



**HAL**  
open science

# Une généralisation du critère de Boulier – Buchberger pour le calcul des ensembles caractéristiques d'idéaux différentiels

Amir Hashemi, François Ollivier

## ► To cite this version:

Amir Hashemi, François Ollivier. Une généralisation du critère de Boulier – Buchberger pour le calcul des ensembles caractéristiques d'idéaux différentiels. 2021. hal-03277968v2

**HAL Id: hal-03277968**

**<https://hal.science/hal-03277968v2>**

Preprint submitted on 28 Oct 2021 (v2), last revised 6 Apr 2022 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une généralisation du critère de Boulier – Buchberger pour le calcul des ensembles caractéristiques d'idéaux différentiels

A generalization of the Boulier – Buchberger criterion  
for the computation of characteristic sets  
of differential ideals

Amir HASHEMI

Department of Mathematical Sciences,  
Isfahan University of Technology,  
Isfahan, 84156-83111,  
Iran

Amir.Hashemi@iut.ac.ir

François OLLIVIER

CNRS : LIX, UMR 7161  
École polytechnique  
91128 Palaiseau Cedex  
France

francois.ollivier@lix.polytechnique.fr

Juillet, 2021

**Résumé** Nous généralisons l'analogie du premier critère de Buchberger, dû à Boulier *et al.*, pour détecter les réductions inutiles de  $S$ -polynômes, lors des calculs d'ensembles caractéristiques d'idéaux différentiels. La version primitive suppose des polynômes linéaires; le résultat est ici étendu à un produit de polynômes différentiels linéaires, appliqués à un même polynôme différentiel, arbitraire.

**Abstract.** We generalize the analog of Buchberger's first criterion, stated by Boulier *et al.*, for detecting useless  $S$ -polynomials reductions in the computation of characteristic sets of differential ideals. The original version assumes linear polynomials; this result is here extended to a product of linear differential polynomials depending of the same arbitrary differential polynomial.

Classification AMS : 12H05

**Mots-clés :** Algèbre différentielle, Ensembles caractéristique, Algorithme Rosenfeld–Gröbner, Critère de Boulier–Buchberger

**Keywords:** Differential algebra, Characteristic sets, Rosenfeld–Gröbner algorithm, Boulier–Buchberger criterion

## Abridged English version

Boulier *et al.* [2, Prop. 4 p. 92] gave a differential analog of Buchberger's first criterion [3], stating that if leading monomials of two polynomials have no common factor, then their S-polynomial will be reduced to zero by these two polynomials. The original differential version requires linear polynomials, a result that was extended to products of linear factor in Hashemi and Touraji [8], without a complete proof. In this paper we prove a more general statement, where the linear factors are no more assumed to depend on the same variable, but only on the same differential polynomial  $z$ .

We consider the differential algebra  $\mathcal{R} := \mathcal{F}\{X\}$ , where  $X := \{x_1, \dots, x_n\}$  and  $\mathcal{F}$  is a differential field of characteristic 0, with a set of mutually commuting derivations  $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ . We denote by  $\Theta$  the commutative monoid generated by  $\Delta$  and  $Y := \Theta X$  is the set of derivatives. The leading derivative of a differential polynomial  $P \in \mathcal{R}$  is written  $v_P$  and  $[1, k] := \{1, \dots, k\} \subset \mathbf{N}$ . Let  $D \subset \Delta$ , we denote by  $\mathcal{F}_D$  the differential field restricted to derivations  $\delta \in D$  and by  $\mathcal{R}_D := \mathcal{F}_D\{x\}$  the corresponding differential ring. In the same way,  $\Theta_D$  is the commutative monoid generated by  $D$  and  $\mathbf{K}_D \subset \mathcal{F}$  the field of constants for derivations in  $D$ .

We refer to Kolchin [9] and Boulier *et al.* [2] for basic definitions and notations of differential algebra. We denote by  $I_{P_i}$  or  $I_i$  and  $S_{P_i}$  or  $S_i$  the initial and separant of a polynomial  $P_i$ , by  $I_{\mathcal{A}}$  (resp.  $S_{\mathcal{A}}$ ) the product of initials (resp. separants) of polynomials in a set  $\mathcal{A}$  and  $H_{\mathcal{A}} := I_{\mathcal{A}}S_{\mathcal{A}}$ . The notations  $(\Sigma)_R$  or  $[\Sigma]_R$  denote the algebraic or differential ideals generated by  $\Sigma$  in the ring  $R$ .

We have then this first generalization of Boulier's theorem, using linear operators  $\theta_i - L_i$ , applied to a differential polynomial  $z$ , that is only required not to belong to the ground field.

**THEOREM 1.** — *Let  $\Delta_i \subset \Delta$ ,  $i = 1, 2, 3$ , with  $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$  for  $i \neq j$  and  $P_i \in \mathcal{R}$ ,  $i = 1, 2$ . Let  $z \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{F}$  and let  $\prec$  be an admissible order on derivatives, such that  $v_{P_i} = \theta_i v_z$ , with  $1 \neq \theta_i \in \Theta_{\Delta_i}$ . We further assume that  $P_i = (\theta_i - L_i)z$ , where  $L_1 L_2 = L_2 L_1$  and  $L_i \in \mathbf{K}_{\Delta_j}[\Delta_i \cup \Delta_3]$ , where  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ . Under those hypotheses, using  $\prec$  to define reduction, we have the following propositions.*

*i) The polynomial  $\text{S-Pol}(P_1, P_2) = \theta_2 P_1 - \theta_1 P_2$  is reduced to 0 by  $\{P_1, P_2\}$ , using differential standard bases reduction (cf. [4, 10]).*

*ii) It is reduced to 0 using characteristic sets pseudo-reduction.*

*iii) If  $z$  is linear, the set  $\{P_1, P_2\}$  is a differential standard basis of the prime differential ideal  $[P_1, P_2]$ .*

*iv) The set  $\{P_1, P_2\}$  is a characteristic set of the prime differential ideal  $[P_1, P_2] : S_z^\infty = [A_1, A_2] : S_A^\infty$ , where  $A_i$  is the factor of  $P_i$ , the main derivative of which is  $\theta_i v_z$ .*

The next lemma extends the assertion ii) and iv) above to square-free products.

**Lemma 2.** — *Let  $P_{1,k}$ , for  $1 \leq k \leq r_1$ , and  $P_{2,k}$ , for  $1 \leq k \leq r_2$ , be two finite families of irreducible polynomials, of degree 1 in their leading derivatives and such that the  $P_{1,k}$  (resp.  $P_{2,k}$ ) have the same leading derivative  $v_1$  (resp.  $v_2$ ) and do not depend on  $v_2$*

(resp.  $v_1$ ). We assume that the prime differential ideals defined by those polynomials (according to th. 1 iv) are mutually different. Let  $Q_i := \prod_{k=1}^{r_1} P_{1,k}$ , for  $i = 1, 2$ , and  $Q := \{Q_1, Q_2\}$ .

i) Under those hypotheses, the following propositions are equivalent:

- a) for all  $(j_0, k_0) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$ ,  $S\text{-Pol}(P_{1,j_0}, P_{2,k_0})$  is pseudo-reduced to 0 by  $\{P_{1,j_0}, P_{2,k_0}\}$ ;  
b)  $S\text{-Pol}(Q_1, Q_2)$  is pseudo-reduced to 0 by  $Q$ .

ii) If a) or b) stands, then  $Q$  is a characteristic set and a characteristic representation of  $[Q] : H_Q^\infty = \bigcap_{j=1}^{r_1} \bigcap_{k=1}^{r_2} [P_{1,j}, P_{2,k}] : (I_{1,j} I_{2,k})^\infty$ .

When powers may appear in the products, the following technical lemma is needed. For short, we use the notation  $\partial_y := \partial/\partial y$ .

*Lemma 3.* — Let  $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$  be a prime ideal. We denote by  $\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{F}}$  the module of Kähler differentials and by  $d$  the canonical derivation from  $\mathcal{R}$  to  $\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{F}}$ .

i) For all  $r \in \mathbf{N}$  and  $Q \in \mathcal{P}^r$ , we have:  $da \in \mathcal{P}^{r-1} \Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{F}}$ .

ii) Let  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_s\}$  be a characteristic set of a prime ideal  $\mathcal{P}$ , for an ordering  $\prec$  and  $d_i \in \mathbf{N}$ , for  $1 \leq i \leq s$ , arbitrary integers.

a) For all  $A \in \mathcal{R}$ , all  $d \in \mathbf{N}$  and all  $(\tau, \theta) \in \Theta^2$ , we have  $\partial_{\tau\theta} A^d \in [A^{d-1}]$ .

b) If  $Q \in \mathcal{Q} := [A_i^{d_i} | 1 \leq i \leq s] : H_{\mathcal{A}}^\infty$ , we have:  $dQ = \sum_{i=1}^s \sum_{k \in \mathbf{N}} c_{i,k} dA_i^{(k)}$ , with  $c_{i,k} \in [A_i^{\bar{d}_i} | 1 \leq i \leq s] : H_{\mathcal{A}}^\infty$ , where  $\bar{d}_i := d_i$  if  $i \neq k$  and  $\bar{d}_i := d_i - 1$  if  $i = k$ .

c) With the same notations as in b), we further denote by  $\Xi$  the set of derivatives appearing in all the differential polynomials  $A_i$ , for  $1 \leq i \leq s$  and different from the leading derivatives  $v_{A_j}$ , for all  $1 \leq j \leq s$ . If the  $A_i$  are all linear in their leading derivatives  $v_{A_i}$  and if  $I_i \in \mathcal{F}[\Xi]$ , we have the equality  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}_0 = (A_i^{d_i} | 1 \leq i \leq s) : I_{\mathcal{A}}^\infty$ , where  $\mathcal{R}_0 := \mathcal{F}[\Xi, v_{1_1}, \dots, v_{A_s}]$ . In this case,  $\{A_i^{d_i} | 1 \leq i \leq s\}$  is a characteristic set of  $[A_i^{d_i} | 1 \leq i \leq s] : H_{\mathcal{A}}^\infty$ .

Using these two lemmas, we can prove the main theorem.

*THEOREM 4.* — Let  $\bar{Q}_i = \prod_{k=0}^{r_i} P_{i,k}^{d_{i,k}}$  and  $Q_i = \prod_{k=1}^{r_i} P_{i,k}^{d_{i,k}}$ ,  $i = 1, 2$ , where for any couple  $(P_{1,k}, P_{2,k'})$ ,  $(k, k') \in [1, r_1] \times [1, r_2]$ , the hypotheses of th. 1 are satisfied for the same  $\theta_i z$ , and  $v_{P_{i,0}} \prec \theta_i v_z$ ,  $i = 1, 2$ . We further assume that the  $P_{i,k}$  are mutually different. Under these hypotheses, we have the following assertions.

i) If  $d_{i,k} = 1$ ,  $i = 1, 2$  and  $1 \leq k \leq r_i$ , then  $\bar{Q} := \{\bar{Q}_1, \bar{Q}_2\}$  is a characteristic set of  $[\bar{Q}] : S_{\bar{Q}}^\infty = [Q] : S_Q^\infty$ .

ii) For any  $d_{i,k}$ ,  $T := S\text{-Pol}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = S_{\bar{Q}_2} \theta_2 \bar{Q}_1 - S_{\bar{Q}_1} \theta_1 \bar{Q}_2$  is pseudo-reduced to 0 by  $Q$ .

## Introduction

Boulier *et al.* [2, prop. 4 p. 92] ont donné un analogue différentiel du premier critère de Buchberger [3], qui affirme que si les monômes de tête de deux polynômes sont sans facteur commun, alors le S-polynôme correspondant sera réduit à zéro. Une généralisation de ce résultat au cas de produits

de facteurs linéaires a été énoncée par Hashemi et Touraji [8]. Nous donnons ici une preuve complète dans le cas où ces facteurs ne dépendent pas uniquement d'une même variable, mais d'un même polynôme arbitraire  $z$ .

Dans la suite, on considère un anneau de polynômes différentiels  $\mathcal{R} := \mathcal{F}\{X\}$ , où  $X := \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $\mathcal{F}$  est un corps différentiel de caractéristique 0, muni d'un ensemble de dérivations  $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$  commutant entre elles. On note  $\Theta$  le monoïde commutatif engendré par  $\Delta$  et  $Y := \Theta X$  l'ensemble des dérivées. La dérivée de tête d'un polynôme  $P \in \mathcal{R}$  est notée  $v_P$ , tandis que  $S_{P_i}$  ou  $S_i$  et  $I_{P_i}$  ou  $I_i$  désignent respectivement le séparant et l'initial de  $P_i$ , avec  $S_A := \prod_{A \in \mathcal{A}} S_A$ ,  $I_A := \prod_{A \in \mathcal{A}} I_A$ ,  $H_A := S_A I_A$ , et  $[1, k] \subset \mathbf{N}$  est l'ensemble  $\{1, \dots, k\}$ . Les notations  $(\Sigma)_R$  ou  $[\Sigma]_R$  désignent les idéaux algébrique et différentiel engendrés par  $\Sigma$  dans l'anneau  $R$ .

Nous renvoyons à Kolchin [9] et Boulier *et al.* [2] pour les définitions de base en algèbre différentielle. Nous aurons aussi besoin de la définition suivante.

**DÉFINITION 5.** — Soit  $D \subset \Delta$ , on note  $\mathcal{F}_D$  le corps différentiel restreint aux dérivations  $\delta \in D$  et  $\mathcal{R}_D = \mathcal{F}_D\{x\}$  l'anneau différentiel correspondant. On définit de même  $\Theta_D$ , le monoïde commutatif engendré par  $D$ . On désigne par  $\mathbf{K}_D \subset \mathcal{F}$  le corps de constantes pour les dérivations de  $D$ .

## 1 Une première généralisation

On peut énoncer le théorème suivant, qui est une généralisation facile de l'analogue du premier critère de Buchberger de Boulier *et al.* [2, prop. 4 p. 92], en passant du cas où les  $P_i$  sont linéaires à celui où ils sont obtenus en appliquant un opérateur linéaire  $\theta_i - L_i$  à un même polynôme différentiel  $z$ , que l'on suppose uniquement ne pas appartenir au corps de base, et qui peut donc être non linéaire. Par ailleurs, on n'a pas besoin de supposer que les opérateurs  $L_i$  sont à coefficients constants, mais seulement les hypothèses minimales pour obtenir le résultat, incluant la commutation de  $L_1$  et  $L_2$ , toujours acquise si  $\Delta_3 = \emptyset$ .

**THÉORÈME 6.** — Soient  $\Delta_i \subset \Delta$ ,  $i = 1, 2, 3$ , tous deux à deux disjoints. On considère deux polynômes  $P_i \in \mathcal{R}$ ,  $i = 1, 2$ . Soit  $z \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{F}$ , et  $\prec$  un ordre sur les dérivées tel que  $v_{P_i} = \theta_i v_z$ , avec  $1 \neq \theta_i \in \Theta_{\Delta_i}$ ,  $i = 1, 2$ . On suppose en outre que  $P_i = (\theta_i - L_i)z$ , où  $L_1 L_2 = L_2 L_1$  et  $L_i \in \mathbf{K}_{\Delta_j}[\Delta_i \cup \Delta_3]$ , pour  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ .

i) Sous ces hypothèses, pour tout ordre sur les monômes de  $\mathcal{R}$  compatible avec  $\prec$ , le S-polynôme

$$\text{S-Pol}(P_1, P_2) = \theta_2 P_1 - \theta_1 P_2$$

est réduit à 0 par  $\{P_1, P_2\}$  au sens des bases standards différentielles (cf. [4, 10]).

ii) Il est réduit à 0 au sens des ensembles caractéristiques.

iii) Si  $z$  est linéaire, l'ensemble  $\{P_1, P_2\}$  est une base standard de l'idéal différentiel premier  $[P_1, P_2]$ .

iv) L'ensemble  $\{P_1, P_2\}$  est un ensemble caractéristique de l'idéal différentiel premier  $[P_1, P_2] : S_z^\infty = [A_1, A_2] : S_A^\infty$ , où  $A_i$  désigne le facteur irréductible de  $P_i$  dont la dérivée dominante est  $\theta_i v_z$ .

PREUVE. — i) Ce polynôme est égal à  $(\theta_2 L_1 - \theta_1 L_2)z = (L_1 \theta_2 - L_2 \theta_1)z$ , car, avec nos hypothèses,  $\theta_1$  et  $L_2$ ,  $\theta_2$  et  $L_1$  commutent. La réduction du monôme de tête de  $L_1 \theta_2$  par  $P_2$  remplace  $\theta_2 z$  par  $L_2 z$  et inversement, en permutant les indices. On n'a donc pas besoin de multiplier par  $S_z$ ; c'est une réduction au sens des bases standards. On obtient donc  $(L_1 L_2 - L_2 L_1)z = 0$ , puisque  $L_1$  et  $L_2$  commutent.

ii) Est une conséquence directe de i).

iii) Aussi, puisque le seul S-polynôme possible dans le cas linéaire est réduit à 0 (Cf. [10, th. 5]). La linéarité entraîne la primalité de l'idéal.

iv) Aussi, en utilisant le lemme de Rosenfeld [2, th. 3] et en remarquant que  $I_{P_1} = S_{P_1} = I_{P_2} = S_{P_2} = S_z$ . On peut alors évidemment remplacer  $P_i$  par  $A_i$  puisque les deux diffèrent par un facteur qui ne contient pas la dérivée dominante, et divise donc le séparant. Comme les  $P_i$  sont de degré 1 en leurs dérivées dominantes, les  $A_i$  sont absolument irréductibles, ce qui entraîne la primalité de  $(A) : S_A^\infty$  et de l'idéal différentiel  $[A] : S_A^\infty$ . ■

Exemple 7. — On considère le corps  $\mathcal{F} := \mathbf{Q}(y_1, y_2, y_3)$ , muni des dérivations  $\delta_i := \partial/\partial y_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$ . Soient  $\Delta_1 := \{\delta_1\}$ ,  $\Delta_2 := \{\delta_2\}$ ,  $\Delta_3 := \{\delta_3\}$ ,  $\theta_1 = \delta_1^3$ ,  $\theta_2 = \delta_2^3$ ,  $L_1 = (\delta_1 - y_1)(\delta_3 - y_3)$  et  $L_2 = (\delta_2 - y_2)(\delta_3 - y_3)$ . On se place sur  $\mathcal{R} := \mathcal{F}\{x\}$ , muni de l'ordre sur les dérivées qui utilise d'abord l'ordre total de dérivation, puis l'ordre lexicographique avec  $\delta_1 > \delta_2 > \delta_3$ .

En posant  $z = x$ , on a  $P_1 = \delta_1^3 x + \delta_1 \delta_3 x - y_3 \delta_1 x - y_1 \delta_3 x + y_1 y_3 x$  et  $P_2 = \delta_2^3 x + \delta_2 \delta_3 x - y_3 \delta_2 x - y_2 \delta_3 x + y_2 y_3 x$ . On a alors

$$\delta_2^3 P_1 - \delta_1^3 P_2 = (\delta_1 - y_1)(\delta_3 - y_3) \delta_2^3 x - (\delta_2 - y_2)(\delta_3 - y_3) \delta_1^3 x,$$

qui est réduit par  $\{P_1, P_2\}$  à

$$(\delta_1 - y_1)(\delta_3 - y_3)(\delta_2 - y_2)(\delta_3 - y_3)x - (\delta_2 - y_2)(\delta_3 - y_3)(\delta_1 - y_1)(\delta_3 - y_3)x = 0.$$

Dans ce cas,  $\{P_1, P_2\}$  est un ensemble caractéristique et aussi une base standard de l'idéal qu'il engendre.

Le calcul est semblable en prenant, e.g.  $z = x^3$ , mais il devient indispensable de multiplier par le séparant  $3x^2$  de  $x^3$ , qui est aussi le séparant et l'initial de  $\delta_i x^3$  et  $P_i$ , pour  $i = 1, 2$ , afin d'effectuer la réduction.

## 2 Le cas des produits

On peut énoncer le lemme général suivant, qui est essentiellement suffisant pour établir notre théorème principal 12 dans le cas de produits sans carrés, c'est-à-dire le i) de ce théorème.

*Lemme 8.* — Soient  $P_{1,k}$ , pour tout  $1 \leq k \leq r_1$  et  $P_{2,k}$ , pour tout  $1 \leq k \leq r_2$  deux familles finies de polynômes irréductibles et de degré 1 en leurs dérivées de tête. Les  $P_{1,k}$  (resp.  $P_{2,k}$ ) ont la même dérivée de tête  $v_1$  (resp.  $v_2$ ) et ne dépendent pas de  $v_2$  (resp.  $v_1$ ). On suppose que les idéaux différentiels premiers dont ces polynômes sont les ensembles caractéristiques (par le th. 6 iv) sont tous différents, ce qui revient à dire que leurs facteurs irréductibles contenant la dérivée de tête sont différents. On note  $Q_i := \prod_{k=1}^{r_i} P_{1,k}$ , pour  $i = 1, 2$  et  $Q := \{Q_1, Q_2\}$ .

i) Sous ces hypothèses, les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) pour tout  $(j_0, k_0) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$ ,  $\text{S-Pol}(P_{1,j_0}, P_{2,k_0})$  est pseudo-réduit à 0 par  $\{P_{1,j_0}, P_{2,k_0}\}$  ;  
b)  $\text{S-Pol}(Q_1, Q_2)$  est pseudo-réduit à 0 par  $\{Q_1, Q_2\}$ .

ii) Si a) ou b) est vérifiée, alors  $Q$  est un ensemble caractéristique et une représentation caractéristique de

$$[Q] : H_Q^2 = \bigcap_{j=1}^{r_1} \bigcap_{k=1}^{r_2} [P_{1,j}, P_{2,k}] : (I_{1,j} I_{2,k})^\infty. \quad (1)$$

*PREUVE.* — i) a)  $\implies$  b). — Pour tout couple  $(i_0, j_0) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$ , d'après [2, th. 3],  $\{P_{1,j_0}, P_{2,k_0}\}$  est un ensemble caractéristique de l'idéal  $[P_{1,j_0}, P_{2,k_0}] : (I_{1,j_0} I_{2,k_0})^\infty$ , puisque les  $P_{i,k}$  sont de degré 1 en  $v_i$ , ce qui implique leurs séparants sont égaux à leurs initiaux et que nos hypothèses impliquent aussi que  $\{P_{1,j_0}, P_{2,k_0}\}$  est un ensemble caractéristique de l'idéal  $(P_{1,j_0}, P_{2,k_0}) : (I_{1,j_0} I_{2,k_0})^\infty$ . L'idéal  $[P_{1,j_0}, P_{2,k_0}]$  contient  $[Q]$ .

Donc, si le reste  $R$  de la pseudo-réduction de  $\text{S-Pol}(Q_1, Q_2)$  par  $Q$  est non nul, il ne dépend d'aucune dérivée stricte de  $v_1$  ou de  $v_2$  et est alors partiellement réduit par rapport à  $\{P_{1,j_0}, P_{2,k_0}\}$  pour tout  $(j_0, k_0) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$ . Toujours d'après [2, th. 3], il appartient donc à l'idéal algébrique  $(P_{1,j_0}, P_{2,k_0}) : (I_{1,j_0} I_{2,k_0})^\infty$  pour tout  $(j_0, k_0) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$ .

Soit  $\Xi$  l'ensemble des dérivées présentes dans les polynômes  $P_{i,k}$ , pour  $i = 1, 2$  et  $1 \leq k \leq r_i$  et différentes des dérivées de tête  $v_1$  et  $v_2$ . Soit  $\mathcal{K} := \mathcal{F}(\Xi)$ . Les idéaux  $(P_{1,j}, P_{2,k})$  pour tous les couples  $(j, k) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$  définissent  $r_1 \times r_2$  points distincts  $(\eta_{1,j}, \eta_{2,k})$  dans l'anneau  $\mathcal{K}[v_1, v_2]$ . Le reste de la pseudo-réduction de  $\text{S-Pol}(Q_1, Q_2)$  par  $Q$  est de degré en  $v_1$  strictement inférieur à  $r_1$ . S'il est non nul, on peut donc trouver  $j_0$  tel que son évaluation à la valeur  $\eta_{1,j_0}$  de  $v_1$  définie par  $P_{1,j_0}$  soit un polynôme non trivial de  $\mathcal{K}[v_2]$  de degré strictement inférieur à  $r_2$ . Il existe donc  $k_0$  tel qu'il ne s'annule pas à la valeur  $\eta_{2,k_0}$  de  $v_2$  définie par  $P_{2,k_0}$ . Ceci implique que  $\text{S-Pol}(Q_1, Q_2)$  n'appartient pas à  $(P_{1,j_0}, P_{2,k_0}) : (I_{1,j_0} I_{2,k_0})^\infty$  : une contradiction. Ce S-polynôme est donc bien réduit à 0 par  $Q$ .

b)  $\implies$  a). — Si  $T := \text{S-Pol}(P_{1,i_0}, P_{2,j_0})$  n'est pas réduit à 0 par  $\{P_{1,i_0}, P_{2,j_0}\}$ , alors son reste  $R$  appartient à  $\mathcal{K}[v_1, v_2]$  et donc également à  $(Q) : S_Q^\infty$  par [2, th. 3]. Il ne s'annule pas au point  $(\eta_{1,i_0}, \eta_{2,j_0})$  défini par l'idéal  $(P_{1,i_0}, P_{2,j_0})_{\mathcal{K}[v]}$ . Par ailleurs,  $[P_{1,i_0}, P_{2,j_0}] = (Q) : (\prod_{i \neq i_0} P_{1,i} \prod_{j \neq j_0} P_{2,j})^\infty$ , donc il existe  $(r_1, r_2) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $R(\prod_{i \neq i_0} P_{1,i} \prod_{j \neq j_0} P_{2,j})^{r_1} S_Q^{r_2} \in (Q)$ .

L'assertion b) implique que tous les polynômes de  $(Q)$  sont réduits à 0 par l'ensemble  $Q$ , donc il existe  $s \in \mathbf{N}$  tel que  $H_Q^s R(\prod_{i \neq i_0} P_{1,i} \prod_{j \neq j_0} P_{2,j})^{r_1} \in (Q)$  et ainsi  $[H_Q^s R(\prod_{i \neq i_0} P_{1,i} \prod_{j \neq j_0} P_{2,j})^{r_1}](\eta_{1,i_0}, \eta_{2,j_0})$  est nul, ce qui est impossible, puisque les idéaux premiers définis par les  $P_{i,k}$  sont tous différents, ce qui implique  $H_Q \neq 0 \in \mathcal{K}$  et que par ailleurs

$$R(\eta_{1,i_0}, \eta_{2,j_0}) \neq 0 \text{ et } \left( \prod_{i \neq i_0} P_{1,i} \prod_{j \neq j_0} P_{2,j} \right) (\eta_{1,i_0}, \eta_{2,j_0}) \neq 0.$$

ii) Comme  $Q$  est autoréduit, il suffit de s'assurer que tout polynôme appartient à  $(Q) : H_Q^\infty$  ssi il est réduit à 0 par  $Q$ . Le lemme de Rosenfeld [2, th. 3] permet de se ramener au cas où un tel polynôme est partiellement réduit. Comme les initiaux  $I_{Q_i} = \prod_{k=1}^{r_i} I_{i,k}$  appartiennent à  $K[\Xi]$ , ceci revient à montrer que  $Q$  est une base standard de  $(Q)_{\mathcal{K}[v]} : S_Q^\infty$ . C'est bien une base standard de  $[Q]_{\mathcal{K}[v_1, v_2]}$ , en vertu du premier critère de Buchberger [3], puisque les monômes de tête sont étrangers. Par ailleurs,  $Q_{\mathcal{K}[v]} = Q_{\mathcal{K}[v]} : S_Q^\infty$ . En effet, puisque  $v_i$  n'intervient pas dans  $Q_j$ , pour  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ , l'ensemble des zéro de  $Q$  est de la forme  $(\eta_{1,k_1}, \eta_{2,k_2})$ , pour  $(k_1, k_2) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$ . Comme les facteurs des  $P_{i,k}$  contenant  $v_i$  sont tous différents par hypothèse,  $Q_i$  et  $S_{Q_i}$  sont sans facteur commun, pour  $i = 1, 2$  et donc  $(Q_i)_{\mathcal{K}[v]} : S_i^\infty = (Q_i)$ . On a ainsi  $(Q)_{\mathcal{K}[v]} : S_Q^\infty = (Q_1)_{\mathcal{K}[v]} : S_1^\infty + (Q_2)_{\mathcal{K}[v]} : S_2^\infty = (Q_1)_{\mathcal{K}[v]} + (Q_2)_{\mathcal{K}[v]} = (Q)_{\mathcal{K}[v]}$ .

Par le relèvement du lemme de Lazard [2, th. 4], l'idéal différentiel  $[Q] : H_Q^\infty$  est radical. Ses composantes premières sont les idéaux premiers  $[P_{1,j}, P_{2,k}] : (I_{1,j} I_{2,k})^\infty$ , pour tous les  $(j, k) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$ , puisque les facteurs des  $P_{i,k}$  contenant leur dérivées de tête sont les seuls facteurs de  $Q_i$  qui ne divisent pas  $S_Q$ . Ceci prouve l'équation (1). ■

*Exemple 9.* — Soit  $\mathcal{F} := \mathbf{Q}(\omega)$  avec  $\omega^3 = 1$ , muni de dérivations  $\delta_i$ ,  $1 = 1, 2, 3$  qui commutent. Soit  $\mathcal{R} := \mathcal{F}\{x\}$ , on définit  $P_{i,k} := \delta_i x + \omega^k \delta_3 x$ , pour  $i = 1, 2$  et  $1 \leq k \leq 3$ . Ainsi, si  $Q_1 := \prod_{k=1}^3 P_{1,k} = (\delta_1 x)^3 + (\delta_3 x)^3$  et  $Q_2 := \prod_{k=1}^3 P_{2,k} = (\delta_2 x)^3 + (\delta_3 x)^3$ , alors le S-polynôme de  $Q_1$  et  $Q_2$  est

$$3(\delta_2 x)^2 \delta_2 Q_1 - 3(\delta_1 x)^2 \delta_1 Q_2 = 9(\delta_3 x)^2 ((\delta_2 x)^2 \delta_2 \delta_3 x - (\delta_1 x)^2 \delta_1 \delta_3 x),$$

qui est pseudo-réduit à 0 par  $Q$ , en utilisant le même ordre sur les dérivées qu'à l'exemple 7.

Dans le cas où des puissances strictes interviennent dans les produits, nous auront besoin en complément du lemme technique qui suit.

*Lemme 10.* — Soit  $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$  un idéal premier. On note  $\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{F}}$  le module des différentielles de Kähler et  $d$  la dérivation canonique de  $\mathcal{R}$  dans  $\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{F}}$ .

i) Pour tout  $r \in \mathbf{N}$  et  $Q \in \mathcal{P}^r$ , on a :  $dQ \in \mathcal{P}^{r-1} \Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{F}}$ .

ii) Soient  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_s\}$  un ensemble caractéristique de  $\mathcal{P}$  pour un ordre  $\prec$  et  $d_i \in \mathbf{N}$ , pour  $1 \leq i \leq s$ , des entiers quelconques.

a) Pour tout  $A \in \mathcal{R}$ , tout  $d \in \mathbf{N}$  et tout  $(\tau, \theta) \in \Theta^2$ , on a  $\partial_{\tau \mathcal{A}} \theta A^d \in [A^{d-1}]$ .



b) Si  $Q \in \mathcal{Q} := [A_i^{d_i} | 1 \leq i \leq s] : H_{\mathcal{A}}^\infty$ , on a :  $dQ = \sum_{i=1}^s \sum_{k \in \mathbf{N}} c_{i,k} dA_i^{(k)}$ , avec  $c_{i,k} \in [A_i^{\bar{d}_i} | 1 \leq \iota \leq s] : H_{\mathcal{A}}^\infty$ , où  $\bar{d}_i := d_i$  si  $\iota \neq i$  et  $\bar{d}_i := d_i - 1$  si  $\iota = i$ .

c) Avec les même notations qu'en b), soit  $\Xi$  est l'ensemble des dérivées apparaissant dans les  $A_i$  et différentes des dérivées de tête  $v_{A_i}$ . Si les  $A_i$  sont tous linéaires en leur dérivée de tête  $v_i$  et si  $I_i \in \mathcal{F}[\Xi]$ , on a l'égalité  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}_0 = (A_i^{d_i} | 1 \leq i \leq s) : I_{\mathcal{A}}^\infty$ , avec  $\mathcal{R}_0 := \mathcal{F}[\Xi, v_{A_1}, \dots, v_{A_s}]$ . Dans ce cas,  $\{A_i^{d_i} | 1 \leq i \leq s\}$  est un ensemble caractéristique de  $(A_i^{d_i} | 1 \leq i \leq s) : I_{\mathcal{A}}^\infty$ .

PREUVE. — i) Par définition, tout élément  $Q$  de  $\mathcal{P}^r$  peut s'exprimer comme une combinaison linéaire

$$Q = \sum_{j=1}^p L_j m_j(B_1, \dots, B_q)$$

de  $p$  monômes de degré  $r$  dépendant d'une famille  $B_i$  de  $q$  éléments de  $\mathcal{P}$ . On a alors

$$dQ = \sum_{j=1}^p \left( m_j(B_1, \dots, B_q) dL_j (\in \mathcal{P}^r \Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{F}}) + L_j \sum_{i=1}^q \frac{\partial m_j}{\partial B_i}(B_1, \dots, B_q) dB_i (\in \mathcal{P}^{r-1} \Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{F}}) \right).$$

ii) a) On procède par récurrence sur l'ordre de  $\theta$ . S'il est nul, c'est-à-dire si  $\theta = 1$ , le résultat est immédiat. Sinon,  $\theta = \delta_{i_0} \hat{\theta}$ , avec  $\text{ord} \hat{\theta} = \text{ord} \theta - 1$ . Supposons le résultat vrai pour tout  $\theta \in \Theta$  d'ordre strictement inférieur à  $\text{ord} \theta$ .

Pour tout polynôme  $R \in \mathbf{Q}_\Delta\{A\}$ , on a :

$$\delta_{i_0} R = \sum_{\hat{\theta} \in \Theta} \delta_{i_0} \hat{\theta} A \frac{\partial}{\partial \hat{\theta} A} R.$$

Donc, si  $\delta_0$  ne divise pas  $\tau$ , on a

$$\frac{\partial \theta A^d}{\partial \tau A} = \frac{\partial}{\partial \tau A} \sum_{\hat{\theta} \in \Theta} \delta_{i_0} \hat{\theta} A \frac{\partial}{\partial \hat{\theta} A} \hat{\theta} A^d = \delta_{i_0} \frac{\partial \hat{\theta} A^d}{\partial \tau A}.$$

Sinon, on a  $\tau = \delta_{i_0} \hat{\tau}$  et on peut écrire :

$$\frac{\partial \theta A^d}{\partial \tau A} = \frac{\partial}{\partial \tau A} \sum_{\hat{\theta} \in \Theta} \delta_{i_0} \hat{\theta} A \frac{\partial}{\partial \hat{\theta} A} \hat{\theta} A^d = \delta_{i_0} \frac{\partial \hat{\theta} A^d}{\partial \tau A} + \frac{\partial \hat{\theta} A^d}{\partial \hat{\tau} A},$$

où  $\partial \hat{\theta} A^d / \partial \tau A$  et  $\partial \hat{\theta} A^d / \partial \hat{\tau} A$  appartiennent à  $[A^{d-1}]$ , en utilisant l'hypothèse de récurrence, ce qui implique le résultat.

b) Si  $Q \in \mathcal{Q}$ , alors il existe  $h \in \mathbf{N}$  tel que

$$I_{\mathcal{A}}^h Q = \sum_{i=1}^s \sum_{\theta \in \Theta} L_{i,\theta} \theta A_i^{d_i},$$

$$\begin{aligned}
\text{donc } d \left( I_{\mathcal{A}}^h \right) Q (\in \mathcal{Q} \Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{F}}) + I_{\mathcal{A}}^h dQ = \\
\sum_{i=1}^s \sum_{\theta \in \Theta} \theta A_i^{d_i} dL_{i,\kappa} (\in \mathcal{Q} \Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{F}}) \\
+ \sum_{i=1}^s \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{\tau \in \Theta} L_{i,\theta} \frac{\partial \theta A_i^{d_i}}{\partial \tau A_i} d\tau A_i (\in [A_i^{d_i-1}] \Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{F}} \text{ par a}),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

c) L'inclusion  $\supset$  est immédiate. Pour  $\subset$ , on procède par récurrence sur  $d \in (\mathbf{N}^*)^s$ , en utilisant l'ordre sur  $(\mathbf{N}^*)^s$  défini par  $\hat{d} \leq \tilde{d}$  si  $\hat{d}_i \leq \tilde{d}_i$  pour  $1 \leq i \leq s$ . Pour  $(d_1, \dots, d_s) = (1, \dots, 1)$ , le résultat est vrai, puisque  $\mathcal{A}$  est un ensemble caractéristique de  $\mathcal{A}$ . Soit  $Q \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{R}_0$ , nous allons prouver que  $Q \in (A_i^{d_i} | 1 \leq i \leq s)_{\mathcal{R}_0}$ , en supposant le résultat vrai pour tout  $\hat{d} < d$ .

D'après le premier critère de Buchberger [3], l'ensemble  $\{A_i^{d_i}, \dots, A_s^{d_s}\}$  est une base standard algébrique de l'idéal qu'il engendre, dans l'algèbre  $\mathcal{F}(\Xi)[v_{A_1}, \dots, v_{A_s}]$ . C'est donc aussi un ensemble caractéristique de l'idéal qu'il engendre dans  $\mathcal{F}[\Xi, v_{A_1}, \dots, v_{A_s}]$ .

Si  $Q \notin (A_i^{d_i} | 1 \leq i \leq s)_{\mathcal{R}_0}$ , qu'il est non nul et irréductible pour la réduction par l'ensemble caractéristique algébrique  $\{A_1^{d_1}, \dots, A_s^{d_s}\}$ , le degré de  $Q$  en  $v_{A_i}$  est strictement inférieur à  $d_i$ .

Comme  $Q \in (\mathcal{A}) : H_{\mathcal{A}}^\infty$ ,  $Q$  est réductible par  $\mathcal{A}$  et dépend donc d'une des dérivées de tête  $v_{A_{i_0}}$ ; nécessairement, on a  $d_{i_0} > 1$ , sinon  $Q$  serait réductible par  $A_{i_0}^{d_{i_0}}$ . Par b), le coefficient de  $dA_{i_0}$  dans  $dQ$  appartient à  $[A_i^{\hat{d}_i}] : H_{\mathcal{A}}^\infty$ , avec  $\hat{d}_i = d_i$  si  $i \neq i_0$  et  $\hat{d}_{i_0} = d_{i_0} - 1$ . Comme le degré de  $Q$  en  $v_i$  est au plus  $d_i - 1$ , ce coefficient qui est dans  $\mathcal{R}_0$  est de degré en  $v_i$  au plus  $\hat{d}_{i_0} - 1$  et irréductible par  $\{A_i^{\hat{d}_i} | 1 \leq i \leq s\}$  ce qui contredit, s'il est non nul, l'hypothèse de récurrence.

Tout élément de  $\mathcal{Q}$  est donc réduit à 0 par  $\{A_i^{\hat{d}_i} | 1 \leq i \leq s\}$ , qui est autoréduit et constitue donc un ensemble caractéristique de  $\mathcal{Q}$ . ■

*Exemple 11.* — On prend  $\mathcal{F} := \mathbf{Q}$ , muni de 3 dérivations  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  et  $\mathcal{R} := \mathcal{F}\{x\}$ , avec le même ordre sur les dérivées qu'à l'exemple 7. On prend  $\mathcal{P} := [\delta_1 x, \delta_2 x, \delta_3 x]$ . Alors,  $d(\delta_1 x \delta_2 x \delta_3 x (\in \mathcal{P}^3)) = \delta_2 x \delta_3 x \delta_1 dx + \delta_1 x \delta_3 x \delta_2 dx + \delta_1 x \delta_2 x \delta_3 dx \in \mathcal{P}^2 \mathcal{M}$ . De même,  $d[(\delta_1 x)^2 + (\delta_2 x)^3 + (\delta_3 x)^4] =$

$$2\delta_1 x \delta_1 dx (\in [\delta_1 x] \mathcal{M}) + 3(\delta_2 x)^2 \delta_2 dx (\in [\delta_2 x]^2 \mathcal{M}) + 4(\delta_3 x)^3 \delta_3 dx (\in [\delta_3 x]^3 \mathcal{M})$$

et  $\mathcal{B} := \{(\delta_1 x)^2, (\delta_2 x)^3, (\delta_3 x)^4\}$  est un ensemble caractéristique de l'idéal qu'il engendre, mais pas une représentation caractéristique, puisque  $\delta_1^2 x$  est réduit à 0 par  $\mathcal{B}$  sans appartenir à  $\mathcal{B}$ .

On peut maintenant énoncer cette nouvelle version du théorème de Hashemi et Touraji [8]. La différence essentielle par rapport à la version originale, outre l'utilisation d'une version un peu étendue du critère de Boulier, est que l'on concentre tous les facteurs de  $Q_i$  dont la dérivée dominante est strictement inférieure à la dérivée dominante commune aux facteurs linéaires

homogènes en  $z$ , en un facteur unique  $Q_{i,0}$ , sur lequel il n'est pas fait d'autres hypothèses. On notera que c'est un facteur du séparant  $S_{Q_i}$ , qui est implicitement supposé non nul dans i), ce qui exclut les zéros de ce terme.

**THÉORÈME 12.** — On pose  $\bar{Q}_i = \prod_{k=0}^{r_i} P_{i,k}^{d_{i,k}}$  et  $Q_i := \prod_{k=1}^{r_i} P_{i,k}^{d_{i,k}}$ ,  $i = 1, 2$ , où pour tout couple  $(P_{1,k_1}, P_{2,k_2})$ ,  $(k_1, k_2) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$ , les hypothèses du th. 6 sont satisfaites pour un même  $\theta_{i,z}$ , et  $v_{P_{i,0}} \prec \theta_i v_z$ ,  $i = 1, 2$ . On suppose en outre que les  $P_{i,k}$  sont tous différents.

i) Sous ces hypothèses, et si  $d_{i,k} = 1$ , pour  $i = 1, 2$  et  $1 \leq k \leq r_i$ , alors  $\bar{Q} := \{\bar{Q}_1, \bar{Q}_2\}$  est un ensemble caractéristique et une représentation caractéristique de  $[\bar{Q}] : S_{\bar{Q}}^\infty = [Q] : S_Q^\infty$ .

ii) Sous ces hypothèses, et pour des  $d_{i,k}$  quelconques,  $T := \text{S-Pol}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = S_{Q_2} \theta_2 \bar{Q}_1 - S_{Q_1} \theta_1 \bar{Q}_2$ , est pseudo-réduit à 0 par  $\bar{Q}$ .

**PREUVE.** — i) D'après le th. 6, tous les S-polynômes pour tous les couples sont réduits à 0 et d'après le lem. 8,  $\{Q_1, Q_2\}$  est un ensemble caractéristique de  $[Q_1, Q_2] : S_Q^\infty$ . Donc, les  $\bar{Q}_i$  qui sont des multiples et ont les mêmes dérivées de têtes respectives que les  $Q_i$ , forment un ensemble caractéristique du même idéal (et réduisent donc à 0 leur S-polynôme). On a alors  $S_{\bar{Q}} = P_{1,0} P_{2,0} S_Q$  et  $I_{\bar{Q}} = P_{1,0} P_{2,0} I_Q$ , donc  $[\bar{Q}] : H_{\bar{Q}}^\infty = [Q] : H_Q^\infty = [Q] : S_Q^\infty$ .

ii) Si  $T \in [Q_1, Q_2]$  contient une dérivée stricte de  $\theta_i v_i$ , pour  $i = 1$  ou  $i = 2$ , alors  $T$  est réductible par  $\{Q_1, Q_2\}$ . Sinon, pour tout couple  $(k_1, k_2) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$ , le lemme 10 ii) c) implique  $T \in (P_{1,k_1}^{d_{1,k_1}}, P_{2,k_2}^{d_{2,k_2}}) : S_z^\infty$ , puisque  $I_{P_{i,k}}$  est égal à  $S_z$ . On a donc

$$T \in \bigcap_{(k_1, k_2) \in [1, r_1] \times [1, r_2]} \left( P_{1,k_1}^{d_{1,k_1}}, P_{2,k_2}^{d_{2,k_2}} \right) : S_z^\infty.$$

Montrons que  $T$  est pseudo-réduit à 0 par  $\{Q_1, Q_2\}$ , ce qui revient à montrer qu'il est réduit à 0, au sens des bases standard, par les  $Q_i$ , considérés comme des polynômes de  $\mathcal{F}(\Xi)[v_1, v_2]$ , où  $\Xi$  est défini comme au lem. 10 ii) c). Dans cet anneau, les éléments  $R$  de l'idéal primaire  $(P_{1,k_1}^{d_{1,k_1}}, P_{2,k_2}^{d_{2,k_2}})$  sont tels que, pour tout couple d'entiers  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , tels que  $0 \leq \alpha_i < d_{i,k_i}$ ,  $\partial_{v_1}^{\alpha_1} \partial_{v_2}^{\alpha_2} R$  appartienne à l'idéal premier  $(P_{1,k_1}, P_{2,k_2}) : S_z^\infty$ , qui définit le point  $(\eta_{1,k_1}, \eta_{2,k_2})^1$ . Si  $R \in [Q_1, Q_2]$  est le reste de la réduction de  $T$  et s'il est non nul, c'est un polynôme de degré  $\beta_i$  en  $v_i$  strictement inférieur à  $\sum_{i=1}^{r_i} d_{i,k_i}$ , pour  $i = 1$  et  $i = 2$ . On peut l'écrire comme un polynôme en  $v_1$  avec des coefficients polynômes en  $v_2$ , c'est-à-dire :  $R = \sum_{i=0}^{\beta_1} c_i(v_2) v_1^i$ . Comme  $R$  est non nul, le coefficient  $c_{\beta_1}$  est un polynôme non nul de degré strictement inférieur à  $\sum_{i=1}^{r_2} d_{2,k_2}$ , qui ne peut donc s'annuler en les  $r_2$  points  $\eta_{2,k_2}$ , pour  $1 \leq k_2 \leq r_2$ , avec multiplicité  $d_{2,k_2}$ . Soit  $k_0$  tel que la multiplicité en  $\eta_{2,k_0}$  soit  $\gamma < d_{2,k_0}$ . Alors  $\partial_{v_2}^\gamma c_{\beta_1}$  est un élément

1. C'est un cas particulier simple de la description d'un idéal algébrique primaire par un système d'opérateurs différentiels linéaires. Voir Cid-Ruiz *et al.* [5] pour plus de détails et de références.

non nul du corps  $\mathcal{F}(\Xi)$ . On doit avoir  $(\partial_{v_1}^{\alpha_1} \partial_{v_2}^{\gamma} R)(\eta_{1,k_1}, \eta_{2,k_0}) = 0$ , pour tout  $1 \leq k_1 \leq r_1$  et tout  $0 \leq \alpha_1 < d_{1,k_1}$ , ce qui est impossible, puisque l'ordre de  $R$  en  $v_1$  est strictement inférieur à  $\sum_{i=1}^{r_1} d_{1,k_1}$ . On en déduit que  $R$  est nul, ce qui achève la preuve, puisque réduire par  $\bar{Q}$  ou par  $Q$  est équivalent, à une multiplication près par une puissance de  $P_{1,0}P_{2,0}$ . ■

*Exemple 13.* — On prend le corps  $\mathcal{F} := \mathbf{Q}$ , équipé de trois dérivations  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  et  $\mathcal{R} := \mathcal{F}\{x\}$  avec le même ordre sur les dérivées qu'à l'exemple 7.

Soient  $Q_i := \prod_{k=1}^{r_i} (\delta_1 x - a_{i,k} \delta_3 x)$ , pour  $i = 1, 2$ , avec  $a_{i,k} \in \mathbf{Q}$ ,  $1 \leq k \leq r_i$ . Alors,  $\{Q_1, Q_2\}$  réduit à 0 le S-polynôme de  $Q_1$  et  $Q_2$  et est un ensemble caractéristique de l'idéal qu'il engendre. Ceci demeure vrai dans les cas où apparaissent des facteurs multiples, c'est-à-dire quand certains coefficients  $a_{i,k}$  sont égaux entre eux.

On peut multiplier  $Q_i$  par n'importe quel facteur  $P_{i,0}$ , dont la dérivée de tête est inférieure à  $\delta_1 x$  et  $\delta_2 x$ , par exemple  $\delta_3 x$ . Un tel facteur ne fait que contribuer aux initiaux et aux séparant lors des réductions.

## Conclusion

Du point de vue de la complexité algorithmique, le nombre de monômes obtenus en développant les produits rend génériquement la taille de leur représentation dense supérieure à celle de tous les idéaux premiers obtenus en factorisant et la version avec carrés n'est pas utile pour l'algorithme Rosenfeld – Gröbner [2].

Ces constats ne doivent pas occulter l'intérêt théorique et pratique qu'il peut y avoir à considérer des produits et des puissances d'idéaux en algèbre différentielle et donc à renforcer l'outillage théorique disponible pour leur étude. On peut par exemple mettre en œuvre des formes de remontées de Newton–Hensel, ce qui a déjà été mis à profit pour calculer des solutions en séries [1]. La méthode pourrait s'étendre pour permettre le calcul d'un ensemble caractéristique pour un système dont une solution régulière est connue, ou aussi une représentation des solutions utilisant la représentation compacte des polynômes différentiels comme des programmes d'évaluation, dans l'esprit de l'algorithme de Kronecker [7, 6].

## Références

- [1] A. BOSTAN, F. OLLIVIER, F. CHYZAK, B. SALVY, É. SCHOST et A. SEDOGLAVIC, «Fast computation of power series solutions of systems of differential equations», *Proceedings of the 2007 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 2007.

- [2] F. BOULIER, D. LAZARD, F. OLLIVIER et M. PETITOT, «Computing representations for radicals of finitely generated differential ideals», *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.*, 20, 73–121, 2009.
- [3] B. BUCHBERGER, «A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of Gröbner-bases», Symbolic and Algebraic Computation, EUROSAM 1979, (E. Ng, éd.), *Lect. Notes in Comp. Sci.*, vol. 72, Springer, 3–21, 1979.
- [4] G. CARRÀ-FERRO, «Gröbner bases and differential algebra», Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-correcting Codes, Menorca, 1987 (L. Huguët et A. Poli, éd.), *Lect. Notes in Comp. Sci.*, vol. 356, Springer, 129–140, 1987.
- [5] Y. CID-RUIZ, H. HOMS et B. STURMFELS, «Primary Ideals and Their Differential Equations», *Found. Comput. Math.*, 2021.
- [6] L. D’ALFONSO, G. JERONIMO, F. OLLIVIER, A. SEDOGLAVIC et P. SOLERNÓ, «A geometric index reduction method for implicit systems of differential algebraic equations», *Journal of Symbolic Computation*, 46, 1114–1138, 2011.
- [7] M. GIUSTI, G. LECERF et B. SALVY, «A Gröbner free alternative for polynomial system solving», *Journal of Complexity*, 17, 154–211, 2001.
- [8] A. HASHEMI et Z. TOURAJI, «An Improvement of Rosenfeld-Gröbner Algorithm», Mathematical Software, ICMS 2014 (H. Yong et C. Yap, éd.), *Lect. Notes in Comp. Sci.*, vol. 8592, Springer, 466–471, 2014.
- [9] E.R. KOLCHIN, *Differential algebra and algebraic groups*, Pure and applied mathematics, vol. 54, Academic Press, New York, 1973.
- [10] F. OLLIVIER, «Standard bases of differential ideals», Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes (S. Sakata, éd.), *Lect. Notes in Comp. Sci.*, vol. 508, Springer, 304–321, 1990.
- [11] J.F. RITT, *Differential algebra*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 33, AMS, 1950.