



HAL
open science

Une caractéristique pour les unifier toutes et dans l'harmonie les lier. Unification des équations dans les textes De la méthode de l'universalité

Simon Gentil

► To cite this version:

Simon Gentil. Une caractéristique pour les unifier toutes et dans l'harmonie les lier. Unification des équations dans les textes De la méthode de l'universalité. *Philosophia Scientiae*, 2021, 25 (2), pp.47 - 70. <10.4000/philosophiascientiae.3054>. <hal-03317774>

HAL Id: hal-03317774

<https://hal.science/hal-03317774v1>

Submitted on 21 Aug 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



Philosophia Scientiæ

Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

25-2 | 2021

Mathématique et philosophie leibniziennes à la
lumière des manuscrits inédits

Une caractéristique pour les unifier toutes et dans l'harmonie les lier. Unification des équations dans les textes *De la méthode de l'universalité*

A Characteristic to Unify all Characteristics and Link Them in Harmony.

Unification of equations in De la méthode de l'universalité

Simon Gentil



Édition électronique

URL : <https://journals.openedition.org/philosophiascientiae/3054>

DOI : 10.4000/philosophiascientiae.3054

ISSN : 1775-4283

Éditeur

Éditions Kimé

Édition imprimée

Date de publication : 25 mai 2021

Pagination : 47-70

ISBN : 978-2-38072-015-0

ISSN : 1281-2463

Référence électronique

Simon Gentil, « Une caractéristique pour les unifier toutes et dans l'harmonie les lier. Unification des équations dans les textes *De la méthode de l'universalité* », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 25-2 | 2021, mis en ligne le 12 juillet 2021, consulté le 17 juillet 2021. URL : <http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/3054> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.3054>

Tous droits réservés

Une caractéristique pour les unifier toutes
et dans l'harmonie les lier.
Unification des équations dans les textes
De la méthode de l'universalité

Simon Gentil

Laboratoire SPHERE, UMR 7219,
Université de Paris – CNRS, Paris (France)

Résumé : Il est connu que le séjour à Paris a joué un rôle déterminant dans l'élaboration des pensées leibniziennes. Pendant cette période, Leibniz rencontre de nombreux savants, s'initie aux mathématiques et s'avère être particulièrement prolifique. Il semblerait que ce soit à cette période également que commencent à se développer les concepts centraux de sa philosophie. Les textes *De la méthode de l'universalité I* et *II* en sont un formidable exemple. Ils nous offrent un jeune projet leibnizien, surprenant, ingénieux et très ambitieux. On y voit Leibniz proposer un nouveau système de notation, permettant de traiter la généralité, qu'il fait dialoguer avec des concepts comme l'harmonie ou la caractéristique qui le suivront toute sa vie. Le texte (II) est une introduction à cette nouvelle méthode, ses concepts et sa philosophie. Dans le texte (I), Leibniz détaille son système ambigu et pousse les considérations mathématiques assez loin pour être en mesure d'exhiber une équation générale capable d'engendrer toutes les sections coniques. Cet article propose une présentation des concepts, qu'ils soient mathématiques ou philosophiques, utilisés par Leibniz pour parvenir à ses fins.

Abstract : Living in Paris is known to have a significant influence on the development of Leibnizian thought. During this period, Leibniz met many scientists, discovered mathematics and became a prolific writer. This is also the time when he began to develop the central concepts of his philosophy and the texts *De la méthode de l'universalité I* and *II* provide excellent examples of this. They provide the reader with vivid insight into a project which at the time was surprising, ingenious and very ambitious. The texts show Leibniz proposing a new system of mathematical notation of sufficient

generality to handle concepts such as Harmony or Characteristic that were constantly present throughout his life. Text (II) is an introduction to this new method, his concepts and his philosophy. In text (I), Leibniz details his ambiguous system and extends the mathematical considerations far enough to be able to exhibit a general equation capable of generating all possible conical sections. The aim of this article is to present a review of both mathematical and philosophical concepts used by Leibniz to achieve these goals.

1 Introduction

Cet article s'appuie sur une lecture et une analyse de deux textes rédigés par Leibniz durant l'été 1674 lorsque celui-ci réside à Paris. Lors de la rédaction de ces écrits, Leibniz n'a pas encore écrit trente ans mais a déjà rédigé plusieurs textes, dont *De arte combinatoria*, écrit pour l'obtention d'une habilitation en philosophie. Après avoir étudié le droit en Allemagne, il s'initie aux mathématiques avec l'aide de Christian Huygens. Cette période de sa vie est celle qui jouera un rôle déterminant dans la construction de sa philosophie et de ses mathématiques. Pendant cette période il découvre de nombreux savants de son époque, écrit un manuscrit sur la quadrature du cercle dans lequel il donne la valeur de π sous la forme de séries alternées et commence ses recherches sur ce qui deviendra le calcul infinitésimal.

Les textes mentionnés ici traitent de la « Méthode de l'universalité », titre qui leur a été donné par l'auteur. Dans ces écrits, Leibniz manipule des concepts comme l'harmonie ou la caractéristique qui occuperont une place de choix dans sa pensée et que l'on retrouvera tout au long de sa production scientifique et philosophique. Ces textes proviennent de manuscrits qui ne furent pas publiés de son vivant. Ils ont été transcrits, édités et publiés dans une édition de ses œuvres complètes regroupant de nombreux écrits datant de cette période et explorant le thème des courbes, de la construction des équations et de la méthode de l'universalité [Leibniz 2019]. Dans ces textes, Leibniz explique comment former des « équations générales et universelles » à l'aide de « signes ambigus ». Leibniz cherche à traiter plusieurs cas particuliers par l'intermédiaire d'un seul cas général grâce à un nouveau système de signes. Pour cela, il prend comme exemple le cas des sections coniques.

Les textes présentés dans cet article sont surprenants par leur ingéniosité et leur créativité. En particulier, le système de signes ambigus développé par Leibniz pour unifier les équations est inédit. Son approche des coniques l'est tout autant. Il s'inspire des travaux de Descartes en géométrie analytique et poursuit l'objectif de Desargues en géométrie projective, voir [Debuiche 2013, 366–374, en particulier la partie 3]. En inventant un système de signes, qu'il nomme ambigus, il est en mesure de produire une équation ambiguë à partir

de laquelle l'équation de chaque section conique¹ peut être reconstruite. De cette équation universelle naît une figure générale des coniques qui n'est pas sans rappeler les travaux géométriques de Poncelet et Carnot survenus plus tard concernant la généralité des figures. Nous verrons pourtant que Leibniz se distingue de ses successeurs par sa conception d'une figure générale.

Toutefois, le cas des coniques n'est qu'un exemple générique pour introduire sa nouvelle méthode que Leibniz nomme : « De l'universalité » (MDU) et dont l'objectif est d'être en mesure de traiter les problèmes de manière générale. Elle permet de ne plus s'attarder sur les cas particuliers mais prétend pouvoir les résoudre tous en même temps. Les textes analysés dans cet article servent à présenter ses concepts majeurs ainsi que ses outils principaux.

Un projet aussi ambitieux est nécessairement soutenu par des concepts philosophiques et mathématiques aussi forts qu'importants. Dans une liste non exhaustive, on peut citer l'harmonie, la caractéristique, l'ambiguïté, l'infini et les indivisibles. Ces notions et leurs implications dans les travaux mathématiques de Leibniz seront explicitées par la suite. La première partie sera une présentation des textes de la méthode. La deuxième partie se concentrera sur les manipulations mathématiques ainsi que les outils conceptuels qui leur sont associés. La troisième partie sera guidée par les caractères ambigus et présentera une partie de leur utilisation dans le cadre de la MDU. Enfin, la quatrième partie s'intéressera aux concepts philosophiques qui soutiennent le projet de Leibniz.

Les caractères ambigus, et en particulier les signes, nécessitent d'être manipulés pour être compris convenablement. J'ai volontairement choisi de ne pas les détailler au début de l'article pour ne pas risquer de compliquer sa lecture. Toutefois, pour comprendre la suite, il est important d'avoir à l'esprit une première idée de leur utilisation. Les caractères ambigus sont soit des signes, soit des lettres. Les lettres ambiguës s'interprètent comme des variables. Concernant les signes ambigus, ils permettent de regrouper sous une seule équation dite générale (ou ambiguë), deux ou plusieurs équations, dites particulières, composées des mêmes termes, mais ayant des signes différents. Par exemples les équations $a + b - c + d = e$, $a + b + c - d = e$ et $a - b + c - d = e$ peuvent être regroupées en une seule équation grâce à des signes ambigus placés devant les termes b , c et d . Ils se comportent comme des signes classiques mais s'interprètent différemment.

1. Les cas non dégénérés sont l'hyperbole, la parabole et l'ellipse. Dans la définition géométrique, les cas dégénérés ou limites font également apparaître le cercle, deux droites sécantes, la droite et le point. Dans la définition algébrique, les cas dégénérés comprennent aussi l'ensemble vide et deux droites parallèles.

2 Présentation des textes

« De la méthode de l'universalité I » et « De la méthode de l'universalité II » sont tous les deux écrits entre mai et juin 1674² et ont été édités pour la première fois par Louis Couturat en 1903 dans les *Opuscules et fragments inédits de Leibniz* [Couturat & Leibniz 1966]. Les textes étudiés ici sont des versions issues de l'édition, plus fiable, du septième volume de la série VII dite « de l'Académie » [A VII, 7] du manuscrit [LHIV, 5, 10] réalisée par le Leibniz Archiv d'Hanovre et publiée en décembre 2019. L'édition [A VII, 7] regroupe plus de soixante textes datés de 1673 à 1676 et pour la grande majorité rédigés en latin, les autres sont rédigés en français. Les thèmes abordés sont la construction des courbes, leur mise en équation, l'utilisation de signes ambigus, la résolution de problèmes généraux, etc. Les textes *De la méthode de l'universalité* sont rédigés en français et proposent une introduction à la nouvelle méthode de Leibniz. Durant la transcription des textes, le Leibniz Archiv a mis à disposition l'avancée de son travail. Les recherches nécessaires à l'écriture de cet article s'appuient sur le preprint d'octobre 2017³. Quelques changements ont été opérés par les éditeurs depuis, en particulier l'ordre des textes a été inversé. Les citations feront référence à l'édition finale de décembre 2019⁴ et seront faites de la manière suivante : [A VII, 7, page]. Toutefois, j'ai décidé de garder l'ordre de présentation et d'analyse des textes tel que je l'avais déterminé à partir du preprint d'octobre 2017, ce qui explique que le texte « II » soit présenté avant le texte « I ». Le texte appelé ici *De la méthode de l'universalité II* est nommé, dans le preprint d'octobre 2017, *De la méthode de l'universalité I* et est présenté en premier.

Dans *De la méthode de l'universalité II*, Leibniz se donne pour objectif de résoudre un problème général :

Par Exemple soit un Probleme proposé, sçavoir : d'un point donné D . mener une perpendiculaire DB , à une section conique donnée, ABC . [A VII, 7, 113]

Le problème est général, car Leibniz ne fixe pas la conique avec laquelle il travaille ni la situation du point considéré. Ce problème lui sert de fil conducteur. Il tire son origine d'une discussion avec Carcavy à l'automne 1673 à propos des « essais de Pascal et Desargues pour traiter les coniques d'un point de vue "universel". [...] Carcavy avait alors évoqué certains problèmes que ces mathématiciens ne semblaient pas capables de résoudre – comme celui de la construction générale d'une perpendiculaire à une conique quelconque, sur lequel Leibniz rédige alors plusieurs essais » [Rabouin 2020, 152]. Le texte dont il est question ici se présente comme une suite de paragraphes dans lesquels

2. D'après les éditeurs d'Hanovre.

3. Voir <https://www.gwlb.de/Leibniz/Leibnizarchiv/Veroeffentlichungen/>.

4. Voir <http://www.gwlb.de/Leibniz/Leibnizarchiv/Veroeffentlichungen/VII7.pdf>.

Leibniz détaille sa pensée. Le texte est très fluide, les différents paragraphes se succèdent avec beaucoup de cohérence. Ils se présentent sous plusieurs formes distinctes, certains énonçant un exemple de problème général. Ils sont, la plupart du temps, suivis d'un paragraphe visant à détailler les cas recouverts par le problème, de manière à justifier l'usage d'une méthode générale de résolution. Leibniz, dans d'autres paragraphes, présente les nouveaux outils de sa méthode et leur utilisation. La première lecture est difficile et de nombreuses choses restent en suspens. Les signes ambigus semblent prometteurs mais leur potentiel n'est que peu développé dans ce texte. On pourrait penser qu'il va traiter le problème posé dès les premières lignes mais Leibniz ne se donne pas cette peine dans cet écrit. Il se rapporte parfois à ce problème pour justifier l'utilisation de ses nouveaux symboles mais ne propose aucune résolution (particulière ou générale⁵).

Le deuxième texte (*De la méthode de l'universalité I*) est très différent du précédent dans sa forme surtout, mais aussi dans son fond. En effet, le texte est organisé en 55 sections chacune étant numérotée et nommée. Par cette structure plus organisée, Leibniz peut se passer de l'introduction d'un problème général qui guiderait sa réflexion comme il le fait dans le premier texte. Cependant l'objectif général reste le même : proposer une nouvelle méthode de résolution des problèmes – nouvelle à la fois par ses instruments et par son objectif. La méthode se veut générale, elle n'a pas pour but de trouver des théorèmes ou de résoudre des cas particuliers, mais de restaurer l'harmonie des choses. En d'autres termes, elle doit être capable de traiter grâce à un seul cas général, une multitude de cas particuliers. Pour ce faire, l'algèbre et l'analyse ordinaires ne sont pas suffisantes et doivent être complétées à l'aide de la caractéristique qui, correctement manipulée, fournit de nouveaux outils pour prétendre à ce but.

Toutefois, contrairement au premier texte, il apparaît que dans celui-ci, Leibniz souhaite réaliser un but bien précis : proposer une équation générale de toutes les coniques. De plus, au regard de cet objectif, la présentation du texte se justifie puisque les outils nécessaires à la réalisation d'un tel projet sont présentés et introduits, petit à petit à travers des exemples, et détaillés à tour de rôle de manière à accompagner le lecteur jusqu'au but choisi. Contrairement au premier texte, celui-ci semble destiné à être lu ou étudié par ses contemporains. En effet, il a fait l'objet de copies. Il en existe plusieurs versions dont une qui n'est pas de la main de Leibniz, mais qui a été corrigée par lui. Autrement dit, il semblerait que Leibniz ait souhaité transmettre cet écrit, peut-être à l'Académie des sciences qu'il voulait rejoindre ou à Huygens comme il l'a fait avec *Quadratura* à l'automne 1674.

Les deux textes se montrent finalement très complémentaires, les concepts et les instruments de la méthode sont explicités dans le premier (MDU 2), lorsque le second (MDU 1) détaille la manipulation des signes ambigus et

5. Leibniz donne toutefois, une solution générale au problème dans le texte N.14 *Essay de la méthode des universels* [A VII, 7, 158–166].

le traitement réservé aux équations générales. Il est toutefois important de noter que quel que soit le texte, Leibniz ne détaille jamais l'application de la méthode de l'universalité à un problème mais qu'il en expose les principales nouveautés. Ainsi, il ne définit jamais vraiment sa méthode mais la met à disposition du lecteur à travers des exemples permettant d'en saisir les principes et les opérations. Si la méthode de l'universalité existe, elle n'est pas explicitée par Leibniz dans ces deux textes, mais elle est illustrée à travers des exemples d'applications.

La présentation et la datation finale choisie par les éditeurs d'Hanovre laissent penser que Leibniz a tenté, dans un premier temps, de faire figurer l'intégralité de son projet et l'étendue de son potentiel dans un unique texte clair et structuré (MDU 1). Il semblerait que dans un second temps il ait décidé de présenter son projet de manière totalement différente en exposant sa méthode de manière générale et en présentant ses concepts dans un premier texte (MDU 2), accompagné d'autres textes appliquant la MDU à des cas particuliers (N. 14 *Essay de la méthode des universels* [A VII, 7, 151–166] et N. 15 *Essay de la méthode de l'universalité* [A VII, 7, 167–174]).

Dans les textes étudiés ici, Leibniz semble s'autoriser un parallèle entre généralité et universalité ; si une frontière existe entre les deux, elle n'est pas perceptible dans les textes de la MDU. En effet, bien qu'il nomme sa méthode « de l'Universalité », elle permet de « trouver par une seule operation des formules Analytiques et des constructions Geometriques generales » [A VII, 7, 113], les équations ambiguës sont appelées « Equation generale » [A VII, 7, 120], parfois « Equation ambigue generale » [A VII, 7, 123] ou encore « equation generale ambigüe » [A VII, 7, 129]. À l'inverse, dans le second texte (MDU 1) Leibniz parle « d'une Equation Universelle qui doit comprendre quantité de cas particuliers » [A VII, 7, 101], mais écrit aussi que « l'ambiguïté qui vient des lettres donne une Univocation ou Universalité [...] de sorte qu'une formule qui n'a que des lettres ambiguës, donne un theoreme veritablement general, mais quand il y a des signes ambigus, il n'est universel qu'en apparence » [A VII, 7, 108]. Cette dernière citation illustre le fait que Leibniz semble considérer les termes « général » et « universel » comme des synonymes, ce que je ferai également dans la suite de cet article.

3 Considérations mathématiques

La « Méthode de l'universalité », que Leibniz ne détaille pas dans les textes, peut se reconstruire en cinq points :

- énoncer le problème et ses données,
- distinguer tous les cas particuliers et proposer une construction géométrique permettant, dans chacun des cas, de poser l'équation du problème,
- construire géométriquement le problème de manière générale, au moyen de points mobiles et de points fixes,

- construire une équation ambiguë du problème en regroupant les différentes équations particulières grâce à l'utilisation des signes ambigus et des grandeurs infinies,
- Résoudre l'équation ambiguë et la manipuler pour produire des résultats généraux.

J'ai volontairement choisi de décomposer la méthode à l'aide du vocabulaire de Leibniz de manière à faire ressortir les outils qu'il utilise, au risque de la rendre plus abstraite. Cet article n'a pas pour but de détailler cette méthode, je me fixe pour objectif de présenter les outils manipulés par Leibniz, qu'ils soient mathématiques ou philosophiques. Il est toutefois intéressant de mentionner qu'elle semble prendre appui sur plusieurs suppositions, notamment le fait que les problèmes de nature géométrique peuvent être réduits à l'interprétation de solutions algébriques. C'est en tout cas ce que laissent penser les textes de la MDU ainsi que les textes *Essay de la méthode des universels* et *Essay de la méthode de l'universalité* [A VII, 7, 167–174]. En particulier, dans les textes de la MDU Leibniz se propose d'étudier des problèmes de nature géométrique généraux par l'intermédiaire d'équations ambiguës et écrit également : « en sorte que les Problemes des quadratures, des centres de gravité, et des dimensions des lignes ou surfaces courbes se peussent résoudre par le moyen des Equations » [A VII, 7, 115]. Ce qui n'est pas sans rappeler les idées de la tradition cartésienne initiée par Descartes et reprise par Van Schooten auxquels Leibniz fait explicitement référence.

Dans cette section, j'étudierai d'abord la définition et les conséquences de la considération de « points mobiles et points fixes » à travers l'usage qu'en fait Leibniz, puis je m'intéresserai à l'usage de grandeurs infinies en commençant par les infiniment petites.

3.1 Les points mobiles et les points fixes

Pour présenter les outils et les manipulations de Leibniz, je reprendrai un exemple qu'il présente dans les deux textes de la MDU :

Étant donnés trois points alignés A , B et C , calculer la distance AC à l'aide des distances AB et BC .

La première étape est réalisée puisque le problème exposé est général, aucune considération n'est faite sur les points A , B et C hormis le fait qu'ils soient alignés. Les données sont les distances AB (notée ici a) et BC (notée ici b). Il s'agit de déterminer la distance AC (notée ici c).

La deuxième étape consiste à identifier tous les cas particuliers du problème général qui sont au nombre de 6. En effet, si l'on suppose que le point A est situé entre les points B et C , alors soit B est à droite de A et C est à gauche, soit B est à gauche de A et C est à droite. Il est en de même lorsque les points B et C sont situés entre les deux autres points. Ainsi, pour chaque point A , B

ou C , placé entre les deux restants, deux configurations sont possibles, ce qui fait au total 6 cas particuliers. Toutefois, ces 6 cas particuliers ne donnent lieu qu'à 3 équations distinctes, qui sont :

$$a + b = c \tag{1}$$

$$a - b = c \tag{2}$$

$$b - a = c \tag{3}$$

Les 6 cas particuliers peuvent donc se regrouper à travers 3 constructions fondamentalement distinctes. En effet, on peut commencer par identifier, comme le fait Leibniz, que pour certains couples de situation « l'une est la renversée de l'autre » [A VII, 7, 133]. Par exemple, posons B situé entre A et C . Les deux cas particuliers issus de cette situation se traduisent par la même équation $a + b = c$. Ainsi, il note que le plus important est la situation des points entre eux.

À partir de cette remarque il peut introduire la notion de points fixes et de points mobiles. En particulier, il écrit :

Quand je parle des points fixes, il ne faut pas s'imaginer que ces points gardent nécessairement une même distance entre eux ; mais je les considère comme attachés ensemble avec une corde, qui se peut rallonger ou rappetisser ; sans changer autrement de situation, mais je considère le point A [...] comme détaché avec liberté de sauter de place en place. [A VII, 7, 122]

Ainsi, pour lister les différents cas particuliers, il suffit de prendre certains points mobiles et d'autres fixes. Par exemple, posons A et B pour fixes et C situé à droite de A . Alors, les trois situations sont les suivantes : (1) C est à droite de B , (2) C est entre A et B et (3) C est à gauche de A .

Leibniz ne donne pas beaucoup de détails concernant ces points et sa conception du mouvement, mais il précise toutefois que « comme en matière de mouvement, de même icy le changement est une chose relative » [A VII, 7, 119]. En particulier le changement de situation d'une construction correspond au changement de configuration des points mobiles par rapport au(x) point(s) considéré(s) comme fixe(s). Il explique notamment que l'on aurait pu prendre le point C pour fixe et prendre pour points mobiles A et B . Pour appuyer son propos, il construit les exemples et rappelle que le plus important est de prendre en considération toutes les situations possibles. Enfin, il écrit notamment que l'on peut choisir n'importe quels points fixes tant que l'on prend en compte toutes les configurations.

3.2 La considération de grandeurs infiniment petites

Nous avons vu dans la partie précédente que Leibniz ne semblait pas considérer un mouvement continu mais plutôt la situation de certains points par rapport

à d'autres points pris pour référence. Pourtant Leibniz accorde un rôle aux grandeurs infiniment petites dans l'usage de la MDU. En particulier si l'on reprend l'exemple précédemment énoncé, deux situations envisageables n'ont pas été prises en considération. En effet, on pourrait supposer que le point C coïncide avec le point A ou avec le point B .

Aucune des équations énoncées dans la partie précédente ne conviendrait pour décrire une telle situation. Si l'on suppose que le point C et le point B coïncident, ils ne forment alors qu'un seul point et l'on ne peut donc pas considérer la distance qui sépare le point C du point B . C'est dans ce cadre que Leibniz introduit son recours aux grandeurs infiniment petites. Le cas de la coïncidence des points B et C peut être envisagé si l'on s'autorise l'usage de telles grandeurs. Leibniz écrit :

on ne sçauroit comprendre le Cas de la coincidence des points B et C . dans l'équation générale [...] qu'en supposant la ligne BC infiniment petite. [A VII, 7, 89]

En effet, pour que la situation puisse s'appliquer à l'équation générale, il faut nécessairement que les signes de l'équation puissent être définis et de ce fait, les grandeurs doivent être définies. Or, si le point B et le point C coïncident, la distance BC n'est pas définie et de ce fait, son signe dans l'équation générale n'est pas non plus. Toutefois, si l'on suppose que la distance BC est infiniment petite, le point C se trouve soit « à droite » du point B , soit « à gauche » du point B . Dans chacun des cas, la situation peut être décrite à partir de l'équation générale et donc le signe de b est défini. Il suffit ensuite de considérer b comme étant nul puisque la ligne BC est infiniment petite. De plus, il justifie leur utilisation par la considération suivante « le point C qui est ambulatoire peut tomber dans le point B , puisque il peut tomber en deçà et en delà de toutes les manières » [A VII, 7, 88]. En particulier, la distance qui sépare le point B du point C peut être inférieure à toute distance donnée et donc, dans ce cas la ligne BC est infiniment petite et peut être considérée comme nulle. En effet, considérons une distance variable, notons cette distance BC et rendons la plus petite que toute grandeur donnée. BC est bien une distance et peut donc être manipulée. En particulier de manière anachronique, elle possède une direction et un sens ainsi la position du point C par rapport au point B est définie. Toutefois, par définition, BC n'est pas une grandeur déterminée et comme elle est plus petite que n'importe quelle grandeur donnée, elle peut être considérée comme nulle.

On voit donc que Leibniz fait le lien entre ligne infiniment petite et grandeur indivisible ou nulle, mais il semblerait que la réciproque soit également envisageable puisqu'il écrit : « on peut placer $[C]$, non seulement directement sous B , pour faire $AC[=]AB$ et BC égale à rien » [A VII, 7, 88]. Toutefois, l'équation qui découle de cette situation ne peut pas dériver de l'équation générale puisque, comme on l'a vu plus haut, le signe de b n'est alors pas défini. Leibniz ne l'exprime pas exactement en ces termes, mais c'est une interprétation possible de la remarque « il faut en cas de la coïncidence

des points B et C concevoir la ligne BC infiniment petite, afin que l'équation ne contredise pas l'égalité en AC et AB ».

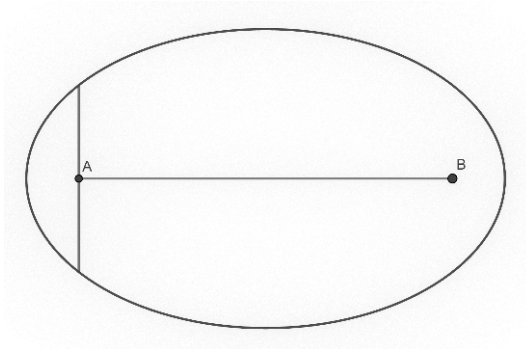
Ainsi, la distance BC ne peut pas être nulle mais doit être infiniment petite et considérée comme nulle. Il semble donc que Leibniz s'autorise l'équivalence entre deux points séparés par une ligne infiniment petite et leur coïncidence, mais préfère concevoir, dans le cadre de la MDU, la coïncidence de deux points comme leur séparation par une ligne infiniment petite et non l'inverse.

3.3 Les lignes infinies

On a vu dans la section précédente que Leibniz s'autorisait à concevoir et manipuler les lignes infiniment petites. Toutefois, il ne se restreint pas à ces lignes puisqu'il considère également les lignes infiniment grandes. L'exemple précédemment utilisé ne permet pas de comprendre l'intérêt qu'elles peuvent avoir dans l'usage de la MDU et celui que je vais citer nécessite quelques rappels concernant le projet de Leibniz. Dans les textes étudiés ici, Leibniz souhaite proposer une méthode générale de résolution des problèmes et pour prouver l'efficacité de sa méthode, il donne l'équation générale de toutes les sections coniques. L'équation générale qu'il présente est la suivante :

$$2ax \mp \frac{a}{q}x^2 = y^2 \quad (4)$$

Les grandeurs a et q sont données et représentent respectivement le *latus rectum* et le *transversum*. Ces notions permettent, à l'époque de Leibniz de définir les coniques. En voici une interprétation dans le cas de l'ellipse :



Le *latus rectum* est ici représenté verticalement et le *transversum* est représenté par le segment $[AB]$, où A et B sont les foyers de l'ellipse.

Pour appliquer l'équation générale à l'équation d'une parabole, Leibniz opère quelques changements. En particulier, il modifie l'équation (4) en :

$$2axq \mp ax^2 = y^2q \tag{5}$$

Le signe ambigu utilisé dans ces équations se lit « moins ou plus » et s'interprète comme un $-$ ou un $+$ selon la conique considérée. Toutefois, dans le cas de la parabole, Leibniz ne fixe pas le signe pour une raison très particulière. Lorsque l'on souhaite décrire une parabole par l'intermédiaire du *latus rectum* et du *transversum*, il faut considérer le *transversum* comme une ligne infinie (c'est-à-dire, comme si le second foyer de l'ellipse ci-dessus était transporté à l'infini). C'est sûrement la raison qui pousse Leibniz à transformer son équation (4) en (5)⁶, puisque dans l'équation (4), si q est infinie alors le rapport $\frac{a}{q}$ est une division par l'infini. Il semble que Leibniz préfère travailler sur l'équation homogène (5) pour éviter cette situation.

Leibniz explique ensuite que le produit ax^2 doit être considéré comme infiniment petit à l'égard des autres rapports $2axq$ et y^2q car « puisqu'il y a autant de lettres ou dimensions d'un terme, que de l'autre, ceux dont une lettre est infinie, seront infiniment plus grands, que celui dont les lettres ne sont qu'ordinaires » [A VII, 7, 104]. En effet, les trois termes axq , ax^2 et y^2q sont de même degré, autrement dit l'équation (5) est une équation homogène. De plus comme la grandeur q est une grandeur infinie, le terme ax^2 sera infiniment plus petit que les autres termes, car a et x sont toujours finis. Ainsi, Leibniz peut supprimer ce terme de l'équation (5). Ceci donne l'équation :

$$2axq = y^2q \tag{6}$$

Ainsi, Leibniz ne considère pas des infinis absolus mais plutôt des indéfinis (dans le cas des distances représentées par les points mobiles), ou des infinis relationnels (dans le cas de l'application de ces indéfinis à des cas particuliers⁷), dans le sens où certaines grandeurs sont infinies (grandes ou petites) par rapport à d'autres grandeurs, qui, elles, sont définies. Cette conception n'est pas sans rappeler les travaux et les manipulations de Pascal concernant l'infini et les indivisibles, voir [Rabouin & Cortese 2019].

3.4 Manipulation des infinis

Ces considérations de l'infini n'empêchent pas Leibniz de les manipuler. Pour reprendre l'exemple de la parabole où le *transversum* q est considéré comme

6. Leibniz ne justifie pas cette transformation. De plus, il opère ce changement avant de considérer q comme une grandeur infinie, il semble donc qu'il considère l'équivalence entre (4) et (5) dans le cas de l'algèbre ordinaire et étend son domaine de validité à l'algèbre infinie.

7. Dans ce cas, le statut des indéfinis est fixé (fini, infiniment grand, infiniment petit) et les infinis sont conçus et traités comme des rapports de grandeur entre les distances.

infini, Leibniz simplifie l'équation (6) en :

$$2ax = y^2 \tag{7}$$

en simplifiant chaque côté de l'équation par la valeur q . D'un point de vue algébrique, rien n'empêche Leibniz de supprimer la grandeur q de chaque côté du = pour passer de l'équation (6) à l'équation (7). Cette opération appelée « al-muqabala » par Al-Khwarizmi et introduite dans « Al-jabr y muqabala » est l'une des opérations élémentaires de l'algèbre ordinaire pour les quantités finies. Il semble que Leibniz étende le domaine de validité de cette opération à l'algèbre infinie. Il considère ici que la grandeur q est de longueur infinie. Toutefois, l'égalité ne tient plus après simplification, ou du moins elle devrait être vérifiée. En effet, prenons deux nombres quelconques a et b différents. Soit maintenant un nombre c désignant une grandeur indéfinie telle que $a.c = b.c$. Cette égalité est vraie si c vaut 0 mais également si c représente l'infini. Cependant il est impossible de simplifier l'équation $a.c = b.c$ en $a = b$ puisque a et b sont différents par hypothèse. Ainsi, la combinaison de grandeurs infinies ou nulles avec les grandeurs finies n'est pas toujours possible et remet en question certaines manipulations algébriques qu'il faut alors vérifier. Au vu de son traitement de l'infini, Leibniz ne semble pas être conscient de tous les problèmes posés par la simplification de grandeurs infinies, ou s'il en est conscient, il n'en tient pas compte.

Il me semble important de noter ici que si l'opération arithmétique permettant la simplification de q dans l'équation (6) est également une division par l'infini⁸, l'opération réalisée ici par Leibniz est une opération algébrique, autrement dit, Leibniz ne divise pas par l'infini mais simplifie l'équation par la grandeur q , indépendamment de sa valeur. Ce qui pourrait expliquer que Leibniz se refuse à diviser par une grandeur infinie mais ne s'interdit pas la simplification d'une grandeur infinie.

On pourrait également penser, au vu de l'équation (7), que Leibniz considère en fait l'équation (4) et considère le rapport $\frac{a}{q}$ comme infiniment petit. Il est probable que ce ne soit pas ce que fait Leibniz, car si tel était le cas, il n'aurait aucune raison d'introduire l'équation (5) et de la simplifier avec justification en l'équation (6).

Concernant la manipulation des « indivisibles », que Leibniz traite indifféremment des distances infiniment petites, son application de l'équation (4) à l'équation d'une droite montre une autre singularité dans la manipulation des infinis. En effet, Leibniz écrit que « à l'égard de la ligne droite on peut concevoir a aussi bien que q infiniment petites » [A VII, 7, 104]. On aurait alors que « le terme $2ax$ évanouira comme infiniment petit, à l'égard de $\frac{a}{q}x^2$ et y^2 . [...] Or la raison de deux lignes infiniment petites peut être la même avec celle de deux lignes ordinaires et même de deux quarrés ou rectangles » [A VII, 7, 104]. Cette remarque montre que Leibniz est conscient de certaines propriétés

8. Comme le cas du rapport $\frac{a}{q}$ dans l'équation (4).

des grandeurs infiniment petites. Ses travaux sur le triangle caractéristique lui ont permis de comprendre que le rapport entre deux grandeurs infiniment petites pouvait être le même que le rapport de deux grandeurs finies ou de deux carrés. Ce qui se traduit aujourd'hui par, si $\forall \epsilon > 0$, a et $q < \epsilon$ alors :

$$\exists e, d \in \mathbb{N}, \frac{a}{q} = \frac{e^2}{d^2} \quad (8)$$

De cette manière, il peut conclure que l'équation $\frac{a}{q}x^2 = y^2$ est équivalente à l'équation $\frac{e}{d}x = y$, qui est bien celle d'une droite. Toutefois, à l'époque de Leibniz, l'équation algébrique d'une droite n'est ni triviale ni répandue.

La question qui se pose maintenant est celle du lien entre sa manipulation des indivisibles et le principe de continuité qu'il développera plus tard. En particulier, son traitement des indivisibles et de l'infini⁹ semble soutenir le point de vue défendu par Emily Grosholz dans *Representation and Productive Ambiguity in Mathematics and the Sciences*¹⁰ qui voit dans son traitement des lettres ambiguës les germes de son principe de continuité.

4 Caractères ambigus

Ce qui rend les textes de la MDU inouïs ne concerne que peu ce qui a été évoqué plus haut mais bien ce qui va suivre. Si Leibniz se fixe le projet de résoudre des problèmes généraux, aucun des outils de son époque ne le permet. Leibniz invente donc pour servir son projet un nouveau type de caractères, et notamment de signes, pour pouvoir regrouper plusieurs équations en une seule. Cette partie de l'article leur est dédiée. Dans un premier temps j'étudierai rapidement les lettres ambiguës qui apportent à Leibniz la généralité et qui s'interprètent comme nos variables actuelles, puis je présenterai les signes ambigus et une partie de leur fonctionnement.

4.1 Lettres ambiguës

Les lettres ambiguës sont les outils que met en place Leibniz pour saisir les grandeurs définies par les points mobiles. On a vu dans les sections précédentes que lorsque Leibniz s'attaque à un problème de nature générale, il propose une construction dans laquelle sont définis des points mobiles et des points fixes. Les points fixes représentent les données et ne changent pas de situation. Ainsi, la distance entre deux points fixes peut toujours être représentée par un nombre fini. Au contraire, les points mobiles représentant un « manque d'informations » peuvent quant à eux changer de situation

9. Non pas en tant qu'infini absolu mais en tant qu'indéfini géométrique.

10. En particulier, voir le chapitre « Leibniz on Transcendental Curves » [Grosholz 2007, 204–224].

et les distances prenant en considération des points mobiles peuvent être soit finies, soit indivisibles¹¹, soit infinies. En particulier, si l'on reprend l'exemple de l'équation (4) utilisée plus haut, a et q sont des lettres ambiguës et représentent des grandeurs qui peuvent être de différentes natures. Ces lettres apportent ce que Leibniz désigne comme la véritable universalité qu'il nomme « Univocation ».

Pour comprendre cette phrase, il faut admettre que lorsque l'on écrit une formule contenant des lettres ambiguës, elle reste vraie quelles que soient les valeurs portées par les lettres, et c'est en ce sens que la formule est alors complètement générale. Dans le cas où la formule est composée de signes ambigus, alors elle n'est pas tout à fait universelle puisque les signes ambigus servent à unifier plusieurs équations. Ainsi, la formule est générique puisqu'elle fait référence à plusieurs cas particuliers, mais non universelle car il est nécessaire de fixer une situation pour faire disparaître les signes ambigus et pouvoir appliquer la formule à un cas particulier.

Les lettres ambiguës sont donc le meilleur moyen pour Leibniz d'obtenir l'universalité. Elles permettent d'écrire des formules totalement générales qui n'ont besoin d'aucune précision pour s'appliquer à une multitude de cas. Nous verrons dans la section suivante comment les signes ambigus permettent, eux aussi, d'apporter une généralité qui est toutefois légèrement différente.

4.2 Les signes ambigus

Cette partie de l'article est réservée à ce qui fait, à mon sens, toute l'originalité des textes de la MDU. Dans ces textes, Leibniz propose un ensemble de signes permettant de regrouper plusieurs équations « particulières » en une équation dite générale. De plus, Leibniz défend que des caractères en accord avec la caractéristique doivent respecter certaines règles. En particulier, les symboles doivent : (1) être manipulables efficacement, c'est-à-dire être opératoires et (2) être intuitifs. La deuxième règle est particulièrement importante dans le cas des signes ambigus, surtout lorsque l'on sait qu'« il y a une infinité de signes¹² » [A VII, 7, 80]. Leibniz les distingue en deux « familles » : les signes ambigus composés et les signes ambigus simples, représentés ci-dessous, qui sont « moins ou plus » et « plus ou moins » :

‡ †

Il est important de se rappeler que ces signes s'utilisent dans une équation dite générale qui regroupe plusieurs équations dites particulières. Ainsi, les

11. Leibniz utilise le plus souvent l'expression « Lignes infiniment petites » mais utilise également le terme « indivisible ». En témoigne la section XXI du texte (I) qui a pour titre « Lignes infiniment petites qu'on appelle vulgairement indivisibles » [A VII, 7, 87].

12. Comprendre « signes ambigus ».

signes font référence aux opérations « - ou + » et « + ou - », avec un « ou » exclusif : chaque signe vaut soit - soit + mais exprime les deux possibilités. De cette manière, une équation ambiguë fait référence à un système d'équations ordonnées. L'ordre dans lequel on décide de « ranger » les équations particulières détermine le signe utilisé. Les deux exemples suivants montrent comment les mêmes équations, ordonnées différemment, donnent naissance à deux équations générales différentes (voir ci-dessous).

$$a \mp b = \begin{cases} a - b \\ a + b \end{cases}$$

$$a \pm b = \begin{cases} a + b \\ a - b \end{cases}$$

Toutefois, Leibniz ne s'arrête pas là et introduit ensuite ce qu'il nomme les « signes ambigus composés ». Ces signes se démarquent des signes simples par le fait qu'ils ne s'interprètent pas de la même manière. En effet, les signes simples peuvent s'utiliser et s'interpréter seuls dans une équation ; au contraire, les signes complexes s'interprètent par paire (ou triplet, etc.). Ils n'expriment pas simplement une possibilité de signes pour un terme, mais une combinaison de signes avec les autres termes de l'équation.

$$\begin{array}{r} + \quad AB + \quad BC \\ - \quad \left. \vphantom{+} \right\} \mp \quad AB + \quad \left. \vphantom{+} \right\} \mp \quad BC \\ + \quad \left. \vphantom{+} \right\} \mp \quad AB - \quad \left. \vphantom{+} \right\} \pm \quad BC \end{array} \left. \vphantom{+} \right\} \\ \hline \mp \quad AB \quad \mp \quad BC$$

On voit dans cet exemple que la valeur AB est parfois précédée d'un + et parfois d'un -. Cependant lorsque le signe de AB est +, le signe de BC peut être + (le « premier » + de AB , représenté en noir) ou - (le « deuxième » + de AB , représenté en gris). C'est en ce sens que Leibniz souhaite que les signes complexes expriment des combinaisons entre les différentes valeurs de l'équation.

Les nuances de couleurs¹³ permettent de mieux comprendre la formation et l'interprétation des signes. On peut ainsi voir que lorsque les signes sont identiques pour les valeurs AB et BC , la partie gauche des signes complexes utilisés dans l'équation générale est identique et représente un +. De plus, on voit que dans les deux dernières équations particulières, les signes de AB

13. Ajoutées par mes soins.

et BC sont opposés l'un à l'autre : lorsque l'un vaut $+$, l'autre vaut $-$. Leibniz représente cette relation d'opposition en utilisant un signe \mp devant AB et un signe \pm devant BC . Ces signes sont ensuite assemblés au $+$ noir précédemment décrit pour former les signes complexes utilisés dans l'équation générale. Ces signes sont dits de degré 2 par Leibniz puisqu'ils ajoutent deux ambiguïtés à l'équation. Autrement dit, les signes de degré n donnent lieu à des équations générales de $n+1$ équations particulières, c'est-à-dire comportant n ambiguïtés selon le vocabulaire de Leibniz. Dans les textes de la MDU, il présente d'autres signes de degré 2 et également des signes de degré 3.

$$a(\overline{\mp})\mp b(\overline{\mp})\mp c$$

En considérant que cette équation générale décrit une valeur d , alors elle fait référence aux quatre cas particuliers suivants :

$$d = a - b - c$$

$$d = a + b + c$$

$$d = a - b + c$$

$$d = a + b - c$$

On voit que ces signes apportent une nouvelle forme de généralité aux équations. Leibniz distingue cette généralité de celle des lettres ambiguës et la nomme « équivocation » puisqu'elle donne lieu à plusieurs interprétations. Pour la rendre universelle, il est nécessaire de fixer une situation pour donner du sens à l'équation générale. Autrement dit, il est nécessaire de lever l'ambiguïté des signes, en fixant la situation des points mobiles. Sans cela, l'équation, bien que générale, n'est pas universelle dans le sens où elle ne s'applique pas à tous les cas particuliers de la même manière.

5 Concepts philosophiques

Les sections précédentes montrent quelle est la conception mathématique de la MDU et quels sont les outils qu'elle manipule, c'est-à-dire comment la MDU peut s'appliquer et s'applique à des problèmes de nature mathématique. Toutefois, la méthode que propose Leibniz a également une portée philosophique. En effet, si elle sert pour résoudre des problèmes généraux elle est aussi un moyen pour lui de restituer l'harmonie des choses par l'intermédiaire de la caractéristique. Ces deux concepts centraux de la philosophie leibnizienne occupent déjà une place de choix dans ses réflexions de l'époque.

5.1 L'harmonie

Dans les textes de la MDU, Leibniz écrit vouloir « [réduire] des figures différentes à une certaine harmonie » [A VII, 7, 76]. Cette utilisation de l'harmonie semble s'accorder avec la définition qu'en donne la *Confessio philosophi* à savoir : « La similitude dans la variété, c'est-à-dire la diversité compensée par l'identité » [Belaval & Leibniz 1993, 31]. Ainsi, l'équation générale des coniques proposée plus haut sert à Leibniz pour atteindre cet objectif. Il exhibe une forme capable de compenser la diversité des sections coniques par l'écriture d'une unique formule générale. De plus, cette équation permet de faire « comme s'il y avoit une certaine figure particulière dans le monde, qu'on appellat Section Conique » [A VII, 7, 105] et de cette manière l'identité de la section conique, restaurée grâce à la considération de cette figure particulière, compenserait la diversité des sections coniques. Cette citation laisse penser que Leibniz considère une figure fictive (dans le sens où il n'existe aucune figure qui serait celle de la « Section Conique ») et générique (dans le sens où elle permet d'engendrer toutes les sections coniques). De plus, pour Leibniz, cette figure « existe » par la considération de l'équation générale de toutes les coniques. Autrement dit, c'est l'énonciation de l'équation générale des coniques qui permet de « faire naître » cette figure fictive et générique qui serait la « Section Conique ». Considérer une telle figure à l'époque de Leibniz semble être une approche tout à fait nouvelle. En effet, si certains mathématiciens utilisent des figures en tant qu'exemple générique pour démontrer certains théorèmes ou propriétés, les figures bien que parfois générales¹⁴ sont toujours définies. La « Section Conique » est générique dans le sens où elle est générale, mais n'est pas définie, elle engendre plusieurs classes de figures et possède donc une généralité d'un ordre supérieur à celle des figures générales (définies). On peut également penser que la section conique serait la position générique des sections coniques, dans le sens où elle engendrerait les positions générales des différentes sections coniques. Ce recours à la généralité n'est pas sans rappeler les travaux de Poncelet et Carnot qui, à leur manière, ont également cherché à introduire une figure générique pour démontrer des théorèmes ou des propriétés. Le lien existant entre la généralité de Leibniz et celle de ses successeurs sera traité dans la section 5.3.

Pour Leibniz, l'harmonie n'est pas directement visible, elle est comme cachée par les différences des choses et il est de notre devoir de la restaurer pour pouvoir la considérer. Toutefois, même si l'harmonie n'est pas directement accessible, elle peut être perçue. On peut reprendre pour exemple le cas des coniques. On sait depuis Apollonius que les coniques sont engendrées par la section d'un cône par un plan. De cette manière on peut percevoir l'harmonie qui lie les coniques, mais cette harmonie doit maintenant être démontrée.

Leibniz prend pour exemple le traitement des coniques par les pionniers de la géométrie projective. Il écrit :

14. Telles qu'« un triangle » ou « un parallélogramme » par exemple.

Il est vray que Messieurs des Argues et Pascal ont cru pouvoir reduire les Sections Coniques en Harmonie. [A VII 7, 77]

Mais selon lui, leur méthode est bornée par la nécessité d’imaginer le cône, ce qui n’est pas le cas avec son équation générale.

De plus, pour Leibniz, « une telle Equation est la clef de toutes les harmonies, et differences de choses » [A VII, 7, 105], dans le sens où, en plus de faire apparaître les points communs partagés par les différentes coniques, elle permet de comprendre également d’où proviennent leurs singularités.

Par cette introduction à l’harmonie, on comprend l’importance que peut avoir la MDU aux yeux de Leibniz puisqu’elle permet de justifier l’un de ses concepts fondamentaux. Toutefois, pour pouvoir dévoiler l’harmonie des choses, la MDU doit s’appuyer sur les nouveaux outils de la caractéristique.

5.2 La caractéristique

Dans les textes de la MDU, Leibniz définit la caractéristique comme la « grande Science [...] qui donne la parole aux langues, les lettres aux paroles, les chiffres à l’Arithmetique, les notes à la Musique » [A VII, 7, 78]. Mais la caractéristique joue également un rôle important dans l’entreprise de la pensée puisque « c’est elle qui nous apprend le secret de fixer le raisonnement, et de l’obliger à laisser comme des traces visibles sur le papier en petit volume, pour estre examiné à loisir : c’est enfin elle, qui nous fait raisonner à peu de frais en mettant des caracteres à la place des choses, pour des-embarrasser l’imagination » [A VII, 7, 78]. On voit donc à quel point la caractéristique peut être importante pour Leibniz puisque c’est elle qui nous permet de représenter les choses, qu’elles soient concrètes ou abstraites, et de faciliter leur manipulation.

De plus, Leibniz est conscient que les caractères utilisés comme supports de représentation, bien qu’arbitraires, sont naturellement porteurs de règles de composition correspondant aux règles des choses qu’ils représentent. En particulier, il écrit que « quoyque il semble que les caracteres soient arbitraires, il y a pourtant bien des regles à observer, pour rendre les caracteres propres à l’usage. » [A VII, 7, 78]. En effet, les caractères représentent des objets et les relations qu’ils entretiennent, de ce fait les bons caractères sont ceux qui permettent de manipuler convenablement ces objets. C’est à ce titre qu’il se permet de critiquer le caractère utilisé par Van Schooten pour représenter la différence, allant jusqu’à dire que « ce Caractere est contre les regles de la Caracteristique » [A VII, 7, 78], en particulier parce que le caractère utilisé n’est pas opératoire. En effet, Van Schooten utilise l’expression $a = b$ pour désigner les deux formules $a - b$ et $b - a$. Or, si l’on pose que le caractère $|$ représente l’égalité, et si sachant a et b on cherche une valeur y , telle que $a = y|b$, on ne pourrait « mettre les connues a, b , d’un costé, ny séparer a de y » [A VII, 7, 78], ainsi, le caractère $=$ pour marquer la différence n’est pas opératoire. On peut ajouter que Leibniz se sert de sa critique

pour promouvoir ses nouveaux caractères qui résoudre aisément cette équation¹⁵.

Le paragraphe concernant l'harmonie montre que la MDU a également une portée philosophique : celle de restituer à des choses différentes, mais de même nature, leur identité par l'utilisation de la généralité. Toutefois, cette ambition philosophique ne peut se passer de manipulations mathématiques. En effet, rendre compte de l'harmonie des sections coniques revient à proposer une équation générale permettant de toutes les retrouver. Cette équation est générale par l'utilisation de symboles particuliers que Leibniz nomme signes ambigus, qui semblent être les meilleurs représentants des bienfaits de la caractéristique. En effet, comme indiqué plus haut, les signes ambigus permettent de regrouper plusieurs équations de termes identiques, qui diffèrent par leurs signes, en une équation unique que l'on peut manipuler¹⁶.

Ainsi, la caractéristique joue un rôle particulièrement important dans l'utilisation de la MDU puisque c'est précisément elle qui permet d'unifier les équations pour révéler l'harmonie qui réside entre plusieurs constructions géométriques.

5.3 La généralité

La MDU est donc une méthode capable, selon Leibniz, d'unifier différentes figures mathématiques par l'introduction d'une figure générale. Plus tard, au début des années 1800¹⁷, Carnot et Poncelet, dans plusieurs productions analysées par Philippe Nabonnand dans son article « L'argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles¹⁸ », ont également recours à la généralité pour démontrer des théorèmes et des propriétés de manière générale. Toutefois, de nombreuses différences subsistent dans les manipulations de chacun.

Chez Leibniz, la généralité semble être attachée à une figure générique engendrée par une équation universelle de laquelle découlent toutes les figures générales. Chez Carnot, la généralité semble être un moyen de lier plusieurs figures dites « en corrélation ».

Il décrit les figures corrélatives non pas comme des figures qui peuvent être dérivées l'une de l'autre par transformation mais comme des systèmes de points en nombre égaux, se correspondant deux à deux, dans lesquels on trace un même nombre de droites,

15. Il note tout de même que Van Schooten a également utilisé des caractères « similaires » au sien mais ne les a pas assez manipulés pour en saisir les règles d'utilisation et de composition [A VII, 7, 78].

16. On peut par exemple la résoudre ou l'utiliser pour la démonstration de théorèmes généraux (ce que fait Leibniz à la fin de *La Méthode de l'universalité I*).

17. Soit près de 125 ans plus tard.

18. Publié en 2011 et disponible sur HAL [Nabonnand 2011].

de circonférences, par lesquels on mène un même nombre de plans « en menant toujours ces droites, ces circonférences, ces plans, par les points correspondants ; et qu'enfin tout ce qui est exécuté d'un côté le soit pareillement de l'autre » (Carnot 1801). [Nabonnand 2011, 6]

En particulier, chacune de ces différentes figures peut être utilisée comme repère sans qu'il y ait de figure privilégiée. La figure choisie est nommée « figure primitive » et les autres « figures corrélatives », mais la figure primitive dépend d'un choix *a priori* arbitraire. Au contraire, chez Leibniz, la généralité est attachée à une figure fictive et générique donc privilégiée. De plus, pour Leibniz, la généralité est permise grâce à la considération de grandeurs infinies, qu'elles soient grandes ou petites.

Cette idée fait écho à la « généralité continue » de Poncelet tout en restant différente de celle-ci. En effet, chez Poncelet comme chez Leibniz, la généralité est permise grâce à la continuité et à la considération d'éléments imaginaires ou infinis¹⁹. Toutefois, si le passage par continuité d'une figure à l'autre est clairement explicité par Poncelet, il ne l'est pas dans la MDU de Leibniz, mais il est sous-entendu dans sa présentation de la généralité. Chez Poncelet, les formules liées aux propriétés graphiques sont générales et restent vraies lorsque l'on opère des modifications continues sur les figures, de fait la formule est générale car elle reste vraie. Chez Leibniz la formule est générale par définition lorsqu'elle ne s'attache pas aux considérations particulières d'une situation mais qu'elle regroupe l'ensemble des équations permettant de représenter chaque situation. De fait, lorsque l'on se place dans un cas particulier, on peut le faire évoluer de manière continue pour engendrer les différents cas particuliers recouverts par la formule, même si Leibniz ne le présente pas de cette manière. Il semble concevoir sa généralité comme un agrégat de cas particuliers, unifiés à travers une figure générale. Autrement dit, si la continuité est une nécessité pour la généralité de Poncelet, il semble qu'elle ne soit qu'un corollaire de la généralité de Leibniz.

Avant de conclure cet article, on peut chercher à remettre en cause le parallèle que l'on s'est autorisé dans l'introduction, entre universalité et généralité à la lumière de la querelle entre Descartes et Fermat concernant leurs méthodes respectives pour trouver les tangentes [Barbin 2016, 413–432]. Cette querelle met en avant des distinctions philosophiques et pratiques entre une méthode qui se veut générale et une autre qui se veut universelle.

La méthode de Descartes, qui se veut universelle, trouve ses fondements dans les liens existant entre géométrie et algèbre. Ces fondements justifient l'usage d'une telle méthode mais la bornent également à un domaine de validité. Son universalité tient dans le fait qu'elle peut s'appliquer à tous les problèmes de nature géométrique, tant que les courbes considérées ne sont

19. On peut prendre pour exemple le point d'intersection des droites parallèles situé à l'infini chez Poncelet et le *latus transversum* de longueur infinie chez Leibniz.

pas mécaniques. La méthode de Descartes dessine donc les contours d'une universalité qui s'appliquerait à tous les problèmes mais resterait prisonnière de ses fondements.

À l'inverse, la méthode de Fermat ne repose sur aucun fondement *a priori* mais se justifie par son efficacité. Elle n'est donc pas restreinte à un domaine de validité défini mais peut étendre ce dernier en s'appliquant à de nouvelles questions. La généralité défendue par la méthode de Fermat se caractérise donc par une absence de restrictions *a priori* et par une certaine efficacité justifiant son utilisation. Ces quelques mots ne forment qu'un résumé superficiel de l'étude menée par É. Barbin mais fournissent quelques éléments permettant de mettre en perspective, avec un regard rétrospectif, le lien qui existe, chez Leibniz, entre généralité et universalité.

D'une part, on a vu que la méthode de Leibniz s'appuie sur des fondements philosophiques mais également mathématiques, qui semblent délimiter son domaine de validité. En particulier, comme la méthode de Descartes, elle peut s'appliquer à tous les problèmes géométriques à condition que les courbes considérées ne soient pas mécaniques. Toutefois, on peut également voir des liens entre la MDU et la méthode générale de Fermat notamment dans le fait qu'elle se justifie par son efficacité, que Leibniz tient à montrer. Cette méthode se veut unificatrice et de ce fait semble pouvoir s'étendre au-delà des limites *a priori* imposées par ses fondements algébriques. La méthode de Leibniz et l'utilisation des signes ambigus semblent particulièrement fécondes en géométrie mais ne sont pas restreintes à celle-ci. La MDU est donc d'une part générale dans le sens de Descartes par sa capacité à s'appliquer à tous les problèmes du domaine de validité définie par ses fondements. Et d'autre part, elle est universelle dans le sens de Fermat par l'absence de restrictions qui l'empêcheraient de s'étendre au-delà des limites de son domaine *a priori*. Concernant la justification de son utilisation, lorsque Descartes justifie sa méthode par ses fondements et Fermat par son efficacité, Leibniz justifie la sienne à la fois par ses fondements philosophiques et son efficacité.

6 Conclusion

Dans les textes, et en particulier « De la méthode de l'universalité I », Leibniz présente plus précisément les signes. Il explique la façon dont ils se comportent les uns par rapport aux autres, détaille plusieurs manipulations algébriques²⁰ et propose différentes manières de rendre les équations générales totalement universelles. Les textes sont très riches en contenu, aussi bien mathématique que philosophique et permettent de nombreuses réflexions, car Leibniz ne détaille pas toujours ses propos. Il se fixe comme objectif de pouvoir résoudre des problèmes généraux et propose des outils permettant d'arriver à

20. Telles que l'addition ou la multiplication de signes, la factorisation ou encore l'extraction de racines comportant des signes ambigus.

ce but. Bien que son système de signes aussi bien que sa méthode n'aient pas connu de suites, Leibniz a continué d'écrire sur la MDU²¹ et d'utiliser des systèmes de signes ambigus dans ses brouillons de recherche²². De plus, les travaux d'A. Trunk sur les différents systèmes de signes ambigus montrent que Leibniz a continué de s'y intéresser proposant au total 6 systèmes différents permettant de noter l'ambiguïté [Trunk 2016, 4]. Déjà introduites dans cet article, les recherches d'E. Grosholz tendent à montrer que les germes du principe de continuité se trouve dans la MDU et plus précisément dans la considération des lettres ambiguës et des points mobiles [Grosholz 2007, 213]. Concernant ces derniers objets, J. F. N. Cortese a examiné le traitement des distances infiniment petites par Leibniz et en particulier dans les textes de la méthode de l'universalité [Cortese 2016, 5]. Une autre question qui vient rapidement à l'esprit lors de la première lecture des textes est l'influence des travaux de Desargues et Pascal en géométrie projective. Cette question n'est pas abordée dans cet article, mais est importante pour bien comprendre l'originalité du projet leibnizien. Elle est traitée par V. Debuiche dans un article montrant que malgré les références explicites de Leibniz à Desargues et son travail, il ne semble pas qu'il ait lu le *Brouillon project* dans sa totalité avant l'écriture des textes de la MDU [Debuiche 2013, 25]. Leibniz réalise toutefois l'exploit, dans le texte I, de faire dialoguer les ambitions projectives de Desargues et les outils analytiques de Descartes en proposant une équation universelle à toutes les coniques.

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement David Rabouin pour son aide, son soutien sans faille et ses remarques toujours pertinentes et bienveillantes.

Je tiens également à remercier personnellement Valérie Debuiche et João Cortese qui, par leurs remarques et nos échanges, m'ont aidé à améliorer la qualité de mon travail, ainsi que tous les participants au groupe de travail *Mathesis* qui m'ont permis de présenter une première version de cet article à partir de laquelle nous avons pu échanger.

Enfin, je tiens à remercier mes parents qui sont mes premiers et plus fidèles lecteurs et qui ne cessent de me soutenir et de me conseiller lorsque certaines questions parviennent à me faire douter.

21. Comme l'attestent de nombreux textes du recueil A VII, 7, tels que N.12 *Table de signes de la méthode de l'universalité* [A VII, 7, 142–147], N.14 *Essay de la méthode des universels* [A VII, 7, 151–166] ou encore N.31 *De constructione aequationum solidarum universalis* [A VII, 7, 316–352].

22. Bien qu'il semble qu'il n'ait pas continué d'utiliser celui développé dans la MDU [Cajori 2007, 195].

Bibliographie

- BARBIN, Évelyne [2016], Universality versus generality : An interpretation of the dispute over tangents between Descartes and Fermat, dans *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*, édité par K. Chemla, R. Chorlay & D. Rabouin, Oxford : Oxford University Press, 413–432, doi : 10.1093/oxfordhb/9780198777267.001.0001.
- BELAVAL, Yvon & LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm [1993], *Confessio philosophi. La profession de foi du philosophe*, Bibliothèque des textes philosophiques, Paris : Vrin.
- CAJORI, Florian [2007], *A History of Mathematical Notations*, t. II, New York : Cosimo, Inc.
- CORTESE, João [2016], When two points coincide, or are at an infinitely small distance : some aspects of the relation between the works of Leibniz, Pascal (and Desargues), dans “Für unser Glück oder das Glück anderer”, *Vorträge des X. Internationalen Leibniz-Kongresses*, édité par W. Li, U. Beckmann, S. Erdner & E.-M. Errulat, Hildesheim : Olms Verlag, 165–178.
- COUTURAT, Louis & LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm [1966], *Opuscules et fragments inédits de Leibniz : extraits des manuscrits de la bibliothèque royale de Hanovre*, Hildesheim : Georg Olms Verlagsbuchhandlung.
- DEBUICHE, Valérie [2013], Perspective in Leibniz’s invention of *Characteristica Geometrica* : The problem of Desargues’ influence, *Historia Mathematica*, 40(4), 359–385, doi : 10.1016/j.hm.2013.08.001.
- GROSHOLZ, Emily R. [2007], *Representation and Productive Ambiguity in Mathematics and the Sciences*, Oxford : Clarendon Press.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm [2019], *Sämtliche Schriften und Briefe, Reihe VII, Mathematische Schriften, Band 7 : Kurven, Constructio aequationum, Méthode de l’universalité 1673-1676*, Leibniz-Archiv, Hannovre, URL www.gwlb.de/Leibniz/Leibnizarchiv/Veroeffentlichungen/VII7.pdf.
- NABONNAND, Philippe [2011], L’argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles, dans *Justifier en mathématiques*, édité par D. Flament & Ph. Nabonnand, Paris : Éditions de la Maison des sciences de l’homme, 17–47, URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00637385>.
- RABOUIN, David [2020], Recension du volume 7 de la série VII (Mathématiques) des *Gottfried Wilhelm Leibniz, Sämtliche Schriften und Briefe, herausgegeben von der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften und der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen*, *Bulletin Leibnizien VI, Archives de philosophie*, 83(3), 152–155.

RABOUIN, David & CORTESE, João [2019], Sur les indivisibles chez Pascal, dans *Passions géométriques. Mélanges en l'honneur de D. Descotes*, édité par A. Cousson, Paris : Champion, 425–440.

TRUNK, Achim [2016], Sechs Systeme. Leibniz und seine *signa ambigua*, dans “Für unser Glück oder das Glück anderer”, *Vorträge des X. Internationalen Leibniz-Kongresses*, édité par W. Li, U. Beckmann, S. Erdner & E.-M. Errulat, Hildesheim : Olms Verlag, 191–207.