 0$ est en fait un peu plus complète que l'équation $\mathbf{div}\, \sigma = 0$. En effet, dans le cas où le milieu possède une surface libre, elle impose aussi sur cette surface la condition classique :

$$\sigma^{jk} n_k = 0,$$

où n_k désigne la normale à la surface (le vérifier !).

Remarque 7.2. Par rapport au « principe des puissances virtuelles » on notera les différences suivantes :

— Z est un *déplacement de l'espace* et non un déplacement du milieu ;
— Z est un vecteur *covariant* et non contravariant.

7.1.2 Fils

Considérons à présent le cas d'un fil où la matière est distribuée sur une courbe C - décrite au moyen d'un paramètre arbitraire s. Cherchons *a priori* la distribution T de la matière sous la forme :

$$TG = \int_C T^{jk} G_{jk}\, ds,$$

où les quantités T^{jk} sont des fonctions C^∞ définies le long de la courbe C.

On établit alors le résultat suivant, dont la preuve est proposée en exercice (7.3).

Proposition 7.3. *La condition d'équilibre $TD = 0$ implique les conséquences suivantes :*

— *il existe une fonction τ de s telle que*

$$T^{jk}(s) = \tau(s) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \tag{7.2}$$

— *le vecteur P défini par :*

$$P^j = \tau \frac{dx^j}{ds} \tag{7.3}$$

est constant sur la courbe ; ce qui exige que cette courbe soit une droite, à moins que τ ne soit nul.

Remarque 7.4. On obtient bien la description d'un fil sous tension τ et on voit apparaître une grandeur *conservée*, le vecteur P. Ce vecteur est invariant par changement de variable croissant sur le paramètre s ; mais P change de signe si on inverse le sens de parcours. Ce qui donne un statut de pseudo-scalaire à la *tension* du fil.

7.1.3 Membranes

La même méthode permet de distribuer la matière sur une surface. Le choix le plus simple pour la distribution T est :

$$TG = \iint_\Sigma T^{jk} G_{jk}\, ds^1 ds^2$$

en choisissant des coordonnées s^1, s^2 sur cette surface Σ. On établit alors le résultat suivant, dont la preuve est proposée en exercice (7.4).

Proposition 7.5. *La condition d'équilibre $TD = 0$ implique les conséquences suivantes :*

— *il existe des fonctions $\tau^{\alpha\beta}$ de s^1, s^2 $(\alpha, \beta = 1, 2)$ avec $\tau^{\alpha\beta} = \tau^{\beta\alpha}$ telles que :*

$$T^{jk}(s^1, s^2) = \tau^{\alpha\beta}(s^1, s^2)\, \frac{\partial x^j}{\partial s^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial s^\beta},$$

— *ces variables vérifient les trois équations suivantes :*

$$\frac{\partial}{\partial s^\alpha}\left(\tau^{\alpha\beta} \frac{\partial x^j}{\partial s^\beta}\right) = 0.$$

7.1.4 Coexistence, homogénéisation et assemblage

L'équation d'équilibre $TD = 0$ est linéaire et continue en T : on peut ajouter des solutions et en prendre des limites. Par exemple, on peut disposer dans un plan une infinité de fils parallèles équidistants, caractérisés chacun par une distribution rectiligne T_n. Alors la distribution

$$T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n$$

existe, elle décrit la *coexistence* de tous ces fils, et elle est solution de l'équation d'équilibre.

En resserrant les fils et en diminuant proportionnellement leur tension, T aura une limite (parce que $T_n G$ aura une limite pour chaque choix de G), qui décrira une membrane plane tendue (dans le sens des fils) : procédure d'*homogénéisation*.

On pourra donc être amené à écrire cette équation d'équilibre $TD = 0$ dans des situations limites où le *support* de la distribution T n'est plus nécessairement une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Il est donc utile de définir ce qu'est le support d'un tenseur-distribution T en général.

Définition 7.6 (Support d'un tenseur-distribution)**.** Le *support* de T qu'on notera Σ est défini de la façon suivante. Soit U un ouvert de M. On dit que T s'annule sur U si $TG = 0$ pour tout champ de tenseurs G dont le support appartient à U. Notons Ω le plus grand ouvert vérifiant cette propriété (i.e. l'union des tous les ouverts qui la vérifient). Alors on peut montrer que T s'annule également sur Ω. Nous poserons $\Sigma = Supp(T) = M \setminus \Omega$.

Une autre pratique consiste à ajouter des distributions qui ne sont pas individuellement en équilibre, mais dont la somme l'est : les *assemblages*. Par exemple :

1. Un assemblage de fils concourants. Dans ce cas, l'équation $TD = 0$ implique une nouvelle condition d'équilibre en chaque point de concours :

$$\sum P_n = 0,$$

   la *composition des forces* est incluse dans la condition globale.

2. Un assemblage à trois composantes : une membrane qui sépare un milieu en deux régions (l'intérieur et l'extérieur), par exemple une bulle de savon. La condition $TD = 0$ équilibre la tension de la membrane avec les contraintes des deux milieux.

7.1.5 Second gradient

En prenant une distribution T qui dépend des dérivées secondes du covecteur test Z et donc des dérivée premières de G, on peut décrire des propriétés plus fines de la matière comme les *milieux de second gradient*. On va donc considérer un tenseur-distribution T, supporté par une courbe C qui s'écrit :

$$TG = \int_C \left[A^{jk}G_{jk} + B^{jkl}\partial_l G_{jk}\right] ds,$$

modèle qui conduit à la description d'un fil de torsion. On établit alors le résultat suivant, dont la preuve est proposée en exercice (7.5).

Proposition 7.7. *La condition d'équilibre $TD = 0$ implique les conséquences suivantes :*

— *Il existe des fonctions P^j, S^{kl} de s (avec $S^{kl} = -S^{lk}$) telles que*

$$TG = \int \frac{dx^j}{ds}\left[P^k G_{jk} + S^{kl}\partial_l G_{jk}\right] ds \tag{7.4a}$$

— *P^j, S^{kl} vérifient les 6 équations de conservation suivantes :*

$$\begin{aligned} &P^j = C^{te} \\ &S^{jk} + P^j x^k - P^k x^j = C^{te} \end{aligned} \tag{7.4b}$$

Remarque 7.8. Il est également possible de faire de faire le choix d'un tenseur-distribution T qui prenne en compte les dérivées seconde de G, ce qui conduit à une intégrale de *troisième gradient*.

7.1.6 Coques

La même méthode, appliquée sur une surface, permet de décrire une *coque* par une intégrale du second gradient :

$$TG = \iint_\Sigma \left[A^{jk}G_{jk} + B^{jkl}\partial_l G_{jk}\right] ds^1 ds^2.$$

On établit alors le résultat suivant, dont la preuve est proposée en exercice (7.6).

Proposition 7.9. *La condition d'équilibre montre l'existence de nouvelles variables $P^{\alpha,k}$ et $S^{\alpha,kl}$ ($\alpha = 1, 2$) avec $S^{\alpha,lk} = -S^{\alpha,kl}$, telles que :*

$$TG = \iint \frac{\partial x^j}{\partial s^\alpha}\left[P^{\alpha,\,k}G_{jk} + S^{\alpha,\,kl}\partial_l G_{jk}\right] ds^1 ds^2,$$

et leur impose les équations

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s^\alpha}\left[P^{\alpha,\,k}\right] = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial s^\alpha}\left[S^{\alpha,\,kl} + P^{\alpha,\,k}x^l - P^{\alpha,\,l}x^k\right] = 0. \end{aligned}$$

Remarque 7.10. Attention ! Les douze nouvelles variables ne sont pas complètement déterminées par la distribution T et par les coordonnées. On peut lever l'indétermination en choisissant sur la surface un champ de vecteurs transversal N (par exemple celui qui a servi à balayer le volume de la coque) et en imposant les deux conditions supplémentaires :

$$\varepsilon_{jkl}\, N^j S^{\alpha,\,kl} = 0\,;$$

tous comptes faits, dix variables pour décrire en chaque point l'état de tension d'une coque en équilibre.

7.2 Dynamique

Pour passer à la dynamique, il faut tenir compte du temps et faire intervenir la variable t. On la traitera comme une quatrième coordonnée x^4. On va donc se placer dans $\mathbb{R}^4$. Les nouveaux indices (λ, μ, ...) prendront les valeurs $1, 2, 3, 4$ et l'opération D deviendra :

$$(DZ)_{\lambda\mu} = \partial_\lambda Z_\mu + \partial_\mu Z_\lambda$$

L'équation

$$TD = 0$$

passera ainsi du statut d'équation d'équilibre à celui *d'équation du mouvement*. Il faut également décrire la matière par une distribution *quadri-dimensionnelle* T.

7.2.1 Matière libre

Dans le cas d'un milieu continu, T sera donné par une intégrale quadruple

$$TG = \int_{\mathbb{R}^4} T^{\lambda\mu} G_{\lambda\mu}\, \omega$$

où ω est la forme volume canonique sur $\mathbb{R}^4$. Les $T^{\lambda\mu}$ qui peuvent se découper en

$$\begin{pmatrix} T^{jk} & T^{j4} \\ T^{4k} & T^{44} \end{pmatrix}$$

demandent une nouvelle interprétation. L'interprétation classique s'obtient en introduisant 10 nouvelles variables ρ, V^j, σ^{jk} (en bijection avec les $T^{\lambda\mu}$ si $T^{44} \neq 0$) qui mettent le tableau des $T^{\mu\nu}$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma^{jk} + \rho V^j V^k & \rho V^j \\ \rho V^k & \rho \end{pmatrix}$$

Alors l'équation $TD = 0$ devient :

$$\begin{aligned} &\partial_j \left(\rho V^j\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \\ &\partial_j \sigma^{jk} + \rho \left(V^j \partial_j V^k + \frac{\partial V^k}{\partial t} \right) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

On reconnaît les *équations d'Euler* des milieux continus où ρ désigne la *masse spécifique*, V^k la *vitesse* du milieu et σ^{jk} son tenseur des contraintes. La première équation, dite *équation de continuité* s'interprète comme conservation de la masse. Les trois dernières équations s'interprètent comme la loi fondamentale de la dynamique newtonienne – parce que

$$A^k = \frac{\partial V^k}{\partial t} + V^j \partial_j V^k$$

est l'accélération du milieu et

$$F^k = -\partial_j \sigma^{jk}$$

est la *force spécifique* à laquelle est soumis le milieu du fait de sa contrainte. Bien entendu ces équations doivent être complétées par les diverses *lois de comportement* que proposent la mécanique des fluides, la théorie de l'élasticité et de la plasticité, la géophysique, la chimie, etc. Par exemple, le cas des fluides parfaits incompressibles correspond à $\rho = Cste$ et $\sigma^{jk} = p\,\delta^{jk}$ (où p est la pression).

Remarque 7.11 (Dynamique de la matière distribuée). On peut aussi étudier les répartitions de matière sur des sous-variétés de l'espace-temps dont la dimension vaudra $d = 1, 2, 3$:

— $d = 3$: coques (ou membranes) en mouvement ;
— $d = 2$: cordes vibrantes ;
— $d = 1$: mouvements des particules.

Dans tous ces cas, les méthodes développées en statique pour interpréter l'équation universelle $TD = 0$ peuvent se transposer.

Exemple 7.12. Le cas du *mouvement d'une particule* est l'analogue quadri-dimensionnel de l'équilibre d'un fil. L'expression de la distribution de matière sur la ligne d'univers Γ de la particule se transpose en :

$$TG = \int_\Gamma T^{\lambda\mu} G_{\lambda\mu}\, ds$$

où on peut facultativement choisir le paramètre $s = t$. Il apparaît un quadri-vecteur conservé P^λ tangent à la ligne d'univers, ce qui implique que le mouvement soit rectiligne et uniforme (principe de Galilée).

Remarque 7.13. La règle sur l'équilibre des fils concourants, transposée, produit les lois des collisions et des désintégrations ; lois de conservation de la somme des P^4 (qui s'interprètent comme *masses*) et des P^j (impulsions).

Un modèle de particule à spin

La transposition quadri-dimensionnelle du modèle des fils de torsions conduit à une description classique, *non quantique*, des *particules à spin*. Cette notion a d'abord été introduite pour l'électron, par Uhlenbeck et Goudsmit en 1925, afin d'expliquer certaines particularités des spectres atomiques, notamment l'apparition de raies supplémentaires en présence de champ magnétiques. Une particule chargée possède un moment magnétique colinéaire à son spin, ce qui confère à ce dernier un rôle dynamique dans les phénomènes électromagnétiques, comme l'effet Zeeman. Le spin est donc une propriété de la matière au même titre que la masse.

Cependant, l'analogie entre le spin et le moment cinétique propre utilisé en mécanique du solide est trompeuse. C'est pourquoi on a considéré longtemps le spin comme un concept essentiellement quantique. Ce n'est qu'en 1966 que Souriau et Bacry ont proposé, indépendamment, des modèles classiques de particules à spin.

Considérons donc un tenseur distribution T, supportée par une courbe Γ (non compacte sans bord) mais donnée cette fois par une intégrale de second gradient :

$$TG = \int_\Gamma (T^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + S^{\mu\nu\rho} \partial_\rho G_{\mu\nu})\, ds.$$

où

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}, \qquad S^{\mu\nu\rho} = S^{\nu\mu\rho}.$$

L'équation $TD = 0$ conduit à l'existence, le long de la courbe Σ, d'un champ de vecteur P et d'un champ de tenseurs S, 2-fois contravariants antisymétrique tel que :

$$TG = \int_\Gamma (\dot{x}^\mu P^\nu G_{\mu\nu} + \dot{x}^\mu S^{\nu\rho} \partial_\rho G_{\mu\nu})\, ds,$$

où

$$P^\mu = Cste, \tag{7.5}$$

$$S^{\mu\nu} + P^\mu x^\nu - P^\nu x^\mu = S_0^{\mu\nu} = Cste. \tag{7.6}$$

Ce système contient 10 équations pour les 14 fonctions inconnues $x^\mu, P^\mu, S^{\mu\nu}$. Il est donc sous-déterminé. Afin de résoudre complètement le problème, il faut ajouter une *équation d'état* (équivalent pour le mécanicien d'une loi de comportement).

7.2.2 Lois de conservation

Considérons une distribution de matière T dans $\mathbb{R}^4$, occupant à chaque instant t, une région compacte de l'espace. Soit Z une solution de l'équation $DZ = 0$ et u, une fonction du temps, nulle pour $t < t_0$, égale à 1 pour $t > t_1$. Le tenseur $D[uZ]$ est à support compact sur le support de T. On peut donc calculer $TD[uZ]$:

$$\begin{aligned} TD[uZ] &= \iiiint_\Sigma T^{\mu\nu}\partial_\mu(uZ_\nu)\, dx^1dx^2dx^3dx^4 \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \dot{u}\, J(t,Z)\, dt, \end{aligned}$$

où

$$J(t,Z) = \iiint_{\Sigma_t} T^{4\nu} Z_\nu\, dx^1dx^2dx^3,$$

et Σ_t désigne l'intersection de Σ avec l'hyperplan $x_4 = t$. Si v est une fonction du temps nulle pour $t < t_0$ et $t > t_1$ alors vZ est à support compact sur le support de T. Par conséquent :

$$TD[vZ] = 0$$

et donc

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{v}\, J(t,Z)\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} v\, \dot{J}(t,Z)\, dt = 0$$

ce qui entraîne que $J(t,Z)$ est indépendant de t. Une solution de $DZ = 0$ (voir exercice 7.7) s'écrit :

$$Z_\lambda = B_{\lambda\mu}x^\mu + A_\lambda,$$

où $B_{\mu\lambda} = -B_{\lambda\mu}$ et A_λ sont des constantes. La fonction $J(t,Z)$ dépend linéairement des coefficients A_λ, $B_{\lambda\mu}$; on peut donc l'écrire :

$$A_\lambda P^\lambda + \frac{1}{2}B_{\lambda\mu}S^{\lambda\mu},$$

les dix grandeurs P^λ et $S^{\lambda\mu} = -S^{\mu\lambda}$ étant les composantes d'un objet conservé, le *moment*. Le libre choix des dates permet de calculer ce moment à une date arbitraire. Sur l'exemple des équations d'Euler d'un milieu continu quelconque, le calcul de ces grandeurs fournit le résultat suivant :

$$\begin{aligned} P^4 &= \iiint_{\Sigma_t} \rho\, dx^1dx^2dx^3, \\ P^j &= \iiint_{\Sigma_t} \rho V^j\, dx^1dx^2dx^3, \\ S^{4k} &= \iiint_{\Sigma_t} \rho\left[x^k - V^k t\right]\, dx^1dx^2dx^3, \\ S^{jk} &= \iiint_{\Sigma_t} \rho\left[V^j x^k - V^k x^j\right]\, dx^1dx^2dx^3, \end{aligned} \tag{7.7}$$

où la valeur des intégrales est indépendante de la date t choisie. Ainsi l'interprétation du moment est claire : $P^4 = m$ est la *masse*, P^j l'*impulsion*, S^{jk} le moment *angulaire*, S^{4k} le *passage*, une grandeur conservée qui caractérise le mouvement du *centre de masse* X : $mX^k = S^{4k} + P^k t$.

Remarque 7.14. Une absence tout à fait remarquable dans cette liste : on n'y rencontre pas l'*énergie*. Parce que la présente description de la mécanique concerne aussi bien les phénomènes *dissipatifs* que les autres. Le bilan d'énergie ne pourrait donc y figurer qu'en termes thermodynamiques, et devrait s'accompagner d'autres grandeurs, telles que l'entropie, la chaleur, la

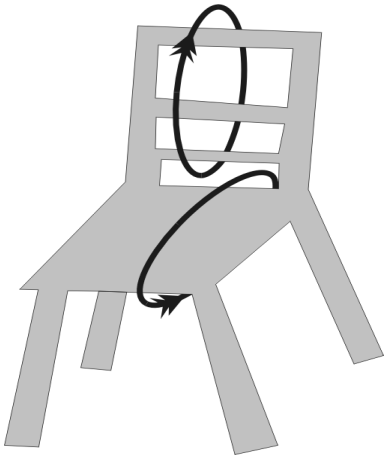


FIGURE 7.1 – La chaise de Souriau.

température, etc. L'énergie est donc reléguée ici au rang des variables concernant les lois de comportement. Par contre, les grandeurs figurant dans le *moment* ci-dessus restent pertinentes dans ce genre de phénomènes.

La procédure présentée ici pour construire le « moment » s'applique à d'autres situations, notamment la statique ; on doit noter que ces procédures utilisent essentiellement les propriétés *topologiques* du vide extérieur au support de la distribution T, que l'on notera Σ (le body) et que l'on supposera compact. Soit α une 1-forme ; on peut calculer $T(\alpha \odot Z)$ où Z désigne une solution de $DZ = 0$. On remarque alors que si β est une autre 1-forme telle que $\alpha - \beta = df$ où f est une fonction (que l'on pourra supposer à support compact puisque seul compte la valeur de $\alpha - \beta$ sur Σ), alors :

$$T[(\alpha - \beta) \odot Z] = TD(fZ) = 0.$$

Ainsi l'application $Z \mapsto T(\alpha \odot Z)$ induit une forme linéaire sur l'espace des solutions de $DZ = 0$ qui ne dépend que d'une classe de cohomologie de α à préciser en lien sans doute avec la dualité d'Alexander). C'est cette application que nous avons baptisée ici le « moment ».

Sur la Figure 7.1, on a représenté un problème de statique. L'intégrale de $T^{ij}Z_j$ sur l'intersection de Σ avec un disque bordé par une des courbes est indépendant de la classe d'homologie de cette courbe dans le complémentaire de Σ (comparer avec la 2-homologie évoquée implicitement dans le cas de la dynamique). Cette intégrale représente la résultante des efforts qui s'exercent sur la section orientée (par le sens de la courbe) découpée par un disque bordée par cette courbe. Cette résultante est un objet à 6 composantes (10 dans le cas de la dynamique). Il s'agit d'un *torseur* de $\mathbb{R}^3$ où champ équiprojectif (qui est une notion affine). L'identification de ce torseur à un moment du groupe d'Euclide n'apparaît a priori que comme une coïncidence.

7.3 Forces extérieures

Dans les exemples traités jusqu'ici, les seuls effets subis par les divers corps étaient les efforts intérieurs. Comment décrire les autres actions extérieures subies par la matière, comme la gravitation ? c'est l'objet de cette section.

7.3.1 La chute des corps

Pour décrire complètement la chute d'un corps, la connaissance de D ne suffit pas. Il faut un autre objet pour décrire ce corps, *ce qui pèse* : on l'écrira T. Dans le cas d'un « point matériel » en chute libre, T décrit à la fois la *ligne d'Univers* du corps qui tombe et sa *masse* :

c'est un tenseur-distribution. la loi de Galilée s'exprime alors par une simple équation, invariante par le groupe souple

$$TD = 0,$$

reliant T à la gravitation D. Cette dernière expression n'étant que la forme condensée de l'équation plus explicite

$$T(DZ) = 0, \quad \forall Z \in \Omega^1_c(M), \tag{7.8}$$

$\Omega^1_c(M)$ désignant l'espace des 1-formes à support compact.

Pour rendre compte de l'expérience de Galilée, nous choisissons les coordonnées usuelles

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = t$$

avec la convention que les lettres latines i, j désignent un indice quelconque $1, 2, 3$ alors qu'une lettre grecque α, β désigne un indice quelconque $1, 2, 3, 4$. Dans ce système de coordonnées, l'opérateur D s'écrit :

$$DZ_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu + \partial_\nu Z_\mu + D^\rho_{\mu\nu} Z_\rho,$$

où $D^\rho_{\mu\nu} = -2\Gamma^\rho_{\mu\nu}$. On définit la gravité galiléenne en posant $D^j_{44} = 2g^j$, les autres composantes étant nulles.

Le point matériel est représenté par une forme linéaire sur les champs de tenseurs deux fois covariants symétriques à support compact (un tenseur-distribution)

$$T : \Gamma_c(T^*M \odot T^*M) \to \mathbb{R},$$

dont le support Σ est sous-variété connexe C^∞ de dimension 1 (non compacte et sans bord) et qui s'écrit, après le choix d'une paramétrisation quelconque $x(s)$ de cette courbe :

$$TG = \int_a^b T^{\mu\nu} G_{\mu\nu}\, ds\,, \tag{7.9}$$

où $T^{\mu\nu}$ sont les composantes d'un champ de tenseurs C^∞, 2 fois contravariant symétrique le long de la courbe Σ.

Lemme 7.15. *Si $TD = 0$, alors il existe une fonction φ de classe C^∞ sur Σ telle que*

$$TG = \int_a^b \varphi\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu G_{\mu\nu}\, ds$$

Démonstration. L'équation $TD = 0$ nous donne

$$\int_a^b T^{\mu\nu} \left(2\partial_\mu Z_\nu + D^\rho_{\mu\nu} Z_\rho\right)\, ds = 0,$$

pour tout $Z \in \Omega^1_c(M)$. Soit u, une fonction quelconque de classe C^∞, *nulle sur la courbe* Σ. En prenant comme fonction test uZ, on obtient

$$\int_a^b T^{\mu\nu} (\partial_\mu u) Z_\nu\, ds = 0,$$

pour toute fonction $u \in C^\infty(M)$ nulle sur la courbe Σ et tout $Z \in \Omega^1_c(M)$. Mais ceci entraîne

$$T^{\mu\nu} \partial_\mu u = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, 4\,,$$

pour toute fonction $u \in C^\infty(M)$ nulle sur la courbe Σ. Remarquons que lorsque u parcours l'ensemble des fonctions C^∞ nulle sur Σ, le covecteur de composantes $\partial_\mu u(x(s))$ décrit l'ensemble des formes linéaires nulles sur $\dot{x}(s)$. On applique alors le résultat de l'exercice d'algèbre linéaire qui suit, au tenseur T et au vecteur $\dot{x}$, en chaque point de la courbe Σ. On en déduit l'existence d'une fonction $\varphi(s)$ telle que

$$T^{\mu\nu}(s) = \varphi(s) \dot{x^\mu} \dot{x^\nu}.$$

□

En écrivant à nouveau l'équation $TDZ = 0$, pour un covecteur test Z nul aux extrémités a et b de la paramétrisation, on obtient, après une intégration par partie, un système de quatre équations

$$-2\frac{d}{ds}\left(\varphi\,\dot{x^\rho}\right) + \varphi\, D^\rho_{\mu\nu}\dot{x^\mu}\dot{x^\nu} = 0, \quad \rho = 1, 2, 3, 4. \tag{7.10}$$

La gravitation galiléenne impose alors

$$\frac{d}{ds}\left(\varphi\,\dot{x^4}\right) = 0,$$

autrement dit, $\varphi\,\dot{x}^4 = m = Cste$. Il faut donc envisager deux cas.

- Si $m \neq 0$, il est possible de choisir comme paramétrage de notre courbe $s = t$ et dans ce cas on a $\varphi(t) = m$. La courbe Σ ainsi paramétrée est alors une géodésique de la connexion. Σ représente la ligne d'univers d'un « point matériel » de masse m. En explicitant les trois premières équations du système (7.10), on retrouve les équations familières

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} = g^j.$$

- Si $m = 0$, et en supposant que φ n'est pas identiquement nulle (sinon il n'y a rien à décrire), alors $dt/ds = 0$. Autrement dit $t = Cste$. La gravitation galiléenne nous donne dans ce cas

$$\varphi(s)\,\dot{x}^j = a^j = Cste,$$

qui est l'équation d'une droite. Ce cas correspond à la description des rayons lumineux selon Descartes (vitesse de la lumière infinie).

Remarque 7.16. Plus généralement, l'équation

$$\frac{d}{ds}\left(\varphi\dot{x}_\rho\right) = \varphi D^\rho_{\mu\nu}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu$$

permet d'écrire la chute des corps selon Galilée avec des coordonnées quelconques, dans un système de coordonnées « tournantes » comme les coordonnées terrestres par exemple.

Remarque 7.17. L'expérience de Galilée est plus subtile qu'elle en a l'air. Sur la Lune, en l'absence d'atmosphère, l'expérience serait simple mais à cause de l'atmosphère terrestre, Galilée a du recourir à quelques artifices pour vérifier son postulat. En effet, un corps animé d'une vitesse $\vec{v}$, subit, dans l'atmosphère terrestre une force de frottement proportionnelle au carré de sa vitesse ($\sim cv^2$) et de direction opposée. Par conséquent, un corps de masse m, lâché dans l'atmosphère terrestre sans vitesse initiale atteint assez rapidement la vitesse limite $\sqrt{mg/c}$ (le montrer). C'est pourquoi si deux cyclistes dévalent une pente en bicyclette à partir du même instant, sans vitesse initiale et sans pédaler, c'est le plus lourd des deux qui gagne la course, ce qui semble contradictoire avec l'expérience de Galilée si l'on ne prend pas en compte la résistance de l'air.

On peut reprendre le même calcul dans le cas où $M = \mathbb{R}^3$ et ∇ est la connexion canonique de $\mathbb{R}^3$. On a montré que la condition $TD = 0$ conduisait à l'existence d'une fonction $\tau(s)$ telle que

$$T^{ij} = \tau\,\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}.$$

L'équation $TD = 0$ traduit dans ce cas la loi d'équilibre d'un fil libre. La tension de ce fil est alors décrite par le vecteur

$$P^i = \tau\,\frac{dx^i}{ds},$$

qui est constant sur la courbe, à moins que τ ne soit nul.

7.3.2 Les équations de la MMC dans un champ de gravitation

Nous avons déjà envisager l'action de la pesanteur sur une particule. Pour la prendre en compte, il suffit de remplacer la connexion plate de $\mathbb{R}^4$ utilisée plus haut par une connexion linéaire symétrique ∇ qui décrit le champ de pesanteur à la surface de la terre.

Dans le cas envisagé ici, les seuls $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ non nuls sont les Γ^{j}_{44}, égaux aux composantes g^j de l'accélération de la pesanteur, supposées indépendantes de la position. Mais rien n'empêche de donner une description plus précise de la pesanteur réelle, par exemple en ajoutant des termes $\Gamma^{j}_{4k} = \Gamma^{j}_{k4} = -\Omega^{j}_{k}$, spécifiques de la rotation de la Terre. La loi $TD = 0$, avec cette nouvelle valeur de D, inclut automatiquement la pesanteur dans tous les modèles de la mécanique.

Voici par exemple ce que deviennent les équations d'Euler :

$$\begin{aligned} &\partial_j \Theta^{jk} + \rho \left(V^j \partial_j V^k + \frac{\partial V^k}{\partial t} \right) = \rho \left(g^k + 2\Omega^k_j V^j \right) \\ &\partial_j \left(\rho V^j \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{7.11}$$

On obtient de même les équations du mouvement du *pendule de Foucault*, ou de tout autre mécanisme soumis à l'action de la pesanteur. Et en particulier les équations de la *statique pesante*.

7.4 Interprétation dans le cadre de la relativité générale

Nous avons introduit l'équation universelle $TD = 0$. Nous avons pu vérifier sur des exemples, qu'on pouvait en déduire les principales équations de la mécanique. Le sens profond de cette équation ne peut être révélé que dans le cadre de la relativité générale d'Einstein.

7.4.1 Éléments de relativité générale

Née en 1915, afin d'introduire les phénomènes de gravitation dans la toute récente théorie de la relativité (1905), elle représente l'Univers [1] par une variété différentielle M, munie d'une métrique pseudo-riemannienne g de signature $(- - - +)$ (métrique lorentzienne).

Le principe d'invariance de la relativité restreinte va être remplacé par le *principe de relativité générale* qui stipule que les lois physiques ne dépendent pas d'un système particulier de coordonnées sur la variété M (objectivité physique). Ce principe se traduit par l'invariance des grandeurs mathématiques décrivant la physique par le groupe des difféomorphismes de M à *support compact*.

La métrique sur M permet de mesurer les *durées* et les *longueurs*. Un vecteur X en un point est dit de type temporel si

$$g(X, X) > 0,$$

et de type spatial si

$$g(X, X) < 0.$$

Plus généralement, une courbe paramétrée $x(s)$ dans M est dite de type temporelle si

$$g(\dot{x}(s), \dot{x}(s)) > 0,$$

et de type spatiale si

$$g(\dot{x}(s), \dot{x}(s)) < 0.$$

On pourra vérifier que ces définitions sont indépendantes du paramétrage.

1. L'Univers est dénommé parfois à tord « espace-temps », ce qui réduit ce nouveau concept au paradigme newtonien classique : *univers* = *espace* + *temps*.

Cette métrique décrit également les phénomènes gravitationnels. Comme on l'a vu, pour décrire la gravitation galiléenne de façon totalement indépendante d'un système de coordonnées, il faut utiliser une connexion linéaire symétrique ∇^{Gal}. En relativité générale, c'est la connexion de Lévi-Civita de la métrique g qui va décrire ces phénomènes. La gravitation galiléenne ∇^{Gal} apparaît alors comme une approximation de la gravitation d'Einstein ∇^{Ein}.

Dans la théorie newtonienne classique, la gravitation est décrite par un champ $\mathbf{E}$ sur $\mathbb{R}^3$, dérivant d'un potentiel U et vérifiant l'*équation de champ*

$$\triangle U = 4\pi G\rho \tag{7.12}$$

où G est la constante de Newton et ρ est la densité de masse.

Pas analogie, Einstein a cherché à relier la métrique g à la distribution de matière de l'univers. Mais, la relativité restreinte ayant établi l'équivalence entre la masse et l'énergie, une généralisation cohérente de l'équation de Poisson doit tenir compte de ce nouveau principe. La densité de masse ρ va donc être remplacé par le tenseur *énergie-impulsion* $T^{\mu\nu}$ qui décrit la distribution d'énergie-matière de l'univers. L'équation formulée par Einstein en 1915 s'écrit :

$$S^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, R = -\frac{8\pi G}{c^4}\, T^{\mu\nu} \tag{7.13}$$

où $S^{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein de g (le gradient de la fonctionnelle de Einstein–Hilbert) et $T^{\mu\nu}$ est le tenseur d'impulsion-énergie.

En dynamique des milieux continus, nous avons vu que les équations du mouvement d'un fluide et l'*équation de continuité* (conservation de la masse) pouvait s'écrire

$$(\mathbf{div}\, T)^\nu = \partial_\mu\, \sigma^{\mu\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

où

$$T = \begin{pmatrix} \sigma^{jk} + \rho V^j V^k & \rho V^j \\ \rho V^k & \rho \end{pmatrix}$$

En relativité générale, le tenseur $T^{\mu\nu}$ doit décrire au mieux, la distribution énergétique de l'univers. De l'équation d'Einstein, il résulte que :

$$\mathbf{div}\, T = 0$$

qui permet de formuler les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus relativistes. Son support (là où ce tenseur est non-nul) porte le nom de *domaine intérieur* (intérieur à la matière). Le complémentaire de son support (là où il est nul) porte le nom de *domaine extérieur* (extérieur à la matière).

Comme nous l'avons deja remarqué, il peut être fructueux de généraliser le tenseur énergie-impulsion par un tenseur distribution T, c'est à dire une forme linéaire sur les 2-tenseurs covariants symétriques. Alors, ce tenseur-distribution vérifie l'équation :

$$T(L_X\, g) = 0, \qquad \forall X \in \mathrm{Vect}_c(M)$$

simplement parce qu'il est égal à la dérivée de la fonctionnelle de Einstein–Hilbert, qui est invariante par les difféomorphismes. Comme nous l'avons vu, cette équation peut se réécrire :

$$T(DZ) = 0, \qquad \forall Z \in \Omega^1_c(M).$$

Ce qui était *a priori* était un principe devient maintenant un corollaire de la relativité générale.

Pour finir, on récapitulera les relations qui relient les trois objets mathématiques fondamentaux de la relativité générale, la métrique g, la connexion D et le tenseur-distribution T par un diagramme qu'on pourrait appeler le « *triangle de la relativité générale* » :

$$\begin{tikzcd} g \arrow[rr, "DZ=\mathscr{L}_{Z^\flat} g"] \arrow[dr, "T=S(g)\ \text{(Einstein)}"'] & & D \arrow[dl, "TD=0\ \text{(Souriau)}"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

7.4.2 Le principe des géodésiques

Comme il ressort de l'étude précédente, la matière-énergie de l'Univers subit la gravitation comme elle en est la source. Et pourtant, afin de rendre opérationnelle la théorie de la gravitation et faire explicitement des calculs, on réalise souvent artificiellement cette dichotomie. Par exemple, dans le problème de Kepler, on considère que le soleil est la *source du champ* de gravitation et que la terre est un *corps d'épreuve* subissant ce champ. Dans les calculs explicites de la relativité générale, c'est également ce qu'on fait. On décompose artificiellement T (le tenseur-distribution de Souriau) en écrivant :

$$T = T_s + T_e$$

où T_s constitue la « source du champ » et T_e, le « corps d'épreuve ». On fait donc l'hypothèse que la contribution de T_e au champ de gravitation est négligeable devant celle de T_s et on écrit :

$$S(g) = T \simeq T_s$$

L'équation universelle $TD = 0$ peut alors s'écrire :

$$T_e D + T_s D = 0$$

qui nous donne à la fois :

$$T_e D = 0\,, \qquad T_s D = 0\,,$$

si les supports sont disjoints. On appelle habituellement la partie de l'Univers constituée par le support de T_s, la « région intérieure » et son complémentaire, la « région extérieure ». C'est le point de départ de l'étude de la « chute des corps » en relativité générale.

Supposons à présent que le support de T_e soit une sous-variété Σ, de dimension 1 et que pour tout tenseur d'essai G dont le support est contenu dans une carte on ait :

$$T_e G = \int_\Sigma T^{\mu\nu} G_{\mu\nu}\, ds\,,$$

où s est un paramétrage quelconque de la courbe. Le calcul que nous avons fait au chapitre 3 reste valable. Nous avons établi que l'équation $T_e D = 0$ conduisait à l'existence d'une fonction φ définie sur Σ telle que

$$T^{\mu\nu} = \varphi\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\,.$$

En écrivant à nouveau $T_e D = 0$, nous en avons alors déduit que :

$$-2\frac{d}{ds}\left(\varphi\, \dot{x^\rho}\right) + \varphi\, D^\rho_{\mu\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\nu} = 0, \quad \rho = 1, 2, 3, 4.$$

En posant $P = \varphi \dot{x}$ et en notant que $D^\rho_{\mu\nu} = -2\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, on obtient :

$$\frac{DP}{Ds} = 0\,, \tag{7.14}$$

et en particulier

$$\langle P, P\,\rangle = \varphi^2\, \langle \dot{x}, \dot{x}\,\rangle = Cste\,.$$

Remarque 7.18. On pourra vérifier que si la fonction φ s'annule en un point, elle est identiquement nulle.

Supposons pour commencer que cette constante soit non nulle et même positive. Dans ce cas, il en résulte que la courbe Σ est de type temps ; elle possède un paramétrage dit normal tel que

$$\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle = 1.$$

Avec ce nouveau paramétrage on voit que $\varphi = m = Cste$ et l'équation (7.14), nous donne

$$\frac{D\dot{x}}{Ds} = 0\,.$$

La courbe Σ est donc une géodésique temporelle.

Si $\langle P, P \rangle = 0$, on peut donc considérer que la fonction φ est partout non nulle (sinon, $T_e = 0$ et le problème n'a pas d'intérêt). On va donc reparamétrer notre courbe Σ en posant

$$d\tau = \varphi(\tau)\, ds\,.$$

Avec ce nouveau paramétrage, la densité de T s'écrit

$$T^{\mu\nu}(s) = \dot{x}^{\mu}(s)\dot{x}^{\nu}(s)\,,$$

La courbe Σ est donc une géodésique isotrope. Nous résumerons l'étude précédente sous la forme d'un théorème.

Théorème 7.19 (Principe des géodésiques)**.** *Le mouvement d'un « point matériel libre » de masse $m > 0$ est une géodésique de (M, g) de type temps. Les rayons lumineux de l'Univers sont des géodésiques isotropes.*

Ce principe n'est toutefois, qu'un cas très particulier de l'équation universelle $TD = 0$. Nous terminerons ce chapitre par une remarque dont la justification rigoureuse sera laissée de côté. Au chapitre 3 nous avons montré comment l'équation $TD = 0$ conduisait aux principales équations de la mécanique. Dans les exemples traités, nous avons utilisés pour D, soit la connexion plate canonique de $\mathbb{R}^4$, soit la connexion décrivant la gravitation newtonienne. Il resterait donc à justifier que l'équation $TD = 0$ « passe à la limite » lorsque l'on approxime la connexion einsteinienne par la connexion newtonienne. Un deuxième point reste également à justifier ; c'est le passage à la statique. Il s'avère que, là encore l'équation $TD = 0$ où D est la connexion canonique de $\mathbb{R}^3$ fournit les principales équations de la statiques des milieux continus. Il resterait donc à montrer rigoureusement que l'équation de la dynamique $TD = 0$ dans $\mathbb{R}^4$ se réduit à la même équation dans $\mathbb{R}^3$ quand le problème est stationnaire.

7.5 Perspectives

Nous avons dans ce chapitre introduit l'équation universelle $TD = 0$, formulée par Jean-Marie Souriau, à travers quelques exemples. Cette équation est très générale, elle décrit aussi bien l'équation du mouvement d'une particule dans un champ de gravitation que le mouvement de la matière, étendue ou distribuée. A ce propos, faisons remarquer que pour passer de la statique initialement étudiée à la statique *pesante*, l'introduction d'une nouvelle coordonnée x^4 a été nécessaire, qui ne joue apparemment aucun rôle dans le résultat, puisque les translations selon x^4 ne modifient pas l'équilibre. Mais x^4 fait apparaître des grandeurs nouvelles, telles que $\rho = T^{44}$ qui jouent un rôle essentiel dans la pesanteur.

Électrodynamique des milieux continus

Une procédure analogue permet de traiter l'électrodynamique. Celle-ci est basée sur le *modèle de Kaluza-Klein* qui unifie (dans une assez bonne approximation) les phénomènes gravitationnels et électromagnétiques. Le modèle mathématique est le suivant, on représente le tenseur de Faraday F comme la courbure d'une connexion sur un fibré principal P de groupe structural U(1) au dessus de M (la variété lorentzienne de dimension 4 servant à décrire l'univers). La métrique sur M peut alors être relevée en une métrique sur P invariante par le groupe structural U(1). On décrit la matière par une distribution T agissant sur des fonctions d'essai G_{AB} penta-dimensionnelles $(A, B = 1, \ldots, 5)$. La dynamique s'écrira encore $TD = 0$, mais dans la définition de D :

$$[DZ]_{AB} = \partial_A Z_B + \partial_B Z_A + 2\Gamma^C_{AB} Z_C$$

on complétera les termes $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ précédents par des termes

$$\Gamma^\lambda_{\mu 5}$$

que nous allons interpréter. À cet effet, il suffit de calculer les nouvelles équations du mouvement $TD = 0$ d'un milieu continu :

$$\begin{aligned} &\partial_j \Theta^{jk} + \rho\left(V^j \partial_j V^k + \frac{\partial V^k}{\partial t}\right) = B^k_j J^j + E^k r \\ &\partial_j \left(\rho V^j\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ &\partial_j J^j + \frac{\partial r}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{7.15}$$

où l'on a posé $B^k_j = 2\Gamma^k_{j5}$, $\quad E^k = 2\Gamma^k_{45}$, $\quad J^j = T^{j5}$, $\quad r = T^{45}$ (ici, on a pas pris en compte les termes de pesanteur mais il est possible de coupler les deux phénomènes). Les équations obtenues coïncident avec la théorie classique de l'électromagnétisme si B est *l'induction magnétique*, E le *champ électrique*, J le *vecteur densité de courant*, r la *densité de charge électrique*. Cette construction s'étend bien entendu au cas des milieux condensés.

Milieux de Cosserat

Pour finir ces notes, je signalerai également une critique de cette théorie. Il est souvent dit que $TD = 0$ ne permet pas (*a priori*) de retrouver les équations fondamentales d'un milieux de Cosserat (dans le cas d'un milieux étendu particulièrement), ce que Souriau reconnaissait lui-même (car les termes de gradients supérieurs dans ce cas peuvent être réécrit sous forme d'intégrales de bord). Le problème se pose alors de savoir si cette incompatibilité peut être levée en enrichissant ce formalisme ?

7.6 Exercices

Exercice 7.1. Soit (M, ∇) une variété affine. Soit σ un champ de tenseur contravariant d'ordre 2 symétrique et Z un champ de tenseur covariant d'ordre 1. On note $\sigma \cdot Z$ la contraction entre σ et Z (elle ne dépend pas du choix des indices car σ est symétrique) et $\mathbf{div}\,\sigma$ la trace de $\nabla\sigma$. Montrer que :

$$\mathbf{div}(\sigma \cdot Z) = Z(\mathbf{div}\,\sigma) - DZ(\sigma),$$

où :

$$DZ(A, B) := (\nabla_A Z)(B) + (\nabla_B Z)(A)$$

Exercice 7.2. Soit E un espace vectoriel de dimension fini, $T \in E \bigotimes E$ et $v \in E$. On note $(v)^0$ le sous-espace des formes linéaires nulle sur v. Montrer que si

$$T(\alpha, \beta) = 0, \quad \forall \alpha \in (v)^0, \forall \beta \in E^*,$$

alors, il existe $u \in E$ tel que $T = v \otimes u$. Montrer que si de plus T est symétrique alors $T = \lambda v \otimes v$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.3. [Équation des fils] Démontrer la proposition 7.3. On pourra écrire la condition $TDZ = 0$ dans le cas des tenseurs Z qui se mettent sous la forme uZ, u étant une fonction arbitraire qui s'annule sur la courbe.

Exercice 7.4. [Équation des membranes] Démontrer la proposition 7.5. On pourra écrire la condition $TDZ = 0$ dans le cas des tenseurs Z qui se mettent sous la forme uZ, u étant une fonction arbitraire qui s'annule sur la surface.

Exercice 7.5. [Équation des fils de torsion] Démontrer la proposition 7.7. On pourra écrire la condition $TDZ = 0$ dans le cas des tenseurs Z qui se mettent sous la forme uvZ, u et v étant deux fonctions définies dans l'espace, et nulles sur la courbe.

Exercice 7.6. [Équation des coques] Démontrer la proposition 7.9. On pourra écrire la condition $TDZ = 0$ dans le cas des tenseurs Z qui se mettent sous la forme uvZ, u et v étant deux fonctions définies dans l'espace, et nulles sur la surface.

Exercice 7.7. Montrer que les solutions dans $\mathbb{R}^n$ de l'équation :

$$\partial_i Z_j + \partial_j Z_i$$

s'écrivent :

$$Z_k = \Omega_{jk} x^k + B_k,$$

où $\Omega_{jk} = -\Omega_{kj}$ et B_k sont des constantes.

Annexe A

Solutions des exercices

Solutions des exercices du chapitre 5

Exercice 5.1

1) La projection de Mercator

$$M : (\theta, \phi) \mapsto (x, y)$$

s'écrit :

$$x = \varphi, \qquad y = \tan\theta.$$

Dans les coordonnées (θ, ϕ) longitudes-latitudes, la métrique de la sphère s'écrit :

$$ds^2 = d\theta^2 + \cos^2\theta d\phi^2$$

et son pullback par M^{-1} s'écrit donc :

$$ds^2 = \cos^2\theta dx^2 + \cos^4\theta dy^2, \qquad \text{où} \quad \theta = \arctan y.$$

Cette métrique n'est clairement pas conforme à la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

2) Soit maintenant une transformation inversible (directe)

$$T : (\theta, \varphi) \mapsto (x = \varphi, y = f(\theta)), \qquad T^{-1} : (x, y) \mapsto (\theta = g(y), \varphi = x).$$

Alors la métrique de la sphère s'écrit dans ces variables :

$$ds^2 = \cos^2(g(y))dx^2 + (g'(y))^2 dy^2.$$

Pour que cette métrique soit conforme, c'est à dire :

$$ds^2 = \kappa^2(x, y)\left(dx^2 + dy^2\right),$$

il faut que :

$$g'(y) = \cos(g(y))$$

qui s'intègre en :

$$y = f(\theta) = \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

si on impose de plus la condition $f(0) = 0$.

3) il suffit de vérifier que les développements limités de $\tan\theta$ et de $f(\theta)$ coincident au deuxième ordre.

Remarque A.1 (Remarques historiques). La projection de Mercator (telle que décrite géométriquement à partir du cylindre) a été proposée par le géographe flamand, *Gerardus Mercator* en 1569, soit un siècle avant la découverte du logarithme néperien, estimée à 1647. Il est donc très peu probable que la « correction conforme de la projection de Mercator » ait été connue dés le milieu du XVIe siècle. Par un hasard de l'histoire, il se trouve que le développement du logarithme a été calculé pour la première fois en 1668 par un certain *Nicolaus Mercator* (à ne pas confondre avec le premier).

Exercice 5.13

On considère la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par latitude et longitude

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta\cos\varphi \\ y &= \cos\theta\sin\varphi \\ z &= \sin\theta \end{aligned}$$

où θ appartient à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ et φ à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Calcul de la métrique La métrique de la sphère est induite par celle de l'espace ambiant. On a donc

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2$$

c'est à dire

$$g_{\theta\theta} = 1, \quad g_{\theta\varphi} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = \cos^2\theta.$$

Équation des géodésiques Ce sont les extrémales de l'énergie

$$K(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{2}\,(\dot\theta^2 + \cos^2\theta\,\dot\varphi^2)dt = \int_0^1 L(\theta, \varphi, \dot\theta, \dot\varphi)\, dt.$$

Ces extrémales sont définies par les *équations d'Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) = \frac{\partial L}{\partial q},$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\dot\theta) = -\cos\theta\sin\theta\,\dot\varphi^2, \\ &\frac{d}{dt}(\cos^2\theta\,\dot\varphi) = 0. \end{aligned}$$

On a donc une intégrale première $\cos^2\theta\,\dot\varphi = \omega = Cste$ et une équation différentielle

$$\ddot\theta = \omega^2\tan\theta(1 + \tan^2\theta).$$

Remarquez la solution particulière $\theta(t) = 0$, $\varphi(t) = \omega t$ qui correspond à l'équateur.

Calcul des symboles de Christoffel On réécrit les équations des géodésiques sous la forme

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \cos\theta \sin\theta\, \dot{\varphi}\dot{\varphi} &= 0,\\ \ddot{\varphi} - 2\tan\theta\, \dot{\theta}\dot{\varphi} &= 0,\end{aligned}$$

ce qui nous donne par identification

$$\begin{aligned}\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = 0, \quad \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} = 0, \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = \cos\theta\sin\theta,\\ \Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} = 0, \quad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = -\tan\theta, \quad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = 0.\end{aligned}$$

Calcul des champs de Jacobi Nous commencerons par calculer le tenseur de courbure. Comme

$$R(X,Y) = -R(X,Y),$$

il suffit de calculer $R(\partial_\theta, \partial_\varphi)$ sur la base $\partial_\theta, \partial_\varphi$. On commence par calculer

$$\begin{aligned}&\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta = 0,\\ &\nabla_{\partial_\theta} \partial_\varphi = \nabla_{\partial_\varphi} \partial_\theta = -\tan\theta\, \partial_\varphi,\\ &\nabla_{\partial_\varphi} \partial_\varphi = \cos\theta\sin\theta\, \partial_\theta.\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}R(\partial_\theta, \partial_\varphi)\partial_\theta &= -\partial_\varphi,\\ R(\partial_\theta, \partial_\varphi)\partial_\varphi &= \cos^2\theta\, \partial_\theta.\end{aligned}$$

En particulier, le long de la géodésique $\theta(t) = 0$, $\varphi(t) = \omega t$, on a

$$R(\partial_\theta, \partial_\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne pour un champ de vecteurs quelconque de composantes (X_θ, X_φ)

$$R(\dot{\alpha}, X)\dot{\alpha} = -\omega^2 X_\theta\, \partial_\theta,$$

alors que

$$\frac{D^2 X}{Dt^2} = \ddot{X}_\theta \partial_\theta + \ddot{X}_\varphi \partial_\varphi.$$

L'équation de Jacobi s'écrit donc

$$\begin{aligned}\ddot{X}_\theta &= -\omega^2 X_\theta,\\ \ddot{X}_\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Les solutions de ce système d'équations qui vérifient en plus $X(0) = 0$ s'écrivent

$$\begin{aligned}X_\theta &= A\sin(\omega t) = A\sin\varphi(t),\\ X_\varphi &= Bt,\end{aligned}$$

où A et B sont des constantes. On voit donc que pour $\varphi = \pi$ il existe un champ de Jacobi non nul qui s'annule aux deux extrémités de la géodésique, ce qui traduit le fait que cette géodésique cesse d'être un minimum stricte.

Solutions des exercices du chapitre 7

Exercice 7.5

La solution est donnée dans le cadre général d'une variété affine (M, ∇) de dimension quelconque.

Soient u et v des fonctions C^∞ nulles sur la courbe C et Z un covecteur à support compact. En écrivant $TD(uvZ) = 0$, on obtient, après quelques calculs

$$\int_a^b \left(S^{\mu\nu\rho} + S^{\rho\nu\mu}\right) \partial_\mu u \, \partial_\rho v \, Z_\nu ds = 0,$$

pour tout $Z \in \Omega_c^1(M)$. Ce qui nous donne

$$\left(S^{\mu\nu\rho} + S^{\rho\nu\mu}\right) \partial_\mu u \, \partial_\rho v = 0,$$

pour toutes les fonctions u, v nulles sur la courbe. Posons

$$K^{\mu\nu\rho} = S^{\mu\nu\rho} + S^{\rho\nu\mu}.$$

Une variante de l'exercice 7.2 montre alors qu'il existe des fonctions $A^{\nu\rho}$ telles que

$$K^{\mu\nu\rho} = \dot{x}^\mu A^{\nu\rho} + \dot{x}^\rho A^{\nu\mu}.$$

En effectuant la somme alternée des trois permutation circulaires de l'équation

$$K^{\mu\nu\rho} = S^{\mu\nu\rho} + S^{\rho\nu\mu},$$

on obtient

$$S^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(K^{\mu\nu\rho} - K^{\nu\rho\mu} + K^{\rho\mu\nu}\right),$$

et donc finalement

$$S^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\left\{\dot{x}^\mu (A^{\nu\rho} - A^{\rho\nu}) + \dot{x}^\nu (A^{\mu\rho} - A^{\rho\mu}) + \dot{x}^\rho (A^{\mu\nu} + A^{\nu\mu})\right\}.$$

Posons $S^{\nu\rho} = A^{\nu\rho} - A^{\rho\nu}$ et $B^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} + A^{\nu\mu}$. Après une intégration par partie, on trouve que pour tout tenseur symétrique G à support compact

$$TG = \int_a^b T^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(B^{\mu\nu}) G_{\mu\nu} + \dot{x}^\mu S^{\nu\rho} \partial_\rho G_{\mu\nu} \, ds.$$

Par conséquent, quitte à redéfinir les fonctions $T^{\mu\nu}$, on peut supposer que T est de la forme

$$TG = \int_a^b T^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \dot{x}^\mu S^{\nu\rho} \partial_\rho G_{\mu\nu} \, ds.$$

Écrivons à nouveau $TD(uZ) = 0$ où u est un fonction C^∞ nulle sur le support de T. Il vient finalement :

$$TD(uZ) = \int_a^b \left\{2T^{\mu\nu} \partial_\mu u \, Z_\nu + \dot{x}^\mu S^{\lambda\rho} D^\nu_{\mu\lambda} \partial_\rho u \, Z_\nu - \frac{d}{ds}\left(S^{\nu\rho}\right) \partial_\rho u \, Z_\nu\right\} ds,$$

ce qui nous donne

$$\left\{2T^{\mu\nu} + \dot{x}^\rho S^{\lambda\mu} D^\nu_{\rho\lambda} - \frac{d}{ds}\left(S^{\nu\mu}\right)\right\} \partial_\mu u = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, 4,$$

pour toute fonction u nulle sur la courbe. Le résultat de l'exercice 7.2 nous montre alors qu'il existe des fonctions P^ν de s telles que

$$T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\dot{x}^\rho S^{\lambda\mu} D^\nu_{\rho\lambda} - \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\left(S^{\nu\mu}\right\} = \dot{x}^\mu P^\nu,$$

soit

$$T^{\mu\nu} = \dot{x}^\mu P^\nu - \frac{1}{2}\,\dot{x}^\rho S^{\lambda\mu} D^\nu_{\rho\lambda} + \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\left(S^{\nu\mu}\right\}.$$

Comme de plus

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\left(S^{\nu\mu}\right\} G_{\mu\nu} = 0,$$

on a donc finalement

$$\begin{aligned} TG &= \int_a^b \left\{\dot{x}^\mu P^\nu G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\dot{x}^\rho S^{\lambda\mu} D^\nu_{\rho\lambda} G_{\mu\nu} + \dot{x}^\mu S^{\nu\rho}\partial_\rho G_{\mu\nu}\right\} ds \\ &= \int_a^b \left(\dot{x}^\mu P^\nu G_{\mu\nu} + \dot{x}^\mu S^{\nu\rho} G_{\mu\nu;\rho}\right) ds \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] V. I. Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 16(fasc. 1) :319–361, 1966.

[2] V. I. Arnold and B. Khesin. *Topological Methods in Hydrodynamics*, volume 125 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[3] A. M. Bloch, J. E. Marsden, and D. V. Zenkov. Quasivelocities and symmetries in nonholonomic systems. *Dyn. Syst.*, 24(2) :187–222, 2009.

[4] É. Cartan. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie). *Ann. Ecole Normal. Sup.*, 40 :325–412, 1923.

[5] É. Cartan. La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs. *Mémorial Sc. Math.*, XLII :1–61, 1930.

[6] R. Deheuvels. *Tenseurs et spineurs*. Mathématiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1993.

[7] D. M. DeTurck and J. L. Kazdan. Some regularity theorems in Riemannian geometry. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(3) :249–260, 1981.

[8] D. M. DeTurck and D. Yang. Existence of elastic deformations with prescribed principal strains and triply orthogonal systems. *Duke Math. J.*, 51(2) :243–260, 1984.

[9] M. P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

[10] B. Doubrovine, S. Novikov, and A. Fomenko. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. Tome I.* Traduit du Russe : Mathématiques. [Translations of Russian Works : Mathematics]. "Mir", Moscow, 1985.

[11] B. Doubrovine, S. Novikov, and A. Fomenko. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. Tome II.* Traduit du Russe : Mathématiques. [Translations of Russian Works : Mathematics]. "Mir", Moscow, 1985.

[12] M. Dubois-Violette and M. Henneaux. Generalized cohomology for irreducible tensor fields of mixed Young symmetry type. *Lett. Math. Phys.*, 49(3) :245–252, 1999.

[13] M. Dubois-Violette and M. Henneaux. Tensor fields of mixed Young symmetry type and N-complexes. *Comm. Math. Phys.*, 226(2) :393–418, 2002.

[14] D. G. Ebin and J. E. Marsden. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid. *Ann. of Math. (2)*, 92 :102–163, 1970.

[15] D. G. Ebin, J. E. Marsden, and A. E. Fischer. Diffeomorphism groups, hydrodynamics and relativity. In *Proceedings of the Thirteenth Biennial Seminar of the Canadian Mathematical Congress Differential Geometry and Applications, (Dalhousie Univ., Halifax, N. S., 1971), Vol. 1*, pages 135–279. Canad. Math. Congr., Montreal, Que., 1972.

[16] M. Epstein. *The geometrical language of continuum mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[17] M. Epstein. *Differential geometry.* Mathematical Engineering. Springer, Cham, 2014. Basic notions and physical examples.

[18] J. Escher and B. Kolev. Right-invariant Sobolev metrics of fractional order on the diffeomorphism group of the circle. *J. Geom. Mech.*, 6(3) :335–372, 2014.

[19] A. Frölicher and A. Kriegl. *Linear spaces and differentiation theory.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1988. A Wiley-Interscience Publication.

[20] W. Fulton. *Young tableaux*, volume 35 of *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.

[21] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.

[22] G. Hamel. Die lagrange-eulersche gleichungen der mechanik. *Z. Math. Phys.*, 50 :1–57, 1904.

[23] R. S. Hamilton. The inverse function theorem of Nash and Moser. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(1) :65–222, 1982.

[24] R. S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17(2) :255–306, 1982.

[25] J. G. Hocking and G. S. Young. *Topology.* Dover Publications Inc., New York, 1988.

[26] P. Iglesias-Zemmour. *Diffeology*, volume 185 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, 2013.

[27] H. Inci, T. Kappeler, and P. Topalov. *On the Regularity of the Composition of Diffeomorphisms*, volume 226 of *Memoirs of the American Mathematical Society.* American Mathematical Society, first edition, Mar. 2013.

[28] F. Klein. *Le programme d'Erlangen.* Gauthier-Villars éditeur, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974.

[29] S. Kobayashi. *Transformation groups in differential geometry.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[30] A. Kriegl and P. W. Michor. *The convenient setting of global analysis*, volume 53 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[31] S. Lang. *Fundamentals of Differential Geometry*, volume 191 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[32] P. Malliavin. *Géométrie différentielle intrinsèque.* Hermann, Paris, 1972. Collection Enseignement des Sciences, No. 14.

[33] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry*, volume 17 of *Texts in Applied Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1999. A basic exposition of classical mechanical systems.

[34] P. W. Michor. *Manifolds of differentiable mappings*, volume 3 of *Shiva Mathematics Series.* Shiva Publishing Ltd., Nantwich, 1980.

[35] P. W. Michor and D. Mumford. Vanishing geodesic distance on spaces of submanifolds and diffeomorphisms. *Doc. Math.*, 10 :217–245 (electronic), 2005.

[36] J. Milnor. Remarks on infinite-dimensional Lie groups. In *Relativity, groups and topology, II (Les Houches, 1983)*, pages 1007–1057. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[37] J. J. Moreau. Une méthode de "cinématique fonctionnelle" en hydrodynamique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 249 :2156–2158, 1959.

[38] S. B. Myers and N. E. Steenrod. The group of isometries of a Riemannian manifold. *Ann. of Math. (2)*, 40(2) :400–416, 1939.

[39] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics.* Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics, Bristol, second edition, 2003.

[40] H. Omori. On the group of diffeomorphisms on a compact manifold. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 167–183. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.

[41] H. Omori. *Infinite-dimensional Lie groups*, volume 158 of *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Translated from the 1979 Japanese original and revised by the author.

[42] G. Pichon. *Groupes de Lie. Représentations linéaires et applications.* Hermann, Paris, 1973.

[43] H. Poincaré. Sur une nouvelle forme des équations de la mécanique. *C.R. Acad. Sci.*, 132 :369–371, 1901.

[44] P. M. Quan. *Introduction à la géométrie des variétés différentiables.* Préface de A. Lichnerowicz. Monographies Universitaires de Mathématiques, No. 29. Dunod, Paris, 1969.

[45] P. Raviart and J. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris, 1983.

[46] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[47] W. Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[48] L. Schwartz. *Analyse. I*, volume 42 of *Collection Enseignement des Sciences [Collection : The Teaching of Science].* Hermann, Paris, 1991. Théorie des ensembles et topologie. [Set theory and topology], With the collaboration of K. Zizi.

[49] J. P. Serre. Le cinquième problème de Hilbert. Etat de la question en 1951. *Bull. Soc. Math. France*, 80 :1–10, 1952.

[50] J.-M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques.* Maîtrises de mathématiques. Dunod, Paris, 1970.

[51] J. M. Souriau. Mécanique des états condensés de la matière. Allocution pour le premier séminaire International de la fédération de mécanique de Grenoble, 19-21 mai 1992., 1992.

[52] J.-M. Souriau. Milieux continus de dimension 1,2 ou 3 : Statique et dynamique. Congré Français de Mécanique, Poitiers, 1997.

[53] M. Spivak. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.

[54] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I.* Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[55] B. Sturmfels. *Algorithms in invariant theory.* Texts and Monographs in Symbolic Computation. SpringerWienNewYork, Vienna, second edition, 2008.

[56] E. Tonti. A Classification Diagram for Physical Variables. 2003.

[57] H. Whitney. The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space. *Ann. of Math. (2)*, 45 :220–246, 1944.