



HAL
open science

Les fonctions de Collatz et leurs propriétés

Raouf Rajab

► **To cite this version:**

| Raouf Rajab. Les fonctions de Collatz et leurs propriétés. 2021. hal-03328322v2

HAL Id: hal-03328322

<https://hal.science/hal-03328322v2>

Preprint submitted on 3 Sep 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

The Collatz functions and their properties

Raouf Rajab
raouf.rajab@enig.rnu.tn

Abstract

Based on the definition of Collatz function and its properties, we can generalize the notion of Collatz function and we prove that we can define infinite functions which have like properties of Collatz function such that each function is defined on a set of real numbers and the set behaves as an arithmetic progression with common difference equal to a nonzero real number denoted by r and his first term is equal to a real number x_0 . This generalized Collatz function denoted by $T_{a,b}$ is defined on a subset of \mathbb{R} denoted by $E(a, b)$ such that:

$$E(a, b) = \{(a + b)k + b \mid k \in \mathbb{N}^*\} \text{ where } (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ such that } \mathbf{b} \neq -\mathbf{a}$$

Then $E(a, b)$ is an arithmetic progression with a common difference is equal to $(a+b)$ and his first term is equal to $2b+a$. For any real number x belongs of $E(a,b)$ such that $x=n(a+b)+b$ where n is a nonzero natural number , the expressions of $T_{a,b}(x)$ is given by:

$$T_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{b}{2} & \text{if } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{3}{2}x + \frac{a}{2} & \text{if } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

A classical Collatz function correspond to value of a equal to 1 and a value of b equal to 0 then it correspond to $T_{1,0}$ function defined on $E(1,0) = \mathbb{N}^*$ as follows:

$$T_{1,0}(N) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{if } N \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{3}{2}N + \frac{1}{2} & \text{if } N \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

The pair of real numbers $(a + 2b, 2a + 3b)$ is a stable cycle in other words:

$$\begin{cases} T_{a,b}(a + 2b) = 2a + 3b \\ T_{a,b}(2a + 3b) = a + 2b \end{cases}$$

We prove that for any pair of real numbers (a, b) such that $\mathbf{b} \neq -\mathbf{a}$ and for all nonzero natural numbers N and k , we have:

$$T_{a,b}^k((a + b)N + b) = (a + b)T_{1,0}^k(N) + b \text{ where } (N, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$$

Based on these results, we prove the Collatz conjecture can be stated as follows: Let a and b be real numbers such that $a \neq -b$ then for each real number $x \in E(a, b)$ that exist a nonzero positive integer k such that:

$$T_{a,b}^k(x) = a + 2b$$

In other words, starting from any real number x such that $x \in E(a, b)$, iterations of the function $T_{a,b}(x)$ will eventually reach the number $2b+a$. Thereafter iterations will cycle, taking successive values $a+2b, 2a+3b, a+2b, 2a+3b, \dots$. If $T_{a,b}$ function can generate a cycle with length equal to k and whose parity vector denoted by v thus the Collatz function can generate a cycle whose length equal to k and whose parity vector correspond also to v , in other words:

$$T_{a,b}^k((a + b)N + b) = (a + b)N + b \Leftrightarrow T^k(N) = N \text{ where } N \in \mathbb{N}^*$$

Keywords: Collatz function; Collatz conjecture; Generalized Collatz functions; Parity vector.

Résumé : En se basant sur la définition de la fonction de Collatz ainsi que sur sa propriété de générée des suites qui atteignent toujours 1 après un nombre fini des itération à partir d'un entier naturel non nul quelconque, on peut généraliser la notion de la fonction de Collatz pour designer n'importe qu'elle autre fonction que définie sur un ensemble infini des nombres réels tel que les suites générées par une telle fonction atteignent toujours un cycle unique après un nombre fini des opérations. On montre dans cet article qu'on peut définir une infinité des fonctions de ce genre tel que chaque fonction est notée $T_{a,b}$ et elle est définie sur un sous-ensemble de \mathbb{R} noté $E(a,b)$ tel que: a et b sont deux réels satisfaisant la condition : $b \neq -a$ et $E(a,b) = \{(a+b)k + b \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ c'est à dire que ce dernier est une suite arithmétique de premier terme $a+2b$ et de raison arithmétique $(a+b)$. Pour un réel x donné appartenant à l'ensemble $E(a,b)$ tel que $x=(a+b)n+b$ avec n un entier naturel non nul, les expressions de $T_{a,b}(x)$ sont données comme suit:

$$T_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{b}{2} & \text{if } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{3}{2}x + \frac{a}{2} & \text{if } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Le couple $(a+2b, 2a+3b)$ est un cycle généré par la fonction $T_{a,b}$ sur $E(a,b)$ tel que:

$$\begin{cases} T_{a,b}(2b+a) = 3b+2a \\ T_{a,b}(3b+2a) = 2b+a \end{cases}$$

La fonction originale de Collatz correspond au couple $(a=1, b=0)$ c'est-à-dire qu'elle correspond à la fonction $T_{1,0}$ qui définie sur $E(1,0)=\mathbb{N}^*$ comme ci-dessous :

$$T_{1,0}(N) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{3}{2}N + \frac{1}{2} & \text{si } N \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

On montre que pour deux réels quelconques a et b tel que $b \neq -a$ et pour tous entiers naturels non nuls N et k on a :

$$T_{a,b}^k((a+b)N+b) = (a+b)T_{1,0}^k(N) + b$$

En se basant sur cette équation, on montre que la conjecture de Collatz peut être énoncée de la manière suivante : Soient a et b deux réels tel que $b \neq -a$, alors pour chaque réel x appartenant à l'ensemble $E(a,b)$, il existe un entier naturel non nul k tel que :

$$T_{a,b}^k(x) = 2b+a$$

C'est à dire que toutes les suites générées par la fonction $T_{a,b}$ et dont les premiers termes appartenant à l'ensemble $E(a,b)$ atteignent toujours $2b+a$ après un nombre fini des itérations. On montre aussi une propriété d'une importance particulière que peut être traduite par l'équation suivante :

$$T_{a,b}^k((a+b)N+b) = (a+b)N+b \Leftrightarrow T^k(N) = N \text{ avec } (N,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$$

Mots clés : La fonction de Collatz ; La conjecture de Collatz ; fonctions de Collatz généralisées ; Vecteurs de parité.

1. Introduction et principaux résultats

Le problème $3x+1$ connu aussi sous le nom de problème de Collatz est basée sur le processus itératif de la fonction de Collatz appliqué à tous les entiers relatifs de la manière suivante : si N est pair, on le divise par 2 et si N est impair, on le multiplie par 3 puis on l'ajoute 1 et la somme obtenue est divisée par 2 [1],[2]. La conjecture de Collatz énonce que si on part d'un entier naturel non nul N quelconque, alors la suite générée par la fonction de Collatz et de premier terme N atteint toujours 1 après un nombre fini des opérations [1]. La démonstration d'une telle conjecture consiste à répondre à deux grandes questions : Une première question concerne l'unicité de cycle (1,2) c'est à dire que la fonction de Collatz ne peut générer aucun autre cycle stable par itérations autre que le cycle (1,2) et la deuxième question porte sur l'inexistence des suites divergentes générées par cette fonction et dont les premiers termes sont des entiers naturels non nuls [3]. Dans l'objectif de trouver des réponses à ces deux questions directement liées à la conjecture, les chercheurs ont explorés plusieurs pistes et ils font adopter plusieurs approches. L'un des sujets qui fait l'objet d'une partie des travaux portant sur le problème $3n+1$ est la généralisation du problème $3n+1$ à travers l'étude des variantes de la fonction de Collatz et les propriétés des suites générées par ces variantes ainsi que l'étude des cycles qui peuvent être générés par ces fonctions (longueurs, leurs proportions, nombres)[1], [2], [3], [4]. Dans ce travail, on cherche à déterminer une expression générale de toutes les fonctions que se comportent comme la fonction de Collatz. En se basant sur la définition de la fonction de Collatz et sur l'énoncée de la conjecture de Collatz, on peut donner une définition générale des toutes fonctions qu'on peut les nommer aussi des fonctions de Collatz : une fonction de Collatz est toute fonction qui définie sur un ensemble infini des nombres réels (nombre relatifs, ou bien des nombres rationnels ou irrationnels) tel que toutes les suites générées par cette fonction atteignent toujours le même cycle de longueur fini après un nombre fini des itérations . On montre qu'on peut définir une infinité des fonctions de Collatz tel que chaque fonction est définie sur un ensemble qui se comporte comme une suite arithmétique de premier terme un réel quelconque x_0 et de raison arithmétique un réel r non nul. Selon le choix de premier terme de la suite arithmétique considérée et de la valeur de sa raison arithmétique, on montre qu'on peut définir des fonctions des Collatz

sur des ensembles qui ne contiennent que des nombres pairs uniquement ou bien des entiers impairs uniquement ou bien des ensembles qui ne contiennent que des nombres rationnels ou bien des réels non rationnels. La seule condition, il faut que le domaine de définition de la fonction de Collatz considérée soit **une suite arithmétique de premier terme un réel quelconque et de raison arithmétique un réel non nul**. Les principaux résultats obtenus dans cet article sont présentés brièvement dans ce qui suit puis toutes les propriétés et les relations sont démontrées dans le reste de l'article:

On considère une suite arithmétique de premier terme un réel quelconque $x_0 \in \mathbb{R}$ et de raison arithmétique un réel non nul $r \in \mathbb{R}^*$ qu'on la note comme ci-dessous :

$$S(x_0, r) = \{x_0, x_0 + r, x_0 + 2r, x_0 + 3r, \dots, x_0 + kr, \dots\} \quad (1.1)$$

On détermine les deux réels a et b satisfaisant :

$$\begin{cases} a + b = r \\ 2b + a = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

On définit l'ensemble $E(a, b)$ comme suit :

$$S(x_0, r) = E(a, b) = \{2b + a, 3b + 2a, 4b + 3a, \dots, jb + (j - 1)a, \dots\} \quad (1.3)$$

On définit la fonction $T_{a,b}$ sur l'ensemble $S(x_0, r)$ tel que pour tout réel $x \in S(x_0, r)$ et qui s'écrit alors sous la forme $x = x_0 + m r$ avec m un entier naturel ($m \in \mathbb{N}$), on a :

$$T_{a,b}: E(a, b) \rightarrow E(a, b)$$

$$T_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{b}{2} & \text{si } m \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{3}{2}x + \frac{a}{2} & \text{si } m \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \quad (1.4)$$

On vérifie que :

$$\begin{cases} T_{a,b}(2b + a) = 3b + 2a \\ T_{a,b}(3b + 2a) = 2b + a \end{cases} \quad (1.5)$$

On montre que pour tous entiers naturels non nuls N et k, la relation entre les deux fonctions $T_{a,b}$ et T s'écrit comme suit :

$$T_{a,b}^k((b + a)N + b) = (b + a)T^k(N) + b \quad (1.6)$$

En se basant sur cette dernière équation, on montre aussi que la conjecture de Collatz peut être énoncée de la manière suivante : Soient a et b deux réels tel que $b \neq -a$ alors pour chaque réel x appartenant à l'ensemble $E(a, b)$, il existe un entier naturel non nul k tel que :

$$T_{a,b}^k(x) = 2b + a \quad (1.7)$$

Autrement dit, toutes les suites générées par la fonction $T_{a,b}$ et dont les premiers termes appartenant à l'ensemble $E(a,b)$ atteignent toujours $2b+a$ après un nombre fini des itérations.

Le principal résultat de ce travail est que toute suite arithmétique de raison arithmétique un réel non nul est un domaine de définition d'une fonction de Collatz $T_{a,b}$ tel que $a+b$ correspond à la raison arithmétique de cette suite et $a+2b$ correspond au son premier terme.

Par exemple si on cherche à déterminer une fonction de Collatz qui définie sur l'ensemble suivant :

$$E = \{1,8,15,22,29, \dots\} \quad (1.8)$$

Comme le domaine de définition se comporte comme une suite arithmétique de raison 7 et de premier terme 1 donc il faut choisir le couple (a,b) de la fonction $T_{a,b}$ qui vérifie les deux équations ci-dessous :

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ a + 2b = 1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Ce qui nous permet d'obtenir le couple suivant :

$$\begin{cases} b = -6 \\ a = 13 \end{cases} \quad (1.10)$$

Donc la fonction recherchée est la fonction $T_{13,-6}$ qui définie comme suit :

$$T_{13,-6}(P) = \begin{cases} \frac{P}{2} - 3 & \text{si } P \equiv 8 \pmod{14} \\ \frac{3}{2}P + \frac{13}{2} & \text{si } P \equiv 1 \pmod{14} \end{cases} \quad (1.11)$$

Comme tous les éléments P de l'ensemble E sont exprimés comme suit :

$$P = 7N - 6 \text{ avec } N \in \mathbb{N}^* \quad (1.12)$$

La relation entre la fonction $T_{13,-6}$ et la fonction T de Collatz est traduite par l'équation suivante :

$$T_{13,-6}(7N - 6) = 7T(N) - 6 \quad (1.13)$$

Ou aussi pour tous entiers naturels k , on peut écrire :

$$T_{13,-6}^k(7N - 6) = 7T^k(N) - 6 \quad (1.14)$$

Conjecture de Collatz relative à la fonction $T_{13,-6}$: Toutes les suites générées par la fonction $T_{13,-6}$ et dont les premiers termes appartenant à l'ensemble E convergent vers le cycle unique $(1,8)$ après un nombre fini des itérations.

2. La fonction généralisée de Collatz

On considère une suite arithmétique de premier terme un réel quelconque $x_0 \in \mathbb{R}$ et de raison arithmétique un réel non nul $r \in \mathbb{R}^*$ qu'on la note comme ci-dessous :

$$S(x_0, r) = \{x_0, x_0 + r, x_0 + 2r, x_0 + 3r, \dots, x_0 + kr, \dots\} \quad (2.1)$$

On détermine les deux réels a et b satisfaisant :

$$\begin{cases} a + b = r \\ 2b + a = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Définition 2.1

Soient a et b deux réels tel que $b \neq -a$, on définit le sous-ensemble de \mathbb{R} noté $E(a, b)$ comme suit :

$$E(a, b) = \{2b + a + k(a + b) \mid k \in \mathbb{N}\} \quad (2.3)$$

Il renferme tous les termes d'une suite arithmétique de premier terme $2b + a$ et de raison arithmétique $a + b$. Chaque élément x de $E(a, b)$ peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x &= a(k + 1) + b(k + 2) \\ &= aN + b(N + 1) \\ &= (a + b)N + b \end{aligned} \quad (2.4)$$

Avec N un entier naturel non nul tel que : $N = 1 + k$ donc on peut écrire:

$$E(a, b) = \{aN + b(N + 1) \mid N \in \mathbb{N}^*\} \quad (2.5)$$

Notations 2.1

L'ensemble $E(a, b)$ peut être subdivisé en deux sous ensembles :

$$E(a, b) = E^+(a, b) \cup E^-(a, b) \quad (2.6)$$

L'ensemble $E^+(a, b)$ contient les termes d'une suite arithmétique de premier terme $2b+a$ et de raison $2(b+a)$:

$$\begin{aligned} E^+(a, b) &= \{x_0, x_0 + 2r, x_0 + 4r, \dots, x_0 + 2kr, \dots\} \\ &= \{2b + a, 4b + 3a, 6b + 5a, \dots, 2jb + (2j - 1)a, \dots\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'ensemble $E^-(a, b)$ est une suite arithmétique de premier terme $3b+2a$ et de raison $2(a+b)$:

$$\begin{aligned} E^-(a, b) &= \{x_0 + r, x_0 + 3r, x_0 + 5r, \dots, x_0 + (2k + 1)r, \dots\} \\ &= \{3b + 2a, 5b + 4a, 7b + 6a, \dots, (j + 1)b + ja, \dots\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Définition 2.2

Soient a et b deux réels tel que $b \neq -a$, la fonction de Collatz généralisée notée $T_{a,b}$ est définie sur $E(a, b)$ comme suit :

$$T_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{b}{2} & \text{si } x \in E^-(a, b) \\ 3\frac{x}{2} + \frac{a}{2} & \text{si } x \in E^+(a, b) \end{cases} \quad (2.9)$$

Comme pour chaque réel appartenant à l'ensemble $E(a, b)$, il existe un entier naturel N tel que:

$$x = (a + 2b) + N(a + b)$$

Alors on peut écrire :

-Si N est pair, on a :

$$\begin{aligned}
T_{a,b}(x) &= \frac{3}{2}(a + 2b + N(a + b)) + \frac{a}{2} \\
&= 2a + 3b + \frac{3}{2}N(a + b) \\
&= \frac{3}{2}Nr + (x_0 + r)
\end{aligned}$$

-Si N est impair, on a:

$$\begin{aligned}
T_{a,b}(x) &= \frac{1}{2}(a + 2b + N(a + b)) + \frac{b}{2} \\
&= \frac{1}{2}(2a + 3b + (N - 1)(a + b)) + \frac{b}{2} \\
&= a + 2b + \frac{N - 1}{2}(a + b) \\
&= \frac{2x_0 - r}{2} + \frac{N}{2}r
\end{aligned}$$

On conclut que la fonction $T_{a,b}$ peut être exprimée comme suit:

$$T_{a,b}(a + 2b + N(a + b)) = \begin{cases} \frac{N}{2}(a + b) + \frac{a + 3b}{2} & \text{si } N \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{3}{2}N(a + b) + 2a + 3b & \text{si } N \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \quad (2.10)$$

Ou encore :

$$T_{a,b}(x_0 + Nr) = \begin{cases} \frac{N - 1}{2}r + x_0 & \text{si } N \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{3}{2}Nr + (x_0 + r) & \text{si } N \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \quad (2.11)$$

Remarque 2.1

La fonction originale de Collatz correspond au couple $(a = 1, b = 0)$ c'est à dire qu'elle correspond à la fonction $T_{1,0}$ qui définie sur $E(1,0) = \mathbb{N}^*$ comme suit :

$$T_{1,0}(N) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{3}{2}N + \frac{1}{2} & \text{si } N \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (2.12)$$

On peut adopter la lettre T sans indices pour la fonction de Collatz donc dans ce cas on peut utiliser l'une de deux notations $T_{1,0}$ ou bien T.

Remarque importante 2.2

La fonction $T_{a,b}$ est définie sur $E(a,b)$ ceci signifie que pour tout $x \in E(a,b)$ on a $T_{a,b}(x) \in E(a,b)$. En réalité, on peut montrer aisément cette propriété, en effet :

Soit x un réel appartenant à $E(a,b)$ alors il existe un entier naturel k tel que :

$$x = a + 2b + k(b + a)$$

-Si k est pair alors on pose $k=2m$ avec m un entier naturel et dans ce cas on peut écrire :

$$\begin{aligned} T_{a,b}(a + 2b + 2m(a + b)) &= \frac{3}{2}(2b + a + 2m(a + b)) + \frac{a}{2} \\ &= T_{a,b}(a + 2b) + 3m(a + b) \\ &= 3b + 2a + 3m(a + b) \end{aligned}$$

Comme $3b + 2a + 3m(a + b) \in E(a, b)$ alors $T_{a,b}(2a + b + 2m(a + b)) \in E(a, b)$

-Si k est impair, on pose $k=2m+1$ et on écrit :

$$\begin{aligned} T_{a,b}(a + 2b + (2m + 1)(a + b)) &= \frac{1}{2}(2b + a + (2m + 1)(a + b)) + \frac{b}{2} \\ &= T_{a,b}(2a + 3b) + m(a + b) \\ &= a + 2b + m(a + b) \end{aligned}$$

Comme $2b + a + m(a + b) \in E(a, b)$ alors $T_{a,b}(2a + b + (2m + 1)(a + b)) \in E(a, b)$

Dans tous les cas, on peut conclure que si $x \in E(a, b)$ alors $T_{a,b}(x) \in E(a, b)$.

Notation 2.2

La suite générée par la fonction $T_{a,b}$ de longueur k et de premier terme un réel x appartenant à l'ensemble $E(a, b)$ est notée comme suit :

$$Sy_{a,b}(x, k) = (x, T_{a,b}^1(x), T_{a,b}^2(x), T_{a,b}^3(x), \dots, T_{a,b}^{k-1}(x)) \quad (2.13)$$

Remarque 2.3

Il y'a des fonctions qui peuvent générer des suites qui contiennent des réels non entiers (des nombres rationnels ou bien irrationnels), il y'a d'autre fonction admettant des domaines de définition qui ne renferment que des entiers pairs uniquement ou bien des entiers impairs donc on doit trouver une généralisation de la notion du vecteur de parité que traduit la distribution des entiers pairs et des entiers impairs dans une suite de Collatz donnée. Dans ce cas, on peut remplacer la nomination vecteur de parité par vecteur structurel ou bien on utilise la même nomination sans ambigüité quelque soit la nature des termes des suites considérées.

On sait que le domaine de définition $E(a, b)$ de la fonction $T_{a,b}$ peut être subdivisé en deux sous ensembles :

$$E(a, b) = E^+(a, b) \cup E^-(a, b)$$

L'ensemble $E^+(a, b)$ est le sous ensemble de $E(a, b)$ tel que pour tout entier $x \in E^+(a, b)$:

$$T_{a,b}(x) = \frac{3}{2}x + \frac{a}{2}$$

Autrement l'ensemble $E^+(a, b)$ contient tous les éléments x de $E(a, b)$ tel que :

$$T_{a,b}(x) > x \quad (2.14)$$

L'ensemble $E^-(a, b)$ est le sous ensemble de $E(a, b)$ tel que pour tout entier $x \in E^-(a, b)$:

$$T_{a,b}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{b}{2}$$

Autrement l'ensemble $E^-(a, b)$ contient tous les réels x de $E(a, b)$ tel que :

$$T_{a,b}(x) < x \quad (2.15)$$

Comme une suite quelconque générée par la fonction $T_{a,b}$ contient des termes appartenant à l'ensemble $E^+(a, b)$ alors que d'autres termes appartenant à l'ensemble $E^-(a, b)$ donc le vecteur de parité est obtenu, on fait remplacer un terme qui appartient à $E^+(a, b)$ par 1 alors que les termes appartenant à $E^-(a, b)$ sont remplacés par 0.

Définition 2.3

Soient a et b deux réels tel que $b \neq -a$ et k un entier naturel quelconque. On définit l'application $t_{a,b}^k$ de $E(a, b)$ dans $\{0, 1\}$ comme suit :

$$t_{a,b}^k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_{a,b}^{k+1}(x) > T_{a,b}^k(x) \\ 0 & \text{si } T_{a,b}^{k+1}(x) < T_{a,b}^k(x) \end{cases} \quad (2.16)$$

Ou encore :

$$t_{a,b}^k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_{a,b}^k(x) \in E^+(a, b) \\ 0 & \text{si } T_{a,b}^k(x) \in E^-(a, b) \end{cases} \quad (2.17)$$

Notation 2.3

Le vecteur de parité de la suite $S_{y,a,b}(x, k)$ est comme suit :

$$v_{a,b}(x, k) = (t_{a,b}^0(x), t_{a,b}^1(x), \dots, t_{a,b}^{k-1}(x)) \quad (2.18)$$

Cette définition du vecteur de parité constitue une généralisation de la notion du vecteur de parité qui ne traduit pas nécessairement la distribution des entiers pairs et des entiers impairs dans une suite quelconque générée par une fonction $T_{a,b}$ donnée.

Exemples 2.1

On donne quelques exemples des fonctions pour différentes valeurs de a et b .

La fonction $T_{1,1}$ définie sur $E(1,1) = \{3 + 2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ par:

$$T_{1,1}(N) = \begin{cases} \frac{N}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } N \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{3}{2}N + \frac{1}{2} & \text{si } N \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

La fonction $T_{2,0}$ définie sur $E(2,0) = \{2k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ comme ci-dessous:

$$T_{2,0}(N) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{3}{2}N + 1 & \text{si } N \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

a et b deux nombres rationnels

La fonction $T_{\frac{1}{2},0}$ définie sur $E\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots\right\}$ comme suit:

$$T_{\frac{1}{2},0}(N) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \in E^-\left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ \frac{3}{2}N + \frac{1}{4} & \text{si } N \in E^+\left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$$

La fonction $T_{\frac{2}{3}, \frac{2}{7}}$ définie sur $E\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{7}\right) = \left\{\frac{26}{21}, \frac{46}{21}, \frac{66}{21}, \frac{86}{21}, \dots\right\}$ par :

$$T_{\frac{2}{3}, \frac{2}{7}}(P) = \begin{cases} \frac{P}{2} + \frac{1}{7} & \text{si } P \in E^-\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{7}\right) \\ \frac{3}{2}P + \frac{1}{3} & \text{si } P \in E^+\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{7}\right) \end{cases}$$

a et b deux nombres irrationnels

La fonction $T_{\sqrt{3}, \sqrt{2}}$ définie sur $E(\sqrt{3}, \sqrt{2}) = \{2\sqrt{2} + \sqrt{3}, 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}, \dots\}$ par :

$$T_{\sqrt{3}, \sqrt{2}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } x \in E^-(\sqrt{3}, \sqrt{2}) \\ \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } x \in E^+(\sqrt{3}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

La fonction $T_{2\cos(\theta), 2\sin(\theta)}$ définie sur $E(2\cos(\theta), 2\sin(\theta))$ par :

$$T_{2\cos\theta, 2\sin\theta}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \sin(\theta) & \text{si } x \in E^-(2\cos\theta, 2\sin\theta) \\ \frac{3}{2}x + \cos(\theta) & \text{si } x \in E^+(2\cos\theta, 2\sin\theta) \end{cases}$$

Théorème 2.1

Le couple $(a + 2b, 2a + 3b)$ est un cycle stable pour la fonction $T_{a,b}$ autrement dit :

$$\begin{cases} T_{a,b}(2a + 3b) = a + 2b \\ T_{a,b}(a + 2b) = 2a + 3b \end{cases} \quad (2.19)$$

Démonstration

On effectue une simple vérification. Pour ces deux équations, on peut écrire:

$$\begin{aligned} T_{a,b}(2a + 3b) &= \frac{2a + 3b}{2} + \frac{b}{2} \\ &= 2b + a \\ T_{a,b}(2b + a) &= \frac{3}{2}(2b + a) + \frac{a}{2} \\ &= 3b + 2a \end{aligned}$$

Théorème 2.2

Soient a et b deux réels tel que $b \neq -a$ alors pour tous entiers naturels non nuls k et N on a :

$$T_{a,b}^k((a+b)N+b) = (a+b)T^k(N) + b \quad (2.20)$$

Équivalente à:

$$T^k(N) = \frac{T_{a,b}^k((a+b)N+b) - b}{a+b} \quad (2.21)$$

Ce théorème traduit la relation entre la fonction de Collatz notée T et la fonction généralisée de Collatz notée $T_{a,b}$.

Démonstration

D'après l'équation 2.4, on sait que chaque réel x appartenant à $E(a,b)$ peut s'écrire sous la forme :

$$x = (a+b)N + b \text{ avec } N \in \mathbb{N}^*$$

-Si N est impair alors dans ce cas on peut écrire:

$$\begin{aligned} T_{a,b}^1((a+b)N+b) &= \frac{3}{2}((a+b)N+b) + \frac{a}{2} \\ &= \frac{3}{2}(a+b)N + \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}a \\ &= (a+b)\frac{3}{2}N + (a+b)\frac{1}{2} + b \\ &= (a+b)\left(\frac{3}{2}N + \frac{1}{2}\right) + b \\ &= (a+b)T(N) + b \end{aligned}$$

-Si N est pair alors dans ce cas on peut écrire:

$$\begin{aligned} T_{a,b}^1((a+b)N+b) &= \frac{1}{2}((a+b)N+b) + \frac{b}{2} \\ &= \frac{1}{2}N(a+b) + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \\ &= (a+b)\frac{1}{2}N + b \\ &= (a+b)T(P) + b \end{aligned}$$

La propriété est vraie pour $k = 1$. On suppose que la propriété est vraie pour tout entier naturel allant de 1 à k et montre qu'elle est vraie pour $k + 1$. On procède comme suit :

$$T_{a,b}^{k+1}((a+b)N+b) = T_{a,b}^1\left(T_{a,b}^k((a+b)N+b)\right)$$

Comme on a: $T_{a,b}^k((a+b)N+b) = (a+b)T^k(N) + b$ donc on peut écrire:

$$T_{a,b}^1\left(T_{a,b}^k((a+b)N+b)\right) = T_{a,b}^1\left((a+b)T^k(N) + b\right)$$

De plus on sait que $T_{a,b}^1((a+b)N+b) = (a+b)T^1(N) + b$ ce qui nous permet d'écrire:

$$\begin{aligned} T_{a,b}^1((a+b)T^k(N)+b) &= (a+b)T^1(T^k(N)) + b \\ &= (a+b)T^{k+1}(N) + b \end{aligned}$$

On déduit que la propriété est vraie aussi pour $k+1$. On peut conclure que la propriété est vraie pour tout entier naturel k .

Corollaire 2.1

On regroupe ici quelques formules qui sont déduites directement ou bien d'une manière simple du théorème précédent (2.2eq 2.21). Soient a et b deux réels tel que $a \neq -b$ alors pour tous entiers naturels non nuls k et N , on peut admettre les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} T^k(N) = T_{a+1,b}^k((a+b+1)N+b+1) - T_{a,b}^k((a+b)N+b) \\ T^k(N) = T_{a,b+1}^k((a+1+b)N+b+1) - T_{a,b}^k((a+b)N+b) - 1 \\ T^k(N) = \frac{T_{a,b}^k((a+b)N+b) + T_{-a,b}^k((b-a)N+b)}{2b} - 1 \\ T^k(N) = \frac{T_{a,b}^k((a+b)N+b) + T_{a,-b}^k((-a+b)N-b)}{2n} \\ T_{a,b}^k((a+b)N+b) + T_{-a,-b}^k((-a-b)N-b) = 0 \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Proposition 2.1

La conjecture de Collatz peut être énoncée de la manière suivante : Soient a et b deux réels tel que $b \neq -a$ alors pour chaque réel x appartenant à l'ensemble $E(a,b)$, il existe un entier naturel non nul k tel que :

$$T_{a,b}^k(x) = 2b + a \quad (2.23)$$

Autrement dit toutes les suites générées par la fonction $T_{a,b}$ et dont les premiers termes appartenant à l'ensemble $E(a,b)$ atteignent toujours $2b+a$ après un nombre fini des itérations.

Démonstration

On pose que pour tous entier naturel non nul N , il existe un entier naturel non nul k tel que :

$$T_{1,0}^k(N) = T^k(N) = 1$$

D'après le théorème 2.2 :

$$T_{a,b}^k((N+1)b+Na) = (a+b)T_{1,0}^k(N) + b = 2b + a$$

Ce qui signifie que pour chaque entier naturel non nul N , il existe un entier naturel non nul k tel que :

$$T_{a,b}^k((N+1)b+Na) = 2b + a$$

Posons : $x = (a+b)N + b$ alors on peut écrire :

$$N \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \in E(a,b)$$

Alors on peut conclure que pour tout entier naturel x appartenant à l'ensemble $E(a,b)$, il existe un entier naturel non nul k tel que :

$$T_{a,b}^k(x) = 2b + a$$

Inversement, on suppose que pour tout réel x de l'ensemble $E(a,b)$, il existe un entier naturel non nul k tel que :

$$T_{a,b}^k(x) = 2b + a$$

Comme $x \in E(a, b)$ donc il existe un entier naturel N tel que :

$$x = (a + b)N + b$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$T_{a,b}^k((a + b)N + b) = 2b + a$$

D'après le théorème, on peut écrire :

$$\begin{aligned} T_{a,b}^k((a + b)N + b) &= (a + b)T_{a,b}^k(N) + b \\ &= 2b + a \end{aligned}$$

Ce qui implique que:

$$(a + b)T_{1,0}^k(N) = b + a$$

Ou encore:

$$T_{1,0}^k(N) = 1$$

On peut conclure que pour tout entier naturel non nul N , il existe un entier naturel non nul k tel que :

$$T_{1,0}^k(N) = 1$$

Théorème 2.3

Soient a et b deux réels tel que $b \neq -a$ alors pour tous entiers naturels non nul k et N , les vecteurs de parité de deux suites $Sy_{a,b}((a + b)N + b, k)$ et de la suite de Collatz $Sy_{1,0}(N, k)$ satisfaisant :

$$v_{a,b}((a + b)N + b) = v_{1,0}(N) \quad (2.24)$$

En réalité les deux suites $Sy_{a,b}((a + b)N + b, k)$ et $Sy_{1,0}(N, k)$ ont le même vecteur de parité quelque soit la valeur de k pour cette raison le nombre k qui désigne la longueur de ces suites ne figure pas dans les expressions de deux vecteurs de parité de ces deux suites.

Démonstration

Si $T_{1,0}^k(N)$ est pair alors $t_{1,0}^k(N) = 0$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned} T_{a,b}^k((N + 1)b + Na) &= (a + b)T_{1,0}^k(N) + b \\ &= b(T_{1,0}^k(N) + 1) + aT_{1,0}^k(N) \end{aligned}$$

On pose $T_{1,0}^k(N) = 2j$

$$\begin{aligned}
T_{a,b}^k((N+1)b + Na) &= b(2j+1) + a2j \\
&= 2j(a+b) + b \\
&= 2b + a + a(2j-1) + b(2j-1) \\
&= 2b + a + (2j-1)(a+b)
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que :

$$T_{a,b}^k((N+1)b + Na) \in E^-(a, b)$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}
t_{a,b}^k((N+1)b + Na) &= 0 \\
&= t_{1,0}^k(N)
\end{aligned}$$

Si $T_{1,0}^k(N)$ est impair alors $t_{1,0}^k(N) = 1$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned}
T_{a,b}^k((N+1)b + Na) &= (a+b)T_{1,0}^k(N) + b \\
&= b(T_{1,0}^k(N) + 1) + aT_{1,0}^k(N)
\end{aligned}$$

On pose $T_{1,0}^k(N) = 2j + 1$:

$$\begin{aligned}
T_{a,b}^k((N+1)b + Na) &= b(2j+2) + a(2j+1) \\
&= 2j(a+b) + 2b + a
\end{aligned}$$

On déduit que :

$$T_{a,b}^k((N+1)b + Na) \in E^+(a, b)$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned}
t_{a,b}^k((N+1)b + Na) &= 1 \\
&= T_{1,0}^k(N)
\end{aligned}$$

Dans tous les cas on a :

$$t_{a,b}^k((N+1)b + Na) = T_{1,0}^k(N)$$

Cette équation est vérifiée quelque soit la valeur de k , on peut conclure que :

$$v_{a,b}((N+1)b + Na) = v_{1,0}(N)$$

Corollaire 2.2

Soient a, b deux réels tel que $a \neq -b$, N un entier naturel non nul ($N \in \mathbb{N}^*$) et x un réel appartenant à $E(a, b)$ tel que :

$$x = (a+b)N + b$$

Alors la fonction $T_{a,b}$ admet un cycle de longueur k et de vecteur de parité v si seulement si la fonction T de Collatz admet un cycle de même longueur k et de même vecteur de parité v . De plus si le réel $x \in E(a, b)$ est un élément de ce cycle généré par la fonction $T_{a,b}$ alors l'entier naturel non nul N est un

élément du cycle généré par la fonction original de Collatz T. Cette propriété est traduite par la relation suivante :

$$T_{a,b}^k(x) = x \Leftrightarrow T^k(N) = N \quad (2.25)$$

Démonstration :

Ce corollaire est déduit directement à partir du théorème 2.2 (eq 2.20) et du théorème 2.4 (eq 2.24).

3. Représentation matricielle des suites $Sy_{a,b}((N+1)b + Na, k)$: Les matrices $T_{a,b}(P, k)$

Soient a et b deux réels tel que $a \neq -b$, on considère l'ensemble des suites générées par la fonction $T_{a,b}$ de même longueur k :

$$(Sy_{a,b}(a+2b, k), Sy_{a,b}(2a+3b, k), \dots, Sy_{a,b}(Pa+(P+1)b, k)) \quad (3.1)$$

Cet ensemble renferme P suites générées par la fonction $T_{a,b}$, de même longueur k et les premiers termes de ces suites constituent une suite arithmétique de raison a+b et de premier terme a+2b. La représentation matricielle de cet ensemble consiste à construire un tableau de k colonne et de P lignes tel que la ligne du rang j de ce tableau contient la suite $Sy_{a,b}((ja+(j+1)b))$. Le tableau obtenu est noté $T_{a,b}(P, k)$. Sur la figure suivante, on représente $T_{a,b}(16,6)$.

a + 2b	2a + 3b	a + 2b	2a + 3b	a + 2b	2a + 3b
2a + 3b	a + 2b	2a + 3b	a + 2b	2a + 3b	a + 2b
3a + 4b	5a + 6b	8a + 9b	4a + 5b	2a + 3b	a + 2b
4a + 5b	2a + 3b	a + 2b	2a + 3b	a + 2b	2a + 3b
5a + 6b	8a + 9b	4a + 5b	2a + 3b	a + 2b	2a + 3b
6a + 7b	3a + 4b	5a + 6b	8a + 9b	4a + 5b	2a + 3b
7a + 8b	11a + 12b	17a + 18b	26a + 27b	13a + 14b	20a + 21b
8a + 9b	4a + 5b	2a + 3b	a + 2b	2a + 3b	a + 2b
9a + 10b	14a + 15b	7a + 8b	11a + 12b	17a + 18b	26a + 27b
10a + 11b	5a + 6b	8a + 9b	4a + 5b	2a + 3b	a + 2b
11a + 12b	17a + 18b	26a + 27b	13a + 14b	20a + 21b	10a + 11b
12a + 13b	6a + 7b	3a + 4b	5a + 6b	8a + 9b	4a + 5b
13a + 14b	20a + 21b	10a + 11b	5a + 6b	8a + 9b	4a + 5b
14a + 15b	7a + 8b	11a + 12b	17a + 18b	26a + 27b	13a + 14b
15a + 16b	23a + 24b	35a + 36b	53a + 54b	80a + 81b	40a + 41b
16a + 17b	8a + 9b	4a + 5b	2a + 3b	a + 2b	2a + 3b

Figure 1: $T_{a,b}(16, 6)$

Noter que pour mettre en relief les distributions des vecteurs de parité relatifs aux différentes suites, on fait colorer les cases selon la règle

suivante: Une case qui contient un entier qui s'écrit sous la forme $(2j+1)a + (2j+2)b$ avec j un entier naturel quelconque sera colorée en bleu. Les cases en bleu contiennent les termes appartenant à l'ensemble $E^+(a, b)$. On remarque que la distribution et la répartition des ces termes sont indépendante de la nature des nombres a et b (entiers naturels, rationnels non entiers ou bien irrationnels).

On remarque bien que si on remplace a par 1 et b par 0, on obtient les suites de Collatz générées par la fonction $T_{1,0}$ et le tableau $T_{1,0}(16,6)$ contient les 16 premières suites de Collatz de même longueur 6. Selon le choix des valeurs de a et b , on remarque qu'il est possible d'obtenir des suites qui ne contiennent que des termes impairs ou bien des suites qui ne contiennent que des termes pairs uniquement.

4. Etude de quelques exemples

4.1 La fonction $T_{-2n, 2n+1}$

On prend le cas de la fonction étudiée dans article [5] qu'on a notée F_n et qu'on a défini comme suit : Soit n un entier relatif quelconque ($n \in \mathbb{Z}$), on définit la fonction F_n pour tout entier relatif $P \geq 2n + 2$, comme suit:

$$F_n(P) = \begin{cases} \frac{3}{2}P - n & \text{si } P \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{P}{2} + \frac{2n+1}{2} & \text{si } P \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (4.1)$$

On peut vérifier aisément que la fonction F_n correspond à la fonction $T_{-2n, 2n+1}$ avec n un entier relatif quelconque. En effet la fonction $T_{-2n, 2n+1}$ est comme suit:

$$T_{-2n, 2n+1}(P) = \begin{cases} \frac{3}{2}P - n & \text{si } P \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{P}{2} + \frac{2n+1}{2} & \text{si } P \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (4.2)$$

Il est clair que:

$$T_{-2n, 2n+1}(P) = F_n(P) \quad (4.3)$$

Le domaine de définition de la fonction $F_n(P)$ est noté $D(n)$ dans l'article [5] c'est l'ensemble qui contient tous les entiers relatifs supérieurs ou égaux à $2n+2$, on vérifie que cet ensemble est égal à $E(-2n, 2n+1)$ en effet :

$$E(-2n, 2n+1) = \{2n+2+k \mid k \in \mathbb{N}\} = D(n) \quad (4.4)$$

Le couple stable pour cette fonction correspond au couple $(2n+2, 2n+3)$ en effet:

$$\begin{cases} T_{-2n, 2n+1}(2n+2) = 2n+3 \\ T_{-2n, 2n+1}(2n+3) = 2n+2 \end{cases} \quad (4.5)$$

On peut vérifier n'importe qu'elle autre propriété démontrée dans l'article [5].

4.2 La fonction $T_{2,0}$

La fonction $T_{2,0}$ définie sur $E(2,0) = \{2,4,6,8,10,12, \dots\}$ donc le domaine de définition ne contient que des entiers naturels pairs non nuls et par suite les suites générées par cette fonction ne contiennent que des termes pairs.

$$T_{2,0}(N) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{Si } N \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{3}{2}N + 1 & \text{Si } N \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} \quad (4.6)$$

Le couple (2,4) vérifie la relation suivante:

$$\begin{cases} T_{2,0}(2) = 4 \\ T_{2,0}(4) = 2 \end{cases} \quad (4.7)$$

La relation entre la fonction $T_{2,0}$ et la fonction classique de Collatz T est comme suit :

$$T_{2,0}^k(2N) = 2T^k(N) \quad (4.8)$$

La figure suivante correspond au tableau $T_{2,0}(16,4)$ qui contient les 16 premières suites $Sy_{2,0}(P, 4)$ avec $P = 2j$ avec j un entier naturel tel que $1 \leq j \leq 16$

2	4	2	4
4	2	4	2
6	10	16	8
8	4	2	4
10	16	8	4
12	6	10	16
14	22	34	52
16	8	4	2
18	28	14	22
20	10	16	8
22	34	52	26
24	12	6	10
26	40	20	10
28	14	22	34
30	46	70	106
32	16	8	4

4k
4k+2

Figure 2: $T_{2,0}(16, 4)$

La conjecture de Collatz s'énonce comme suit pour cette fonction : toutes les suites générées par la fonction $T_{2,0}$ atteignent 2 après un nombre fini des itérations.

4.3 La fonction $T_{1,1}$

On remplace le couple (a, b) par $(1,1)$ on obtient la fonction $T_{1,1}$ qui définit sur $E(1,1) = \{3,5,7,9,11, \dots\}$. Le domaine de définition contient les termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 3 donc il ne contient que des entiers naturels impairs et par suite toutes les suites générées par cette fonction ne contiennent que des entiers impairs.

$$T_{1,1}(N) = \begin{cases} \frac{N}{2} + \frac{1}{2} & \text{Si } N \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{3}{2}N + \frac{1}{2} & \text{Si } N \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \quad (4.9)$$

Pour obtenir le vecteur de parité d'une suite quelconque générée par cette fonction on remplace un terme qui s'écrit sous la forme $4j+3$ par 1 alors qu'un terme qui prend la forme $4j+1$ sera remplacé par 0.

L'équation qui traduit la relation entre la fonction classique de Collatz notée T (ou bien $T_{1,0}$) et la fonction $T_{1,1}$ est la suivante :

$$T_{1,1}^k(2N + 1) = 2T^k(N) + 1 \quad \text{Avec } N \in \mathbb{N}^* \quad (4.10)$$

La figure suivante correspond au tableau $T_{1,1}(16,4)$. Il contient les 16 premières suites $Sy_{1,1}(P, 4)$ avec $P = 3 + 2j$ tel que $0 \leq j \leq 15$

3	5	3	5
5	3	3	5
7	11	17	9
9	5	3	5
11	17	9	5
13	7	11	17
15	23	35	53
17	9	5	3
19	29	15	23
21	11	17	9
23	35	53	27
25	13	7	11
27	41	21	11
29	15	23	35
31	47	71	107
33	17	9	5

$4k+1$
$4k+3$

Figure 3: $T_{1,1}(16, 4)$

La conjecture de Collatz pour la fonction $T_{1,1}$ peut être énoncée de la manière suivante : Toutes les suites générées par la fonction $T_{1,1}$ atteignent 3 après un nombre fini des itérations.

Exemples des nombres rationnels

Les deux nombres a et b peuvent être des nombres rationnels au lieu d'être des entiers relatifs mais toujours on doit respecter la condition $b \neq -a$:

Par exemple on peut définir la fonction $T_{\frac{1}{2},0}$ sur l'ensemble $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ suivant:

$$E\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots\right\} \quad (4.11)$$

Les expressions $T_{\frac{1}{2},0}(P)$ pour un nombre rationnel appartenant à $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ sont comme suit :

$$T_{\frac{1}{2},0}(P) = \begin{cases} \frac{1}{2}P & \text{si } P \in E^-\left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ \frac{3}{2}P + \frac{1}{4} & \text{si } P \in E^+\left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases} \quad (4.12)$$

L'équation qui traduit la relation entre la fonction classique de Collatz notée T (ou bien $T_{1,0}$) et la fonction $T_{\frac{1}{2},0}$ est la suivante :

$$T_{\frac{1}{2},0}^k\left(\frac{1}{2}N\right) = \frac{1}{2}T^k(N) \quad \text{Avec } N \in \mathbb{N}^* \quad (4.13)$$

La figure suivante correspond au tableau $T_{\frac{1}{2},0}(16,4)$. Il contient les 16 premières suites $Sy_{\frac{1}{2},0}(P, 4)$ avec $P = 0.5 + 0.5k$ tel que $0 \leq k \leq 15$:

0.5	1	0.5	1
1	0.5	1	0.5
1.5	2.5	4	2
2	1	1.5	1
2.5	4	2	1
3	1.5	2.5	4
3.5	5.5	8.5	13
4	2	1	0.5
4.5	7	3.5	5.5
5	2.5	4	2
5.5	8.5	13	6.5
6	3	1.5	2.5
6.5	10	5	2.5
7	3.5	5.5	8.5
7.5	11.5	17.5	26.5
8	4	2	1

Figure 4: $T_{\frac{1}{2},0}(16, 4)$

La conjecture de Collatz pour la fonction $T_{0.5,0}$ peut être énoncée de la manière suivante : Toutes les suites générées par la fonction $T_{0.5,0}$ atteignent 0.5 après un nombre fini des itérations.

5. Discussion des résultats

Dans ce travail, on a montré qu'elle existe une infinité des suites des fonctions de Collatz chaque suites des fonctions contient une infinité des fonctions et chaque fonction définie sur une partie de \mathbb{R} . Le domaine de

définition d'une fonction quelconque se comporte toujours comme une suite arithmétique de raison un réel non nul r et de premier terme un réel quelconque x_0 . Selon la conjecture de Collatz, si on part d'un réel x quelconque de domaine de définition, la suite de premier terme x passe toujours par le plus petit réel du domaine de définition x_0 après un nombre fini des itérations de plus le couple formé par ce réel et le réel qui le suit $(x_0 + r)$ constitue l'unique cycle stable par itérations pour cette fonction.

Exemples d'exploitation des résultats trouvés pour déterminer quelques propriétés des variantes de la fonction de Collatz en relation avec l'unicité de cycle.

Exemple 5.1

On définit la fonction $T_{3,0}$ sur $E(3,0) = \{3,6,9,12, \dots\}$ tel que :

$$T_{3,0}(P) = \begin{cases} \frac{P}{2} & \text{si } P \equiv 0 \pmod{6} \\ \frac{3}{2}P + \frac{3}{2} & \text{si } P \equiv 3 \pmod{6} \end{cases} \quad (5.1)$$

On définit la fonction $F_{3,0}$ sur \mathbb{N}^* comme suit :

$$F_{3,0}(N) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{3}{2}N + \frac{3}{2} & \text{si } N \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (5.2)$$

La fonction $T_{3,0}$ représente la restriction de la fonction $F_{3,0}$ sur $E(3,0)$. **On peut montrer que si la conjecture de Collatz est vraie pour la fonction originale de Collatz T (ou $T_{1,0}$) alors pour tout entier naturel non nul N , toutes les suites générées par la fonction $F_{3,0}$ atteignent toujours l'unique cycle (3,6) après un nombre fini des itérations quelque soit l'entier de départ.**

D'après la proposition (2.1), on sait que la conjecture de Collatz énonce que toutes les suites générées par la fonction $T_{3,0}$ et dont les premiers termes sont des éléments de $E(3,0)$ atteignent toujours le cycle (3,6) après un nombre fini des opérations.

On montre aussi que cette propriété est vraie pour toutes les suites générées par la fonction $F_{3,0}$ et dont les premiers termes sont des entiers naturels non nuls

On peut vérifier que :

$$F_{3,0}(1) = F_{3,0}^2(2) = 3 \quad (5.3)$$

Il est clair que pour toutes les suites générées par la fonction $F_{3,0}$ et dont les premiers termes sont des **entiers naturels pairs** vont rejoindre des suites

dont les premiers termes sont des entiers naturels impairs donc leurs convergences dépendent de la convergence des ces dernières donc il suffit d'étudier la convergence des suites dont les premiers termes sont **entiers naturels impairs**. Soit P un entier naturel qui n'appartient pas à l'ensemble $E(3,0)$:

$$P \in \mathbb{N}^* - E(3,0) \quad (5.4)$$

Si P ($P \neq 1$) est impair donc il existe un entier naturel non nul m non multiple de 3 tel que :

$$P = 3 + 2m \quad (5.5)$$

Comme P n'est pas un multiple de 3 donc nécessairement m est non multiple de 3 et on a :

$$F_{3,0}(P) = F_{3,0}(3 + 2m) = \frac{3}{2}(3 + 2m) + \frac{3}{2} = 6 + 3m = 3(2 + m) \quad (5.6)$$

On déduit que :

$$\forall P \in \mathbb{N}^* - E(3,0) \text{ si } p \text{ est impair alors } F_{3,0}(P) \in E(3,0) \quad (5.7)$$

On peut conclure que la suite générée par $F_{3,0}$ et de premier terme P va rejoindre une suite de premier terme un entier naturel appartenant à l'ensemble $E(3,0)$ ce qui signifie qu'elle va atteindre le cycle (3,6) après un nombre fini des itérations. On peut conclure que pour toutes les suites générées par la fonction $F_{3,0}$ et dont les premiers termes sont des entiers impairs atteignent toujours le cycle (3,6). Comme la convergence des suites générées par $F_{3,0}$ et dont les premiers termes sont **entiers naturels pairs** dépendent des suites dont les premiers termes sont des **entiers naturels impairs** alors on peut conclure que pour tous les entiers naturels non nul N, les suites générées par la fonction $F_{3,0}$ atteignent toujours (3,6) après un nombre fini des itérations.

Exemple 5.2

On définit la fonction $T_{5,0}$ sur $E(5,0) = \{5,10,15,20, \dots\}$ tel que :

$$T_{5,0}(P) = \begin{cases} \frac{P}{2} & \text{si } P \equiv 0 \pmod{10} \\ \frac{3}{2}P + \frac{5}{2} & \text{si } P \equiv 5 \pmod{10} \end{cases} \quad (5.8)$$

On définit la fonction $F_{5,0}$ sur \mathbb{N}^* comme suit :

$$F_{5,0}(N) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{3}{2}N + \frac{5}{2} & \text{si } N \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (5.9)$$

Soit N un entier naturel impair qui n'appartient pas à $E(5,0)$ ($N \notin E(5,0)$) donc il existe un entier naturel non nul m non multiple de 5 tel que :

$$N = 5 + 2m \quad (5.10)$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} F_{5,0}(N) &= F_{5,0}(5 + 2m) \\ &= \frac{3}{2}(5 + 2m) + \frac{5}{2} \\ &= 10 + 3m \end{aligned} \quad (5.11)$$

Comme m n'est pas multiple de 5 donc nécessairement $10+3m$ n'est pas un multiple de 5 et on peut conclure par la suite que :

$$\forall P \in \mathbb{N}^* \text{ si } N \notin E(5,0) \text{ alors } F_{5,0}(N) \notin E(5,0) \quad (5.12)$$

la conjecture de Collatz énonce que toutes les suites générées par $T_{5,0}$ et dont les premiers termes appartenant à $E(5,0)$ atteignent toujours 5 après un nombre fini des itérations et comme toutes les entiers impairs qui n'appartient à l'ensemble $E(5,0)$ admettent des images par $F_{5,0}$ qui n'appartient pas à $E(5,0)$ donc on peut conclure que toutes les suites générées par la fonction $F_{5,0}$ et dont les premiers termes n'appartient pas à l'ensemble $E(5,0)$ ne rejoignent jamais une suite dont les premiers termes sont des multiples de 5 et par suites ils n'atteignent jamais le cycle (5,10). Les suites qui sont générées par $F_{5,0}$ et dont les premiers termes sont des entiers naturels pairs non multiples de 5 rejoignent nécessairement des suites dont les premiers termes sont des entiers impairs non multiples de 5. On peut conclure que les seules suites qui sont générées par la fonction $F_{5,0}$ et qui vont atteindre 5 après un nombre fini des itérations sont uniquement les suites dont les premiers termes sont multiples de 5. Les autres suites finies par tomber dans d'autres cycles autres que le cycle (5,10).

-Dernière remarque

On considère les deux fonctions T_{a_1,b_1} et T_{a_2,b_2} qui définies respectivement sur les deux ensembles suivants :

$$E(a_1, b_1) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots\} \text{ et } E(a_2, b_2) = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_k, \dots\} \quad (5.13)$$

Les deux suites de premiers termes respectivement x_j et y_j qui sont générées respectivement par les fonctions T_{a_1,b_1} et T_{a_2,b_2} possèdent le même vecteur de parité, possèdent aussi le même temps du vol. De plus si la première suite atteint x_1 après un nombre bien déterminée des itérations alors la deuxième suite atteint y_1 après le même nombre des itérations.

Références

- [1] Daniel. J. Bernstein, Jeffrey C. Lagarias, The $3x+1$ Conjugacy map, Canadian Journal of Mathematics, Vol. 48(6),1996 pp,1154-1169.
- [2] Jeffrey C. Lagarias, The $3x+1$ Problem An Overview.
- [3] Franz Wegner, The Collatz Problem generalization to $3x+k$, arXiv: 2101.08060v1.
- [4] Stuart A. Kurtz, Janos Simon, The Undecidability of the Generalized Collatz Problem, December 2006.
- [5] Raouf Rajab , The sequence of Collatz functions, exceptionality of the $3n+1$ function and the notion of Collatz generalized Matrix. arXiv:2107.05629v1.hal-03279956.