



HAL
open science

Trouver un équilibre de Nash mixte algébrique dans les jeux sous forme normale et succincts

Hélène Fargier, Paul Jourdan, Régis Sabbadin

► **To cite this version:**

Hélène Fargier, Paul Jourdan, Régis Sabbadin. Trouver un équilibre de Nash mixte algébrique dans les jeux sous forme normale et succincts. Conférence Nationale en Intelligence Artificielle (CNIA @ PFIA 2021), AFIA : Association française pour l'intelligence artificielle, Jun 2021, Bordeaux (en ligne), France. pp.6 - 13. hal-03321145

HAL Id: hal-03321145

<https://hal.science/hal-03321145>

Submitted on 17 Aug 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Trouver un équilibre de Nash mixte algébrique dans les jeux sous forme normale et succincts

H. Fargier¹, P. Jourdan^{1,2}, R. Sabbadin²

¹ IRIT, Université de Toulouse, Toulouse, France

² INRAE, Université de Toulouse, UR MIAT, Castanet-Tolosan, France

helene.fargier@irit.fr, {paul.jourdan, regis.sabbadin}@inrae.fr

Résumé

Cet article présente une approche combinatoire pour le calcul exact d'équilibres de Nash dans les jeux à N joueurs, basée sur l'utilisation de nombres algébriques. Cette nouvelle approche est une version algébrique et combinatoire de l'algorithme géométrique proposé par Wilson. Nous fournissons des preuves modernes et "constructives" des résultats de Wilson, permettant d'exploiter des outils logiciels de calcul de bases de Gröbner et de variétés algébriques, disponibles dans des librairies mathématiques efficaces. Nous montrons que notre méthode s'applique également aux jeux hypergraphiques. De plus, le gain en taille de représentation permet une limitation de la complexité au pire cas de l'algorithme.

Mots-clés

Théorie des jeux, Équilibres de Nash, Systèmes polynomiaux

Abstract

This paper presents a combinatorial approach to compute algebraic number representations of exact mixed Nash equilibria in N -person games. This approach is an algebraic, combinatorial version of Wilson's geometric algorithm. The modern and constructive proofs of Wilson's results we provide allow one to exploit algebraic tools, available in efficient mathematic libraries, for computing Groebner bases and varieties. Applying this method to hypergraphical games, we show that the decrease of the size of the representation comes along with a limitation of the worst-case complexity of the algorithm.

Keywords

Game theory, Nash equilibria, polynomial systems

1 Introduction

La méthode géométrique de parcours de chemin proposée par Wilson [20], qui étend l'algorithme de résolution de jeux à deux joueurs de Lemke-Howson [15], permet théoriquement de calculer un équilibre de Nash mixte pour un jeu à N joueurs. Cependant, bien que des implémentations de l'algorithme de Lemke-Howson existent pour les jeux bimatriciels et polymatriciels [13], l'approche de Wilson n'a

pas encore mené à un algorithme implémentable pour les jeux à N joueurs. Wilson a montré que trouver un équilibre de Nash mixte revient à trouver une solution à un *Problème de Complémentarité Polynomiale (PCP)* et a suggéré une description mathématique de la résolution des PCP non dégénérés. La description de Wilson [20] est informelle et quelques étapes ne sont pas définies. Comme indiqué par l'auteur, dès qu'il y a plus de 2 joueurs, l'étape principale de l'algorithme (le parcours d'arc) : *"requires the solution of a set of simultaneous multi-linear equations (...) which is by no means a trivial presumption"*.

Dans cet article, nous proposons une approche combinatoire, basée sur des principes de géométrie algébrique, pour calculer un équilibre de Nash mixte exact, sous la forme d'un nombre algébrique, dans un jeu à N joueurs sous forme normale [17]. Pour ceci, nous transformons la méthode de parcours de chemin géométrique de Wilson en un algorithme algébrique et combinatoire, et nous proposons une présentation moderne et constructive des résultats de correction de la méthode de Wilson. Dans la procédure de parcours de chemin que nous proposons, les coordonnées des nœuds sont des nombres algébriques, c'est-à-dire sont représentés implicitement par des racines d'un polynôme univarié à coefficients rationnels (ou algébriques eux-mêmes). Ceci permet d'exploiter des logiciels de géométrie algébrique (SINGULAR) pour effectuer les étapes les plus difficiles de l'algorithme.

Dans la section 2, nous présentons la formulation, de Wilson [20] du problème de recherche d'équilibre de Nash en un *Problème de Complémentarité Polynomiale (PCP)*. La section 3 présente un algorithme original de parcours de chemin permettant de résoudre le PCP obtenu. La section 4 illustre cette méthode sur un jeu à trois joueurs. Finalement, la section 5, présente une extension de notre algorithme aux jeux graphiques [14] et hypergraphiques [18].

2 Jeux à N joueurs et problèmes de complémentarité polynomiale

Considérons un jeu à N joueurs $\Gamma^N = (P, \pi, a)$. $P = \{1, \dots, N\}$ est l'ensemble des joueurs, $\pi = S_1 \times \dots \times S_N$ est l'ensemble des stratégies jointes pures du jeu (S_n est l'ensemble des stratégies pures du joueur $n \in P$). a_ω^n est la

désutilité, strictement positive¹, reçue par le joueur n quand la stratégie jointe pure est $\omega \in \pi$. $a = (a_\omega^n)_{\omega \in \pi, n \in P}$ est la matrice de désutilités, ayant $|\pi| = \prod_{i=1..N} |S_i|$ lignes et N colonnes.

Une stratégie mixte du joueur n , $\xi^n = (\xi_i^n)_{i \in S_n}$, est une distribution de probabilité sur les stratégies pures de n . Une stratégie mixte jointe est un N -uplet $\xi = (\xi^n)_{n \in P}$ de stratégies mixtes.

Un équilibre de Nash mixte d'un jeu Γ^N est défini par :

Definition 1 (Équilibre de Nash) Pour un jeu $\Gamma^N = (P, \pi, a)$. Une stratégie jointe mixte $\xi = (\xi^n)_{n \in P, i \in S_n}$ est un équilibre de Nash mixte de Γ^N si et seulement si :

$$ED_n[\xi] \leq ED_n[(\bar{\xi}^n, \xi^{-n})], \forall \bar{\xi}^n \neq \xi^n, \forall n = 1, \dots, N,$$

$$\text{où } ED_n[\xi] =_{def} \sum_{\omega=(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \pi} a_\omega^n \prod_{i=1}^N \xi_{\omega_i}^i,$$

et $(\bar{\xi}^n, \xi^{-n})$ est la stratégie jointe mixte où la stratégie mixte ξ^n a été remplacée par la stratégie mixte $\bar{\xi}^n$.

$ED_n[\xi]$ est l'espérance mathématique de la désutilité obtenue par le joueur n lorsque la stratégie jointe mixte ξ est adoptée. En d'autres mots, un équilibre de Nash mixte est une stratégie jointe mixte pour laquelle aucun joueur ne peut diminuer sa désutilité espérée en changeant unilatéralement sa propre stratégie mixte.

Wilson [20] montre qu'il est possible de calculer un équilibre de Nash en résolvant un *Problème de Complémentarité polynomiale (PCP)*, que nous allons décrire. Dans ce PCP, une stratégie mixte du joueur n est indirectement représentée par un vecteur de réels non-négatifs, $x^n = \{x_i^n, i \in S_n\}$. $x = (x_i^n)_{n \in P, i \in S_n}$ représente indirectement une stratégie jointe mixte. x^n n'est pas une distribution de probabilité, mais nous construirons une distribution de probabilité associée en normalisant x^n .

Définissons les polynômes multilinéaires suivants :

$$A_i^n(x^{-n}) = \sum_{\omega_n=i} a_\omega^n \prod_{\nu \neq n} x_{\omega_\nu}^\nu, \forall n \in P, i \in S_n \quad (1)$$

$$A^n(x) = \sum_{i \in S_n} A_i^n(x^{-n}) x_i^n, \forall n \in P, \quad (2)$$

où, par définition, $x^{-n} = (x_i^\nu)_{\nu \in P \setminus \{n\}, i \in S_\nu}$.

Quand x^n est normalisé, c.à.d quand $x^n = \xi^n$ est une stratégie mixte, $A^n(\xi)$ est la désutilité espérée obtenue par le joueur n sous la stratégie jointe ξ et $A_i^n(\xi^{-n})$ est celle obtenue quand seul n dévie de sa stratégie mixte ξ^n en choisissant la stratégie pure $i \in S_n$.

Definition 2 (Problème de complémentarité polynomiale) Soit $\Gamma^N = (P, \pi, a)$ un jeu sous forme normale. Le problème de complémentarité polynomiale correspondant

¹. Nous conservons la formulation proposée par Wilson, qui considère que les joueurs minimisent leur désutilité. Tout jeu de maximisation d'utilité peut être représenté par un jeu équivalent de minimisation de désutilité.

est le système d'équations/inéquations suivant, pour les variables réelles $(x_i^n)_{n \in P, i \in S_n}$:

$$\forall (n, i) \in I_N, \begin{cases} x_i^n \geq 0 \\ A_i^n(x^{-n}) \geq 1 \\ x_i^n \cdot (A_i^n(x^{-n}) - 1) = 0 \end{cases} \quad (\mathcal{S}^N)$$

où $I_N =_{def} \{(n, i), 1 \leq n \leq N, i \in S_n\}$.

$D = |I_N|$ est le nombre de variables x_i^n . Le problème (\mathcal{S}^N) est appelé *problème de complémentarité polynomiale* [10] car nous cherchons une solution non négative x satisfaisant, pour tout $(n, i) \in I_N$, soit $x_i^n = 0$, soit $A_i^n(x^{-n}) = 1$ (complémentarité) et les $A_i^n(x^{-n})$ sont des polynômes multivariés de variables $(x_i^n)_{n \in P, i \in S_n}$.

Dans un jeu à deux joueurs ($N = 2$), on peut vérifier que $A_i^n(x^{-n})$ est une fonction linéaire pour tout (n, i) . Le problème (\mathcal{S}^2) est alors un *Problème de Complémentarité Linéaire* [15].

Une solution $x = (x_i^n)$ du PCP peut être normalisée afin d'obtenir un ensemble de distributions de probabilité $\xi = (\xi_i^n)$. Wilson [20] montre l'équivalence entre les équilibres de Nash d'un jeu et les solutions du PCP correspondant :

Proposition 1 (Équivalence NE/PCP [20]) Soit Γ^N un jeu à N joueurs et (\mathcal{S}^N) sa transformation en PCP. Les équilibres de Nash de Γ et les solutions de (\mathcal{S}^N) sont en bijection :

1. Soit x , solution de (\mathcal{S}^N) . ξ définie par, $\forall (n, i) \in I_N$
 $\xi_i^n = \frac{x_i^n}{\sum_{j \in S_n} x_j^n}$, est un équilibre de Nash de Γ^N .
2. Soit ξ , un équilibre de Nash mixte de Γ^N et

$$x_i^n = \left(\frac{\prod_{\nu \neq n} A^\nu(\xi)}{A^n(\xi)^{N-2}} \right)^{\frac{-1}{N-1}} \xi_i^n, \forall (n, i) \in I_N.$$

$x = (x_i^n)_{n \in P, i \in S_n}$ est une solution de (\mathcal{S}^N) .

Une solution x d'un PCP est appelée un *nœud complémentaire*. Un point x est appelé *nœud (n, i) -presque complémentaire* s'il satisfait toutes les contraintes de (\mathcal{S}^N) , à la possible exception² d'une unique équation $x_i^n = 0 \cdot (A_i^n(x^{-n}) - 1) = 0$.

Chercher un équilibre de Nash mixte dans un jeu Γ^N revient donc à chercher une solution du PCP (\mathcal{S}^N) . Wilson [20] a proposé une approche géométrique de *parcours de chemin* pour résoudre un PCP *non dégénéré*, étendant celle de Lemke-Howson [15]. La description de Wilson laisse quelques étapes de l'algorithme non définies. De plus, comme pointé par l'auteur, la principale étape de l'algorithme (le parcours d'arc) n'était pas implémentable à l'époque. Dans la section suivante, nous proposons une réécriture originale et opérationnelle de l'approche de Wilson.

². Ainsi, un nœud complémentaire est (n, i) -presque complémentaire pour toute paire (n, i) .

3 Un algorithme combinatoire de résolution de PCP

La version revisitée que nous proposons (incluant le parcours d'arcs, bloc manquant de l'algorithme de Wilson) est basée sur une définition des nœuds, arcs et chemins presque-complémentaires en termes d'ensembles d'équations multilinéaires. Nous détaillons ces définitions ci-dessous (Section 3.1). Puis, nous montrons comment ces chemins peuvent être étendus à travers plusieurs niveaux de sous-PCP (Sections 3.2 et 3.3). La section 3.4 est dédiée au problème du parcours d'arc et l'algorithme de résolution du PCP complet est décrit dans la section 3.5.

3.1 Nœuds, arcs, chemins presque-complémentaires

Considérons un PCP (\mathcal{S}^N) . \mathcal{D}^N est l'ensemble des points x satisfaisant l'ensemble des inéquations du PCP :

$$\mathcal{D}^N = \left\{ x = (x_i^n)_{(n,i) \in I_N}, x_i^n \geq 0, A_i^n(x^{-n}) \geq 1, \forall (n, i) \right\}.$$

Une solution x du PCP est un nœud *complémentaire* de \mathcal{D}^N . Donc, pour toute paire $(n, i) \in I_N$, nous avons soit $x_i^n = 0$, soit $A_i^n(x^{-n}) = 1$. Pour tout point $x \in \mathcal{D}^N$, nous écrivons $Z(x) = \{(n, i) \in I_N, x_i^n = 0\}$ et $W(x) = \{(n, i) \in I_N, A_i^n(x^{-n}) = 1\}$. Par définition, $x \in \mathcal{D}^N$ est une solution de (\mathcal{S}^N) si et seulement si $Z(x) \cup W(x) = I_N$. Un PCP non dégénéré au niveau N est défini par :

Definition 3 (PCP non-dégénéré) *Le PCP (\mathcal{S}^N) est non dégénéré au niveau N si et seulement si :*

1. *Aucun point de \mathcal{D}^N ne satisfait plus de $|I_N|$ équations.*
2. *Aucune paire de points distincts de \mathcal{D}^N ne satisfait le même ensemble de $|I_N|$ équations.*

En termes mathématiques, la condition 1 est équivalente à

$$\forall x \in \mathcal{D}^N, |Z(x)| + |W(x)| \leq D = |I_N|$$

et la condition 2 est équivalente à : $\forall x, y \in \mathcal{D}^N$,

$$\left. \begin{array}{l} Z(x) = Z(y) = Z \\ W(x) = W(y) = W \\ |Z| + |W| = |I_N| \end{array} \right\} \Rightarrow x = y. \quad (3)$$

Intuitivement, un PCP est non-dégénéré lorsqu'aucune de ses contraintes polynomiales n'est redondante. A partir de maintenant, nous supposons la non dégénérescence du PCP. Nous définissons également la notion de *nœud presque-complémentaire* :

Definition 4 (Nœud presque-complémentaire) *$x \in \mathcal{D}^N$ est un nœud presque-complémentaire de (\mathcal{S}^N) , si et seulement si : $|Z(x)| + |W(x)| = |I_N|$ et $|Z(x) \cap W(x)| \leq 1$.*

En particulier, un nœud presque-complémentaire est complémentaire si $Z(x) \cup W(x) = I_N$ et (n, i) -presque complémentaire si $(n, i) \notin Z(x) \cup W(x)$. Si (\mathcal{S}^N) est non dégénéré, un nœud presque-complémentaire de \mathcal{D}^N est représentable par une unique paire $Z, W \subseteq I_N$ vérifiant

$|Z| + |W| = |I_N|$ et $|Z \cap W| \leq 1$ et telle que x satisfait le système :

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}^N, \\ x_i^n = 0, \quad \forall (n, i) \in Z, \\ A_i^n(x^{-n}) = 1, \quad \forall (n, i) \in W. \end{cases} \quad (\mathcal{S}^{Z,W})$$

Pour toute paire $(Z, W) \subseteq I_N$ telle que le système $(\mathcal{S}^{Z,W})$ admet une solution, nous notons $\rho(Z, W)$ cette solution (unique puisque le PCP est non-dégénéré). Définissons également un arc (n, i) -presque complémentaire :

Definition 5 (Arc presque complémentaire)

Considérons un PCP (\mathcal{S}^N) non dégénéré. Pour toute paire $(Z, W) \subseteq I_N$ telle que $Z \cap W = \emptyset$ et $Z \cup W = I_N \setminus \{(n, i)\}$, notons $\gamma(Z, W)$, l'ensemble des points satisfaisant le système d'équation $(\mathcal{S}^{Z,W})$. Si il est non-vide, $\gamma(Z, W)$ est appelé arc (n, i) -presque complémentaire du PCP (\mathcal{S}^N) .

Si le PCP est non-dégénéré et si $\gamma(Z, W)$ n'est pas vide, $\gamma(Z, W)$ est inclus dans l'ensemble des solutions d'un système de $D - 1$ équations à D variables. La non dégénérescence implique que cet ensemble est de dimension 1 et qu'il peut être paramétré par un unique paramètre réel.

Remarque : Les points extrêmes de $\gamma(Z, W)$ appartiennent à la frontière de \mathcal{D}^N et sont donc des nœuds presque-complémentaires. Un arc presque-complémentaire possède au maximum deux points extrêmes.

L'approche de [20] consiste intuitivement à suivre un chemin unidimensionnel dans \mathcal{D}^N , constitué d'arcs et nœuds presque-complémentaires partant d'un nœud initial (décrit plus loin) jusqu'à atteindre un nœud complémentaire, solution du PCP. Cette approche est fondée sur la proposition suivante :

Proposition 2 (Arcs voisins d'un nœud) ³ *Soit (\mathcal{S}^N) un PCP non dégénéré et $\rho(Z, W)$ un nœud presque complémentaire. $\rho(Z, W)$ possède deux arcs voisins : $\gamma(Z \setminus W, W)$ et $\gamma(Z, W \setminus Z)$. Si $\rho(Z, W)$ est complémentaire, un seul de ces deux arcs est borné, alors que les deux sont bornés si il n'est pas complémentaire.*

Un arc est non borné lorsqu'il n'est voisin que d'un nœud.

La proposition 2 implique la proposition suivante :

Proposition 3 (Chemin fini) *Soit (\mathcal{S}^N) , un PCP non dégénéré et $\rho(Z, W)$, un nœud complémentaire de (\mathcal{S}^N) . Soit également $i \in S_N$. Il existe un unique chemin, constitué d'un nombre fini de nœuds et arcs (N, i) -presque complémentaires, dont une extrémité est $\rho(Z, W)$.*

La proposition 3 ne nous dit rien a propos de l'autre extrémité du chemin. Celui-ci peut aussi bien se terminer par un autre nœud complémentaire que par un arc (N, i) -presque complémentaire non borné.

Dans la suite, nous allons voir comment cet unique chemin peut être étendu à travers plusieurs "niveaux" de PCP dérivés du PCP initial, jusqu'à ce qu'il atteigne un nœud *originel*, facile à calculer.

3. Nos preuves sont disponibles (en Anglais) ici : <https://figshare.com/s/230ec6a0a3c4a869db8f>.

3.2 Séquence de PCP sur différents niveaux

Considérons un PCP (S^N) obtenu à partir d'un jeu Γ^N , une stratégie jointe arbitraire $\omega^0 = (\omega_1^0, \dots, \omega_N^0)$ de Γ^N , deux entiers $1 \leq n \leq k \leq N$ et une stratégie pure $i \in S_n$. Nous écrivons $A_i^{n,k}(x^{\{1,\dots,k\} \setminus \{n\}})$ le polynôme multivarié obtenu à partir $A_i^n(x^{-n})$ en fixant toutes les valeurs x_j^ν à 0 lorsque $\nu > k$ et $j \neq \omega_\nu^0$ et à 1 lorsque $\nu > k$ et $j = \omega_\nu^0$:

$$A_i^{n,k}(x^{\{1,\dots,k\} \setminus \{n\}}) = \sum_{\substack{\omega \in \pi, \omega_n = i \\ \omega_m = \omega_m^0, \forall m > k}} a_\omega^n \prod_{\substack{\nu \leq k, \\ \nu \neq n}} x_{\omega_\nu}^\nu. \quad (4)$$

$A_i^{n,k}$ est un polynôme multilinéaire de degré $k - 1$. Notons que si ξ est une stratégie jointe mixte de Γ^N , $A_i^{n,k}(\xi^{\{1,\dots,k\} \setminus \{n\}})$ est la désutilité espérée du joueur n jouant l'action $i \in S_n$ quand les joueurs $1, \dots, k$, à l'exception de n , jouent leur stratégie mixte dans ξ et les joueurs $j \in \{k+1, \dots, N\}$ jouent leur stratégie pure ω_j^0 .

Alors, à partir du PCP (S^N) , nous pouvons définir la séquence suivante de sous-PCP (S^k) , pour $k = 1, \dots, N-1$:

Définition 6 (Sous-PCP) Soit (S^N) un PCP donné. Pour tout $1 \leq k \leq N$, $I_k = \{(n, i), 1 \leq n \leq k, i \in S_n\}$ et $D_k = |I_k|$ (ainsi $D = D_N$). Nous définissons le sous-PCP (S^k) comme le système d'équations/inéquations polynomiales multilinéaires, de variables $(x_i^n)_{(n,i) \in I_k}$:

$$\forall (n, i) \in I_k, \begin{cases} x_i^n \geq 0 \\ A_i^{n,k}(x^{\{1,\dots,k\} \setminus \{n\}}) \geq 1 \\ x_i^n \cdot (A_i^{n,k}(x^{\{1,\dots,k\} \setminus \{n\}}) - 1) = 0 \end{cases}$$

Pour $n = 1$, le PCP (S^1) est légèrement différent :

$$\begin{cases} x_i^1 \geq 0, \forall i \in S_1 \\ x_i^1 \cdot \left(\frac{a_{(i, \omega_{-1}^0)}}{\min_{j \in S_1} a_{(j, \omega_{-1}^0)}} - 1 \right) = 0, \forall i \in S_1 \\ \sum_{i \in S_1} x_i^1 = 1 \end{cases}$$

Le sous-PCP (S^k) est construit à partir de $\Gamma^k(\omega^0)$, un jeu joué par les k premiers joueurs de Γ^N tandis que les autres joueurs jouent selon ω^0 , de la même manière que (S^N) est construit à partir de Γ^N . Nous supposons que tous les sous-PCP (S^k) sont non-dégénérés. En particulier, supposer que (S^1) est non-dégénéré sous-entend que le minimum $\min_{j \in S_1} a_{(j, \omega_{-1}^0)}^1$ est atteint pour un seul indice j^* . Ainsi, nous obtenons facilement le nœud complémentaire au niveau 1, décrit par $Z^1 = S_1 \setminus \{j^*\}$ et $W^1 = \{j^*\}$. Au niveau $k \geq 2$, nous pouvons définir un système polynomial $(S_k^{Z,W})$ correspondant à $Z, W \subseteq I_k$:

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}^k, \\ x_i^n = 0, \quad \forall (n, i) \in Z, \\ A_i^{n,k}(x^{\{1,\dots,k\} \setminus \{n\}}) - 1 = 0, \quad \forall (n, i) \in W, \end{cases} \quad (S_k^{Z,W})$$

où \mathcal{D}^k est défini par les inéquations de la définition 6.

3.3 Nœuds complémentaires et initiaux

Nous pouvons exploiter le point de vue combinatoire de la séquence de systèmes d'équations présentée ci-dessus pour concevoir un algorithme calculant une séquence de nœuds presque complémentaires jusqu'à ce qu'un nœud complémentaire soit atteint au niveau N .

Proposition 4 (Montée de niveau) Soit (S^k) un sous-PCP de (S^N) au niveau $1 \leq k < N$ et une stratégie jointe pure arbitraire ω^0 .

On suppose que, pour $Z, W \subseteq I_k$, $(S_k^{Z,W})$ définit un nœud complémentaire de (S^k) .

Alors, si $Z' = Z \cup \{(k+1, j), j \neq \omega_{k+1}^0\}$, $(S_{k+1}^{Z',W})$ définit un arc $(k+1, \omega_{k+1}^0)$ -presque complémentaire du sous-PCP (S^{k+1}) . De plus, cet arc est non borné et ne voisine qu'un seul nœud $(k+1, \omega_{k+1}^0)$ -presque complémentaire au niveau $k+1$.

Ce nœud $(k+1, \omega_{k+1}^0)$ -presque complémentaire au niveau $k+1$ peut être calculé en essayant de résoudre tous les systèmes $(S_{k+1}^{Z' \cup \{(\nu, j)\}, W})$ avec $(\nu, j) \in I_{k+1} \setminus Z'$ et $(S_{k+1}^{Z', W \cup \{(\nu, j)\}})$ avec $(\nu, j) \in I_{k+1} \setminus W$ jusqu'à en trouver un possédant une solution. Un tel système possédant une solution existe (c'est une conséquence du lemme 2 de [20]). De plus, il est unique pour une séquence fixée de PCP non dégénérés. Cette solution est appelée *nœud initial* au niveau $k+1$:

Définition 7 (Nœud initial) Un nœud initial au niveau $k+1$ est un nœud $(k+1, \omega_{k+1}^0)$ -presque complémentaire solution de $(S_{k+1}^{Z,W})$, avec $Z, W \subseteq I_{k+1}$ et tel que seul l'un de ses arcs voisins est borné. Il satisfait aussi :

$$(k+1, \omega_{k+1}^0) \notin Z \text{ et } (k+1, j) \in Z, \forall j \neq \omega_{k+1}^0.$$

Avec cette définition en tête, la proposition 3 peut être réinterprétée. Elle précise qu'à partir de tout nœud complémentaire au niveau N et pour $i \in S_N$, un chemin unique constitué de nœuds et arcs (N, i) -presque complémentaires conduit soit à un autre nœud complémentaire, soit à un nœud initial au niveau N . C'est évidemment également vrai pour tous les niveaux $k \in \{2, \dots, N\}$: Ces nœuds complémentaires sont à une extrémité d'un chemin (k, ω_k^0) -presque complémentaire pour lequel l'autre extrémité est soit un nœud complémentaire, soit un nœud initial. L'ensemble des nœuds et arcs presque-complémentaires satisfaisant S^k constitue un ensemble de chemins disjoints dont les formes possibles sont illustrées dans la figure 1.

La procédure de *descente de niveau*, depuis un nœud initial au niveau k vers un nœud complémentaire au niveau $k-1$, peut être définie réciproquement à la procédure de montée.

Proposition 5 (Descente de niveau) Soit $(S_k^{Z,W})$ définissant un nœud initial au niveau k . Posons $Z' = Z \cap I_{k-1}$ et $W' = W \cap I_{k-1}$.

Alors, soit $Z' \cap W' = \{(\nu, j)\} \subseteq I_{k-1}$, soit $Z' \cap W' = \emptyset$. Dans le premier cas, l'un des deux systèmes $(S_{k-1}^{Z' \setminus \{(\nu, j)\}, W'})$ ou $(S_{k-1}^{Z', W' \setminus \{(\nu, j)\}})$ définit un nœud

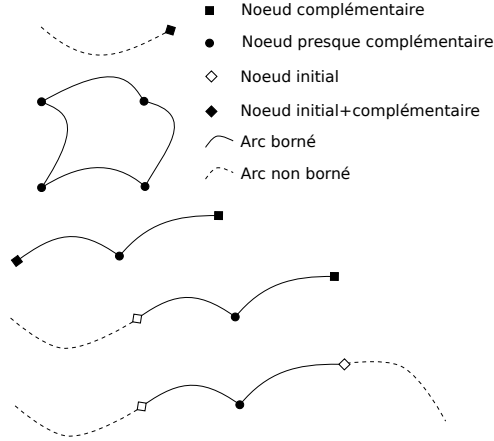


FIGURE 1 – Différentes catégories de chemin presque complémentaire à un niveau donné.

complémentaire au niveau $k - 1$. Dans le second cas, $(\mathcal{S}_{k-1}^{Z', W'})$ définit un nœud complémentaire au niveau $k - 1$.

3.4 Parcours d'arc algébrique

La brique de base de notre algorithme de parcours de chemin est le *parcours* d'un arc (k, ω_k^0) -presque complémentaire⁴ $\gamma^k(Z, W)$, au niveau k ($Z, W \subseteq I_k$), quittant un nœud presque-complémentaire $\rho^k(Z', W')$ avec soit (i) $Z = Z' \setminus W'$ et $W = W'$ soit (ii) $Z = Z'$ et $W = W' \setminus Z'$. Ce problème de traversée d'arc s'exprime en termes algébriques. En effet, par définition :

$$\begin{aligned} \gamma^k(Z, W) &=_{def} \mathcal{V}(\mathcal{S}_k^{Z, W}) \cap \mathcal{D}^k, \\ \rho^k(Z', W') &=_{def} \mathcal{V}(\mathcal{S}_k^{Z', W'}) \cap \mathcal{D}^k, \end{aligned}$$

où $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ désigne l'ensemble des solutions de (\mathcal{S}) , en ignorant la contrainte de domaine. $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ est appelée une *variété algébrique affine* [4]. Quand le système (\mathcal{S}) est non-dégénéré, la variété est finie (elle est de dimension 0) pour un nœud et est de dimension 1 pour un arc.

En pratique, le calcul d'une variété $\mathcal{V}(\mathcal{S}_k^{Z, W})$ ou de sa dimension requiert de calculer une *base de Groebner réduite* pour l'ordre lexicographique de l'idéal correspondant [4]. Dans le cas où la variété est de dimension zéro, le *Shape Lemma* [1] montre que cette base réduite consiste en (i) un polynôme en une seule variable et (ii) un polynôme pour chaque autre variable, exprimant sa valeur en fonction d'un polynôme en la première variable. Les solutions d'un tel système à coefficients rationnels sont des *nombre algébriques*, représentables finiment par les équations qui les définissent. Une approche numérique standard peut être utilisée pour résoudre une équation polynomiale à une variable à coefficients rationnels avec une précision arbitraire. Aussi, le système peut être résolu avec une précision arbitraire, en résolvant la première équation puis en injectant la valeur obtenue pour calculer toutes les autres variables.

4. L'exposant k de γ^k ou ρ^k indique que nous sommes au niveau k .

Une base de Groebner réduite pour l'ordre lexicographique peut être calculée via des opérations élémentaires sur des polynômes multivariés (additions, soustractions, multiplications). Le temps et l'espace de calcul sont généralement exponentiels en la "taille" du système⁵. Toutefois, il existe plusieurs implémentations d'algorithmes de calcul de base de Groebner, efficaces pour des problèmes avec des centaines de variables et d'équations [6]. Nous utilisons les fonctions implémentées dans la boîte à outil Singular, accessible à partir de l'environnement Sagemath⁶, pour calculer des bases de Groebner, leur dimension et les variétés correspondantes.

Finalement, le problème de parcours d'arc à un niveau k consiste, à partir d'un nœud (n, i) -presque complémentaire $\rho^k(Z', W')$ et d'un arc borné $\gamma^k(Z, W)$ voisin, à calculer l'autre extrémité de l'arc, $\rho^k(Z'', W'')$. L'algorithme 1 calcule ce nœud (n, i) -presque complémentaire en essayant tout les ajouts possibles d'équations au système $(\mathcal{S}_k^{Z, W})$.

Algorithme 1 : TRAVERSEARC($(Z, W), (Z', W'), I_k$)

```

/* Calcule l'autre extrémité de l'arc
    $\gamma^k(Z, W)$  d'extrémité  $\rho^k(Z', W')$ . */
/* Initialisation */
1 Sol  $\leftarrow \emptyset$ ;
2 for  $(\nu, j) \in I_k$  do
3   if  $(\nu, j) \in I_k \setminus Z'$  then
4      $Z_{loc} \leftarrow Z \cup \{(\nu, j)\}$ ,  $W_{loc} \leftarrow W$ 
5   else
6     if  $(\nu, j) \in I_k \setminus W'$  then
7        $Z_{loc} \leftarrow Z$ ,  $W_{loc} \leftarrow W \cup \{(\nu, j)\}$ 
8     if  $\dim(\mathcal{V}(\mathcal{S}_k^{Z_{loc}, W_{loc}})) = 0$  then
9        $\rho_{loc} \leftarrow \mathcal{V}(\mathcal{S}_k^{Z_{loc}, W_{loc}}) \cap \mathcal{D}^k$ ;
10      if  $\rho_{loc} \neq \emptyset$  then
11         $Sol \leftarrow Sol \cup \{(Z_{loc}, W_{loc}, \rho_{loc})\}$ 
12 return Sol

```

Lorsqu'un jeu est non-dégénéré, Sol est un singleton. Le cas des jeux dégénérés, non traité dans cet article, requiert une modification de la ligne 11.

Proposition 6 (Correction du parcours d'arc) *Pour un PCP non dégénéré, l'algorithme 1 retourne un unique triplet $(Z'', W'', \mathcal{V}(\mathcal{S}_k^{Z'', W''}))$ où $\mathcal{V}(\mathcal{S}_k^{Z'', W''})$ est un point.*

3.5 Procédure de parcours de chemin

Nous avons presque tous les éléments nécessaires pour construire une procédure de parcours de chemin permettant d'atteindre un nœud complémentaire d'un PCP. Il nous manque seulement l'étape d'initialisation. Cette étape initialise arbitrairement la stratégie jointe pure ω^0 puis résout

5. Voir section 5 pour une discussion sur la complexité de calcul des bases de Groebner.

6. <https://www.sagemath.org/index.html>.

(\mathcal{S}^1) décrit dans la définition 6. A partir du nœud complémentaire au niveau 1, nous calculons le nœud initial correspondant au niveau 2 en utilisant la proposition 4. Puis, nous suivons le chemin au niveau 2, partant de ce nœud. Si nous atteignons un nœud complémentaire au niveau 2, nous montons au niveau 3, etc. Si, à un niveau k , nous atteignons un nœud initial, non complémentaire, alors nous calculons le nœud complémentaire correspondant au niveau $k - 1$ en utilisant la procédure de *descente* (Proposition 5). Puis, nous continuons au niveau $k - 1$. Dans le cas où le jeu est non-dégénéré, puisque nous partons d'un nœud complémentaire au niveau 1 et puisque que tout nœud a exactement deux arcs voisins, à l'exception du nœud initial au niveau 1 et des nœuds complémentaires au niveau N , le chemin suivi est unique pour ω^0 fixé et se termine en un nœud complémentaire au niveau N : une solution du PCP. La figure 2 illustre quelques étapes de l'algorithme.

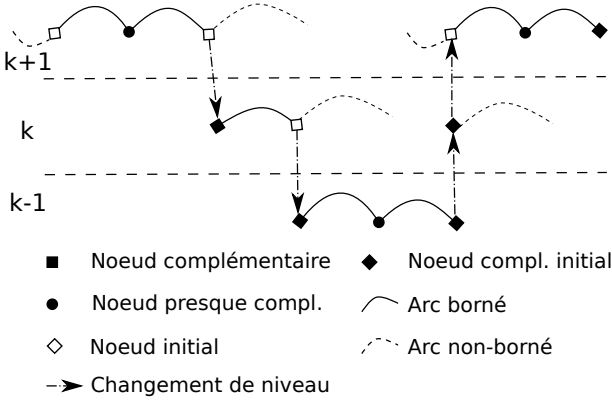


FIGURE 2 – Partie d'un chemin suivi par l'algorithme.

4 Un exemple de jeu à 3 joueurs

Considérons un exemple de jeu à trois joueurs avec deux actions pour chaque joueur, décrit par la table d'utilités/désutilités suivante (les deux représentations sont équivalentes) :

ω_1	ω_2	ω_3	u^1	u^2	u^3	a^1	a^2	a^3
0	0	0	6	0	4	2	8	4
0	0	1	7	3	7	1	5	1
0	1	0	0	7	4	8	1	3
0	1	1	5	4	0	3	4	8
1	0	0	1	6	3	7	2	5
1	0	1	4	5	2	4	3	6
1	1	0	2	1	6	6	7	2
1	1	1	3	2	1	5	6	7

(5)

Nous fixons $\omega^0 = (0, 0, 0)$. Alors, l'ensemble des poly-

nômes définis par l'équation (4) est :

$$\begin{aligned}
 A_0^{1,1} &= 1 & ; & & A_1^{1,1} &= \frac{7}{2} \\
 A_0^{1,2}(x^2) &= 2x_0^2 + 8x_1^2 \\
 A_1^{1,2}(x^2) &= 7x_0^2 + 6x_1^2 \\
 A_0^{2,2}(x^1) &= 8x_0^1 + 2x_1^1 \\
 A_1^{2,2}(x^1) &= x_0^1 + 7x_1^1 \\
 A_0^{1,3}(x^2, x^3) &= 2x_0^2x_0^3 + x_0^2x_1^3 + 8x_1^2x_0^3 + 3x_1^2x_1^3 \\
 A_1^{1,3}(x^2, x^3) &= 7x_0^2x_0^3 + 4x_0^2x_1^3 + 6x_1^2x_0^3 + 5x_1^2x_1^3 \\
 A_0^{2,3}(x^1, x^3) &= 8x_0^1x_0^3 + 5x_0^1x_1^3 + 2x_1^1x_0^3 + 3x_1^1x_1^3 \\
 A_1^{2,3}(x^1, x^3) &= x_0^1x_0^3 + 4x_0^1x_1^3 + 7x_1^1x_0^3 + 6x_1^1x_1^3 \\
 A_0^{3,3}(x^1, x^2) &= 4x_0^1x_0^2 + 3x_0^1x_1^2 + 5x_1^1x_0^2 + 2x_1^1x_1^2 \\
 A_1^{3,3}(x^1, x^2) &= x_0^1x_0^2 + 8x_0^1x_1^2 + 6x_1^1x_0^2 + 7x_1^1x_1^2
 \end{aligned}$$

A partir de cet ensemble de polynômes, l'algorithme de résolution de PCP va parcourir une séquence de nœuds et arcs presque complémentaires définis par des paires $Z, W \subseteq I_k$ au niveau k .

nœud/arc	Z	W	niveau
nœud C	$\{(1, 1)\}$	$\{(1, 0)\}$	$k = 1$
arc	$\{(1, 1), (2, 1)\}$	$\{(1, 0)\}$	$k = 2$
nœud PC	$\{(1, 1), (2, 1)\}$	$\{(1, 0), (2, 1)\}$	$k = 2$
arc	$\{(1, 1)\}$	$\{(1, 0), (2, 1)\}$	$k = 2$
nœud PC	$\{(1, 1)\}$	$\{(1, 0), (1, 1), (2, 1)\}$	$k = 2$
arc	\emptyset	$\{(1, 0), (1, 1), (2, 1)\}$	$k = 2$
nœud C	\emptyset	$\{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$	$k = 2$
arc	$\{(3, 1)\}$	$\{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$	$k = 3$
nœud C	$\{(3, 1)\}$	$\{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0)\}$	$k = 3$

Finalement, une solution du PCP vérifie le système suivant, obtenu à partir de la paire (Z, W) définissant le nœud complémentaire au niveau 3 :

$$\begin{aligned}
 x_1^3 &= 0 \\
 2x_0^2x_0^3 + 8x_1^2x_0^3 &= 1 \\
 7x_0^2x_0^3 + 6x_1^2x_0^3 &= 1 \\
 8x_0^1x_0^3 + 2x_1^1x_0^3 &= 1 \\
 x_0^1x_0^3 + 7x_1^1x_0^3 &= 1 \\
 4x_0^1x_0^2 + 3x_0^1x_1^2 + 5x_1^1x_0^2 + 2x_1^1x_1^2 &= 1
 \end{aligned}$$

Ce système peut être résolu en calculant une base de Groebner puis en résolvant un polynôme à une indéterminée. Ici, on peut en calculer une solution analytique :

$$\begin{aligned}
 x_0^1 &= \sqrt{\frac{110}{1377}} & ; & & x_1^1 &= \sqrt{\frac{1078}{6885}} \\
 x_0^2 &= \sqrt{\frac{18}{935}} & ; & & x_1^2 &= \sqrt{\frac{45}{374}} \\
 x_0^3 &= \sqrt{\frac{85}{792}} & ; & & x_1^3 &= 0.
 \end{aligned}$$

Après normalisation, cette solution donne l'équilibre de Nash mixte suivant :

$$\begin{aligned}\xi_0^1 &= \frac{\sqrt{\frac{110}{1377}}}{\sqrt{\frac{110}{1377}} + \sqrt{\frac{1078}{6885}}} \sim 0.41666 \\ \xi_1^1 &= \frac{\sqrt{\frac{1078}{6885}}}{\sqrt{\frac{110}{1377}} + \sqrt{\frac{1078}{6885}}} \sim 0.58333 \\ \xi_0^2 &= \frac{\sqrt{\frac{18}{935}}}{\sqrt{\frac{18}{935}} + \sqrt{\frac{45}{374}}} \sim 0.28571 \\ \xi_1^2 &= \frac{\sqrt{\frac{45}{374}}}{\sqrt{\frac{18}{935}} + \sqrt{\frac{45}{374}}} \sim 0.71429 \\ \xi_0^3 &= 1 \quad ; \quad \xi_1^3 = 0\end{aligned}$$

5 Jeux graphiques /hypergraphiques

L'approche présentée dans cet article s'étend naturellement aux jeux polymatriciels [21], graphiques [14] et hypergraphiques [18]. Ces jeux sont des représentations succinctes de jeux à N -joueurs où les utilités des joueurs s'expriment à partir d'utilités locales, c-à-d ne dépendant que des stratégies d'un sous ensemble de joueurs de P .

Les jeux hypergraphiques, par exemple, sont définis ainsi :

Definition 8 (Jeu hypergraphique) *Un jeu hypergraphique à N -joueurs Γ^N est défini par*

$$\Gamma^N = \{ \{P_g\}_{g=1..G}, \{S_i\}_{i=1..N}, \{a^g\}_{g=1..G} \}, \text{ où}$$

- $\forall g \in 1, \dots, G, P_g \subseteq P$ est l'ensemble des joueurs du jeu local g et $\cup_{g=1..G} P_g = P$.
- $\{S_i\}_{i=1..N}$, est la liste des ensembles de stratégies pures des joueurs.
- $a_{\omega_{P_g}}^{g,n}$ est la désutilité locale (positive) d'un joueur n appartenant à P_g dans le jeu local g , lorsque la stratégie jointe des joueurs du jeu g est ω_{P_g} .

Dans le jeu Γ^N , la désutilité du joueur $n \in N$ pour une stratégie jointe ω est obtenue à partir des désutilités locales :

$$a_{\omega}^n = \sum_{g,n \in P_g} a_{\omega_{P_g}}^{g,n}.$$

Cette représentation de la matrice de désutilités globale à partir de matrices de désutilités locales permet potentiellement un gain exponentiel d'espace, par rapport à une représentation en forme normale, pour la représentation d'un jeu hypergraphique.

Les jeux polymatriciels et graphiques sont des cas particuliers de jeux hypergraphiques. Les jeux polymatriciels sont définis par le fait que leurs jeux locaux impliquent exactement deux joueurs : $|P_g| = 2, \forall g = 1, \dots, G$. Les jeux graphiques sont des jeux dans lesquels la désutilité d'un joueur

$n \in P$ ne dépend que des stratégies d'un unique sous-ensemble de joueurs $P_n \in P$. Un jeu graphique peut s'exprimer comme un jeu hypergraphique dans lequel $G = N$ (il y a un jeu local et un seul attaché à chaque joueur) et $a_{\omega_{P_g}}^{g,n} = 0, \forall \omega \in \pi, \forall n \neq g$.

Les polynômes du PCP dérivé d'un jeu hypergraphique exploitent la factorisation des fonctions de désutilité. Ils prennent la forme suivante :

$$A_i^n(x^{-n}) = \sum_{g,n \in P_g} \sum_{\substack{\omega_{P_g} \in \pi_{P_g} \\ \omega_n = i}} a_{\omega_{P_g}}^{g,n} \prod_{\substack{\omega_{\nu} = j \\ \nu \in P_g \setminus \{n\}}} x_j^{\nu}. \quad (6)$$

Dans l'expression (6), les degrés des polynômes du PCP sont tous strictement inférieurs au nombre de joueurs du plus grand jeu local. En particulier, lorsque le jeu est polymatriciel, les polynômes sont de degré 1 au plus. Dans ce cas, le problème est un *Linear Complementarity Problem (LCP)*. Howson [13] a exploité cette propriété pour étendre l'algorithme de Lemke Howson aux jeux polymatriciels.

Plus généralement, le fait de pouvoir borner les degrés des polynômes d'un PCP est utile pour un calcul efficace des bases de Groebner. Sans entrer dans les détails ici, des résultats de la littérature montrent que le problème de calcul de bases de Groebner, qui est EXPSPACE-difficile dans le cas général, n'est plus "que" PSPACE-difficile lorsque le système est homogène et l'idéal de dimension zéro [16].

Dans le cas d'un jeu hypergraphique dont le PCP est non-dégénéré, on obtient le résultat de complexité suivant :

Proposition 7 (Complexité) *La complexité de l'algorithme de parcours de chemin pour un jeu graphique/hypergraphique est simplement exponentielle en le nombre de joueurs, le nombre maximum de stratégies pures d'un joueur et doublement exponentielle en le nombre maximal de joueurs d'un jeu local.*

6 Conclusion

La littérature sur l'algorithmique de la recherche d'équilibres approchés dans les jeux à N -joueurs est abondante. Celle-ci inclut des travaux décrivant des approches numériques de parcours d'arc utilisant des méthodes d'homotopie [8, 9, 2, 12]. Ces travaux sont basés sur la définition d'un continuum de jeux paramétrés par un paramètre unique et joignant un jeu arbitraire (dont l'équilibre est connu) au jeu qui nous intéresse. Les méthodes d'homotopie suivent alors l'arc des équilibres du continuum des jeux paramétrés.

Par exemple, Datta [5] a proposé une méthode d'homotopie qui exploite également le concept de base de Groebner, mais uniquement pour le calcul d'un équilibre du jeu initial, choisi pour être facilement résolu. Du fait de la précision limitée des méthodes numériques de parcours d'arc, les méthodes de calcul d'équilibres basées sur le concept d'homotopie sont susceptibles aux erreurs numériques et peuvent potentiellement (souvent, en pratique !) ne pas converger.

Plus proche de notre proposition, [19] utilise les concepts d'énumération de supports de stratégies mixtes et de systèmes d'équations polynomiales pour résoudre un jeu à N

joueurs. Cependant, contrairement à notre approche, [19] ne décrit pas dans quel ordre les supports sont énumérés, ni comment les équations polynomiales doivent être résolues.

Au contraire des approches d'homotopie, notre méthode est combinatoire et exploite des principes de géométrie algébrique pour calculer un équilibre de Nash mixte "exact" sous la forme d'un nombre algébrique [3].

Le nombre d'étapes de notre algorithme peut être exponentiel en la taille de description du problème et chaque étape de parcours d'arc est également coûteuse. Cependant, pour un PCP donné, le nombre d'étapes de l'algorithme peut grandement varier selon le choix d'ordre des indices des joueurs et de la stratégie ω^0 . Puisque ces choix sont arbitraires, nous pouvons exploiter des ressources de calcul parallèle pour améliorer l'efficacité de notre algorithme, en lançant un lot d'exécutions indépendantes avec différentes initialisations.

Puisque nous utilisons un logiciel tiers (Singular) pour la résolution d'équations polynomiales, nous n'avons pas de prise directe sur la complexité du calcul des bases de Groebner. Néanmoins, nous avons un peu de latitude sur le choix des systèmes lors du parcours d'un arc. Nous pouvons d'abord calculer la base de Groebner de l'idéal (de dimension 1) supportant l'arc, avant de recalculer une base pour chacun des idéaux de dimension 0 correspondant aux équations polynomiales que nous pouvons ajouter pour déterminer l'extrémité de l'arc. Cette approche peut être potentiellement plus efficace que le recalcul complet des bases de Groebner de chacun des idéaux potentiels de dimension nulle. Enfin, pour améliorer l'efficacité de notre approche, nous pouvons maintenir une liste des bases de Groebner de tous les idéaux/systèmes rencontrés et les réutiliser quand cela est approprié.

Pour finir, notre approche peut être étendue à d'autres types de jeux. Une perspective de ce travail est de l'étendre aux jeux bayésiens [11] et aux jeux stochastiques [7]. Ces extensions nécessitent la représentation des équilibres de Nash de ces jeux par une solution d'un PCP. Mais puisque ces familles de jeux admettent généralement une représentation en forme normale, cette perspective est potentiellement prometteuse.

Références

- [1] E. Becker, T. Mora, M.G. Marinari, and C. Traverso. The shape of the shape lemma. In *ISSAC*, pages 335–342. ACM Press, 1994.
- [2] B. Blum, D. Koller, and C.R. Shelton. A continuation method for Nash equilibria in structured games. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 25 :457–502, 2006.
- [3] J. H. Conway and R. K. Guy. *The Book of Numbers*, chapter Algebraic Numbers, pages 189–190. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [4] D.A. Cox, J.B. Little, and D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer, 4 edition, 2015.
- [5] R.S. Datta. Finding all Nash equilibria of a finite game using polynomial algebra. *Economics Theory*, 42 :55–96, 2010.
- [6] J.C. Faugère. A new efficient algorithm for computing groebner bases without reduction to zero (f_5). In *ISSAC*, pages 75–83. ACM Press, 2002.
- [7] J. Filar and K. Vrieze. *Competitive Markov Decision Processes*. Springer-Verlag, 1997.
- [8] S. Govindan and R. Wilson. A global newton method to compute Nash equilibria. *Journal of Economic Theory*, 110(1) :65–86, 2003.
- [9] S. Govindan and R. Wilson. Computing Nash equilibria by iterated polymatrix approximation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(7) :1229–1241, 2004.
- [10] M.S. Gowda. Polynomial complementarity problems. *Pac. J. Optim*, 3 :227–241, 2017.
- [11] J.C. Harsanyi. Games with incomplete information played by "Bayesian" players, i–iii part i. the basic model. *Management science*, 14(3) :159–182, 1967.
- [12] J.J. Herings and R. Peeters. Homotopy methods to compute equilibria in game theory. *Economic Theory*, 42 :119–156, 2010.
- [13] J.T. Howson. Equilibria of polymatrix games. *Management Science*, 18(5-part-1) :312–318, 1972.
- [14] M. Kearns, M.L. Littman, and S. Singh. Graphical models for game theory. *UAI*, 2001.
- [15] C.E. Lemke and J.T. Howson. Equilibrium points of bimatrix games. *Journal of the Society for industrial and Applied Mathematics*, 12(2) :413–423, 1964.
- [16] E. W. Mayr. Some complexity results for polynomial ideals. *Journal of Complexity*, 13(3) :303–325, 1997.
- [17] J.F. Nash. Equilibrium points in n-person games. *PNAS*, 36(1) :48–49, 1950.
- [18] C.H. Papadimitriou and T. Roughgarden. Computing correlated equilibria in multi-player games. *Journal of the ACM (JACM)*, 55(3) :14, 2008.
- [19] R. Porter, E. Nudelman, and Y. Shoham. Simple search methods for finding a Nash equilibrium. *Games and Economic Behavior*, 63(2) :664–669, 2008.
- [20] R. Wilson. Computing equilibria of n-person games. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 21(1) :80–87, 1971.
- [21] E.B. Yanovskaya. Equilibrium points in polymatrix games. *Litovskii Matematicheskii Sbornik*, 8 :381–384, 1968.