



HAL
open science

Sur les plus grands facteurs premiers inférieur à y d'entiers consécutifs

Zhiwei Wang

► **To cite this version:**

Zhiwei Wang. Sur les plus grands facteurs premiers inférieur à y d'entiers consécutifs. The Ramanujan Journal, 2019, 49 (3), pp.483-490. <10.1007/s11139-018-0110-z>. <hal-03286224>

HAL Id: hal-03286224

<https://hal.science/hal-03286224v1>

Submitted on 14 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

SUR LES PLUS GRANDS FACTEURS PREMIERS INFÉRIEUR À y D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS

ZHIWEI WANG (NANCY)

ABSTRACT. Let $P_y^+(n)$ denote the largest prime factor p of n with $p \leq y$. We prove that there exists a positive proportion of integers n such that $P_y^+(n) < P_y^+(n+1)$ for $y = x^\alpha$ when α is small. Especially, the proportion is larger than $1/4$ when α tends to 0, which improves our previous result.

1. INTRODUCTION

Ce travail est la continuation de notre article précédent [9] sur la fonction $P_y^+(n)$, qui est définie comme le plus grand facteur premier d'entier n inférieur à y :

$$P_y^+(n) := \max\{p \mid n : p \leq y\}$$

avec la convention que $P_y^+(n) = 1$ si le plus petit facteur premier de n est strictement supérieur à y . Cette fonction est étudiée initialement par Rivat [5] pour approcher la conjecture d'Erdős et Pomerance [3] sur les plus grands facteurs premiers de deux entiers consécutifs :

$$(1.1) \quad |\{n \leq x : P^+(n) < P^+(n+1)\}| \sim \frac{1}{2}x,$$

où $P^+(n)$ désigne le plus grand facteur premier d'entier n avec la convention que $P^+(1) = 1$. Rivat [5] montre que

Théorème (A). *Soient $(a, b(b+1)) = 1$ et*

$$f_y(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } P_y^+(n+1) > P_y^+(n), \\ -1 & \text{si } P_y^+(n+1) < P_y^+(n). \end{cases}$$

Alors l'inégalité

$$\left| \sum_{1 \leq an+b \leq x} f_y(an+b) \right| \ll_{a,b} x \exp\left(-\frac{\log x}{10 \log y}\right)$$

est valable uniformément pour

$$(1.2) \quad x \geq 3 \quad \text{et} \quad 3 \leq y \leq \exp\left(\frac{\log x}{100 \log \log x}\right).$$

En particulier, on a, dans le même domaine en (x, y) ,

$$(1.3) \quad |\{n \leq x : P_y^+(n) < P_y^+(n+1)\}| \sim \frac{1}{2}x$$

Pour $y = x$, la formule (1.3) est équivalente à la conjecture d'Erdős et Pomerance (1.1). Ainsi, il est intéressant d'étendre la domaine de y . Dans [9], nous démontrons le résultat suivant.

Date: 2 février 2019.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 11N25; Secondary 11K65.

Key words and phrases. largest prime factor, consecutive integers, positive proportion, sieve.

L'auteur est partiellement soutenu par une bourse de "China Scholarship Council".

Théorème (B). Soit $\alpha \in]0, 1]$. Il existe $C(\alpha) > 0$ tel que

$$(1.4) \quad |\{n \leq x : P_y^+(n) < P_y^+(n+1)\}| \geq \{C(\alpha) + o(1)\}x$$

pour $x \rightarrow \infty$ et $y = x^\alpha$.

Le Théorème (B) fournit des expressions explicites de $C(\alpha)$ admissibles. Cependant, on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} C(\alpha) = 0,$$

ce qui est contraire à l'intuition. Cela est dû au système de poids que nous utilisons qui est perfectible pour des petites valeurs de α . Dans cette note, nous corrigeons ce défaut par une méthode différente.

Théorème 1. Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{6}]$. Il existe une constante $C_0(\alpha) > 0$, définie en (3.8) ci-dessous, telle que

$$(1.5) \quad |\{n \leq x : P_y^+(n) < P_y^+(n+1)\}| \geq \{C_0(\alpha) + o(1)\}x$$

pour $x \rightarrow \infty$ et $y = x^\alpha$. En particulier, on a

$$(1.6) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} C_0(\alpha) \geq \frac{1}{4}.$$

On trouvera d'autres avancées pour la conjecture d'Erdős et Pomerance (1.1) par exemple dans les articles [2, 3, 7, 8, 9]. De plus, pour les plus grands facteurs premier de trois entiers consécutifs, on peut voir [1, 3, 7, 9].

Remerciements. Ce travail a été réalisé sous la direction de mes directeurs de thèse Cécile Dartyge et Jie Wu. Je les remercie vivement pour les nombreuses suggestions cruciales qu'ils ont proposées dans l'élaboration de ce travail.

2. LEMMES FONDAMENTAUX

Nous rappelons tout d'abord un résultat d'Iwaniec sur le crible linéaire. Nous énonçons ici seulement la minoration car seule celle-ci sera utilisée dans cet article.

Soient \mathcal{A} une suite finie d'entiers, \mathcal{P} un ensemble de nombres premiers, $z \geq 2$ un nombre réel, d un entier sans facteur carré dont les facteurs premiers appartiennent à \mathcal{P} . Notons

$$\mathcal{A}_d := \{a \in \mathcal{A} : d \mid a\}, \quad P_{\mathcal{P}}(z) := \prod_{p < z, p \in \mathcal{P}} p.$$

On souhaite évaluer

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) := |\{a \in \mathcal{A} : (a, P_{\mathcal{P}}(z)) = 1\}|.$$

On suppose que $|\mathcal{A}_d|$ vérifie une formule de la forme

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{w(d)}{d}X + r(\mathcal{A}, d) \quad \text{pour } d \mid P_{\mathcal{P}}(z),$$

où X est une approximation de $|\mathcal{A}|$ indépendante de d , w une fonction multiplicative vérifiant $0 < w(p) < p$ pour $p \in \mathcal{P}$, $w(d)d^{-1}X$ un terme principal et $r(\mathcal{A}, d)$ un terme d'erreur que l'on espère petit en moyenne sur d . De plus, on définit

$$V(z) := \prod_{p < z, p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right).$$

On a ainsi [4]

Lemme 2.1. *On suppose qu'il existe une constante $L \geq 2$ telle que*

$$\prod_{u \leq p < v} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right)^{-1} \leq \frac{\log v}{\log u} \left(1 + \frac{L}{\log u}\right)$$

pour tout $v > u \geq 2$. Alors pour $D \geq z \geq 2$, $s = \log D / \log z$, on a

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) > XV(z) \left\{ f(s) + O\left(\frac{1}{(\log D)^{1/3}}\right) \right\} - \sum_{d < D, d|P(z)} |r(\mathcal{A}, d)|,$$

où $f(s)$ est la fonction monotone croissante définie comme la solution continue du système de l'équation différentielle aux différences

$$\begin{aligned} F(s) &= 2e^\gamma/s, & f(s) &= 0, & 0 < s \leq 2, \\ (sF(s))' &= f(s-1), & (sf(s))' &= F(s-1), & s \geq 2. \end{aligned}$$

Remarque. $f(s)$ vérifie $f(s) = 0$ pour $0 < s \leq 2$ et $f(s) > 0$ pour $s > 2$. En particulier, on a

$$f(s) = 1 + O(e^{-s}) \quad s \rightarrow \infty.$$

Pour $z < y \leq x$, on définit

$$(2.1) \quad P(y, z) := \prod_{z < p \leq y} p, \quad S(x; y, z) := \{n \leq x : (n, P(y, z)) = 1\}$$

l'ensemble des entiers sans facteur premier dans l'intervalle $]z, y]$ et n'excédant pas x . On note son cardinal

$$(2.2) \quad \Psi_0(x; y, z) := |S(x; y, z)|.$$

Alors $\Psi_0(x; y, z)$ est évaluée par le lemme suivant (voir [6, Exercice 299]).

Lemme 2.2. *On a*

$$\Psi_0(x; y, z) = \vartheta_0(\lambda, u)x \{1 + O(1/\log z)\}$$

uniformément pour $y \geq z \geq 2$ et $x \geq yz$, où $u := (\log x)/\log y$, $\lambda := (\log z)/\log y$ et

$$(2.3) \quad \vartheta_0(\lambda, u) := \rho(u/\lambda) + \int_0^u \rho(t/\lambda) \omega(u-t) dt$$

avec la convention $\vartheta_0(0, u) = 0$. La fonction de Dickman $\rho(u)$ est définie comme l'unique solution continue de l'équation différentielle aux différences

$$(2.4) \quad \begin{cases} \rho(u) = 1 & \text{si } 0 \leq u \leq 1, \\ u\rho'(u) = -\rho(u-1) & \text{si } u > 1. \end{cases}$$

La fonction de Buchstab $\omega(u)$ est définie comme la solution continue du système

$$\begin{cases} u\omega(u) = 1 & \text{si } 1 \leq u \leq 2, \\ (u\omega(u))' = \omega(u-1) & \text{si } u > 2. \end{cases}$$

De plus, nous prolongeons $\omega(u)$ par 0 pour $u < 1$.

Le troisième lemme [9, Proposition 1] est le théorème de type Bombieri-Vinogradov pour $S(x; y, z)$.

Lemme 2.3. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $A > 0$, il existe une constante $B = B(A) > 0$ telle que*

$$\sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{t \leq x} \max_{(a, q)=1} \left| \sum_{\substack{n \in S(t; y, z) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in S(t; y, z) \\ (n, q)=1}} 1 \right| \ll_{A, \varepsilon} \frac{x}{(\log x)^A}$$

a lieu uniformément pour

$$(2.5) \quad 2 \leq z \leq y \leq x \quad \text{et} \quad \exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leq y \leq x,$$

où $\varphi(q)$ est la fonction d'Euler.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Pour $\alpha \in]0, \frac{1}{6}]$, soient $K \in \mathbb{N}^*$ et $\beta, \delta \in \mathbb{R}^{+*}$ trois paramètres vérifiant les conditions :

$$(3.1) \quad K \leq (2\alpha)^{-1} - 2, \quad 0 < \beta < \alpha, \quad (2\alpha)^{-1} - K \leq \delta \leq (2\alpha)^{-1} - \alpha^{-1}\beta K.$$

Posons

$$y = x^\alpha, \quad z = x^\beta, \quad \omega(n; y, z) := \sum_{p|n, z < p \leq y} 1.$$

Différente de [8] et [9], notre point de départ est l'inégalité suivante :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 &\geq \sum_{k \leq K} \sum_{n \in S(x; y, z), \omega(n+1; y, z) = k} 1 \\ &\geq \sum_{k \leq K} \sum_{z < p_1 < \dots < p_k \leq y} \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ p_1 \dots p_k | (n+1) \text{ tel que } (n+1)/(p_1 \dots p_k) \notin S(x; y, z)}} 1 \\ &\geq \sum_{k \leq K} \sum_{z < p_1 < \dots < p_k \leq y} S(\mathcal{A}(b_k); \mathcal{P}, y), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &:= \{p : p > z\}, \quad b_k := p_1 \dots p_k, \\ \mathcal{A}(b_k) &:= \{(n+1)/b_k : n \in S(x; y, z) \text{ et } n+1 \equiv 0 \pmod{b_k}\}. \end{aligned}$$

Remarque. Dans (3.2), on aurait pu utiliser la minoration

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 \geq \sum_{k \leq K} \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ \omega(n+1; y, z) = k}} 1 + \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ \omega(n+1; y, z) \geq K+1}} 1$$

et minorer la deuxième somme du membre de droite de la même façon que dans [9] à l'aide des Lemme 2.2 et Lemme 2.3. Nous avons choisi de ne pas tenir compte de ce deuxième terme car sa contribution est très petite par rapport au premier terme lorsque α est petit.

Pour $d \mid P(y, z)$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_d(b_k)| &= |\{(n+1)/b_k : n \in S(x; y, z), n+1 \equiv 0 \pmod{b_k d}\}| \\ &= \frac{1}{\varphi(b_k d)} \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ (n, b_k d) = 1}} 1 + E(S(x; y, z); -1, b_k d), \end{aligned}$$

où

$$(3.3) \quad E(S(x; y, z); -1, b_k d) := \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ n \equiv -1 \pmod{b_k d}}} 1 - \frac{1}{\varphi(b_k d)} \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ (n, b_k d) = 1}} 1.$$

En remarquant que pour $n \in S(x; y, z)$ on a automatiquement $(n, b_k d) = 1$, on a donc

$$(3.4) \quad |\mathcal{A}_d(b_k)| = \frac{w(d)}{d} X + r(\mathcal{A}(b_k), d)$$

avec

$$X = \frac{\Psi_0(x; y, z)}{\varphi(b_k)}, \quad w(d) = \frac{\varphi(b_k d)}{\varphi(b_k d)} \cdot \frac{1}{d}, \quad r(\mathcal{A}(b_k), d) = E(S(x; y, z); -1, b_k d).$$

En appliquant le Lemme 2.1 avec $D = (x^{1/2}(\log x)^{-B})/b_k$, on obtient

$$S(\mathcal{A}(b_k); \mathcal{P}, y) \geq X \prod_{p \mid P(y, z)} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right) \left\{ f(\delta) + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log x}}\right) \right\} - \sum_{\substack{d < D \\ d \mid P(y, z)}} |r(\mathcal{A}(b_k), d)|.$$

En reportant dans (3.2), il suit

$$(3.5) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 \geq S_1 - S_2,$$

où

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{f(\delta) + o(1)\} \sum_{k \leq K} \sum_{z < p_1 < \dots < p_k \leq y} \frac{\Psi_0(x; y, z)}{\varphi(b_k)} \prod_{p \mid P(y, z)} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right), \\ S_2 &:= \sum_{k \leq K} \sum_{z < p_1 < \dots < p_k \leq y} \sum_{d < D, d \mid P(y, z)} |E(S(x; y, z); -1, b_k d)|. \end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 2.3 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut montrer

$$(3.6) \quad S_2 \ll_K \sum_{q \leq x^{1/2}(\log x)^{-B}} \tau_{K+1}(q) |E(S(x; y, z); -1, q)| \ll_K \frac{x}{(\log x)^2},$$

où $\tau_k(n) := \sum_{n_1 \dots n_k = n} 1$.

Il reste à évaluer le terme principal S_1 . D'après la formule de Mertens, on a

$$\begin{aligned} \prod_{p|P(y,z)} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right) &= \prod_{\substack{p|p_1 \cdots p_k \\ z < p \leq y}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p|p_1 \cdots p_k \\ z < p \leq y}} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \\ &= \prod_{1 \leq j \leq k} \frac{(p_j - 1)^2}{p_j(p_j - 2)} \prod_{z < p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \\ &= \frac{\varphi(p_1 \cdots p_k)}{p_1 \cdots p_k} \cdot \frac{\log z}{\log y} \left\{1 + O_K\left(\frac{1}{\log z}\right)\right\}. \end{aligned}$$

En reportant dans la définition de S_1 , le Lemme 2.2 et le théorème des nombres premiers nous permettent d'en déduire que

$$\begin{aligned} (3.7) \quad S_1 &= \{f(\delta) + o_K(1)\} \sum_{k \leq K} \sum_{z < p_1 < \cdots < p_k \leq y} \frac{\Psi_0(x; y, z)}{p_1 \cdots p_k} \cdot \frac{\log z}{\log y} \\ &= \{1 + o(1)\} x f(\delta) \vartheta_0\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\beta}{\alpha} \sum_{k \leq K} \frac{1}{k!} \left(\log \frac{\alpha}{\beta}\right)^k. \end{aligned}$$

En reportant (3.6) et (3.7) dans (3.5), on obtient (1.5) avec

$$(3.8) \quad C_0(\alpha) := \max_{\substack{K, \beta, \delta \\ \text{vérifiant (3.1)}}} \left\{ f(\delta) \vartheta_0\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\beta}{\alpha} \sum_{k \leq K} \frac{1}{k!} \left(\log \frac{\alpha}{\beta}\right)^k \right\} > 0.$$

Enfin, nous montrons (1.6). D'abord, nous observons que

$$(3.9) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha} \sum_{k \leq K} \frac{1}{k!} \left(\log \frac{\alpha}{\beta}\right)^k = 1 - \frac{\beta}{\alpha}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} (3.10) \quad \vartheta_0\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) &= \rho\left(\frac{1}{\beta}\right) + \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{1/\beta} \rho(v) \omega\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta v}{\alpha}\right) dv \\ &> \frac{\beta}{\alpha} \min_{(1-\beta/\alpha)/\alpha \leq t \leq 1/\alpha} \omega(t) \cdot \int_0^{1/\alpha} \rho(v) dv. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = e^{-\gamma}, \quad \int_0^\infty \rho(v) dv = e^\gamma,$$

et en prenant

$$\beta = \alpha/2, \quad K = [1/(2\alpha)] - 2, \quad \delta = (2\alpha)^{-1} - \frac{3}{4}K,$$

les formules (3.9), (3.10) et (3.8) nous permettent de déduire (1.6).

RÉFÉRENCES

- [1] A. Balog. On triplets with descending largest prime factors. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 38 :45–50, 2001.
- [2] R. de la Bretèche, C. Pomerance, and G. Tenenbaum. Products of ratios of consecutive integers. *Ramanujan J.*, 9 :131–138, 2005.

- [3] P. Erdős and C. Pomerance. On the largest prime factors of n and $n+1$. *Aequationes Math.*, 17(2-3) :311–321, 1978.
- [4] H. Iwaniec. Rosser’s sieve. *Acta Arith.*, 36 :171–202, 1980.
- [5] J. Rivat. On pseudo-random properties of $P(n)$ and $P(n+1)$. *Period. Math. Hungar.*, 43 :121–136, 2001.
- [6] G. Tenenbaum and J. Wu. *Théorie analytique et probabiliste des nombres, 307 exercices corrigés*. 2014.
- [7] J. Teräväinen. On binary correlations of multiplicative functions. *Forum Math. Sigma*, 6 :e10, 41 pp., 2018.
- [8] Z. W. Wang. On the largest prime factors of consecutive integers in short intervals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145(8) :3211–3220, 2017.
- [9] Z. W. Wang. Sur les plus grands facteurs premiers d’entiers consécutifs. *Mathematika*, 64(2) :343–379, 2018.

1. SCHOOL OF MATHEMATICS, SHANDONG UNIVERSITY, JINAN, 250100 SHANDONG, CHINA

2. INSTITUT ÉLIE CARTAN DE LORRAINE, UNIVERSITÉ DE LORRAINE, UMR 7502, 54506 VANDŒUVRE-LÈS-NANCY, FRANCE

Email address: zhiwei.wang@univ-lorraine.fr