



HAL
open science

Multifractalité, tapis de Sierpinski et tissus urbains

Pierre Frankhauser

► **To cite this version:**

| Pierre Frankhauser. Multifractalité, tapis de Sierpinski et tissus urbains. 2021. hal-03287102

HAL Id: hal-03287102

<https://hal.science/hal-03287102>

Preprint submitted on 15 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Multifractalité, tapis de Sierpinski et tissus urbains

Pierre Frankhauser

Théma, Université de Bourgogne–Franche-Comté

1. Introduction

Dans le contexte des recherches sur l'organisation spatiale des tissus urbains des analyses fractales classiques ont essentiellement été utilisées pour étudier la répartition de la surface bâtie (Batty & Longley, 1994; Batty & Xie, 1996; Frankhauser, 1994; Shen, 2002; Thomas et al., 2007). Ces investigations ont montré que les propriétés fractales sont souvent influencées par le contexte historique dans lequel le tissu urbain s'est développé, aussi bien à l'échelle d'une agglomération dans son ensemble qu'à l'échelle des quartiers (Thomas et al., 2008; Thomas, Frankhauser, & Badariotti, 2010; Thomas et al., 2010). Plus récemment l'approche multifractale a été utilisée pour étudier différents thématiques liées à la structure urbaine ou au système de peuplement (Appelby, 1996; Chen & Wang, 2013; Chen & Zhou, 2004; Long & Chen, 2021; Sémécurbe, 2020) et encore pour l'étude de la propagation du virus COVID19 en Chine (Long & Chen, 2021). Un approfondissement de ces travaux serait souhaitable surtout en combinant l'occupation du sol avec d'autres caractéristiques telles que l'intensité de l'occupation du sol (densité de population, hauteur des bâtiments, variables socio-économiques).

La particularité de l'approche fractale est la possibilité d'illustrer des lois de distributions statistiques (hyperbolique ou binomiale) par des modèles géométriques. Dans un tel esprit, des fractales et multifractales construites ont été utilisées pour illustrer certaines caractéristiques des structures urbaines (Batty & Longley, 1994; Chen & Wang, 2013; Frankhauser, 1994, 2017; Thomas et al., 2008). Plus récemment des modèles fractales et multifractales ont été utilisés pour développer des concepts d'aménagement favorisant le développement durable (Frankhauser, 2021b; Frankhauser et al., 2007).

Dans cet esprit nous nous intéressons ici à la formalisation de l'approche multifractale dans le contexte de la description des tissus urbains. Ceci concerne aussi bien la question de la répartition de la surface bâtie que l'intensité de l'occupation du sol (densité de logement, hauteur des bâtiments).

2. Distinguer les différentes approches

L'approche multifractale est souvent associée à des structures qui ont un support uniforme ($1D$ ou $2D$) et sur lesquelles on introduit des poids sur différentes parties de ce support (Abry et al., 2012; Falconer, 2014; Feder, 1988; Jaffard et al., 2007; Reljin et al., 2000). Ces poids sont emboîtés par itération. Il s'agit ainsi de structures non-lacunaires. Il faut être conscient qu'il s'agit ainsi plutôt d'une structure auto-affine, car les facteurs de l'application itérée ne sont pas isotropes. La formalisation généralement utilisée s'appuie sur de telles structures (Falconer, 2014; Halsey et al., 1986; Feder, 1988).

La situation est donc différente des tissus urbains qui sont lacunaires et pour lesquels on ne distingue – au moins dans un premier temps – qu'une information binaire du type « occupé »

ou « vide ». La prise en compte de l'intensité d'occupation du sol, par exemple en considérant la hauteur des bâtiments et/ou la population présente ajoute une information du type signal, mais le support reste lacunaire.

La combinaison de structures lacunaires ayant en même temps des pondérations différentes a été discutée de façon formelle par Halsey et al. (1986) à partir de barres de Cantor. Il s'agit là-aussi de structures auto-affines.

Une telle logique a été utilisée dans le concept d'aménagement Fractalopolis en ajoutant l'intensité de l'occupation du sol. Un tapis de Sierpinski multifractal qui combine plusieurs facteurs de réduction sert de base pour la modélisation surfacique. La troisième dimension n'est pas traitée de la même façon que la surface, car le modèle d'une éponge de Menger paraît peu adapté à la réalité. Elle repose sur le concept discuté par Halsey et al. (op.cit.) (Frankhauser, 2015; Frankhauser et al., 2018; Frankhauser, 2021a).

Les différentes situations sont illustrées dans la figure 1 pour une structure type « barre de Cantor ».

Les barres de Cantor	Facteurs de réduction	Pondération	type	nombre de générateurs
	un	non <i>non normalisé</i>	monofractal	un
	plusieurs	non <i>non normalisé</i>	multifractal non affine	un
	un	oui, égal <i>normalisé</i>	monofractal	un
	néant	oui, plusieurs <i>normalisé</i>	multifractal affine	un
	plusieurs	oui, plusieurs <i>normalisé</i>	multifractal affine	deux

Figure 1 : différents modèles basés sur un support 1D.

Comme nous nous intéressons à une formalisation géométrique de la répartition de la surface bâtie, nous considérons ici un autre type de fractales, les tapis de Sierpinski à plusieurs facteurs de réduction et nous posons la question sur leur caractéristiques fractales/multifractales. Dans un premier temps nous considérons une simple structure 2D sans pondération des éléments de la fractale. Nous élargissons ce modèle dans un second temps en considérant une pondération uniforme des éléments de la fractale ce qui prépare à un élargissement en considérant ensuite un tapis de Sierpinski dont les éléments sont pondérés.

Il ne s'agit donc pas d'introduire d'une troisième dimension, mais de considérer sur un plan des zones de plus ou moins forte concentration de points ce qui correspond à la logique des coupes de Poincaré discuté par Grassberger, Proccacia et Hentschel (Grassberger, 1983, 1983; Hentschel & Procaccia, 1983, 1983).

3. Tapis de Sierpinski multifractal (auto-similaire) sans pondération

3.1 Le modèle

Dans un premier temps nous étudions dans quelle mesure le tapis de Sierpinski généré par deux facteurs de réduction correspond à une logique multifractale (Figure 2). Ce modèle est particulièrement intéressant pour modéliser la hiérarchie des agrégats dans une zone métropolitaine ce qui n'est pas possible par une approche à un seul facteur de réduction car la répartition hiérarchique n'existe alors que pour les lacunes.

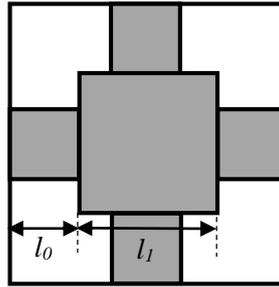


Figure 2 : Le générateur d'un tapis de Sierpinski à deux facteurs de réduction.

Nous nous appuyons sur le cadre formel développé dans l'ouvrage de Feder (op.cit.). Nous rappelons que la procédure d'itération correspond dans le cas de plusieurs facteurs de réduction à une couverture qui correspond à la logique de Hausdorff-Besikovitch car la couverture est par définition optimisée à travers l'utilisation d'objets de taille différente dont la taille est inférieure à une limite définie à chaque étape. La dimension de Hausdorff ainsi est identique à la dimension d'homothétie interne.

Feder donne une formalisation équivalente à partir d'une barre de Cantor à deux facteurs de réduction. Cette formalisation peut facilement être adaptée à un tapis de Sierpinski à deux (ou plusieurs) facteurs de réduction

La relation de base de Hausdorff-Besikovitch est

$$M_d = \sum_{i=0}^N l_i^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > D \\ \infty, & d < D \end{cases} \quad (1)$$

où $\delta = \sup (l_i)$.

Dans l'exemple donnée, nous combinons deux facteurs de réduction mais nous supposons que le générateur soit constitué d'un élément de taille l_1 et de v_0 éléments de taille l_0 avec $l_1 > l_0$. Au fil des itérations on obtient $\binom{n}{k} v_0^k$ éléments de taille $l_0^k l_1^{n-k}$ avec $k = 0, 1, 2, \dots, n$. La mesure à l'étape n est ainsi :

$$M_d = \sum_{i=0}^N l_i^d = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v_0^k l_0^{kd} l_1^{(n-k)d} = (v_0 l_0^d + l_1^d)^n \quad (2)$$

Pour la convergence de la longueur δ vers zéro, le terme dominant $\delta = l_1^n$ est important et la condition d'une mesure constante est de nouveau satisfaite pour $d = D$

$$(v_0 l_0^D + l_1^D) = 1 \quad (3)$$

Cette relation est la relation standard pour déterminer (numériquement) la dimension fractale.

3.2 Couverture de Hausdorff

Nous nous intéressons maintenant à la question de la couverture de l'objet dans l'objectif de déterminer la dimension fractale. Prenons l'exemple de la figure 2, le tapis de Sierpinski à deux facteurs de réduction avec $l_1 = 2 \times l_0$. Comme nous avons constaté l'itération permet une couverture parfaite selon les revendications de Hausdorff. Selon relation (3) nous avons

$$(v_0 l_0^{D_H} + l_1^{D_H}) = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{D_H} + \left(\frac{1}{2}\right)^{D_H} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2D_H} + \left(\frac{1}{2}\right)^{D_H} = 1 \quad (31)$$

En posant $x \equiv (1/2)^D$ on obtient

$$4x^2 + x - 1 = 0 \quad (32)$$

Et ainsi

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8} \approx 0,390 \quad (33)$$

D'où

$$D_H = -\frac{\log x}{\log 2} \approx 1,357 \quad (34)$$

ce qui correspond à D_0 dans une approche multifractale.

3.3 Couverture de Minkowski

Couvrons maintenant la même structure à partir de la logique de Minkowski. Nous illustrons deux étapes d'itération et considérons que la couverture utilisée soit celle du plus petit élément. Elle est ainsi optimisée car les surfaces de tous les carrés sont des multiples de cet élément (figure 3). On vérifie qu'on obtient la série :

ε_n unité l_0	$N(\varepsilon_n)$
$\frac{1}{4}$	8
$\frac{1}{16}$	64
$\frac{1}{64}$	512

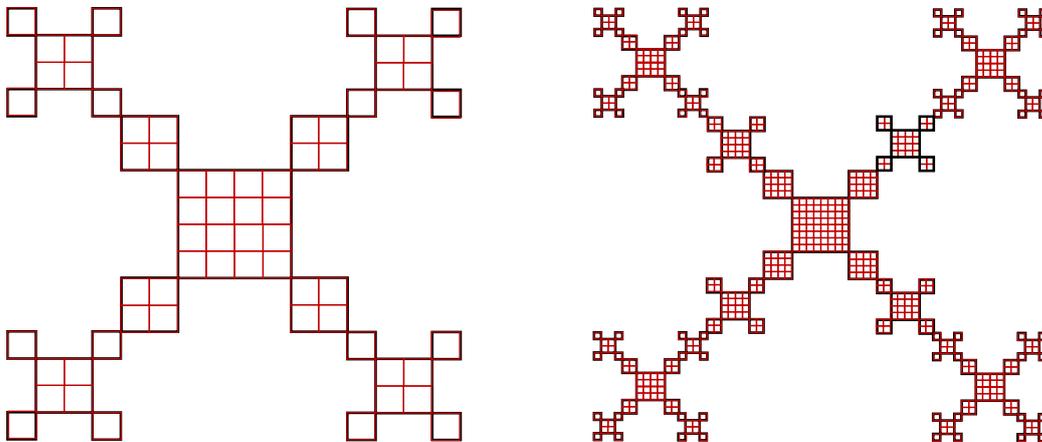


Figure 3 : la couverture de Minkowski d'un tapis de Sierpinski à deux facteurs de réduction.

On observe deux progressions géométriques dont les coefficients multiplicateurs sont $\lambda = 1/4$ et $N = 8$. Ceci donne comme dimension :

$$D_M = -\frac{\log N}{\log \lambda} = \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{3 \log 2}{2 \log 2} \approx 1,5 \quad (35)$$

Les valeurs de la dimension ne sont donc pas les mêmes et $D_M > D_H$.

4. Formalisation selon Halsey

4.1 Cadre général

Nous considérons maintenant cette même construction cependant en utilisant la formalisation multifractale proposée par Halsey et al. (1986) et reprise par Feder (1988).

On part d'une structure type « barre de Cantor » dont le générateur est constitué de barres de différentes longueurs l_i portant chacune un poids p_i . Cette formalisation s'applique également au tapis de Sierpinski à deux facteurs. Dans ce formalisme les poids sont normalisés à travers

$$\sum_i p_i = 1 \quad (4)$$

Dans notre cas nous interprétons les p_i comme la part de la masse bâtie qui se trouve dans la zone à étendue l_i . Toutefois nous soulignons que nous entendons par masse bâtie un ensemble de points qui correspondent aux centroïdes des bâtiments. Leur étendu n'entre donc ici pas en jeu, mais uniquement leur localisation.

La mesure μ_i du segment i devient dans le cas du tapis de Sierpinski à deux facteurs de réduction

$$\mu_i = p_0^k p_1^{n-k} \quad (5)$$

Nous avons maintenant $\binom{n}{k} v_0^k$ éléments de taille $l_0^k l_1^{n-k}$ et à poids $\mu_i = p_0^k p_1^{n-k}$. Et pour chaque étape on a

$$\sum_i \mu_i = 1 \quad (6)$$

On introduit ainsi un modèle « 3D » qui, à travers les poids devient une structure auto-affine. La relation équivalente à (1) devient alors

$$M_d = \sum_{i=0}^N \mu_i^q l_i^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > \tau(q) \\ \infty, & d < \tau(q) \end{cases} \quad (7)$$

Ici l'exposant de masse est donc une fonction $d = \tau(q)$ qui assure que la mesure reste constante pour $\delta \rightarrow 0$, δ étant de nouveau associé à la longueur $\sup(l_i)$.

$$M_d = \sum_{i=0}^N \mu_i^q l_i^d = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p_0^q v_0 l_0^d)^k (p_1^q l_1^d)^{n-k} = (p_0^q v_0 l_0^d + p_1^q l_1^d)^n \quad (8)$$

Pour la convergence de la longueur δ vers zéro, le terme dominant $\delta = l_1^n$ est important et la condition d'une mesure constante est maintenant assuré pour $d = \tau(q)$.

$$(p_0^q v_0 l_0^{\tau(q)} + p_1^q l_1^{\tau(q)}) = 1 \quad (9)$$

Cette formalisation est valable si nous distribuons de la population sur les zones urbaines (en laissant les zones rurales « vides » c'est-à-dire hors considération, une répartition uniforme peut toujours être supposée pour les lacunes, elle n'affectera pas la fractalité de l'objet.

4.2 Absence de pondération

Nous considérons une répartition uniforme sur tous les éléments de la multifractale. Ceci correspond à une agglomération où tous les bâtiments ont la même hauteur, telle qu'une zone pavillonnaire ou le centre de Paris. Ceci veut dire que nous affectons à chaque élément un poids proportionnel à sa longueur et on obtient ainsi une situation équivalente à celle de la figure 6.1 (page 68) de Feder (op.cit.) sauf que nos éléments sont de taille différente. Les poids suffisent à la normalisation

$$v_0 p_0 + p_1 = 1 \quad (10)$$

et sont maintenant :

$$\varphi v_0 l_0 + \varphi l_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{v_0 l_0 + l_1} \quad (11)$$

et

$$p_0 = \frac{l_0}{v_0 l_0 + l_1}, \quad p_1 = \frac{l_1}{v_0 l_0 + l_1} \quad (12)$$

D'où suit la relation équivalente à (9) :

$$\left(v_0 \left(\frac{l_0}{v_0 l_0 + l_1} \right)^q l_0^{\tau(q)} + \left(\frac{l_1}{v_0 l_0 + l_1} \right)^q l_1^{\tau(q)} \right) = 1 \quad (13)$$

$$\frac{v_0 l_0^{\tau(q)+q} + l_1^{\tau(q)+q}}{(v_0 l_0 + l_1)^q} = 1 \quad (14)$$

Il existe donc une fonction $\tau(q)$ non banale.

En choisissant comme exemple $v_0 = 4$, $l_0 = 0,25$ et $l_1 = 0,5$ il est possible d'obtenir des solutions analytiques du fait que $l_0 = l_1^2$. Nous obtenons pour la relation (14)

$$\frac{4 \left(\frac{1}{4} \right)^{\tau(q)+q} + \left(\frac{1}{2} \right)^{\tau(q)+q}}{\left(4 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)^q} = 1 \quad (17)$$

$$\frac{4 \left(\frac{1}{2} \right)^{2(\tau(q)+q)} + \left(\frac{1}{2} \right)^{\tau(q)+q}}{\left(4 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)^q} = 1 \quad (18)$$

Avec $\left(\frac{1}{2} \right)^{\tau(q)+q} \equiv x(q)$ on obtient

$$4x(q)^2 + x(q) - \left(\frac{3}{2} \right)^q = 0$$

et

$$\tau(q) = -\frac{\log x(q)}{\log 2} - q$$

Selon la relation (Grassberger, 1983, 1983; Halsey et al., 1986)

$$D_q = \frac{\tau(q)}{1 - q} \quad (19)$$

on obtient pour :

q = 0

$$4x(0)^2 + x(0) - 1 = 0 \quad (20)$$

$$x(0) = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8} \approx 0,390 \quad (21)$$

$$\tau(0) = -\frac{\ln x}{\ln 2} = 1,357 \quad (22)$$

q = 2

$$4x(2)^2 + x(2) - \frac{9}{4} = 0 \quad (23)$$

d'où $x \approx 0,635$ et

$$\tau(q) = -\frac{\log x}{\log 2} - 2 = -1,346 \quad (24)$$

d'où

$$D_2 = 1,345 \quad (25)$$

donc $D_2 < D_0$.

Il est donc possible de calculer analytiquement la série des dimensions fractales (figure 4).

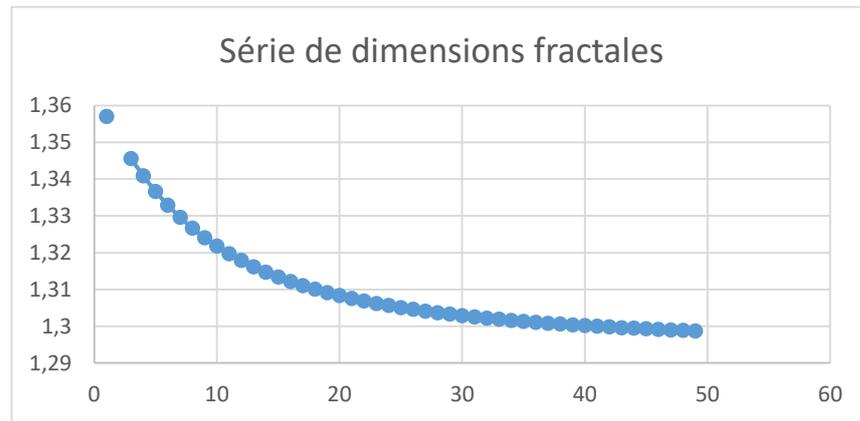


Figure 4 : La série de dimensions fractales pour le tapis de Sierpinski sans pondération.

Et on obtient pour les valeurs limites (Feder) de α :

$$\alpha_{min} = \frac{\ln p_0}{\ln l_0} = \frac{\ln l_0 - \ln(v_0 l_0 + l_1)}{\ln l_0} = 1 - \frac{\ln(v_0 l_0 + l_1)}{\ln l_0} \quad (26)$$

$$\alpha_{max} = \frac{\ln p_1}{\ln l_1} = \frac{\ln l_1 - \ln(v_0 l_0 + l_1)}{\ln l_1} = 1 - \frac{\ln(v_0 l_0 + l_1)}{\ln l_1} \quad (27)$$

ce qui donne pour l'exemple choisi

$$\alpha_{min} = 1 - \frac{\ln(4 \times 1/4 + 1/2)}{\ln 1/4} = 1 + \frac{\ln 3 - \ln 2}{2 \ln 2} = 0,5 + \frac{\ln 3}{2 \ln 2} = 1,29 \quad (28)$$

$$\alpha_{max} = 1 - \frac{\ln(4 \times 1/4 + 1/2)}{\ln 1/2} = 1 + \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,37 \quad (29)$$

Notons que dans le cas $l_0 = l_1$ on revient à une monofractale. En effet on obtient pour la relation (13) :

$$\left(v \left(\frac{l}{vl} \right)^q l^{\tau(q)} \right) = v^{1-q} l^{\tau(q)} = 1 \quad (30)$$

En posant $\tau(q) = (1-q)D$ on obtient

$$v l^D = 1 \quad (31)$$

Ce qui est la relation d'une monofractale et ainsi

$$\alpha(q) = -\frac{d}{dq} \tau(q) = -D \quad (32)$$

Donc $\alpha = -D$.

5. Tapis de Sierpinski monofractal avec pondération multifractal (auto-affinité)

Si l'exemple discutée illustre les propriétés multifractales d'une structure auto-similaire du type tapis de Sierpinski, nous revenons maintenant à la question si, en deux dimensions, il est possible de considérer des répartitions avec des domaines de concentration plus ou moins fortes¹. Nous montrons que ceci est possible, mais viole forcément le principe d'auto-similarité et génère des structures qui ont des propriétés locales qui diffèrent selon l'endroit en question. Cette approche correspond à celle de l'études des coupes (ou application, Figure 5) de Poincaré étudiées par Grassberger, Procaccia et Hentschel. En effet, dans ces travaux on considère une trajectoire chaotique d'un système à trois variables qui traverse un « écran », donc une surface interposée. Il s'agit donc bien d'un système de points répartis sur une surface, dont d'une logique binaire.

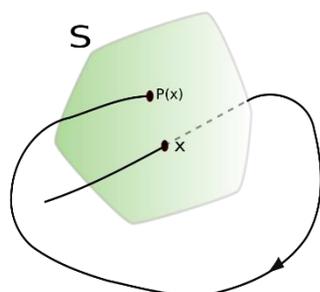


Figure 5 : Coupe de Poincaré (source : Wikipedia (article : Application de Poincaré)).

Nous illustrons une telle modélisation à partir d'un modèle simple et donnons comme exemple l'application à la géographie urbaine. Nous considérons une ville dans laquelle les quartiers peuvent avoir des degrés de concentration différents selon la texture urbaine.

Nous considérons la situation suivante en utilisant la même notation formelle que plus haut. Nous découpons un carré en neuf parts égales et affectons des taux p_i à chacune de ces zones carrées i (Figures 6 et 7).

¹Ceci est évidemment d'un grand intérêt pour les villes dans laquelle des quartiers différents peuvent avoir des degrés de concentration différents selon la texture urbaine.

0	0	p_0
p_0	p_1	p_1
p_0	p_0	p_0

Figure 6 : le générateur choisi, la position des éléments peut être différente sans affecter les propriétés fractales.

Nous avons ainsi deux zones vides (lacunes) et deux zones avec une part p_1 de masse (p.ex. logements) et quatre zones avec une part p_0 . Dans le contexte d'un système de peuplement ceci pourrait être la part des logements qui se trouve dans chaque carré. On peut supposer que certains carrés peuvent être vides car nous nous trouvons dans une zone de montagne, de forêts étendues ou qu'ils font partie d'un plan d'eau (donc même pas de maison isolées).

La somme des parts est normalisée :

$$\sum_i p_i = \nu_0 p_0 + \nu_1 p_1 = 1 \quad (36)$$

avec $\nu_0 = 5$ et $\nu_1 = 2$.

Nous supposons pour l'instant qu'il s'agit d'une ville entièrement « plate », à un seul étage, les logements correspondent donc à des maisons individuelles, toutes de même taille. Il n'y a donc pas d'empilement de logements. Chaque maison est représentée par son centroïde, donc un point sur la surface.

								p_0^2
						p_0^2	$p_0 p_1$	$p_0 p_1$
						p_0^2	p_0^2	p_0^2
		p_0^2			$p_1 p_0$			$p_1 p_0$
p_0^2	$p_0 p_1$	$p_0 p_1$	$p_1 p_0$	p_1^2	p_1^2	$p_1 p_0$	p_1^2	p_1^2
p_0^2	p_0^2	p_0^2	$p_1 p_0$					
		p_0^2			p_0^2			p_0^2
p_0^2	$p_0 p_1$	$p_0 p_1$	p_0^2	$p_0 p_1$	$p_0 p_1$	p_0^2	$p_0 p_1$	$p_0 p_1$
p_0^2	p_0^2	p_0^2	p_0^2	p_0^2	p_0^2	p_0^2	p_0^2	p_0^2

Figure 7 : la deuxième étape d'itération.

Donnons un exemple chiffré. Supposons que la zone totale contient au total $N = 250.000$ logements et les parts sont $p_0 = 0,135$, alors $p_1 = 0,1625$. Nous nous intéressons donc à la répartition de ces centroïdes, car mathématiquement la masse bâtie doit tendre vers zéro. Au cours de l'itération les zones de plus forte concentration correspondent au poids p_l^n en n -ième étape d'itération et les zones de plus faible concentration à p_0^n .

En deuxième étape (Figure 7) on aurait dans une zone de plus forte concentration $p_1^2 N = 6601$ logements et dans les zones le plus faiblement bâties $p_0^2 N = 4556$ logements etc. Si une telle itération était donc possible jusqu'à l'infini, dans une situation réelle on devrait s'arrêter à une certaine étape d'itération où la taille des logements et la densité locale correspondent des valeurs réalistes. Dans notre exemple on aurait en 5^e étape d'itération dans les éléments le plus peuplés 28 logements et dans les zones le moins peuplées 11 logements. Supposons que la surface de chaque élément soit 1 ha ce qui correspond à 0,6 ha de surface constructible compte tenu que nous considérons 40% de la surface affectée à des espaces publics et privés (circulation, vert). Les éléments le plus peuplés auraient ainsi une densité de 47 logements par hectare et les zones les moins peuplées 19 logements par hectare. Ce chiffre est réaliste pour des zones pavillonnaires, la forte densité de 47 logements par hectare correspond à des maisons mitoyennes de haute densité telle que des studios accolés du type MARPA².

Nous considérons maintenant l'aspect formel du modèle et revenons à la relation de base de l'approche multifractale où les éléments sont de taille pareille l à une certaine étape d'itération (Feder p.80).

$$M_d = \sum_{i=0}^N \mu_i^q l^d \xrightarrow{l \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > D \\ \infty, & d < D \end{cases} \quad (37)$$

Comme au précédent nous nous limitons à deux degrés de concentration comme dans l'exemple donné sachant que les lacunes générées ne contribuent pas à la masse. Au fil des itérations on obtient $\binom{n}{k}$ éléments de poids $\mu_i = (v_0 p_0)^k (v_1 p_1)^{n-k}$ avec $k = 0, 1, 2, \dots, n$. La mesure à l'étape n est ainsi :

$$M_d = \sum_{i=0}^N \mu_i^q l^d = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (v_0 p_0^q l^d)^k (v_1 p_1^q l^d)^{n-k} \quad (38)$$

$$= (v_0 p_0^q + v_1 p_1^q)^n l^{dn}$$

Cette mesure demeure constante pour $d = D$ si

$$(v_0 p_0^q + v_1 p_1^q) l^{\tau(q)} = 1 \quad (39)$$

ce qui veut dire

$$l^{\tau(q)} = (v_0 p_0^q + v_1 p_1^q)^{-1} \quad (40)$$

ou

$$\tau(q) = \frac{-\log(v_0 p_0^q + v_1 p_1^q)}{\log l} \quad (41)$$

ce qui correspond à une version simplifiée de (9) et à la relation (6.41) dans Feder (op.cit).

² En France : Maison d'Accueil et de Résidence Pour l'Autonomie

Pour les dimensions on obtient (Figure 8) :

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{1 - q} \quad (42)$$

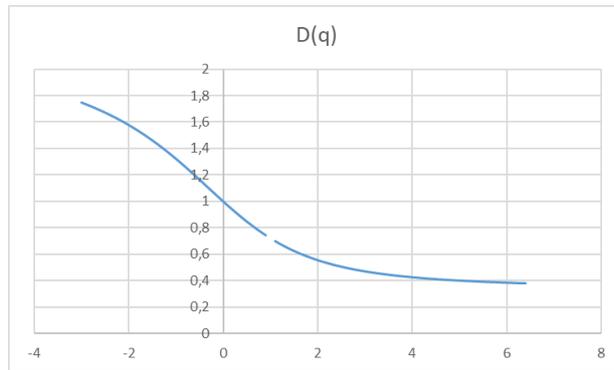


Figure 8 : $D(q)$ pour les valeurs de l'exemple choisi.

Il est ainsi de nouveau possible de calculer pour un exemple donné de façon explicite les valeurs $\tau(q)$. Dans l'exemple choisi on obtient (cf. Figure 9):

$$\tau(q) = \frac{\log(5 \times 0,1^q + 2 \times 0,25^q)}{3} \quad (43)$$

Pour $\tau(0)$ on obtient de nouveau en insérant les valeurs choisies

$$\tau(0) = \frac{\log(5 + 2)}{\log 3} = \frac{\log 7}{\log 3} = 1,77 \quad (44)$$

donc la dimension D_0 du support, conformément à (42).

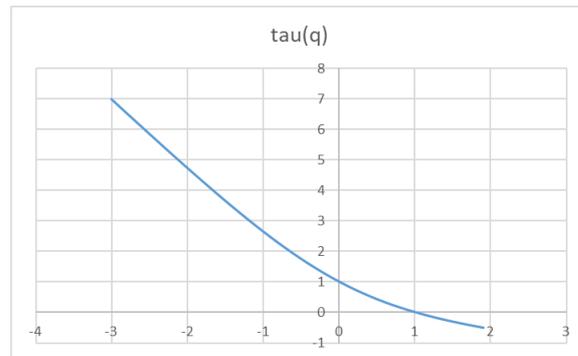


Figure 9 : la courbe $\tau(q)$ pour les valeurs de l'exemple choisi

Il est possible de calculer la courbe $\alpha(q)$ (figure 10)

$$\alpha(q) = -\frac{d\tau}{dq} = \frac{\nu_0 p_0^q \ln p_0 + \nu_1 p_1^q \ln p_1}{(\nu_0 p_0^q + \nu_1 p_1^q) \log l} \quad (45)$$

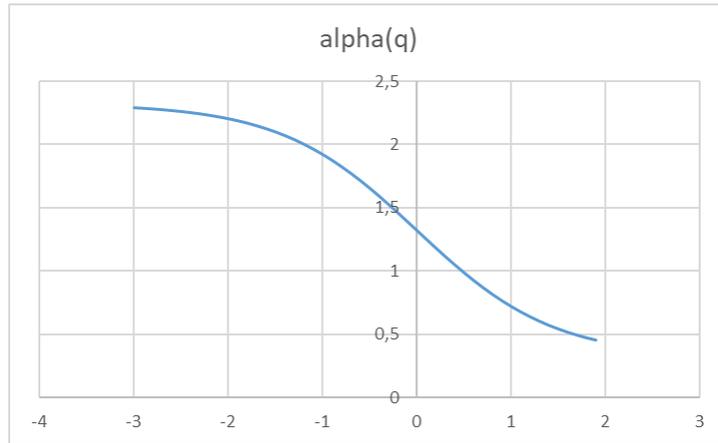


Figure 10 : La courbe de $\alpha(q)$ pour les valeurs de l'exemple choisi.

Suivant toujours Feder, pour $q \rightarrow \infty$, on obtient $p_1^q \gg p_0^q$ et le deuxième terme domine tel que

$$v_1 p_1^q l^{\tau(q)} = 1 \quad (46)$$

$$\log v_1 + q \log p_1 + \tau(q) \log l = 0 \quad (47)$$

$$\tau(q \rightarrow \infty) = \frac{\log v_1 + q \log p_1}{\log l} \quad (48)$$

Selon la démarche indiquée plus haut (15), (16), on obtient pour les valeurs extrêmes d' α :

$$\alpha_{min} = \frac{\ln p_1}{\ln l} = \frac{\ln 0,25}{\ln 1/3} = 1,26 \quad (49)$$

$$\alpha_{max} = \frac{\ln p_0}{\ln l} = \frac{\ln 0,1}{\ln 1/3} = 2,09 \quad (50)$$

Notons que le fait d'obtenir une valeur $\alpha_{max} > 2$ n'est pas contraire à la théorie. Par exemple pour une partition simple entre deux moitiés d'un support en forme de segment de droite on obtient (Feder (op.cit.) p 78, 6.21) en choisissant $p = 0,1$ et donc $(1-p) = 0,9$

$$\alpha_{max} = -\frac{\ln p}{\ln 2} = 3,32 \quad (51)$$

$$\alpha_{max} = -\frac{\ln(1-p)}{\ln 2} = 0,15 \quad (52)$$

Donc si on souhaite limiter $\alpha_{max} \leq 2$ nous obtenons dans notre exemple

$$\ln p_0 \leq 2 \ln l = 2 \ln \frac{1}{3} \quad (53)$$

$$p_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = 0,11111 \dots \quad (54)$$

Selon la définition on obtient $f(\alpha)$ par une transformation de Legendre (Feder, op.cit., figure 11)

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) + \tau(q) \quad (55)$$

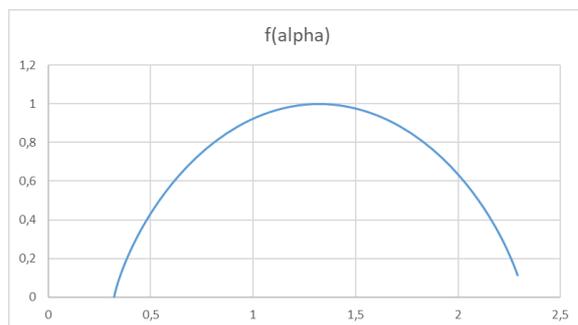


Figure 11 : la courbe $f(\alpha)$ pour les valeurs de l'exemple choisi.

Il est donc possible de formaliser une diversité de degré de concentration multi-échelles dans une surface. Nous disposons ainsi d'un cadre formel de référence pour étudier l'organisation spatiale d'un tissu urbain qui est composé de quartiers de structure différente. Comme indiqué nous supposons que l'itération s'arrête à une échelle qui correspond à la taille des quartiers ou îlots urbains.

Il est possible de considérer la répartition de bâtiments de différente hauteur et/ou des concentrations locales diversifiées de population. Le cadre formel reste à ce moment le même que celui présenté.

6. Tapis de Sierpinski multifractal avec pondération multifractal (auto-affinité)

La logique présentée précédemment correspond plutôt à celle d'une couverture du type « méthodes des boîtes ». Nous élargissons maintenant le modèle en supposant que l'étendu des zones est différents selon la logique d'un tapis de Sierpinski multifractal et que la répartition des centroïdes, de la population ou des logements est régie selon une propre loi de distribution qui correspond donc plutôt à une logique auto-affine. Il s'agit donc d'un système multifractal lacunaire 2D pondérée. Le cadre formel de ce modèle est identique à celui présenté pour une barre de Cantor par Halsey (op.cit.). Nous élargissons ce modèle en supposant qu'il existe plusieurs zones de même taille et plusieurs zones avec des degrés de concentration identiques. Il existe donc v_i zones i de taille l_i et des poids p_i et nous supposons que les poids sont identiques pour les éléments de même taille³. La situation est illustrée sur la figure 12 à partir de l'exemple de la figure 2.

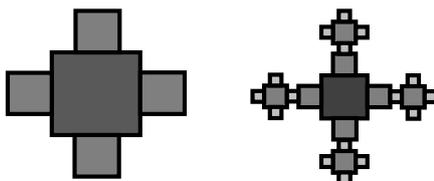


Figure 12 : Tapis de Sierpinski multifractal avec pondération, les niveaux de gris indiquent les degrés de concentration.

³ Il est évidemment possible d'affecter différents poids à des éléments de même taille, on se sert alors de la formules générales (58)

Les poids sont de nouveaux normalisés

$$\sum_i p_i = v_i p_i = 1 \quad (56)$$

La relation de base est maintenant (Feder...)

$$M_d = \sum_{i=0}^N \mu_i^q l_i^d \xrightarrow{l \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > D \\ \infty, & d < D \end{cases} \quad (57)$$

Comme au précédent nous nous limitons à deux degrés de concentration comme dans l'exemple donné sachant que les lacunes générées ne contribuent pas à la masse. Au fil des itérations on obtient $\binom{n}{k}$ éléments de poids $\mu_i = (v_0 p_0)^k (v_1 p_1)^{n-k}$ avec $k = 0, 1, 2, \dots, n$. La mesure à l'étape n est ainsi :

$$M_d = \sum_{i=0}^N v_i p_i^q l_i^d = \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_n} \prod_{k_i=0}^n (v_i p_i^q l_i^d)^{k_i} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=0}^n k_i = n \quad (58)$$

En se limitant de nouveau au cas de deux facteurs de réduction on obtient

$$\begin{aligned} M_d &= \sum_{i=0}^N \mu_i^q l_i^d = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (v_0 p_0^q l_0^d)^k (v_1 p_1^q l_1^d)^{n-k} \\ &= (v_0 p_0^q l_0^d + v_1 p_1^q l_1^d)^n \end{aligned} \quad (59)$$

Cette mesure demeure constante pour $d = D$ si

$$(v_0 p_0^q l_0^{\tau(q)} + v_1 p_1^q l_1^{\tau(q)}) = 1$$

Une résolution générale de cette équation n'est évidemment pas possible. Cependant ceci est possible pour des exemples simples comme déjà discuté plus haut par exemple $l_0 = (l_1)^2$ comme $l_0 = 0,25$ et $l_1 = 0,5$. On obtient alors

$$(v_0 p_0^q l_1^{2\tau(q)} + v_1 p_1^q l_1^{\tau(q)}) = 1 \quad (60)$$

En posant $x = l_1^{\tau(q)}$ on obtient

$$\begin{aligned} v_0 p_0^q x^2 + v_1 p_1^q x &= 1 \\ x &= \frac{-v_1 p_1^q \pm \sqrt{(v_1 p_1^q)^2 + 4 v_0 p_0^q}}{2 v_0 p_0^q} \end{aligned}$$

En choisissant comme exemple les valeurs $v_1=1, p_1=0,6, v_0=4, p_0=0,1$ on obtient

$$x = \frac{-0,6^q \pm \sqrt{(0,6^q)^2 + 4 \times 4 \times 0,1^q}}{2 \times 4 \times 0,1^q}$$

Ce qui permet d'obtenir les valeurs de $\tau(q)$:

$$\tau(q) = \frac{\ln x}{\ln l_1}$$

et les valeurs de $D(q)$:

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{1 - q} \quad (42)$$

Les deux fonctions sont représentées sur la figure 13.

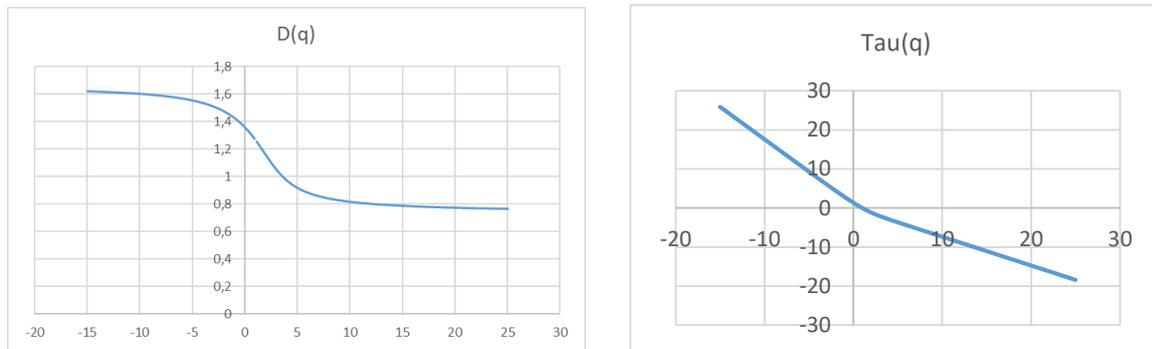


Figure 13 : Les courbes $\tau(q)$ et $D(q)$ pour les valeurs de l'exemple choisi.

7. Conclusion

En utilisant l'approche de Grassberger et Procaccia, élargie par Halsey il est possible de formaliser les tapis de Sierpinski multifractals. Rappelons que dans la modélisation finale deux approches sont combinées :

- La modélisation d'un tapis de Sierpinski multifractal qui combine plusieurs facteurs de réduction ;
- Une pondération des éléments par des facteurs normalisés qui correspond à une modélisation auto-affine. Contrairement à l'analyse du signal, le support de cette structure auto-affine est donc lacunaire sauf si considère la coupe le long des axes continues. Une formalisation équivalente serait évidemment possible pour des poussières de Fournier, seulement dans ce cas le support est à tous les endroits lacunaires.

La modélisation basée sur une telle approche permet de développer un modèle réaliste d'un système de peuplement dans ce sens qu'il contient des zones non peuplées et que les zones peuplées montrent une grande variété de concentrations locales de bâtiments.

Bibliographie

Abry, P., Jaffard, S., & Wendt, H. (2012). Irregularities and Scaling in Signal and Image Processing : Multifractal Analysis. *arXiv:1210.0482 [math]*.

<http://arxiv.org/abs/1210.0482>

Appelby, S. (1996). Multifractal characterization of the distribution pattern of the human population. *Geogr Anal*, 2.

Batty, M., & Longley, P. (1994). *Fractal Cities, a Geometry of Form and Function*.

Batty, M., & Xie, Y. (1996). Preliminary evidence for a theory of the fractal city. *Environment and Planning A*, 28, 1745-1762.

- Chen, Y., & Wang, J. (2013). Multifractal Characterization of Urban Form and Growth : The Case of Beijing. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 40(5), 884-904. <https://doi.org/10.1068/b36155>
- Chen, Y., & Zhou, Y. (2004). Multi-fractal measures of city-size distributions based on the three-parameter Zipf model. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(4), 793-805. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.02.059>
- Falconer, K. (2014). *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications* (3rd ed.).
- Feder, J. (1988). *Fractals*. Plenum Press.
- Frankhauser, P. (1994). *La fractalité des structures urbaines*. Anthropos.
- Frankhauser, P. (2015). From fractal urban pattern analysis to fractal urban planning concepts. In M. Helbich, J. Jokar Arsanjani, & M. Leitner, *Computational Approaches for Urban Environments, Geotechnologies and the Environment* (Springer International Publishing Switzerland, p. 13-48).
- Frankhauser, P. (2017). Between self-organization and planning. In C. Yamu, A. Poplin, O. Devisch, & G. De Roo, *The Virtual and the Real in Planning and Urban Design* (p. 112-135). Taylor & Francis (Routledge). <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01652439>
- Frankhauser, P. (2021a). Fractal geometry for analyzing and modelling urban patterns and planning sustainable cities. In *Handbook on Cities and Complexity*. Edward Elgar Publishing.
- Frankhauser, P. (2021b). Fractalopolis—A Fractal Concept for the Sustainable Development of Metropolitan Areas. In P. Sajous & C. Bertelle, *Complex Systems, Smart Territories and Mobility* (p. 15-50). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-59302-5_2
- Frankhauser, P., Tannier, C., Vuidel, G., & Houot, H. (2018). An integrated multifractal modelling to urban and regional planning. *Computers, Environment and Urban Systems*, 67(1), 132-146. <https://doi.org/10.1016/j.compenvurbsys.2017.09.011>
- Frankhauser, P., Tannier, C., Vuidel, G., & Houot, H. (2007). *Approche fractale de l'urbanisation—Méthodes d'analyse d'accessibilité et simulations multi-échelles*. 21. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00461655>
- Grassberger, P. (1983). Generalized dimensions of strange attractors. *Physics Letters A*, 97(6), 227-230. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(83\)90753-3](https://doi.org/10.1016/0375-9601(83)90753-3)
- Halsey, T. C., Meakin, P., & Procaccia, I. (1986). Scaling structure of the surface layer of diffusion-limited aggregates. *Physical Review Letters*, 56(8), 854-857.
- Hentschel, H. G. E., & Procaccia, I. (1983). The Infinite Number of Generalized Dimensions of Fractals and Strange Attractors. *Physica D*, 8(3).
- Jaffard, S., Lashermes, B., & Abry, P. (2007). Wavelet Leaders in Multifractal Analysis. In T. Qian, M. I. Vai, & Y. Xu (Éds.), *Wavelet Analysis and Applications* (p. 201-246). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7778-6_17
- Long, Y., & Chen, Y. (2021). *Multifractal scaling analyses of urban street network structure : The cases of twelve megacities in China*. *PLoS ONE* 16(2) : E0246925. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0246925>. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0246925>
- Reljin, I., Reljin, B., Pavlovic, I., & Rakocevic, I. (2000). Multifractal analysis of gray-scale images. *2000 10th Mediterranean Electrotechnical Conference. Information Technology and Electrotechnology for the Mediterranean Countries. Proceedings. MeleCon 2000 (Cat. No.00CH37099)*, 2, 490-493 vol.2. <https://doi.org/10.1109/MELCON.2000.879977>

- Sémécurbe, F. (2020). *Analyse de la distribution spatiale des implantations humaines : Apports et limites d'indicateurs multi-échelles et trans-échelles*. Université de Bourgogne-Franche-Comté.
- Shen, G. (2002). Fractal dimension and fractal growth of urbanized areas. *International Journal of Geographical Information Science*, 16, 437-519.
- Thomas, I., Frankhauser, P., & Badariotti, D. (2010). Comparing the fractality of European urban neighbourhoods : Do national contexts matter? *Journal of Geographical Systems*, 14(2), 189-208. <https://doi.org/10.1007/s10109-010-0142-4>
- Thomas, I., Frankhauser, P., & Biernacki, C. (2008). The morphology of built-up landscapes in Wallonia (Belgium) : A classification using fractal indices. *Landscape and Urban Planning*, 84, 99-115.
- Thomas, I., Frankhauser, P., & De Keersmaecker, M.-L. (2007). Fractal dimension versus density of the built-up surfaces in the periphery of Brussels. *Papers in Regional Science*, 86(2), 287-307.
- Thomas, I., Frankhauser, P., Frenay, B., & Verleysen, M. (2010). Clustering patterns of urban built-up areas with curves of fractal scaling behaviour. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 37, 942-954.