



**HAL**  
open science

# Dualité des solutions résonnantes supercritiques en conjugaison de phase acoustique

Qi Zhang, Alain Merlen

► **To cite this version:**

Qi Zhang, Alain Merlen. Dualité des solutions résonnantes supercritiques en conjugaison de phase acoustique. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03324079

**HAL Id: hal-03324079**

**<https://hal.science/hal-03324079>**

Submitted on 23 Aug 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Dualité des solutions résonnantes supercritiques en conjugaison de phase acoustique

Qi Zhang, Alain Merlen

Laboratoire Européen en Magnéto-Acoustique Non linéaire  
Laboratoire de Mécanique de Lille UMR CNRS 8107  
Université des Sciences et Technologies de Lille (Lille1)  
Cité scientifique - Bâtiment M3  
59655 Villeneuve d'Ascq Cédex  
qi.zhang@ed.univ-lille1.fr

## Résumé :

*L'étude des solutions analytiques du régime supercritique de la conjugaison de phase magnéto-acoustique est enrichie d'un nouveau type de solutions qui souligne le fait que les solutions classiques obtenues jusqu'alors sont d'un type particulier. Cette dualité des solutions s'accompagne d'une différence de seuil de pompage qui explique pourquoi la solution nouvelle dite "impaire" est moins facile à observer. Le passage d'une solution à l'autre est cependant très sensible à la valeur du rapport entre la longueur de la zone active et la longueur d'onde.*

## Abstract :

*The study of the analytical solutions of the supercritical wave phase conjugation bring a new kind of solution showing that the classical ones, obtained hitherto, were of particular type. This dual solutions comes over a higher threshold, which explains why they have not been detected before. Going from one solution to the other depends dramatically on the ratio between the length of the active zone and the half wave length.*

## Mots-clefs :

**acoustique ; ultrasons ; conjugaison de phase**

## 1 Introduction

La conjugaison de phase acoustique ou ultrasonore est un couplage non linéaire au sein d'un milieu actif entre une onde acoustique incidente et une source d'énergie oscillante. Sous l'effet de cette source d'énergie, le milieu actif module les propriétés élastiques du matériau ce qui permet à l'onde acoustique de pomper cette énergie lorsque certaines conditions de résonance paramétrique sont remplies. L'onde incidente est alors amplifiée exponentiellement et par conservation de la quantité de mouvement donne naissance à une onde "conjuguée" inversée temporellement mais ayant la même amplification, c'est le mode supercritique. En pratique le conjugateur est un cylindre de matériau magnéto-strictif (exemple : une ferrite Terbium-fer) qui permet une modulation d'amplitude de l'ordre de 4 % de son module de compressibilité sous l'effet d'un champ magnétique alternatif. Ce champ est réalisé à l'aide d'un solénoïde coaxial au conjugateur. En première approximation, une théorie monodimensionnelle, dans la configuration générale rappelée figure 1, suffit à décrire les principales caractéristiques du comportement du conjugateur. Pour que la résonance paramétrique survienne, l'onde incidente doit contenir une composante de fréquence  $\omega$  moitié de celle du champ magnétique  $\Omega$ .

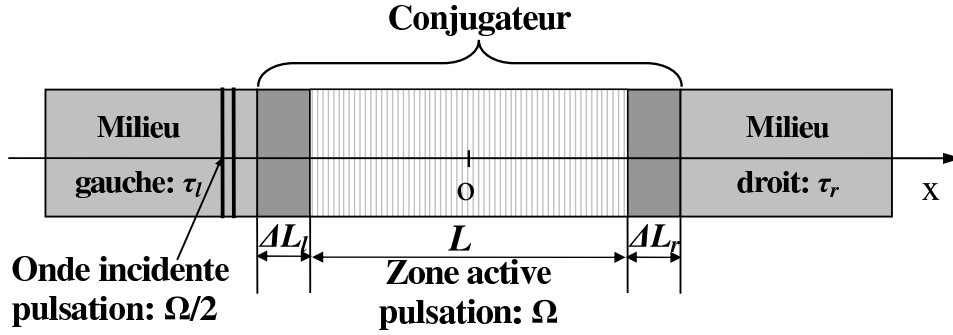


FIG. 1 – Principe de la Conjugaison de Phase Magnéto Acoustique.

## 2 Equations du problème modèle

Dans le cas modèle monodimensionnel avec un pompage dit linéaire, le phénomène est régi par les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = m \frac{\Omega \theta}{2} \sin(\Omega t + \varphi) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

où  $\theta = \frac{p}{\rho_0 c}$ ,  $p$  étant la pression acoustique dans le fluide (ou la contrainte élastique normale suivant l'axe dans le solide),  $v$  la vitesse particulaire,  $\rho_0$  la masse volumique, et  $c$  la vitesse du son dans le matériau. Pour le solide on prendra pour simplifier la seule vitesse longitudinale car en 1D, les ondes transverses ne sont pas excitées. Le couplage avec le champ magnétique réside dans l'expression de la vitesse du son dans la "zone active" :  $c^2 = c_0^2 [1 + m \cos(\Omega t + \varphi)]$  où  $m \ll 1$  est appelée profondeur de modulation et  $c_0$  est la vitesse du son en absence de champ magnétique. En introduisant comme nouvelles variables, l'onde directe  $w_1 = v + \theta$  et l'onde conjuguée  $w_2 = v - \theta$ , on peut écrire les équations sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} + c_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} = m \frac{\Omega}{4} (2w_1 - w_2) \sin(\Omega t + \varphi), \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - c_0 \frac{\partial w_2}{\partial x} = -m \frac{\Omega}{4} (w_1 - 2w_2) \sin(\Omega t + \varphi). \end{cases} \quad (1)$$

qui revient à un système hyperbolique linéaire avec des termes sources assurant le couplage et la création de l'onde conjuguée. On voit facilement que le changement de variable  $x \mapsto -x$  et  $w_1 \mapsto w_2$  laisse le système inchangé. Le système est résolu numériquement en volumes finis par des méthodes explicites de type Godunov du second ordre adaptées aux milieux hétérogènes Merlen A. *et al.* (2002), Voinovich P. *et al.* (2003), Voinovich P. *et al.* (2005).

Dans la zone active définie par  $|x| \leq \frac{L}{2}$ , le phénomène est régi par les équations (1), à l'extérieur de la zone active, le terme source est nul et le système se résume à celui de l'advection linéaire 1D. Le terme source est très petit mais si la condition de résonance paramétrique  $\Omega = 2\omega$  est réalisée, il permet le transfert énergétique du champ magnétique au champ acoustique.

## 3 Solutions résonnantes stables

Le cas général des solutions supercritiques où la zone active est incluse dans un conjugateur lui même en contact avec des milieux passifs extérieurs (Figure 1) a été récemment traité dans

la littérature Merlen A., Zhang Q. (2006-a). On pose  $\tau_l = (\rho_l c_l)/(\rho_0 c_0)$  le rapport d'impédance entre le milieu de gauche et le conjugué ainsi que  $\tau_r = (\rho_r c_r)/(\rho_0 c_0)$  pour le milieu de droite. De plus on définit

$$\tau'_l = \frac{\tau_l + \tanh\left(\frac{\Gamma \Delta L_l}{c_0}\right)}{1 + \tau_l \tanh\left(\frac{\Gamma \Delta L_l}{c_0}\right)}$$

et

$$\tau'_r = \frac{\tau_r + \tanh\left(\frac{\Gamma \Delta L_r}{c_0}\right)}{1 + \tau_r \tanh\left(\frac{\Gamma \Delta L_r}{c_0}\right)}$$

les rapports d'impédance apparent à la limite de la zone active. Alors, les solutions résonnantes stables sont données, dans la zone active par Merlen A., Zhang Q. (2006-b) :

$$w_1 = -Ae^{\Gamma t} \left( \sin\left(\frac{k\alpha}{4}x + \xi_1\right) \sin\left(-\frac{kx}{2} + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_1\right) \right) \quad (2)$$

et

$$w_2 = Ae^{\Gamma t} \left( \sin\left(\frac{k\alpha}{4}x + \xi_2\right) \sin\left(\frac{kx}{2} + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_2\right) \right) \quad (3)$$

où  $k = \Omega/c_0$  et  $A$  est l'amplitude atteinte à l'issue du transitoire d'établissement de l'onde résonnante stable. Cette dernière se caractérise par une amplitude lentement variable dans l'espace mais dont la forme est invariable dans le temps pendant la phase de croissance exponentielle. C'est le rôle de  $\alpha$ ,  $\xi_1$  et  $\xi_2$  de caractériser cette enveloppe spatiale. L'essentiel des travaux de la littérature a donc porté sur la détermination de ces 3 inconnues Merlen A., Zhang Q. (2006-b), Merlen A., Zhang Q. (2006-a). La solution pour  $\alpha$  s'obtient en résolvant :

$$G(\alpha) = \frac{\sqrt{m^2 - (2\alpha)^2}}{2\alpha} - \cot(2 \arctan G_0(\alpha)) = 0 \quad (4)$$

où

$$G_0(\alpha) = \frac{\left[ (\tau'_l + \tau'_r) \cot\left(\frac{k\alpha L}{4}\right) \pm \sqrt{G_1(\alpha)} \right]}{2}, \text{ avec } G_1(\alpha) = \left( (\tau'_l + \tau'_r) \cot\left(\frac{k\alpha L}{4}\right) \right)^2 + 4\tau'_l \tau'_r. \quad (5)$$

L'inconnue  $\xi_1$  est obtenue par

$$\tan \xi_1 = \frac{\sin\left(\frac{k\alpha L}{8}\right) + \frac{1-\tau'_l}{1+\tau'_l} \sin\left(-\frac{k\alpha L}{8} + \gamma\right)}{\cos\left(\frac{k\alpha L}{8}\right) - \frac{1-\tau'_l}{1+\tau'_l} \cos\left(-\frac{k\alpha L}{8} + \gamma\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{k\alpha L}{8}\right) + \frac{1+\tau'_r}{1-\tau'_r} \sin\left(\frac{k\alpha L}{8} + \gamma\right)}{\cos\left(\frac{k\alpha L}{8}\right) - \frac{1+\tau'_r}{1-\tau'_r} \cos\left(\frac{k\alpha L}{8} + \gamma\right)}$$

avec  $\gamma = \arcsin\left(\frac{2\alpha}{m}\right)$  et finalement  $\xi_2 = \xi_1 + \gamma$ . L'équation (4) généralise celle obtenue dans le cadre de l'acousto-optique Thompson R.B *et al.* (1971). La figure 2 montre un exemple de comparaison théorie-simulation pour une onde conjuguée à 10 MHz, dans un conjugué dont la zone active fait 2 cm.

#### 4 Solutions duales

Le succès des comparaisons simulation-théorie, la concordance des résultats théoriques avec ceux de l'acousto-optique, et le fait que la théorie soit valable à l'ordre  $O(m)$ , n'avaient jusqu'à

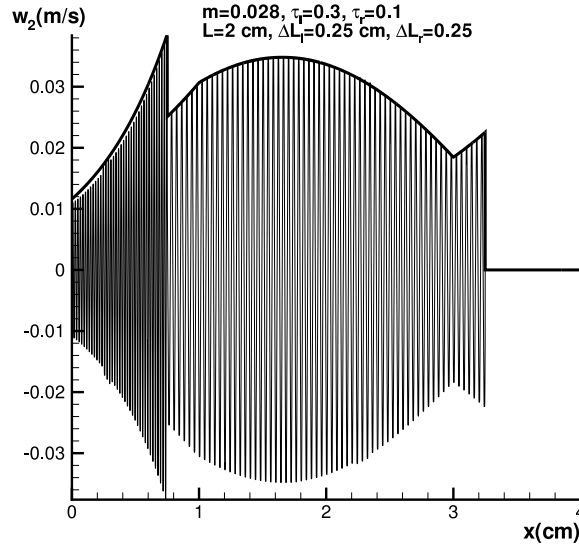


FIG. 2 –  $w_2$  après  $t = 18\mu s$ . — Amplitude théorique, — Simulation

présent conduit à étudier en détail deux autres inconnues du problème, à savoir  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Celles-ci étaient obtenues à  $O(m)$  près comme une condition de phase nécessaire à l'élimination du temps dans la résolution du problème Merlen A., Zhang Q. (2006-b). Cependant, la résolution à l'ordre  $m$  Merlen A., Zhang Q. (2006-c) a montré que la relation entre  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  était exacte et non valable à  $O(m)$  près. Or cette relation provient des conditions à la frontière qui conduisent à :

$$\sin\left(-\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1\right) = 0 \quad (6)$$

$$\sin\left(-\frac{k\alpha L}{8} + \xi_1\right) \pm \frac{1 - \tau_l}{1 + \tau_l} \sin\left(-\frac{k\alpha L}{8} + \xi_2\right) = 0 \quad (7)$$

$$\sin\left(\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1\right) = 0 \quad (8)$$

$$\sin\left(\frac{k\alpha L}{8} + \xi_1\right) \pm \frac{1 + \tau_r}{1 - \tau_r} \sin\left(\frac{k\alpha L}{8} + \xi_2\right) = 0. \quad (9)$$

Les équations (6) et (8) impose désormais strictement  $kL = 0 \pmod{\pi}$  !! Ce qui signifie que la zone active doit être nécessairement un nombre entier de fois  $\lambda/4$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde. De plus, dans les équations (7) et (9), le choix du signe  $\pm$  correspond à la valeur de  $\cos(\pm\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1)$ . Dès lors, les solutions classiques ne correspondent plus qu'au cas où ce nombre est pair et où le signe  $+$  ou  $-$  doit être retenu simultanément dans (6) et (8). Ce choix qui suppose que l'enveloppe de l'amplitude n'est jamais nulle est le plus naturel. Désormais, le choix alternatif où l'un des signe est  $+$  et l'autre  $-$  s'impose pour le cas où ce nombre est impair. Il doit donc exister une autre famille de solutions. L'existence de telles solutions n'avait été évoqué que succinctement en Merlen A. *et al.* (2002) mais dans le cadre d'une théorie de pompage non linéaire. Pour ces solutions dites impaires,  $\alpha$  est la plus petite solution de la fonction  $G_0$  qui s'écrit désormais :

$$G_0(\alpha) = \frac{\left[(1 + \tau_l' \tau_r') \cot\left(\frac{k\alpha L}{4}\right) \pm \sqrt{G_1(\alpha)}\right]}{2\tau_l'} \quad (10)$$

La figure 3 présente une solution impaire dans le cas où la longueur de la zone active a été allongée d'une demi longueur d'onde et est en contact direct avec les milieux extérieurs. La

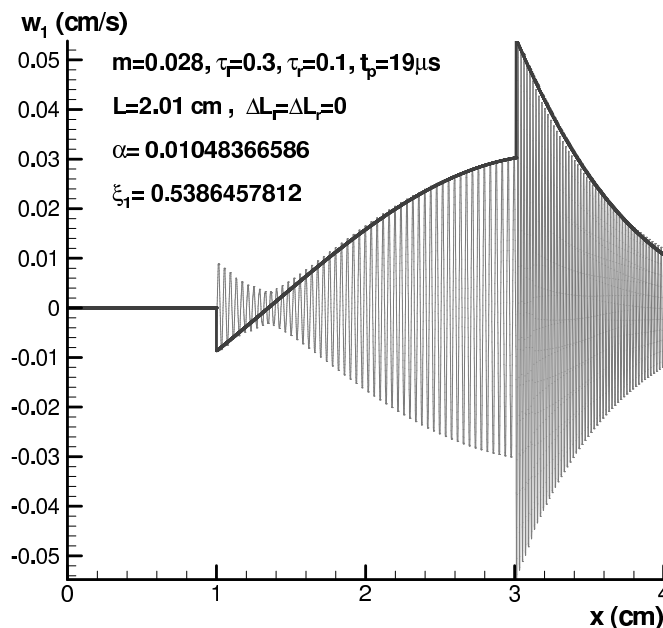


FIG. 3 –  $w_1$  après  $t = 39\mu s$ . — Amplitude théorique, — Simulation

répartition des contraintes dans le conjugué n'est pas la seule différence entre les deux solutions. La différence la plus importante est dans le fait que la solution marginale, donnée par  $G_0(\alpha) = 0$  se situe à un niveau de seuil  $m = m_0$  supérieur pour la solution impaire avec un taux de croissance exponentiel plus faible. Il existe donc des situations où la solution paire est supercritique et où une augmentation de  $\lambda/4$  de la longueur de la zone active fait basculer le système dans une situation subcritique (Figure 4).

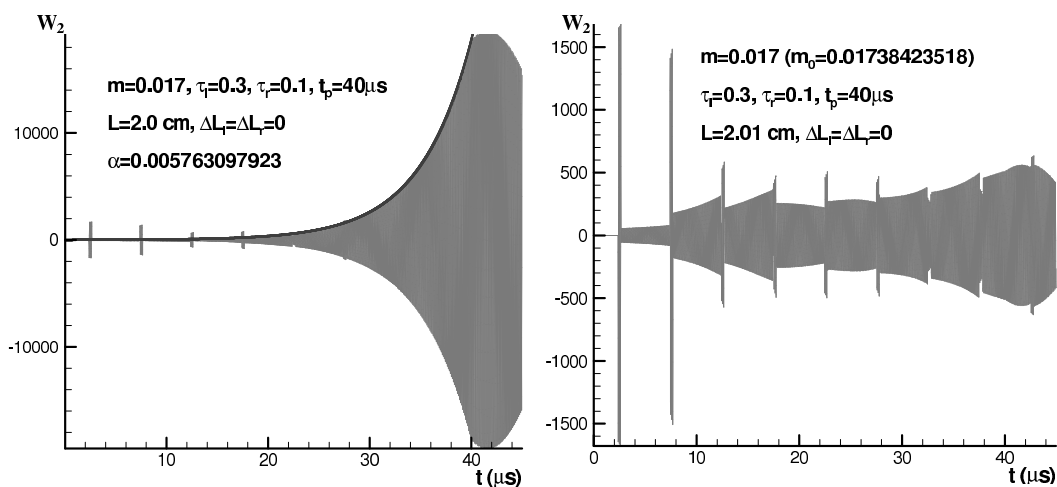


FIG. 4 – Onde conjuguée en fonction du temps à la limite droite de la zone active. (Simulation de gauche :  $L=2\text{cm}$  cas supercritique, simulation de droite :  $L=2.01\text{ cm}$  cas subcritique)

Cette sensibilité du système à la valeur du rapport  $\lambda/L$ , montre la complexité des phénomènes qui peuvent se produire dans un conjugué dans le cas où l'hypothèse monodimensionnelle n'est pas exactement satisfaite, soit sous l'effet d'une légère incidence, soit sous l'effet

d'une imperfection géométrique. Il en découle vraisemblablement l'instauration de systèmes d'ondes se déplaçant dans la direction orthogonale à l'axe du conjugateur et pouvant pomper une partie importante de l'énergie. Ces ondes pourraient expliquer une partie de la surchauffe des conjugateurs dans les applications à forte puissance (Hyperthermie...)

## 5 Conclusions

La théorie monodimensionnelle de la conjugaison de phase supercritique a permis d'approfondir la connaissance de la physique du phénomène. Elle a montré que les solutions habituellement trouvées dans les simulations et confrontées avec succès à la théorie ne sont pas les seules possibles. De plus, ces solutions n'apparaissent plus maintenant que comme un cas particulier puisqu'elles ne s'appliquent que pour des longueurs de la zone active multiples paires du quart longueur d'onde. A l'opposé une solution dite impaire, dont l'amplitude spatiale s'annule dans la zone active, apparaît si la longueur de la zone active est un multiple impair du quart longueur d'onde. Cette solution impaire a un seuil plus élevé que la solution paire. Entre ces deux solutions, il existe des situations intermédiaires qui n'ont pas encore de solutions analytiques mais dont les simulations montrent qu'elles évoluent continûment du cas pair au cas impair. Cette grande sensibilité du phénomène à la longueur de la zone active montre que la réalisation d'un conjugateur efficace dans une large gamme d'incidences est un défi technologique que l'approfondissement de l'étude des solutions résonnantes peut aider à résoudre.

## Références

- Merlen A., Preobrazhenski V., Pernod P. 2002 Supercritical parametric phase conjugation of ultrasound. Numerical simulation of non linear and non stationary modes *J. Acoust. Soc. Am.* **112** 2656-2665
- Voinovich P., Merlen A., Timofeev E., Takayama K. A Godunov-type finite-volume scheme for unified solid-liquid elastodynamics on arbitrary two-dimensional grids *Shock Waves* **13** pp. 221-230
- Voinovich P., Merlen A. 2005 Two-dimensional numerical simulation of acoustic wave phase conjugation in magnetostrictive elastic media *J. Acoust. Soc. Am.* **118(6)** 3491-3498
- Merlen A., Zhang Q. 2006 Paraxial theory of supercritical wave phase conjugation in a realistic magnetoacoustic conjugator *Appl. phys. lett.* **89** 194102 (3 pages)
- Merlen A., Zhang Q. 2006 Resonant solutions in wave phase conjugation induced by a limited magneto-acoustic conjugator *J. Acous. Soc. Am.* **119(6)** 3637-3649
- Thompson R. B., Quate C. F. 1971 Nonlinear interaction of microwave electric fields and sound in  $LiNbO_3$  *J. Appl. Phys.* **42(3)** 907-919
- Merlen A., Zhang Q. 2006 Theory and simulation of wave phase conjugation *Ultrasonics* **44** e1475-e1478