



HAL
open science

Couplage champ vers câble pour la modélisation des fils obliques dans la méthode FDTD conforme

N Bui, C. Guiffaut, Alain Reineix

► **To cite this version:**

N Bui, C. Guiffaut, Alain Reineix. Couplage champ vers câble pour la modélisation des fils obliques dans la méthode FDTD conforme. 20ème Colloque International sur la Compatibilité Electromagnétique, Ecole Centrale de Lyon, Apr 2021, Lyon, France. hal-03328215

HAL Id: hal-03328215

<https://hal.science/hal-03328215>

Submitted on 29 Aug 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

COUPLAGE CHAMP VERS CÂBLE POUR LA MODÉLISATION DES FILS OBLIQUES DANS LA MÉTHODE FDTD CONFORME.

N. Bui¹, C. Guiffaut², et A. Reineix²

¹Univ. Limoges, XLIM, UMR 7252, F-87000 Limoges, Nicolas.Bui@xlim.fr

²CNRS, XLIM, UMR 7252, F-87000 Limoges, Christophe.Guiffaut@xlim.fr

Résumé Le formalisme des fils obliques permet de modéliser les interactions ondes-structures-câbles dans la méthode FDTD. Les techniques conformes réduisent significativement les erreurs de modélisation de la géométrie curviligne des structures. Nous proposons d'étendre le formalisme des fils obliques en étudiant le couplage champ vers câbles dans les cellules conformes pour les méthodes FDTD conformes. Ce couplage est réalisé avec la technique des coordonnées barycentriques généralisées (GBC) appliquée sur un polyèdre. Après une introduction de la théorie des GBC, nous détaillerons son application pour les cellules FDTD conformes. Un exemple est étudié afin d'évaluer la précision de cette méthode.

I. Introduction

La simulation numérique contribue significativement à l'étude des interactions ondes-structures, nécessaire aux problématiques issues de la CEM. La méthode historique FDTD a connu de nombreux développements dans les divers domaines des ondes, mais aussi sur ses performances en termes de précision et efficacité en temps de calcul. Le formalisme des fils obliques [1] a montré son efficacité pour la modélisation des câbles dans la FDTD. Celle-ci fournit une prédiction précise du courant sur le câble en interaction avec le champ électromagnétique calculé par la méthode FDTD.

Concernant la géométrie des structures, les techniques conformes [2]–[4] pour la FDTD prennent bien en compte la géométrie curviligne des structures. Ceci permet de s'affranchir d'une modélisation en marche d'escalier inhérente la FDTD classique, laquelle introduit une erreur non négligeable dans l'approximation. Ces techniques se basent sur la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday, et se distinguent par un traitement spécifique sur la stabilisation de cellules ne respectant pas le critère de stabilité CFL. Sachant que les câbles sont souvent positionnés proches des structures, et que l'apport des techniques conformes sur la précision du calcul du champ électromagnétique est significatif, l'extension du formalisme des fils obliques aux méthodes FDTD conformes est d'une importance cruciale pour la CEM.

Le couplage champ vers câble est la première étape de cette extension. Ceci nécessite le calcul du champ électrique le long du fil selon le modèle d'Agrawal [5]. Ce dernier s'appuie sur l'évaluation du champ électrique tan-

gentiel au câble calculé en son absence le long de sa fibre neutre. Ainsi, l'interpolation du champ électrique dans les cellules conformes est un préalable indispensable. Dans le cas standard, et supposément en cas conforme, le champ électrique et magnétique sont calculés sur les barycentres des arêtes et faces, respectivement. L'interpolation classique bilinéaire ou trilineaire suffit pour approximer le champ dans les cellules standards. Ceci devient insuffisant dans les cellules conformes, car leurs formes géométriques peuvent définir des polyèdres assez complexes. Nous proposons d'utiliser une interpolation de type barycentrique dans un polyèdre avec la théorie des coordonnées barycentriques généralisées (GBC).

Plusieurs travaux ont été menés pour établir des coordonnées barycentriques sur des polyèdres ; un bon résumé et bilan de ceux-ci se trouvent dans [6], [7]. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, des fonctions de bases utilisant les GBC comme ceux de Wachspress [8] ont été développés dans [9], [10]. La première partie est consacrée à une introduction à la théorie des GBC, et des GBC mean-value coordinates (MVC) [11]. Ensuite, des explications sur la reconstruction des polyèdres et sur leur application dans la méthode FDTD complète cette partie. Cette méthode est enfin illustrée par un exemple avec un plan électriquement parfait (PEC) afin d'évaluer sa précision.

II. Coordonnées barycentriques généralisées

Pour un tétraèdre T , les coordonnées barycentriques sont définies par :

$$\lambda_i(x) = \frac{A_i(x)}{A}, \quad \forall x \in T \quad (1)$$

où $A_i(x)$ est le volume signé défini par le tétraèdre $(x, \{v_j, 1 \leq j \leq 4 | j \neq i\})$ et $A = \sum_{i=1}^4 A_i(x)$ (Fig. 1). Ces coordonnées barycentriques vérifient des propriétés que les GBC généralisent (idéalement) dans le cas d'un polyèdre quelconque.

Soit P un polyèdre avec n sommets notés v_i , soit $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i : P \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'ensemble des fonctions λ_i sont dites GBC [7] si elles satisfont la partition de l'unité :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) = 1, \quad \forall x \in P \quad (2)$$

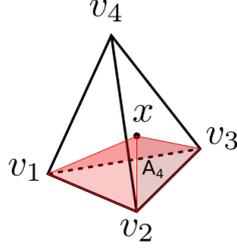


FIGURE 1. Un des volumes calculé pour déterminer les coordonnées barycentriques de x dans un tétraèdre.

et l'approximation exacte des fonctions linéaires sur P :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(x)v_i = x, \quad \forall x \in P \quad (3)$$

Des fonctions définies comme ci-dessus ne sont pas uniques pour un polyèdre P quelconque et leurs constructions peuvent ne pas être généralisées sous une même démarche. Idéalement, les GBC vérifient les propriétés suivantes :

- Strictement positif : $\lambda_i(x) \geq 0$,
- Propriété de Lagrange : $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$,
- Linéaire sur les arêtes : λ_i est linéaire sur les arêtes de P ,
- Régularité : $\lambda_i \in C^\infty$.
- Propriété de Trace : sur chaque face de δP , λ_i dégénère en des GBC 2D.

Parmi ces GBC, il faudrait choisir ou définir celles qui interpolent au mieux le champ électromagnétique au sein de la cellule conforme. Ainsi, nous recherchons idéalement des GBC avec toutes les propriétés comme sur un tétraèdre, pouvant s'appliquer sur un polyèdre concave, avec une formulation explicite des poids. Dans ce contexte, les GBC pseudo-harmoniques [12] sont des choix pertinents vis-à-vis du comportement du champ électromagnétique au voisinage de parois PEC. C'est pourquoi les MVC est un bon candidat puisque celui-ci remplit la majorité des conditions idéales, sauf la continuité limitée à C^0 sur les arêtes de P . Pour la compréhension des GBC, nous proposons de revoir les MVC dans le cadre de la construction générale de GBC à trois points, établie dans [13].

II.1. Construction à trois points : MVC

La construction dans [13] concerne un polyèdre P convexe à faces triangulaires. Dans les autres cas, une simple triangulation des faces permet de revenir à cette construction des GBC. Cette construction exploite le fait que l'intégration de la normale sur une surface fermée est nulle. On en déduit une combinaison linéaire reliant cette intégrale aux arêtes puis aux sommets. Les poids sont additionnés pour chaque sommet et une normalisation permet d'obtenir enfin les poids GBC.

Les auteurs définissent un dual de P comme un polyèdre défini par une surface fermée S_d centré sur le point à

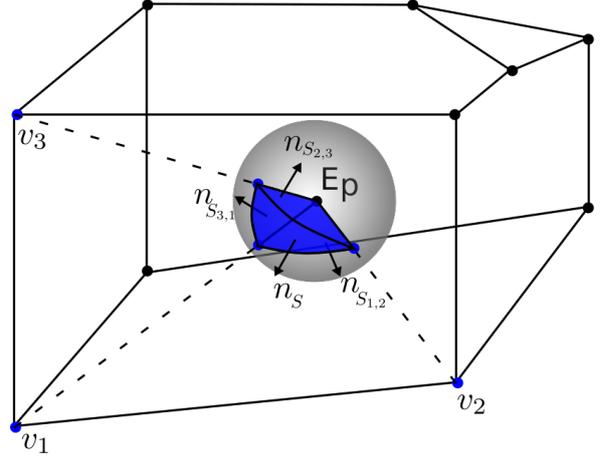


FIGURE 2. Surfaces d'intégrations associées à une facette triangulaire pour le théorème de Stokes.

interpoler que l'on nomme E_p . Dans le cas du MVC, cette surface est une sphère, comme vu sur la figure 2. Cette surface sert de surface de projection pour les sommets de P . Ceci vont ainsi définir les facettes du dual.

L'intégration de la normale sur S_d se décompose en somme d'intégrales sur chaque face du dual. Notons r l'intégrale sur cette face génériquement notée S , soit :

$$r = \int_S n, \quad (4)$$

avec n la normale extérieure à S . En appliquant le théorème de Stokes, on obtient :

$$r = - \sum_{(i,j,k)} \int_{S_{i,j}} n_k, \quad (5)$$

où (i,j,k) est la permutation circulaire dans $\{1,2,3\}$ et les surfaces $S_{i,j}$ sont définies par les points projetés v_i, v_j et E_p . Les normales n_k étant constantes sur $S_{i,j}$, on obtient :

$$r = - \sum_{(i,j,k)} |S_{i,j}| n_k, \quad (6)$$

où $|S_{i,j}|$ désigne la surface de la face $S_{i,j}$. Remarquons que chaque normale peut s'écrire dans la base $\{v_m - E_p, m \in \{1,2,3\}\}$ (faces triangulaires). On peut alors écrire :

$$r = \sum_{m=1}^3 q_m (v_m - E_p), \quad (7)$$

où q_m sont les coefficients uniques de la décomposition. Ces coefficients peuvent être déterminés avec les produits scalaires $r \cdot n_k$, puisque $n_k \cdot (v_m - E_p) = 0$ pour $m \in \{i,j\}$. D'où, avec la même permutation circulaire :

$$q_k = \frac{r \cdot n_k}{n_k \cdot (v_k - E_p)}, \quad (8)$$

et avec l'équation (6), on remplace pour obtenir finalement :

$$q_k = \frac{- \sum_{(i,j,k)} (|S_{i,j}| n_k) \cdot n_k}{n_k \cdot (v_k - E_p)}. \quad (9)$$

En sommant sur les faces du dual, on a :

$$\begin{aligned} \sum_S \int_S n &= \sum_S \sum_{m=1}^3 q_m (v_m - E_p) \\ &= \sum_{m=1}^3 \sum_S q_m (v_m - E_p) \\ &= \sum_{m=1}^3 \omega_m (v_m - E_p) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

En posant :

$$b_m = \frac{\omega_m}{\sum_{m=1}^3 \omega_m}, \quad (11)$$

on obtient les GBC b_m :

$$\sum_m b_m v_m = E_p. \quad (12)$$

Cette construction des GBC dépend seulement de $|S_{i,j}|$, désigné par Ju par les coefficients $d_{i,j}$. Ces coefficients proviennent de la trace de la surface (nommée "génératrice" par Ju) sur chaque face de la pyramide duale. Par exemple, les MVC est la trace de la sphère unité sur cette pyramide, soit un triangle sphérique. La construction des MVC utilisés dans les exemples suivants sont les MVC sphériques [11].

III. Interpolation du vecteur champ sur les sommets des cellules conformes

Afin d'appliquer les GBC, l'interpolation du vecteur champ sur les sommets des cellules conformes est nécessaire. Ceci passe d'abord par la reconstruction géométrique des cellules conformes, notamment les parois traversant ces cellules et définissant un ou plusieurs polyèdres. Notons que dans la méthode FDTD conforme, seules les intersections de la géométrie avec les arêtes de cellules sont requises pour la prise en compte des structures curvilignes. La reconstruction des polyèdres peut s'avérer laborieuse lorsque celle-ci exploite seulement ces informations. Les exemples suivants utilisent une reconstruction des polyèdres basée sur la théorie des graphes. La construction des cycles minimaux permet de reconstruire les parois internes à la cellule de Yee. Les parois reconstruites ici sont toujours décomposées en triangle. Un intérêt de cette triangulation est d'augmenter la résolution visuelle de calculs éventuels de courants de surface.

Le vecteur champ interpolé aux sommets du polyèdre sont sur un sommet de la paroi ou bien un sommet classique d'une cellule de Yee. Il est possible d'utiliser le fait que le champ FDTD soit constant sur les arêtes et faces. En appliquant une interpolation linéaire avec les cellules voisines, l'approximation du vecteur aux sommets est alors plus précise. Par exemple, pour les sommets hors paroi, l'approximation du champ magnétique aux sommets est

réalisée avec une interpolation de pondération inverse à l'aire avec au plus, quatre points de champ pour chaque direction :

$$\omega_j = \frac{1}{A_j \sum_{i=1}^4 \frac{1}{A_i}} \quad (13)$$

où A_i sont les aires des facettes supports aux champs magnétiques. Ceci signifie que la contribution d'une composante magnétique FDTD est d'autant plus forte lorsque celle-ci est intégrée sur une aire petite. L'approximation du champ électrique à ces même sommets résulte directement d'un gradient centré.

Pour les sommets localisés sur une paroi conductrice, les conditions aux limites permettent de déterminer les composantes de champ manquantes. Cependant, ces conditions limites peuvent être dégénérées (par exemple, une paroi tangente à une face de cellule de Yee) et alors la composante voisine la plus proche est arbitrairement utilisée.

IV. Résultats numériques : Interpolation du champ, calcul de courant

Le champ électrique est interpolé le long de la fibre neutre d'un câble (non couplé) d'un mètre, placé à une hauteur d'1 cm à une plaque PEC carré de 5 m de côté, en son centre. Ce fil neutre est raccordé à la plaque à ses extrémités avec une charge de 50 Ω . Le maillage est uniforme avec des cellules cubiques de 5 cm de côté. Dans la configuration standard où la plaque est sur le plan (x, y) , celle-ci est illuminée par une onde plane incidente de $(\theta, \phi) = (43^\circ, 43^\circ)$ et dotée d'une source Gaussienne de fréquence maximale égale à 300 MHz. L'onde plane est polarisée à $\psi = 23.8^\circ$. Les résultats avec la FDTD conforme sont données en exemple en effectuant une rotation de 37° par rapport à l'axe y . Une vue complète de la configuration dans le cas FDTD conforme est donnée sur la figure 3.

Les techniques conformes utilisées sont : Benkler [2], Simplified Conform (SC) [4], et l'Enlarged Cell Technique (ECT) [3], avec une CFL de 0.1, 0.5 et 0.9, respectivement. Pour chacune, rappelons que la stabilisation des cellules instables est une augmentation de l'aire, une élongation des arêtes métalliques, et une répartition adéquate des forces électromotrices au voisinage de la cellule instable, respectivement.

Les figures 4 et 5 donnent l'approximation au point interpolé et le courant sur câble calculé en mode ligne de transmission, respectivement. Les vecteurs champs aux sommets sont calculés avec une interpolation linéaire sauf dans le résultat où "nullgrad" est attaché au suffixe de sa légende. Sur ces résultats, les erreurs restent assez faibles de l'ordre de 2% et 5% en moyenne sur la bande de fréquence pour le champ et le courant, respectivement. Notons la convergence des résultats des techniques

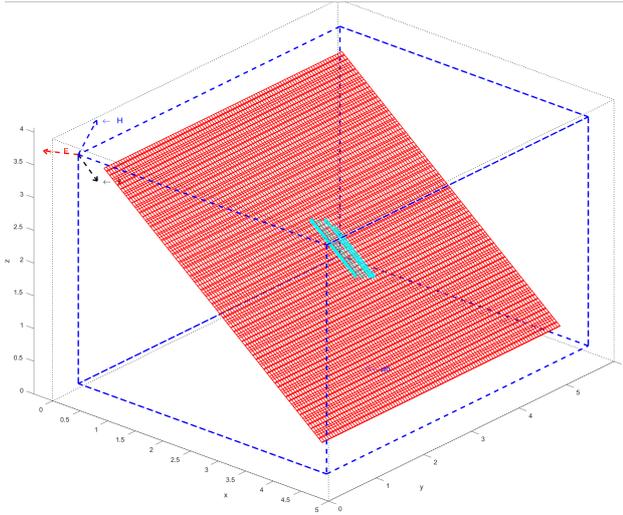


FIGURE 3. Vue complète de la configuration dans le cas FDTD conforme. La trace de la plaque sur les facettes de cellule de Yee est visible en rouge. Des points d'observations sont positionnés le long du câble en bleu clair.

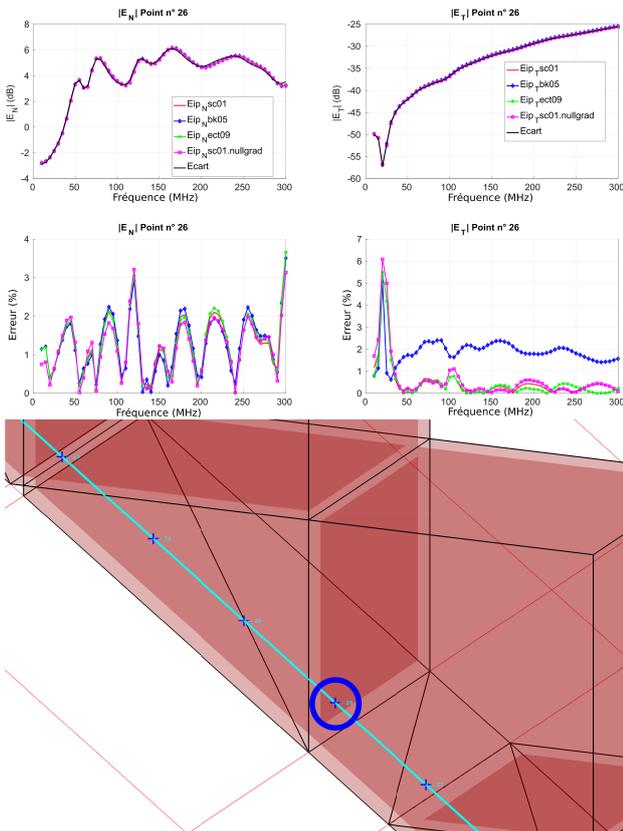


FIGURE 4. Haut : Champ électrique normal (à la plaque) et tangentiel (module puis erreur) au point 26. Bas : Localité du point 26 (entouré) dans la cellule conforme.

conformes Benkler et SC vers l'ECT, lorsque la CFL est assez basse afin d'avoir un nombre de cellules instables négligeables et donc une dégradation très limitée pour stabiliser les cellules conformes.

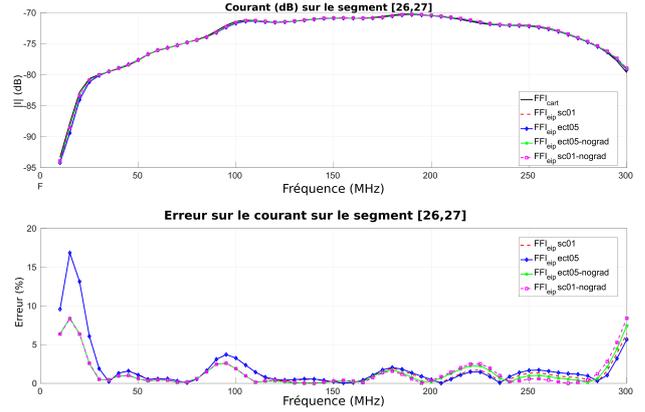


FIGURE 5. Courant (module puis erreur) sur le segment [26,27] du fil neutre.

V. Conclusion

Une méthode d'interpolation du champ électrique et magnétique dans les cellules conformes a été proposée pour la modélisation des câbles dans les schémas FDTD conformes. Celle-ci est basée sur les GBC et notamment les MVC ont été utilisés pour les cas présents. Cette méthode nécessite la reconstruction des polyèdres et l'approximation des vecteurs champs sur ses sommets. Les cas présentés montrent des résultats avec une interpolation assez précise du champ et du courant sur un fil neutre. En perspective, cette méthodologie peut permettre d'obtenir le couplage réciproque champ-câble et d'étendre totalement le formalisme des fils obliques dans les schémas FDTD conformes.

Références

- [1] C. Guiffaut, A. Reineix, and B. Pecqueux, "New oblique thin wire formalism in the fddt method with multiwire junctions," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 60, no. 3, pp. 1458–1466, March 2012.
- [2] S. Benkler, N. Chavannes, and N. Kuster, "A new 3-d conformal pec fddt scheme with user-defined geometric precision and derived stability criterion," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, no. 6, pp. 1843–1849, June 2006.
- [3] T. Xiao and Q. H. Liu, "A 3-d enlarged cell technique (ect) for the conformal fddt method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 56, no. 3, pp. 765–773, March 2008.
- [4] I. Zagorodnov, R. Schuhmann, and T. Weiland, "Conformal fddt-methods to avoid time step reduction with and without cell enlargement," *J. Comput. Phys.*, vol. 225, no. 2, pp. 1493 – 1507, 2007.
- [5] A. K. Agrawal, H. J. Price, and S. H. Gurbaxani, "Transient response of multiconductor transmission lines excited by a nonuniform electromagnetic field," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. EMC-22, no. 2, pp. 119–129, May 1980.
- [6] M. S. Floater, "Generalized barycentric coordinates and applications," *Acta Numerica*, vol. 24, p. 161–214, 2015.
- [7] K. Anisimov, Dmitry; Hormann, "Analysis and new constructions of generalized barycentric coordinates in 2D

- ,” Theses, Università della Svizzera italiana, May 2017. [Online]. Available : <http://doc.rero.ch/record/289174>
- [8] E. L. Wachspress, “Barycentric coordinates for polytopes,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 61, no. 11, pp. 3319 – 3321, 2011. [Online]. Available : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122111003336>
- [9] W. Chen and Y. Wang, “Minimal degree $H(\text{curl})$ and $H(\text{div})$ conforming finite elements on polytopal meshes,” *ArXiv e-prints*, Feb. 2015.
- [10] D. P. Botelho, Y. Marechal, and B. Ramdane, “Vector interpolation on natural element method,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 52, no. 3, pp. 1–4, March 2016.
- [11] M. S. Floater, G. Kós, and M. Reimers, “Mean value coordinates in 3d,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 22, no. 7, pp. 623 – 631, 2005, geometric Modelling and Differential Geometry. [Online]. Available : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167839605000725>
- [12] R. Chen and C. Gotsman, “On pseudo-harmonic barycentric coordinates,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 44, pp. 15 – 35, 2016. [Online]. Available : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167839616300462>
- [13] T. Ju, P. Liepa, and J. Warren, “A general geometric construction of coordinates in a convex simplicial polytope,” *Comput. Aided Geom. Des.*, vol. 24, no. 3, pp. 161–178, Apr. 2007. [Online]. Available : <http://dx.doi.org/10.1016/j.cagd.2006.12.001>