Jeux incomplets algébriques

Hélène Fargier, Érik Martin-Dorel, Pierre Pomeret-Coquot

▶ **To cite this version:**

Hélène Fargier, Érik Martin-Dorel, Pierre Pomeret-Coquot. Jeux incomplets algébriques. Rencontres des Jeunes Chercheurs en Intelligence Artificielle (RJCIA 2021) @ Plate-Forme Intelligence Artificielle (PFIA 2021), Jul 2021, Bordeaux, France. pp.46-53. hal-03298722

HAL Id: hal-03298722
https://hal.science/hal-03298722

Submitted on 23 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Jeux incomplets algébriques

H. Fargier[1], E. Martin-Dorel[2], P. Pomeret-Coquot[2]

[1] CNRS, IRIT, Université de Toulouse
[2] Université Toulouse III – Paul Sabatier, IRIT, Université de Toulouse

helene.fargier@irit.fr – erik.martin-dorel@irit.fr – pierre.pomeret@irit.fr

Résumé

Cet article propose une approche algébrique des jeux incomplets, ce qui permet de capturer des problèmes où des agents ont différents types de connaissances, des fonctions d'utilité complexes (bi-critères par exemple) et peuvent utiliser toute une gamme de règles de décision. Nous montrons que, lorsque la mesure de plausibilité est décomposable, de tels jeux peuvent être transformés en temps linéaire en jeux hypergraphiques (sans incertitude), généralisant ainsi de manière algébrique et à un nombre quelconque de joueurs le théorème de Howson et Rosental [10].

Mots-clés

Théorie des jeux - Jeu incomplet - Jeu hypergraphique - Approche algébrique

Abstract

This article proposes an algebraic approach to incomplete games allowing the modelling of problems where the agents have different types of knowledge, complex utility functions (bi-criteria for example) and can use a whole family of decision rules. We show that, when the plausibility measure is decomposable, such games can be transformed in linear time into hypergraphical games (without uncertainty), thus generalizing algebraically and to any number of players Howson and Rosental's Theorem [10].

Keywords

Game theory - Incomplete game - Hypergraphical game - Algebraic approach

1 Introduction

La théorie de la décision sous incertitude s'attache à modéliser le comportement d'agents ayant à choisir des décisions dont les conséquences ne sont pas connues avec certitude. Plusieurs règles de décision ont été établies et justifiées. La règle la plus connue est sans doute celle de l'utilité espérée [13] - l'agent a une connaissance probabiliste sur les consequences de chaque décision et il cherche à maximiser l'utilité esperée des consequences de l'acte choisi ; d'autres règles ont été proposées *p.ex.* l'ordre de grandeur de l'utilité espérée [23] ou, pour les problèmes qualitatifs, les utilités possibilistes optimiste et pessimiste [7].

Nous nous intéressons ici à des problèmes de décision multi-agents issue de la théorie des jeux, où chacun prend une décision individuelle, dont la conséquence dépend à la fois des décisions individuelles et de l'état réel du monde. Chaque agent a un intérêt ou "utilité" (éventuellement différente de celle des autres agents) pour cette conséquence. Cette forme de problème de décision est l'objet du cadre des *jeux incomplets* (où les agents ignorent une partie du problème). [1]

Deux types de jeux incomplets ont été décrits : les jeux bayésiens [9] (utilité espérée) et les jeux possibilistes [1] (utilité qualitative pessimiste). Dans cet article, nous proposons une définition algébrique généralisant ces deux cas particuliers et permettant d'utiliser d'autres règles de décision.

Par ailleurs, les jeux bayésiens et les jeux possibilistes à deux joueurs peuvent toujours être transformés en des jeux polymatriciels équivalents [10, 1]. Nous étendons ce résultat connu sous le nom de *théorème de Howson-Rosenthal* à notre cadre algébrique et pour un nombre *quelconque* d'agents. Cette transformation s'effectue en temps linéaire et produit un jeu hypergraphique de complexité spatiale inférieure ou égale à celle du jeu incomplet initial.

Pour les preuves, nous utilisons l'assistant de preuve Coq [2]. C'est un environnement logiciel permettant la spécification et la vérification de structures de données, d'algorithmes et de théorèmes. Son fonctionnement interne est basé sur la correspondance preuve-programme (ou correspondance de Curry-Howard). Nous utilisons Coq afin d'apporter un forte garantie de correction sur les preuves et les transformations, ainsi que pour faciliter leur réutilisation. La formalisation en Coq est disponible sur GitHub. [2]

2 Définitions préliminaires

Soient N un ensemble fini et $(X_i)_{i\in N}$ une famille d'ensembles indicés par N. Nous notons $X = \prod_{i\in N} X_i$ le produit cartésien des X_i et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ un élément de X. Pour tout $M \subset N$, nous notons : $X^{(M)} = \prod_{i\in M} X_i$ et $x^{(M)} \in X^{(M)}$. Pour tout $i \in N$, nous notons : $X_{-i} = X^{(N\setminus\{i\})}$ et $x_{-i} \in X_{-i}$. Enfin, "." dénote la concaténation, ainsi $x = x_i.x_{-i}$.

1. Un glissement de sens semble avoir eu lieu. Ce qui est appelé aujourd'hui *jeu incomplet* a été défini en 1967 [9], puis probabilisé afin de d'introduire les *jeux bayésiens*. Harsanyi affirme qu'un jeu bayésien est un *jeu complet* - alors qu'aujourd'hui les jeux bayésiens sont vus comme des "jeux incomplets" - au sens de "jeux sous connaissance incomplète".

2. ppomco.github.io/coq-incomplete-games-rjcia2021

2.1 Décision mono-agent sous incertitude

Savage [20] introduit en 1954 les problèmes de décision sous incertitude en considérant qu'un acte (une décision) est une fonction qui associe à tout monde une conséquence, ce qui lui permet de caractériser la règle de l'utilité espérée. Plusieurs alternatives à l'utilité espérée ont été étudiées depuis, comme l'utilité dépendant du rang [18] ou les utilités qualitatives [7], etc. Nous présentons algébriquement les problèmes de décision mono-agent sous incertitude, en suivant les définitions de [6], qui recoupent celles de [17, 16]. La généralisation algébrique porte sur la règle de décision, qui est encodée dans une *structure d'évaluation* contenant les opérateurs algébriques et leurs domaines.

Définition 1 (Structure d'évaluation) *Une structure d'évaluation est un quintuplet $\mathcal{E} = (W, U, V, \oplus, \otimes)$ où :*

- *W est le domaine de plausibilité, muni de l'ordre $\preceq_W$,* [3]
- *U est le domaine d'utilité, muni de l'ordre $\preceq_U$,*
- *V est le domaine de valuation, muni de l'ordre $\preceq_V$, tel que $U \subseteq V$ et $\forall x, y \in U,\ x \preceq_U y \Rightarrow x \preceq_V y$,*
- *$\oplus : V \times V \to V$ est un opérateur associatif et commutatif, muni d'un élément neutre noté 0_V,*
- *$\otimes : W \times U \to V$ est muni d'un élément absorbant noté 0_W et est distributif par rapport à $\oplus$.*

Lorsque $U = V = W$ et $0_V = 0_W$, nous retrouvons tout simplement les semi-anneaux. Le domaine de plausibilité va capturer la croyance des agents, le domaine d'utilité leurs preférences et V est le domaine d'évaluation des actes.

Définition 2 (Problème de décision sous incertitude) *Un problème de décision sous incertitude est un quadruplet $\mathcal{D} = \big((\Omega, X), \mathcal{E}, u, Pl\big)$ où :*

- *Ω est l'ensemble des états du monde,*
- *X est l'ensemble des conséquences,*
- *$\mathcal{E} = (W, U, V, \oplus, \otimes)$ est la structure d'évaluation,*
- *$u : X \to U$ est une la fonction d'utilité,*
- *$Pl : 2^\Omega \to W$ une fonction d'ensemble monotone croissante par rapport à l'inclusion (une capacité).*

Un problème de décision sous incertitude est décrit par trois composants : (i) les ensembles Ω et X qui décrivent la *situation* (pour reprendre les termes de [6]), les actes (ou décisions) étant représentés par des fonctions $a : \Omega \to X$; (ii) les préférences de l'agent, capturées par la fonction d'utilité et ses croyances capturées par la mesure Pl (dans cet article, nous nous restreignons aux mesures de plausibilité décomposables [22], c'est à dire telles que $\forall A, B$ disjoints, $Pl(A \cup B) = Pl(A) \oplus Pl(B)$: elles ont l'avantage de pouvoir être représentées succinctement, par des distributions $d : \Omega \to W$. C'est notamment le cas des mesures de probabilité et des mesures de possibilité) ; (iii) $\mathcal{E}$ qui porte la règle de décision : l'agent maximise son utilité esperée generalisée (*GEU*, pour "Generalized Expected Utility").

3. Pour tout ensemble X muni d'un ordre $\preceq_X, \sim_X$ désignera sa partie symétrique et $\prec_X$ sa partie asymétrique : $(x \sim_X x') \iff (x \preceq_X x') \wedge (x' \preceq_X x)$ et $(x \prec_X x') \iff (x \preceq_X x') \wedge \neg(x' \preceq_X x)$.

Définition 3 (GEU [6]) *Pour tout acte a dans un problème de décision $\mathcal{D}$ fondé sur une structure d'évaluation $\mathcal{E}$:*

$$GEU_{\mathcal{D}}(a) := \bigoplus_{\omega \in \Omega} d(\omega) \otimes u\big(a(\omega)\big).$$

En d'autres termes, l'agent évalue un acte en combinant, via $\oplus$ et $\otimes$, ses préférences sur les conséquences de l'acte et ses croyances sur l'état du monde : l'acte a_1 est préféré à l'acte a_2 ssi $GEU(a_2) \preceq_V GEU(a_1)$.

Exemples La règle de l'utilité espérée est capturée par la structure $\mathcal{E}_{UE} = ([0,1], \mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \times)$, d etant une distribution de probabilité sur Ω. Dans ce cas en effet $GEU(a) = \Sigma_{\omega \in \Omega} d(\omega) \cdot u\big(a(\omega)\big)$. Les règles possibiliste optimiste et pessimiste sont encodées dans les structures $\mathcal{E}_{OPT} = ([0,1], [0,1], [0,1], \max, \min)$ et $\mathcal{E}_{PES} = ([0,1], [0,1], [0,1], \min, \overline{\max})$. [4] La règle de décision en ordre de grandeur de l'utilité espérée [23] est décrite par la structure $\mathcal{E}_{OOM} = (\mathbb{R}^o, \mathbb{R}^o, \mathbb{R}^o, \oplus, \otimes)$ où : $\mathbb{R}^o = \{(\sigma, m) \mid m \in \mathbb{Z}, \sigma \in \{+, -, 0\}\} \cup \{(0, \infty)\}$; $(\sigma, m) \oplus (\sigma', m')$ vaut (σ, m) si $m < m'$, (σ', m') si $m > m'$ et $(\sigma \boxplus \sigma', m)$ si $m = m'$ [5] ; enfin $(\sigma, m) \otimes (\sigma', m') = (\sigma \boxtimes \sigma', m + m')$. [6] L'ordre $\preceq_{\mathbb{R}^o}$ est tel que $(\sigma, m) \preceq_{\mathbb{R}^o} (\sigma', m')$ ssi $(\sigma' = +) \wedge (m' < m)$, $(\sigma = -) \wedge (m < m')$, $(\sigma = -) \wedge (\sigma' = +) \wedge (m = m')$ ou $(\sigma = \sigma') \wedge (m = m')$.

2.2 Jeux simultanés à information complète

Considérons maintenant le cas multi-agents, tel que défini par la théorie des jeux : dans les jeux simultanés, chaque agent choisit individuellement une action, sans observer celles choisies par les autres ; à toute combinaison d'actions correspond une conséquence, et chaque agent a un intérêt (une utilité), éventuellement différent de celui des autres agents, pour cette conséquence. Lorsque chaque joueur connait les actions possibles des autres joueurs et les utilités qui en résulteraient, le jeu est un *jeu simultané à information complète* (ou encore "jeu complet", "jeu classique") : l'état du monde est parfaitement connu de chacun - chaque agent maximise son utilité (on dit qu'il est "rationnel").

Définition 4 (Jeu simultané à information complète) *Un jeu est un quintuplet $G = (N, X, \chi, (A_i, v_i)_{i \in N})$ où :*

- *N est l'ensemble fini des n agents,*
- *A_i est l'ensemble des actions de l'agent i,*
- *X est l'ensemble des conséquences,*
- *$\chi : A \to X$ décrit la conséquence d'une combinaison d'actions,*
- *$v_i : X \to U_i$ est la fonction d'utilité de l'agent i où U_i dénote le domaine d'utilité de i, muni de l'ordre $\preceq_{U_i}$.*

Le jeu est dit sous forme normale *lorsque les v_i sont décrites par des tables.*

U_i est un domaine ordonné, et généralement $U_i = \mathbb{R}$ (en économie, on parle souvent de "payoff"). Un vecteur $a =$

4. $\forall w \in W, \forall x \in U,\ \overline{\max}(w, x) = \max(1 - w, x)$.

5. $\boxplus$ est l'addition usuelle des signes, avec $+\boxplus + = +$, $-\boxplus - = -$, et $\sigma \boxplus \sigma' = 0$ sinon. $\boxtimes$ est la multiplication des signes : $+\boxtimes + = -\boxtimes - = +$, $+ \boxtimes - = - \boxtimes + = -$ et $\sigma \boxtimes 0 = 0 \boxtimes \sigma = 0$.

6. L'addition $+$ est étendue sur $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ par $m + \infty = \infty + m = \infty$.

$(a_1, \ldots, a_n) \in A = \prod_{i \in N} A_i$ est appelé *profil de stratégies pures*, il correspond à un acte dont $\chi(a)$ est la conséquence dans l'unique état du monde.
Dans la suite, X sera rendu implicite en notant $G = \big(N, (A_i, u_i)_{i \in N}\big)$, avec $u_i = v_i \circ \chi : A \to \mathbb{R}$.

Proposition 1 (Complexité spatiale) *La taille d'un jeu simultané G en forme normale est $S_G \in O(n|A|)$, i.e. si les n agents ont au plus α actions, $S_G \in O(n\alpha^n)$.*

En effet, les fonctions d'utilité sont représentées en extension par des tables listant leurs valeurs pour chacun des n agents et chacun des $|A| \leq \alpha^n$ profils de stratégies pures. Ainsi $S_G = \sum_{i \in N} |u_i| \leq n\alpha^n \in O(n\alpha^n)$.
Parmi les profils de stratégies couramment étudiés, nous nous intéressons aux équilibres de Nash [14].

Définition 5 (Équilibre de Nash) *Dans un jeu G, un profil de stratégies pures est un équilibre de Nash pur ssi aucun agent ne peut unilatéralement augmenter son utilité, i.e. ssi $\forall i \in N, \nexists a'_i \in A_i,\ u_i(a) \prec_{U_i} u_i(a'_i.a_{-i})$.*

Exemple 1 (Le repas) *Dans cette variante du jeu appelé "bataille des sexes", quatre collègues souhaitent manger ensemble, dans l'un des restaurants R_1 et R_2, de préférence avec ceux qu'ils apprécient le plus - la satisfaction d'un agent est d'autant plus grande que beaucoup des collègues qu'il apprécie sont aussi présents. Les affinités de l'agent i sont décrites par une fonction $aff_i : N_{-i} \to \mathbb{R}^+$ ($aff_i(j)$ est l'affinité de i pour j). Sans pouvoir communiquer avec les autres, chacun va se rendre à l'un des deux restaurants. Cet exemple peut être modélisé par le jeu suivant :*

$$\begin{aligned} N &= \{1,2,3,4\} \\ A_i &= \{R_1, R_2\} && \forall i \in N \\ u_i(a) &= \sum_{\substack{j \in N_{-i} \\ a_i = a_j}} aff_i(j) && \forall i \in N, \forall a \in A. \end{aligned}$$

Supposons $aff_i(j) = 1$ pour tout $i, j \in N$. Alors (R_1, R_1, R_1, R_1) et (R_2, R_2, R_2, R_2) sont des équilibres de Nash : aucun agent n'a intérêt à changer de stratégie.

Dans ce premier exemple, nous avons supposé que les utilités des agents sont cardinales - d'où un ordre complet sur les profils. Mais ce n'est pas toujours le cas. Dans certains travaux, les préférences sont complètes, mais seulement ordinales [24, 8] ; dans d'autres, les U_i ne sont que partiellement ordonnés [21, 3, 4] - et cela suffit pour définir la notion d'équilibre de Nash, qui est une notion purement ordinale. La définition que nous avons donnée, à la suite de celle de [19], utilise des "utilités abstraites" et permet de capturer tous ces types de préférences, et en particulier des payoffs monétaires ou des préférences partielles.

Exemple 2 (Le repas - approche bi-critères) *Les quatre collègues préfèrent manger non seulement avec ceux qu'ils apprécient le plus, mais aussi avec ceux qu'ils n'ont pas vu depuis longtemps - ce jeu est bi-critères. Soit $tps_i(j) \in \mathbb{R}^+$ le temps écoulé depuis que i a vu j. Ce qui donne le jeu :*

$$\begin{aligned} N &= \{1,2,3,4\} \\ A_i &= \{R_1, R_2\} && \forall i \in N \\ V_i &= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ && \forall i \in N \\ u_i(a) &= \left(\sum_{\substack{j \in N_{-i} \\ a_i = a_j}} aff_i(j)\ ,\ \sum_{\substack{j \in N_{-i} \\ a_i = a_j}} tps_i(j) \right) && \begin{matrix} \forall i \in N \\ \forall a \in A. \end{matrix} \end{aligned}$$

Pour tout agent $i \in N$, V_i est un ensemble partiellement ordonné. $\forall (x,y), (x',y') \in V_i,\ (x,y) \preceq_{V_i} (x',y') \iff x \leq x' \ \wedge\ y \leq y'$.
Si $aff_i(j) = 1$ pour tout $i, j \in N$, alors (R_1, R_1, R_1, R_1) et (R_2, R_2, R_2, R_2) sont des équilibres de Nash. De plus, si $tps_i(j) = 10$ lorsque $i, j \in \{1,2\}$ ou $i, j \in \{3,4\}$, et $tps_i(j) = 1$ sinon, alors (R_1, R_1, R_2, R_2) et (R_2, R_2, R_1, R_1) sont aussi des équilibres de Nash.

3 Jeux incomplets algébriques

Un jeu incomplet est un jeu où les agents ont une connaissance incomplète sur certains aspects du jeu - en fait sur l'état du monde $\omega \in \Omega$. La conséquence d'une action jointe a (et donc l'utilité des agents) dépend à la fois des actions choisies et de l'état du monde : il y a un jeu par état ω. Les agents ne connaissent pas exactement l'état réel du monde, et donc ne savent à quel jeu ils participent. Ils peuvent par contre avoir des connaissances a priori sur ω, représentées par une distribution de plausibilité. De plus, avant de choisir son action, chaque agent i peut recevoir un signal informatif $\tau_i(\omega)$. Il acquiert ainsi de la connaissance sur ω et sur les signaux corrélés reçus par les autres agents : il conditionne sa croyance a priori et obtient une connaissance personnelle a posteriori. La distribution de plausibilité a priori peut être commune, comme dans les jeux Bayésiens, mais il est aussi possible de considérer que les agents ont des croyances différentes (éventuellement incohérentes entre elles) ; nous supposerons alors simplement que chaque agent connaît toutes les distributions de tous les agents.
Harsanyi propose de décrire les jeux à information incomplète non pas sur les mondes, mais sur les états de croyances possibles - typiquement sur les combinaison de signaux possibles et plus largement sur les informations d'un jeu auxquels les joueurs ont accès (en ce qui les concerne ou en ce qui concerne les autres). Il appelle ces états de croyance des "types". Ainsi, un jeu incomplet décrit un jeu simultané pour chaque combinaison de types possible.

3.1 Définition

Deux formes de jeux incomplets ont été proposées : les jeux bayésiens [9], fondés sur la règle de l'utilité espérée, et les jeux possibilistes [1], fondés sur celle de l'utilité pessimiste. Dans cet article, nous les généralisons en en proposant une formulation algébrique.

Définition 6 (Jeu incomplet algébrique) *Un jeu incomplet algébrique est un tuple $G = \big(N, (A_i, \Theta_i, \mathcal{E}_i, d_i, u_i)_{i \in N}\big)$ où :*

— *N est l'ensemble fini des n agents,*
— *A_i est l'ensemble des actions de l'agent i,*
— *Θ_i est l'ensemble des types de l'agent i,*
— *$\mathcal{E}_i = (W_i, U_i, V_i, \oplus_i, \otimes_i)$ est la structure d'évaluation encodant sa règle de décision,*
— *$d_i : \Theta_i \to \Theta_{-i} \to W_i$ où $d_i(\cdot|\theta_i)$ est la distribution de plausibilité a posteriori de l'agent i, sachant qu'il est de type θ_i.*
— *$u_i : A \times \Theta \to U_i$ est sa fonction d'utilité.*

Lorsque les fonctions u_i et les distributions d_i sont données sous formes de tables, le jeu est dit sous forme normale.

Dans un jeu incomplet, les agents choisissent une action en fonction du type qu'ils reçoivent : une stratégie pure de l'agent i est une fonction $\sigma_i : \Theta_i \to A_i$. Appelons Σ_i l'espace des stratégies pures de l'agent i et Σ l'ensemble des stratégies jointes. Un profil de stratégies pures sous incertitude spécifie alors l'action choisie pour chaque type de chaque agent : c'est un vecteur $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma$. Pour toute combinaison de types $\theta \in \Theta$, nous notons $\sigma^\theta = \big(\sigma_1(\theta_1), \ldots, \sigma_n(\theta_n)\big) \in A$ le profil de stratégies pures qui sera effectivement joué si ces types sont reçus.
L'utilité d'un tel profil dépend de l'état du monde, et donc de la combinaison θ des types reçus. Si l'agent i est de type θ_i, son utilité est donnée par $GEU_{(i,\theta_i)} : \Sigma \to V_i$:

$$GEU_{(i,\theta_i)}(\sigma) = \bigoplus_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}}{}_i \; d_i(\theta_{-i}|\theta_i) \otimes_i u_i(\sigma^{\theta_i.\theta_{-i}}, \theta_i.\theta_{-i}).$$

Proposition 2 (Complexité spatiale) *La taille d'un jeu incomplet sous forme normale G est $S_G \in O(n \cdot |A| \cdot |\Theta|)$, i.e. si les n agents ont au plus α actions et peuvent recevoir au plus β types, la taille est en $O\big(n(\alpha\beta)^n\big)$.*

En effet, pour chacune des $|\Theta|$ combinaisons de types, il faut donner un jeu simultané de taille $n|A|$.
Un profil de stratégies est un équilibre de Nash sous incertitude pur ssi aucun agent ne peut augmenter unilatéralement son utilité en modifiant sa stratégie. Formellement :

Définition 7 (Équilibre de Nash pour un jeu incomplet) *$\sigma \in \Sigma$ est un équilibre de Nash de G ssi $\forall i \in N, \forall \theta_i \in \Theta_i$, $\nexists \sigma'_i \in \Sigma_i,\ GEU_{(i,\theta_i)}(\sigma) \prec_{V_i} GEU_{(i,t)}(\sigma'_i.\sigma_{-i})$.*

3.2 Cas particuliers

Soit un jeu algébrique $G = \big(N, (A_i, \Theta_i, \mathcal{E}_i, d_i, u_i)_{i \in N}\big)$.

Jeu classique. Lorsqu'un seul état du monde est possible, chaque agent ne possède qu'un seul type ($\Theta = \{\theta\}$) : G décrit un jeu classique.

Jeu bayésien. Tous les agents utilisent la règle de l'utilité espérée en conditionnant une distribution de probabilité p commune : pour tout i, $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{UE} = \big([0,1], \mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \times\big)$ et pour tout θ, $d_i(\theta_{-i}|\theta_i) = p(\theta|\theta_i)$.

Jeu possibiliste pessimiste. Tous les agents utilisent la règle de l'utilité pessimiste en conditionnant une distribution de possibilité π commune : pour tout i, $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{PES} = \big([0,1], [0,1], [0,1], \min, \overline{\max}\big)$ et pour tout θ, $d_i(\theta_{-i}|\theta_i) = \pi(\theta|\theta_i)$.

3.3 Exemples

Nous illustrons l'utilisation de différentes règles de décisions sur l'exemple suivant :

Exemple 3 (Le repas - jeu incomplet) *Trois agents souhaitent manger ensemble ce midi. Chacun des deux restaurants R_k ($k \in \{1,2\}$) est ouvert (O_k) ou fermé (F_k), Habituellement, au moins un restaurant est ouvert. Le matin, l'agent 1 emprunte le chemin C_1 qui passe devant le restaurant R_1 et sait si R_1 est ouvert. De même, l'agent 2 emprunte le chemin C_2 et sait si R_2 est ouvert. D'habitude, l'agent 3 emprunte le chemin C_1 et rencontre l'agent 1 : ils savent tous deux si R_1 est ouvert. Parfois, l'agent 3 emprunte le chemin C_2 et rencontre alors l'agent 2.*

Modélisons d'abord la situation. Par souci de clarté, nous expliciterons les états du monde sous-jacents.
— Les agents : $N = \{1,2,3\}$
— Leurs actions : $A_i = \{R_1, R_2\} \quad \forall i \in N$
— $\Omega = \{O_1, F_1\} \times \{O_2, F_2\} \times \{C_1, C_2\}$
  Un état du monde est un triplet $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ où :
  — $\omega_1 \in \{O_1, F_1\}$ indique si R_1 est ouvert,
  — $\omega_2 \in \{O_2, F_2\}$ indique si R_2 est ouvert,
  — $\omega_3 \in \{C_1, C_2\}$ indique le chemin de l'agent 3.
— Les types : $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \Theta_3$ avec :
  — $\Theta_1 = \{O_1, F_1\} \times \{C_1, C_2\}$
  — $\Theta_2 = \{O_2, F_2\} \times \{C_1, C_2\}$
  — $\Theta_3 = \{O_1, F_1, O_2, F_2\}$
  Dans l'état du monde $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$, l'agent $i \in N$ est de type $\theta_i = \tau_i(\omega)$, où :
  — $\tau_1\big((\omega_1, \omega_2, \omega_3)\big) = (\omega_1, \omega_3)$
  — $\tau_2\big((\omega_1, \omega_2, \omega_3)\big) = (\omega_2, \omega_3)$
  — $\tau_3\big((\omega_1, \omega_2, \omega_3)\big) = \begin{cases} \omega_1 & \text{si } \omega_3 = C_1 \\ \omega_2 & \text{si } \omega_3 = C_2. \end{cases}$

Nous proposons plusieurs variations autour de cet exemple afin d'illustrer l'utilisation de différentes règles de décision. Pour cela, notons $nb_i(a)$ le nombre d'agents ayant choisi le même restaurant que i ($nb_i(a) = \sum_{j \in N_{-i}\ ,\ a_j = a_i} 1$) et $ouv_i : A \times \Theta \to \{0,1\}$ la fonction telle $ouv_i(a, \theta) = 1$ ssi le restaurant a_i est ouvert. [7]

Jeu bayésien Les agents utilisent la règle de l'utilité espérée en conditionnant la loi de probabilité commune $p^* : \Theta \to [0,1]$ (table 2). La modélisation est la suivante :

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{UE} = ([0,1], \mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \times)$$
$$d_i(\theta_{-i}|\theta_i) = p^*(\theta \mid \theta_i)$$
$$u_i(a, \theta) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{j \in N_{-i} \\ a_i = a_j}} aff_i(j) & \text{si } ouv_i(a, \theta) = 1 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les utilités sont cardinales. L'ordre est complet. Le jeu $G = \big(N, (A_i, \Theta_i, \mathcal{E}_i, d_i, u_i)_{i \in N}\big)$ est un jeu bayésien.

7. Pour tout agent $i \in N$, l'ouverture du restaurant a_i est donnée par θ : $a_i = R_1$ est ouvert ssi $\theta_1 \in \{(O_1, C_1), (O_1, C_2)\}$ et $a_i = R_2$ est ouvert ssi $\theta_2 \in \{(O_2, C_1), (O_2, C_2)\}$.

$\omega \in \Omega$	$p(\omega)$	$\pi(\omega)$	$p_{OOM}(\omega)$
(O_1, O_2, C_1)	0.2	1	$(+, 7)$
(O_1, O_2, C_2)	0.1	0.8	$(+, 10)$
(O_1, F_2, C_1)	0.2	1	$(+, 7)$
(O_1, F_2, C_2)	0.1	0.8	$(+, 10)$
(F_1, O_2, C_1)	0.2	1	$(+, 7)$
(F_1, O_2, C_2)	0.1	0.8	$(+, 10)$
(F_1, F_2, C_1)	0.075	0.4	$(+, 12)$
(F_1, F_2, C_2)	0.025	0.2	$(+, 16)$

TABLE 1 – Distributions de probabilité, d'ordre de grandeur et de possibilité sur les états du monde.

$\theta \in \Theta$	$p^*(\theta)$	$\pi^*(\theta)$	$p^*_{OOM}(\omega)$
$\big((O_1, C_1), (O_2, C_1), O_1\big)$	0.2	1	$(+, 7)$
$\big((O_1, C_2), (O_2, C_2), O_2\big)$	0.1	0.8	$(+, 10)$
$\big((O_1, C_1), (F_2, C_1), O_1\big)$	0.2	1	$(+, 7)$
$\big((O_1, C_2), (F_2, C_2), F_2\big)$	0.1	0.8	$(+, 10)$
$\big((F_1, C_1), (O_2, C_1), F_1\big)$	0.2	1	$(+, 7)$
$\big((F_1, C_2), (O_2, C_2), O_2\big)$	0.1	0.8	$(+, 10)$
$\big((F_1, C_1), (F_2, C_1), F_1\big)$	0.075	0.4	$(+, 12)$
$\big((F_1, C_2), (F_2, C_2), F_2\big)$	0.025	0.2	$(+, 16)$
Combinaisons impossibles	0	0	$(0, \infty)$

TABLE 2 – Distributions de probabilité, d'ordre de grandeur et de possibilité sur les types joints, déduites de la table 1.

Jeu en ordre de grandeur. Les agents utilisent la règle de l'utilité espérée en ordre de grandeur en conditionnant la loi de $p^*_{OOM} : \Theta \to \mathbb{R}^o$ (table 2). Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{OOM} &= (\mathbb{R}^o, \mathbb{R}^o, \mathbb{R}^o, \oplus, \otimes) \\
d_i(\theta_{-i}|\theta_i) &= p^*_{OOM}(\theta \mid \theta_i) \\
u_i(a, \theta) &= \begin{cases} (+, -nb_i(a)) & \text{si } ouv_i(a, \theta) = 1 \\ (-, 0) & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Le jeu $G = \big(N, \big(A_i, \Theta_i, \mathcal{E}_i, d_i, u_i\big)_{i \in N}\big)$ est un jeu en ordre de grandeur de l'utilité espérée.

Jeu possibiliste pessimiste. Les agents utilisent la règle de l'utilité pessimiste en conditionnant la loi de possibilité commune $\pi^* : \Theta \to [0, 1]$ (table 2). Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{PES} &= ([0, 1], [0, 1], [0, 1], \overline{\max}, \min) \\
d_i(\theta_{-i}|\theta_i) &= \pi^*(\theta \mid \theta_i) \\
u_i(a, \theta) &= \begin{cases} 1 - \max\limits_{\substack{j \in N \\ a_j \neq a_i}} aff_i(j) & \text{si } ouv_i(a, \theta) = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

$G = \big(N, \big(A_i, \Theta_i, \mathcal{E}_i, d_i, u_i\big)_{i \in N}\big)$ est un jeu possibiliste pessimiste.

Jeu bayésien Pareto bi-critères. Comme dans les jeux bayésiens la connaissance est capturée par une loi de probabilité commune p^* (table 2), mais ici les agents décident selon deux critères : l'affinité et la présence de collègues que l'on n'a pas vus depuis longtemps (cf. exemple 2) :

$$u_i(a, \theta) = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{\substack{j \in N_{-i} \\ a_i = a_j}} aff_i(j), \sum\limits_{\substack{j \in N_{-i} \\ a_i = a_j}} tps_i(j) \Big) & \text{si } ouv_i(a, \theta) = 1 \\ (0, 0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ordre sur $U_i = \mathbb{R}^2$ est partiel, un agent ne peut pas dire s'il préfère les collègues qu'il n'a pas vu depuis longtemps ou ceux pour lesquels il a beaucoup d'affinité. Plus formellement, $(a, b) \preceq_{U_i} (a', b') \iff (a \leq a') \wedge (b \leq b')$. Nous utiliserons alors une utilité espérée par critère :

$$\begin{aligned}
w \otimes_i (a, b) &= (w \times a, w \times b) \\
(a, b) \oplus_i (a', b') &= (a + a', b + b') \\
\mathcal{E}_i &= \big([0, 1], \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \oplus_i, \otimes_i\big) \\
d_i(\theta_{-i}|\theta_i) &= p^*(\theta|\theta_i).
\end{aligned}$$

Agents aux comportements différents. Chaque agent peut avoir une distribution différente et une règle de décision différente. Le cadre des jeux algébriques permet *p.ex.* de modéliser un problème où l'un utilise une utilité espérée, l'autre une utilité pessimiste et le troisème une utilité bi-critères en ordre de grandeur.

4 Une généralisation du théorème de Howson-Rosenthal

Le *théorème de Howson-Rosenthal* [10] permet de construire en temps et espace polynomiaux, un jeu polymatriciel équivalent à un jeu bayésien à deux agents. Un théorème similaire a été proposé pour les jeux possibilistes à deux agents [1]. Nous généralisons ce théorème dans notre cadre algébrique et l'étendons aux jeux à n agents ($n \geq 2$). Commençons par présenter et généraliser algébriquement le formalisme des jeux hypergraphiques

4.1 Jeux hypergraphiques algébriques

Certains jeux peuvent être représentés succinctement grâce au cadre des jeux hypergraphiques [11, 15], où un jeu global est décrit par plusieurs jeux locaux en forme normale standard, l'utilité d'un joueur étant la somme des utilités qu'il récolte dans les jeux locaux. C'est typiquement le cas du jeu de l'exemple 1. Sa représentation sous forme normale demande n tables de taille α^n. Il pourrait facilement être exprimé sous la forme d'un jeu dit "polymatriciel" [11], c'est à dire d'un jeu hypergraphique dont les arrêtes ne lient que deux joueurs : chacun joue la même action dans tous les jeux locaux auxquels il participe. En considérant des jeux locaux avec plus deux joueurs, on obtient un hypergraphe où les sommets correspondent aux agents et les hyper-arêtes correspondent aux jeux locaux.
Ici encore, nous adoptons une approche algébrique. Définissons d'abord une structure d'évaluation réduite (à une dimension, celle des préférences), dans laquelle sont effectués les calculs d'utilité globale à partir des utilités locales.

Définition 8 (Structure d'évaluation réduite) *Une structure d'évaluation réduite est un couple $\mathcal{V} = (V, \boxplus)$ où :*

- *V est l'ensemble de valuation, muni de l'ordre $\preceq_V$*
- *$\boxplus : V \times V \to V$ est un opérateur commutatif muni d'un élément neutre 0_V.*

Définition 9 (Jeu hypergraphique) *Un jeu hypergraphique $G = (N, E, (A_i, \mathcal{V}_i)_{i \in N}, (u^e_i)_{e \in E; i \in e})$ où :*

— N *est l'ensemble des sommets (agents),*
— $E \subseteq 2^N$ *est l'ensemble des hyper-arêtes (jeux locaux),*
— A_i *est l'ensemble des actions de l'agent* i*,*
— $\mathcal{V}_i = (V_i, \boxplus_i)$ *est la structure d'évaluation réduite de l'agent* i*,*
— $u_i^e : A^{(e)} \to V_i$ *est la fonction d'utilité locale de l'agent* $i \in N$ *pour le jeu local* $e \in E$*.*

L'utilité globale de i *est définie par :* $u_i(a) = \bigboxplus_{\substack{e \in E \\ tq\ i \in e}}{}_i \, u_i^e(a^{(e)})$.

Un jeu hypergraphique où toutes les arêtes sont de taille 2 est appelé jeu polymatriciel.

Proposition 3 (Complexité spatiale) *La taille d'un jeu hypergraphique* G *où les hyper-arêtes ont au plus une taille* k *(*$k = \max_{e \in E} |e|$*) et où les agents ont au plus* α *actions (*$\alpha = \max_{i \in N} |A_i|$*) est* $S_G \in O(|E| k \alpha^k)$.

En effet, pour décrire les $|E|$ jeux locaux sous forme normale, il faut au plus k tables de taille α^k. G est une représentation plus succincte du jeu $G' = \big(N, (A_i, u_i)_{i \in N}\big)$.

Exemple 4 (Le repas (complet) hypergraphique) *Représentons de manière succincte le jeu de l'exemple 2 :*

$$N = \{1,2,3,4\}$$
$$E = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\big\}$$
$$A_i = \{R_1, R_2\} \qquad \forall i \in N$$
$$V_i = \mathbb{R}^2 \ \textit{et}\ 0_{V_i} = (0,0) \in V_i \qquad \forall i \in N$$

$\boxplus_i$ *est tel que* $\forall i \in N,\ \forall (x,y),(x',y') \in V_i$,
$$(x,y) \boxplus_i (x',y') = (x + x', y + y')$$

et u_i^e *est telle que* $\forall e = \{i,j\} \in E, \forall a \in A$,
$$u_i^e(a^{(e)}) = \begin{cases} \big(\mathit{aff}_i(j), \mathit{tps}_i(j)\big) & \textit{si } a_i^{(e)} = a_j^{(e)} \\ (0,0) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Ce jeu polymatriciel est illustré par la figure 1. Les sommets ronds correspondent à un agent $i \in N$ *et les sommets carrés à un jeu local, i.e. une hyper-arête* $e \in E$*.*

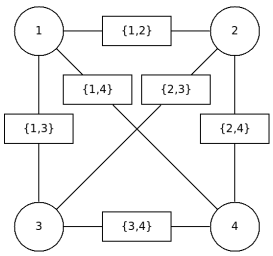

FIGURE 1 – Jeu hypergraphique polymatriciel (exemple 4)

Il est facile de vérifier que :

$$u_i(a) = \bigboxplus_{\substack{\{i,j\} \in E \\ tq\ i \in e}}{}_i \begin{cases} \big(\mathit{aff}_i(j), \mathit{tps}_i(j)\big) & \textit{si } a_i^{(e)} = a_j^{(e)} \\ (0,0) & \textit{sinon} \end{cases}$$
$$= \left(\sum_{\substack{j \in N_{-i} \\ a_i = a_j}} \mathit{aff}_i(j)\ ,\ \sum_{\substack{j \in N_{-i} \\ a_i = a_j}} \mathit{tps}_i(j) \right).$$

Les utilités étant identiques à celles de l'exemple 2, les équilibres de Nash le sont aussi.

4.2 Résultat principal

Partant d'un jeu incomplet G quelconque, nous allons construire un jeu hypergraphique $\tilde{G}$ que nous appellerons *modèle de Selten* de G. Nous montrerons ensuite que cette transformation préserve les utilités, c'est à dire que l'on peut trouver une correspondance entre les agents, leurs actions et les profils de stratégies pures telles que les utilités dans $\tilde{G}$ soit égales à celles dans G. Il est donc possible d'étudier G en étudiant $\tilde{G}$ et réciproquement.

Définition 10 (Préservation des utilités) *La transformation d'un jeu incomplet* $G = \big(N, (A_i, \Theta_i, \mathcal{E}_i, d_i, u_i)_{i \in N}\big)$ *en un jeu classique* $G' = \big(N', (A'_k, u'_k)_{k \in N'}\big)$ *préserve les utilités ssi :*

$$\exists f_N : \{(i,\theta_i) | i \in N, \theta_i \in \Theta_i\} \to N' \textit{ bijective},$$
$$\exists f_\Sigma : \Sigma \to A' \textit{ bijective},$$
$$\forall i \in N, \forall t \in \Theta_i, \forall \sigma \in \Sigma,$$
$$GEU_{(i,\theta_i)}(\sigma) = u'_{f_N(i,\theta_i)}\big(f_\Sigma(\sigma)\big),$$

i.e. la GEU du profil σ pour l'agent i de type θ_i est égale à l'utilité du profil $f_\Sigma(\sigma)$ pour l'agent $f_N(i,\theta_i)$.

Définition 11 (Modèle de Selten) *Soit le jeu incomplet* $G = (N, (A_i, \Theta_i, \mathcal{E}_i, d_i, u_i)_{i \in N})$*. Soit :*

— $\tilde{N} = \{(i,\theta_i) \mid i \in N, \theta_i \in \Theta_i\}$ *l'ensemble des paires dépendantes (agent, type),*
— $\Theta^* = \{\theta \in \Theta \mid \exists i \in N, \exists \theta_i \in \Theta_i, d_i(\theta_{-i}|\theta_i) \succ_{W_i} 0_{W_i}\}$ *l'ensemble des combinaisons de types qui sont possibles pour au moins un agent,*
— $ens : \Theta^* \to \tilde{N}$ *telle que* $ens(\theta) = \{(i,\theta_i) \mid i \in N\}$*,*
— $\tilde{E} = \{ens(\theta) \mid \theta \in \Theta^*\}$ *l'ensemble des ensembles de paires dépendantes correspondants aux combinaisons de types possibles,*
— $\tilde{A}_{(i,\theta_i)} = A_i$ *les actions de l'agent* i*,*
— $\boxplus_{(i,\theta_i)} = \oplus_i$ *l'opérateur de l'agent* i*,*
— $\tilde{u}_{(i,\theta_i)}^{ens(\theta)}(\tilde{a}^{(ens(\theta))}) = d_i(\theta_{-i}|\theta_i) \otimes_i u_i(\sigma^\theta, \theta),\ \forall \theta \in \Theta^*$.

Le modèle de Selten $\tilde{G}$ *correspondant à* G *est le jeu hypergraphique :*

$$\tilde{G} = \Big(\tilde{N}, \tilde{E}, (\tilde{A}_{(i,\theta_i)}, \boxplus_{(i,\theta_i)})_{(i,\theta_i) \in \tilde{N}}, (\tilde{u}^e_{(i,\theta_i)})_{e \in \tilde{E}, (i,\theta_i) \in e}\Big)$$

Exemple 5 (Le repas - Modèle de Selten) *Nous avons modélisé le problème de l'exemple 3 par le jeu incomplet* G*. Nous construisons son modèle de Selten* $\tilde{G}$ *avec (pour l'approche bayésienne) :*

$$\tilde{N} = \left\{ \begin{array}{c} \big(1,(O_1,C_1)\big), \big(1,(O_1,C_2)\big), \\ \big(1,(F_1,C_1)\big), \big(1,(F_1,C_2)\big), \\ \big(2,(O_2,C_1)\big), \big(2,(O_2,C_2)\big), \\ \big(2,(F_2,C_1)\big), \big(2,(F_2,C_2)\big), \\ (3,O_1),(3,F_1),(3,O_2),(3,F_2) \end{array} \right\}$$

$$\tilde{E} = \{ens(\theta) \mid \theta \in \Theta^*\}\ ;\ \tilde{A}_{(i,t)} = \{R_1, R_2\}\ ;\ \boxplus_i = +$$
$$\tilde{u}_{(i,\theta_i)}^{ens(\theta)}(\tilde{a}^{(ens(\theta))}) = p^*(\theta \mid \theta_i) \times u_i(\sigma^\theta, \theta).$$

Les ensembles $ens(\theta)$ sont construits pour toute combinaison de types $\theta \in \Theta^*$ possible (table 2).

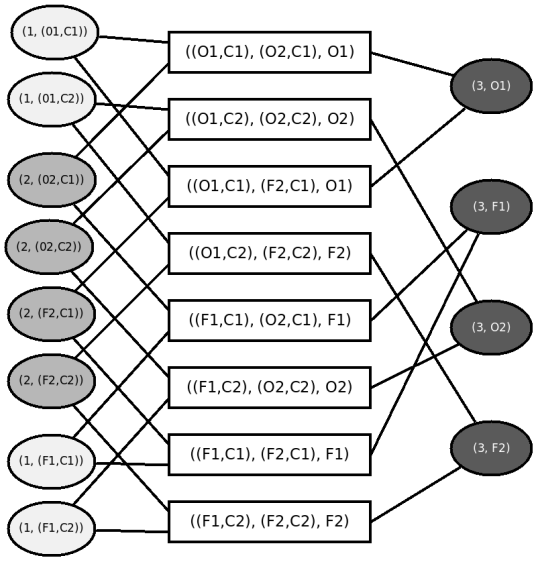

FIGURE 2 – Jeu hypergraphique (exemple 5) : un sommet rond désigne un couple $(i, \theta_i) \in \tilde{N}$ (une couleur par agent i), un sommet carré désigne une hyper-arête $ens(\theta)$ correspondant à une combinaison possible de types $\theta \in \Theta^*$.

$\tilde{G}$ a 8 jeux locaux à 3 agents (figure 2) ; les fonctions d'utilité locales peuvent être listées dans 8×3 tables de taille 2^3 (i.e. 192 valeurs). La transformation effectue une opération $\otimes_i = \times$ en $O(1)$ pour chacune des 192 valeurs d'utilité ; elle est donc linéaire. Le jeu dont $\tilde{G}$ est la représentation succincte a 12 fonctions d'utilité, qui seraient listées dans 12 tables de taille $|\tilde{A}| = 2^{12}$ (i.e. 49152 valeurs).

Les utilités sont préservées en utilisant la fonction identité $f_N : \tilde{N} \to \tilde{N}$ et la fonction $f_\Sigma : \Sigma \to \tilde{A}$ telle que :

$$f_\Sigma(\sigma) = \big(\sigma_1(\theta_{1,1}), \ldots, \sigma_n(\theta_{n,|\Theta_n|})\big) \quad \in \tilde{A}$$
$$f_\Sigma^{-1}(\tilde{a}) = \big((fun\ \theta_1 \to \tilde{a}_{(1,\theta_1)}), \ldots, (fun\ \theta_n \to \tilde{a}_{(n,\theta_n)})\big) \quad \in \Sigma$$

C'est-à-dire, $\forall \sigma \in \Sigma,\ \forall \tilde{a} \in \tilde{A},\ \forall i \in N,\ \forall \theta_i \in \Theta_i$, la bijection $\tilde{a} = f_\Sigma(\sigma)$ met en correspondance $\sigma_i(\theta_i)$ et $\tilde{a}_{(i,\theta_i)}$. En d'autres termes la transformation d'un jeu incomplet algébrique en son modèle de Selten préserve les utilités - ce qui généralise le théorème de Howson-Rosenthal.

Théorème 1 (Howson-Rosenthal généralisé) *On a :* $\forall \sigma \in \Sigma, \forall i \in N, \forall \theta_i \in \Theta_i, GEU_{(i,\theta_i)}(\sigma) = \tilde{u}_{(i,\theta_i)}\big(f_\Sigma(\sigma)\big)$.

La preuve est donnée en COQ sur GitHub.[2] Il s'agit principalement d'un jeu de réécriture des définitions, qui est possible d'une part car les agents, types et profils de stratégies sont en bijection (par f_N et f_Σ), et d'autre part car l'existence d'un élément O_{W_i} absorbant pour $\otimes_i$ et neutre pour $\oplus_i$ permet d'effectuer la sommation abstraite sur Θ^* (les combinaisons de types possibles pour au moins un agent) de la même façon que sur Θ (toutes les combinaisons).

Corollaire 1 (Correspondance des équilibres de Nash) *Un profil σ est un équilibre du jeu G ssi son image $\tilde{a} = f_\Sigma(\sigma)$ est un équilibre de Nash du modèle de Selten $\tilde{G}$.*

Ce résultat est direct par conservation des utilités : dans G, aucun agent i n'a intérêt à changer sa stratégie σ_i (quel que soit le type θ_i reçu) ssi dans $\tilde{G}$, aucun agent $f_N(i, \theta_i)$ n'a intérêt à changer sa stratégie $\tilde{a}_{(i,\theta_i)}$.

Proposition 4 (Complexité spatiale) *Le modèle de Selten a au plus la même taille que le jeu incomplet initial.*

En effet, d'après la proposition 3, le modèle de Selten $\tilde{G}$ a une taille $S_{\tilde{G}} \in O(|\tilde{E}|k\alpha^k)$ avec $|\tilde{E}| = |\Theta^*| \leq |\Theta| \leq \beta^n$ (où $\alpha = \max_{i \in N} |A_i|$ et $\beta = \max_{i \in N} |\Theta_i|$) et avec $k = n$ la taille de chaque hyper-arête. Ainsi, le modèle de Selten est de taille $S_{\tilde{G}} \in O(|\Theta^*|n\alpha^n) \subseteq O\big(n(\alpha\beta)^n\big)$.
Le modèle de Selten $\tilde{G}$, en tant que jeu hypergraphique, est la représentation succincte d'un forme normale, plus précisément du jeu $G' = \Big(\tilde{N}, \tilde{A}, (GEU_{(i,\theta_i)})_{(i,\theta_i) \in \tilde{N}}\Big)$. Ce jeu est différent de la forme normale complète proposée par Harsanyi pour les jeux bayésiens (la transformation Harsanyi ne préserve pas les utilités). La complexité spatiale de G' est supérieure à celle du modèle de Selten : $S_{G'} \in O(n\beta\alpha^{n\beta}) = O(S_{\tilde{G}} \cdot \beta(\alpha^{\beta-1}/\beta)^n)$.

Proposition 5 (Complexité temporelle) *La transformation de Selten d'un jeu incomplet algébrique en forme normale se fait en temps linéaire si pour tout $i \in N$ l'opérateur $\otimes_i$ est linéaire.*

En effet, pour chaque valeur $\tilde{u}_{(i,t)}^{ens(\theta)}$, nous effectuons une unique opération $\otimes_i$. Si cette opération est en $O(\gamma)$, La transformation se fait en $O\big(n\gamma(\alpha\beta)^n\big)$. Remarquons que les distributions a posteriori $d_i(\cdot|\theta_i)$ sont données (définition 6). Sans quoi il faudrait également considérer la complexité temporelle du conditionnement.
Par conséquent, la détermination d'un équilibre de Nash dans un jeu incomplet n'est pas plus difficile que dans un jeu hypergraphique basé sur $\oplus$. Ceci suggère que l'existence d'un équilibre dans de nombreux types de jeux incomplets est un problème NP-complet (et pas plus !).

5 Conclusion

Cet article apporte trois contributions. D'abord, nous proposons un cadre algébrique permettant de représenter des jeux incomplets basés sur différentes approches connues en théorie de la décision sous incertitude. Ce cadre généralise deux formes de jeux existantes : les jeux bayésiens et les jeux possibilistes ; nous en proposons d'autres en exemple (multi-critères, ordre de grandeur de l'utilité espérée).
Ensuite, nous généralisons le théorème dit *de Howson et Rosenthal* à ce modèle algébrique et à un nombre quelconque d'agents. À partir de toute instance de jeu incomplet, nous pouvons ainsi construire en temps linéaire son *modèle de Selten* : un jeu hypergraphique de complexité spatiale jamais supérieure et préservant les utilités. Les équilibres de Nash y sont en correspondance. L'étude d'un jeu incomplet peut donc se ramener à l'étude d'un jeu complet, soit sous sa forme succincte (hypergraphique), soit sous sa forme normale (dont la complexité spatiale est supérieure).

Enfin, les structures de données et les preuves ont été exprimées en Coq. D'une part, cela leur donne une très forte garantie de correction. D'autre part, cela permet leur réutilisation. En effet, cette formalisation en Coq est disponible sur GitHub et a vocation a être étoffée ultérieurement.

Ces travaux préliminaires ouvrent plusieurs voies de recherche. D'une part, il faudrait étendre notre résultat aux capacités quelconques, et définir des jeux utilisant des mesures de plausibilité non décomposables (par exemple, des jeux basés sur l'utilité dépendant du rang [18], et plus généralement sur des intégrales de Choquet [5]). D'autre part, il faut maintenant travailler du point de vue algorithmique : en dotant les jeux hypergraphiques d'une algorithmique efficace, nous espérons en doter également les jeux algébriques incomplets. Plusieurs pistes sont envisageables, par exemple l'utilisation de la programmation par contraintes (en transformant à son tour le jeu hypergraphique en CSP valué) ; une autre piste serait d'envisager l'algorithme de Lemke-Howson [12] dans un cadre algébrique. Enfin, nous visons à intégrer les définitions et structures de données définies en Coq dans une bibliothèque de preuves plus large. Ce travail, en plus d'amener de nouveaux résultats, permettrait de justifier la correction des algorithmes implémentés, voire de les générer automatiquement.

Références

[1] Nahla Amor, Hélene Fargier, Régis Sabbadin, and Meriem Trabelsi. Ordinal polymatrix games with incomplete information. In *Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 99–108, 2020.

[2] Yves Bertot and Pierre Castéran. *Interactive theorem proving and program development : Coq'Art : the calculus of inductive constructions*. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] David Blackwell. Equivalent comparisons of experiments. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 265–272, 1953.

[4] Peter Borm, Freek van Megen, and Stef Tijs. A perfectness concept for multicriteria games. *Mathematical Methods of Operations Research*, 49(3) :401–412, 1999.

[5] Gustave Choquet. Theory of capacities. In *Annales de l'Institut Fourier*, volume 5, pages 131–295, 1954.

[6] Francis C Chu and Joseph Y Halpern. Great expectations. Part II : Generalized expected utility as a universal decision rule. *Artificial Intelligence*, 159(1-2) :207–229, 2004.

[7] Didier Dubois and Henri Prade. Possibility theory as a basis for qualitative decision theory. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, volume 95, pages 1924–1930, 1995.

[8] Jacques Durieu, Hans Haller, Nicolas Quérou, and Philippe Solal. Ordinal games. *International Game Theory Review*, 10(02) :177–194, 2008.

[9] John C Harsanyi. Games with incomplete information played by "Bayesian" players, I–III. Part I : The basic model. *Management Science*, 14(3) :159–182, 1967.

[10] Joseph T Howson Jr and Robert W Rosenthal. Bayesian equilibria of finite two-person games with incomplete information. *Management Science*, 21(3) :313–315, 1974.

[11] Elena Janovskaja. Equilibrium points in polymatrix games. *Lithuanian Mathematical Journal*, (2) :381–384, 1968.

[12] Carlton E Lemke and Joseph T Howson, Jr. Equilibrium points of bimatrix games. *Journal of the Society for industrial and Applied Mathematics*, 12(2) :413–423, 1964.

[13] Oskar Morgenstern and John Von Neumann. *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 1953.

[14] John Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, pages 286–295, 1951.

[15] Christos H Papadimitriou and Tim Roughgarden. Computing correlated equilibria in multi-player games. *Journal of the ACM*, 55(3) :1–29, 2008.

[16] Patrice Perny, Olivier Spanjaard, and Paul Weng. Algebraic markov decision processes. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1372–1377, 2005.

[17] Cédric Pralet, Gérard Verfaillie, and Thomas Schiex. An algebraic graphical model for decision with uncertainties, feasibilities, and utilities. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 29 :421–489, 2007.

[18] John Quiggin. A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 3(4) :323–343, 1982.

[19] Stéphane Le Roux. Acyclic preferences and existence of sequential Nash equilibria : A formal and constructive equivalence. In *Theorem Proving in Higher Order Logics*, LNCS vol. 5674, pages 293–309. Springer, 2009.

[20] Leonard J Savage. *The Foundations of Statistics*. Wiley, 1954.

[21] Herbert A Simon. A behavioral model of rational choice. *The Quarterly Journal of Economics*, 69(1) :99–118, 1955.

[22] Siegfried Weber. $\perp$-decomposable measures and integrals for Archimedean t-conorms $\perp$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 101(1) :114–138, 1984.

[23] Nic Wilson. An order of magnitude calculus. In *Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 548–555. Morgan Kaufmann, 1995.

[24] Yejun Xu, Ravi Patnayakuni, and Huimin Wang. The ordinal consistency of a fuzzy preference relation. *Information Sciences*, 224 :152–164, 2013.