



**HAL**  
open science

# Une suite de rationnels qui converge quadratiquement vers $\pi$

Vivien Despax

► **To cite this version:**

| Vivien Despax. Une suite de rationnels qui converge quadratiquement vers  $\pi$ . 2021. hal-03289800

**HAL Id: hal-03289800**

**<https://hal.science/hal-03289800v1>**

Preprint submitted on 19 Jul 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une suite de rationnels qui converge quadratiquement vers

$\pi$

Vivien Despax

19 juillet 2021

## Résumé

Nous proposons un algorithme récursif fournissant une suite de rationnels qui converge vers  $\pi$  à vitesse quadratique.

Nous confondons une fonction constante avec sa valeur.

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Nous notons  $[0, x]^{\mathbb{R}_+^*}$  l'ensemble des fonctions définies sur  $[0, x]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ . La restriction à  $[0, x]$  de la fonction arctangente est encore notée  $\text{Arctan}$  et  $a$  désigne sa dérivée. Nous utilisons la méthode de Newton pour approcher  $a$  uniformément par des polynômes. Soient  $I, I'$  et  $N$  les fonctions définies sur  $[0, x]^{\mathbb{R}_+^*}$  par

$$I(f) = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \quad I'(f) = -\frac{1}{f^2} \quad N(f) = f - \frac{I(f)}{I'(f)}.$$

Un calcul montre que nous avons

$$\forall f \in [0, x]^{\mathbb{R}_+^*} \quad N(f) = f \left( 2 - \frac{f}{a} \right) \quad a - N(f) = \frac{1}{a} (a - f)^2. \quad (1)$$

Nous en déduisons que, si  $f \in [0, x]^{\mathbb{R}_+^*}$  vérifie  $f \leq a$ , alors  $N(f) \in [0, x]^{\mathbb{R}_+^*}$  et vérifie  $N(f) \leq a$ . Comme  $a(x) \leq a$ , nous introduisons la suite  $(f_n = f_{x,n})$  définie par

$$f_n = \begin{cases} a(x) & \text{si } n = 0, \\ N(f_{n-1}) & \text{si } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

La suite  $(f_n)$  est croissante et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est une fonction polynôme dont nous notons  $F_n$  la primitive nulle en 0.

**Proposition 1.** *Nous avons*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \text{Arctan} - F_n \leq x \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^{2^n}.$$

**Démonstration.** D'après (1), nous obtenons, par récurrence et en majorant  $a$  par 1,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a - f_n = a \left( 1 - \frac{a(x)}{a} \right)^{2^n} \leq (1 - a(x))^{2^n}.$$

Il suffit ensuite d'intégrer entre 0 et  $x$ .

CQFD

**Corollaire 1.** Si  $x \in \mathbb{Q}$ , alors  $(F_n(x))$  est une suite croissante de rationnels qui converge quadratiquement vers  $\text{Arctan } x$ .

Nous allons maintenant expliciter la suite  $(F_n(x))$ .

**Proposition 2.** Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n(x) = \frac{x}{1+x^2} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{2^{2k}}{(2k+1) \binom{2k}{k}} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^k.$$

**Démonstration.** D'après (1), nous avons

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n &= a \left( 1 - \left( 1 - \frac{a(x)}{a} \right)^{2^n} \right) \\ &= a(x) \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( 1 - \frac{a(x)}{a} \right)^k, \end{aligned}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in [0, x] \quad f_n(y) = \frac{1}{1+x^2} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^k \left( 1 - \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right)^k.$$

En intégrant entre 0 et  $x$ , nous retrouvons les intégrales de Wallis d'indices impairs. Le résultat annoncé s'en déduit. CQFD

Euler a découvert le développement en série

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Arctan } x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1) \binom{2n}{n}} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^n.$$

Le calcul des sommes partielles successives lui a permis de retrouver les vingt premières décimales de  $\pi$  en une heure. Cette identité se déduit immédiatement de la Proposition 1 et de la Proposition 2 et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le calcul de  $f_n$  fournit, après intégration de ce polynôme sur  $[0, x]$ , la somme partielle d'indice  $2^n - 1$ .