



HAL
open science

Comment faire un demi-tour dans la Tour d'Hanoï Cyclique

Thierry Bousch

► **To cite this version:**

| Thierry Bousch. Comment faire un demi-tour dans la Tour d'Hanoï Cyclique. 2021. hal-03266308v3

HAL Id: hal-03266308

<https://hal.science/hal-03266308v3>

Preprint submitted on 4 Jun 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comment faire un demi-tour dans la Tour d'Hanoï Cyclique

Thierry BOUSCH*

2 mai 2023

Abstract

It is shown that, in the cyclic tower of Hanoi with 4 pegs and N disks, there exists an initial configuration of disks and a valid sequence of moves, after which the configuration has made a half-turn, where the number of disk moves grows in $O(Z^N)$, where $Z \simeq 1.69562$ is the unique real root of the equation $Z^3 = Z^2 + 2$. This result is consistent with some numerical experiments and conjectures made by Paul Zimmermann in 2017. Then, the optimality of the number of disk moves obtained by this process is discussed.

Résumé

On montre que, dans la tour d'Hanoï cyclique avec 4 tiges et N disques, il existe une configuration initiale de disques et une suite valide de mouvements, à la fin de laquelle la configuration a effectué un demi-tour, où le nombre de mouvements de disques croît en $O(Z^N)$, où $Z \simeq 1.69562$ est l'unique racine réelle de l'équation $Z^3 = Z^2 + 2$. Ce résultat est en accord avec certaines expériences numériques et conjectures faites par Paul Zimmermann en 2017. On discute ensuite de l'optimalité du nombre de mouvements de disques obtenu par cette méthode.

Titre anglais: How to make a half-turn in the Cyclic Tower of Hanoi

Mots-clés (anglais): Cyclic tower of Hanoi

Classification AMS (2010): 05C38 (graph theory: paths and cycles)

Table des matières

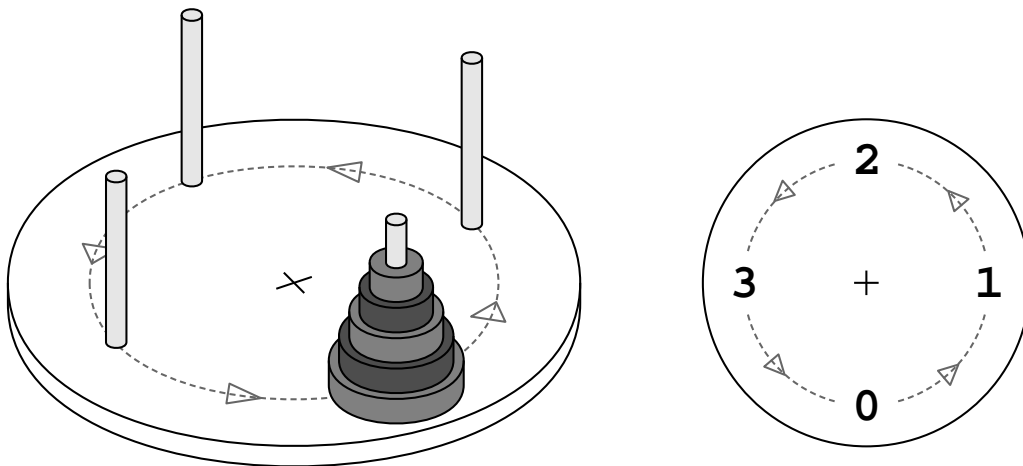
1	Introduction	2
2	Un résultat d'existence de demi-tours	3
3	Démonstration du Théorème 2.1	6
4	Majorations de $S_\ell(N)$ et λ_4	11
5	Comment minorer le nombre de mouvements	12
6	Démonstration de la Proposition 5.3	16
	Références	21

*Laboratoire de Mathématique d'Orsay (UMR 8628 du CNRS), bât. 307, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay Cedex, France. E-mail: Thierry.Bousch@math.u-psud.fr

1 Introduction

La Tour d'Hanoï [H+], inventée en 1883 par Edouard Lucas, a rapidement inspiré de nombreuses variantes: que devient le problème quand on augmente le nombre de tiges, ou qu'on interdit les mouvements entre certaines tiges?

La variante dont je parlerai ici apparaît pour la première fois dans l'article de Scorer, Grundy et Smith [SGS], dans la section "Scale of Three" Games (page 99). Dans ce jeu, on a quatre aiguilles disposées en cercle, et en plus des règles usuelles de la Tour d'Hanoï, on ajoute la restriction qu'un disque ne peut être déplacé que d'une aiguille vers l'aiguille adjacente dans le sens direct. Initialement, tous les disques sont empilés sur une des aiguilles, et on doit déplacer cette "tour" de disques vers l'aiguille opposée sur le cercle — avec un nombre minimum de mouvements.



Cette "Tour d'Hanoï Cyclique" n'occupe qu'une toute petite part de l'article, et Scorer et al. ne l'ont vraisemblablement pas examinée en détail. Leur article affirme, sans preuve, que "la solution" pour transférer N disques d'une aiguille vers l'aiguille opposée est constituée de $3^N - 1$ mouvements de disques, avec une structure récursive comme pour la Tour d'Hanoï classique.

Cinquante ans plus tard, Paul Stockmeyer [Sto] se rend compte de l'erreur: si la solution donnée dans [SGS] a bien pour effet de transférer tous les disques d'une aiguille vers l'aiguille opposée, elle n'est pas en général de longueur minimale. Déjà avec 3 disques, on voit facilement qu'il existe une solution avec 18 mouvements de disques, alors que "la solution" de Scorer et al. en demande 26.

L'étude de Stockmeyer montre que le problème est considérablement plus difficile que ne le supposaient Scorer et al. Les expériences numériques, qu'il mène jusqu'à 7 disques, ne révèlent aucune structure dans les séquences optimales (très nombreuses), ou même leurs longueurs.

Stockmeyer conclut son article en indiquant qu'il ne sait pas si le nombre minimum de mouvements $S_2(N)$ croît exponentiellement en N , ou seulement sous-exponentiellement. Il suggère également qu'il pourrait ne pas exister de formule permettant de calculer $S_2(N)$, ni même d'algorithme plus efficace que la "force brute".

Sur ces deux questions, il y a quand même eu quelques progrès depuis cet article de 1994.

En premier lieu, Daniel Berend et Amir Sapir ont mené, vers 2005, une étude théorique des graphes de configurations $CH_h(N)$ pour la Tour d'Hanoï Cyclique avec un nombre arbitraire h d'aiguilles, dans une série d'articles [Sap, BS1, BS2]. Ils y établissent deux résultats importants: d'abord, que le nombre de mouvements nécessaires pour déplacer une tour de N disques d'une aiguille vers une autre croît exponentiellement en N , avec un taux de croissance $\lambda_h > 1$ qui

est indépendant de l'écart entre les aiguilles de départ et d'arrivée et peut, en principe, être encadré avec une précision arbitraire. Ils obtiennent notamment

$$1.558 \leq \lambda_4 < 1.757$$

(voir Table I, p. 304 de [BS1]). Ensuite, que le diamètre du graphe orienté $\text{CH}_h(N)$ est atteint entre deux configurations parfaites. Dans le cas particulier de quatre tiges, notons $S_1(N)$, $S_2(N)$, $S_3(N)$ le nombre de mouvements nécessaires pour déplacer une tour de N disques de 1, 2, 3 quarts de tour: ces trois fonctions de N ont le même ordre de grandeur (on a $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq 3S_1$) et le diamètre du graphe $\text{CH}_4(N)$ est égal à $S_3(N)$. Pour cette raison, la détermination des nombres $S_3(N)$ pourrait être un problème plus naturel que celle des $S_2(N)$. Ces deux résultats montrent que la Tour d'Hanoï Cyclique se comporte très différemment du *Reve's puzzle*, c'est-à-dire la variante à quatre tiges sans restriction sur les mouvements.

Sur le plan expérimental, le calcul des $S_2(N)$ a pu être poussé plus loin, grâce à l'augmentation de puissance des ordinateurs. En octobre 2017, Paul Zimmermann a calculé les $S_2(N)$ jusqu'à 21 disques, en utilisant un programme spécialement écrit. On trouvera les valeurs dans l'OEIS [Slo], suite A292764. En voici les premières:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$S_2(N)$	0	2	8	18	36	66	120	210	360	618	1052	1790

Sur ces valeurs, Zimmermann observe que le rapport $S_2(N)/S_2(N-1)$ semble tendre vers $Z \simeq 1.6956$, l'unique racine réelle de l'équation $Z^3 = Z^2 + 2$. Cette conjecture, si elle est vraie, impliquerait $\lambda_4 = Z$. Zimmermann note également que

$$\forall N \geq 9 \quad S_2(N) - S_2(N-1) - 2S_2(N-3) = 16 - 2(-1)^N$$

sur les valeurs numériques disponibles, c'est-à-dire pour $N \leq 21$. Si cette relation est valable dans l'absolu, cela donnerait une formule explicite (rationnelle) pour la série génératrice des $S_2(N)$, et résoudrait (pour l'essentiel) le problème posé par Scorer et al. en 1944.

A défaut de démontrer ces énoncés, je prouverai dans le présent article que $\lambda_4 = Z$, c'est-à-dire que la suite $S_2(N)^{1/N}$ tend vers Z .

2 Un résultat d'existence de demi-tours

Précisons d'abord les notations, et les définitions des principaux objets qui interviendront dans le théorème. Comme d'habitude $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et pour tout entier naturel n , on notera $[n]$ l'ensemble des n plus petits entiers naturels, c.à.d. $\{0, 1, \dots, n-1\}$. L'ensemble \mathcal{C} des (quatre) colonnes de la Tour d'Hanoï Cyclique sera identifié à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et chaque mouvement de disque augmente de 1 son numéro de colonne. Si on a N disques, on les représentera par les éléments de $[N]$, c'est-à-dire par des entiers entre 0 (pour le plus petit disque) et $N-1$ (pour le plus grand).

Appelons *empilement* (de N disques sur \mathcal{C}) n'importe quelle configuration de disques accessible à partir de la position initiale, c'est-à-dire toute manière de répartir les N disques entre les quatre colonnes, où dans chaque colonne les disques sont empilés par taille décroissante. Un empilement peut être représenté par un élément (unique, et arbitraire) de $\mathcal{C}^{[N]}$, c'est-à-dire une fonction

$$[N] \longrightarrow \mathcal{C}$$

quelconque (il y en a donc 4^N en tout). Cette fonction indique dans quelle colonne se trouve chacun des disques. L'empilement est dit *parfait* si cette fonction est constante, c'est-à-dire si tous les disques sont sur une même tige.

Le *graphe des empilements* (de N disques sur \mathcal{C}) est le graphe orienté, simple, dont l'ensemble des sommets est $\mathcal{C}^{[N]}$, et les arêtes sont les transitions autorisées par les règles du jeu: entre deux empilements $\mathbf{u}, \mathbf{v} : [N] \rightarrow \mathcal{C}$, on a une arête $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ si et seulement si il existe exactement un k dans $[N]$ tel que $\mathbf{u}(k) \neq \mathbf{v}(k)$, et ce k vérifie $\mathbf{v}(k) = \mathbf{u}(k) + 1$ (pour l'addition de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$), et $\mathbf{u}(i) \notin \{\mathbf{u}(k), \mathbf{v}(k)\}$ pour tout $i < k$. Le graphe ainsi obtenu est noté $\text{Cyclic}_4(N)$ dans [BS1, BS2], et sera noté $\text{CH}_4(N)$ dans le présent article.

Le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ agit naturellement par translation sur \mathcal{C} et donc sur $\mathcal{C}^{[N]}$, et il est manifeste que cette action préserve le graphe ci-dessus. En d'autres termes, $\text{CH}_4(N)$ possède un automorphisme d'ordre quatre (si $N \geq 1$, et d'ordre un dans le cas trivial $N = 0$). Cette action sera notée additivement: pour $k \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^{[N]}$, on note $k + \mathbf{u}$ l'empilement \mathbf{u} translaté de k quarts de tour.

Le graphe orienté $\text{qCH}_4(N)$, quotient de $\text{CH}_4(N)$ par cette action, est défini de la manière usuelle (pour les multigraphes): ses sommets/arêtes sont les orbites de l'action de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur les sommets/arêtes de $\text{CH}_4(N)$. En particulier, il possède 4^{N-1} sommets si $N \geq 1$.

C'est encore un graphe simple: une arête de $\text{qCH}_4(N)$ est entièrement déterminée par ses sommets de départ et d'arrivée. Cela résulte du petit résultat suivant, laissé au lecteur: si $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ et $\mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{v}'$ sont deux arêtes de $\text{CH}_4(N)$, et k, ℓ deux éléments de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ vérifiant $\mathbf{u}' = k + \mathbf{u}$ et $\mathbf{v}' = \ell + \mathbf{v}$, alors $k = \ell$. De manière équivalente, c'est le même disque qui se déplace dans ces deux arêtes.

D'autre part, l'involution $\tau_0 : x \mapsto -x$ sur $\mathcal{C} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, c'est-à-dire l'échange des colonnes 1 et 3, induit un anti-automorphisme involutif τ du graphe $\text{CH}_4(N)$: si on a deux empilements $\mathbf{u}, \mathbf{v} : [N] \rightarrow \mathcal{C}$ et une arête $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$, alors on a une arête $\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{u}'$ entre les empilements $\mathbf{u}' = \tau_0 \circ \mathbf{u}$ et $\mathbf{v}' = \tau_0 \circ \mathbf{v}$. Elle induit également un anti-automorphisme involutif sur le graphe quotient $\text{qCH}_4(N)$, qu'on notera encore τ .

L'équation $z^3 - z^2 - 2 = 0$ admet une unique solution réelle Z , simple, qu'on peut calculer par la formule de Cardan: si on pose $W = (28 + \sqrt{27 \cdot 29})^{1/3}$, on a

$$Z = \frac{W + 1 + W^{-1}}{3} \simeq 1.69562 \quad (2.1)$$

On appellera Z la *constante de Zimmermann*. (Pour plus de décimales, voir l'OEIS [Slo], suite A289265.) Dans le plan complexe, l'équation possède deux autres solutions simples, mutuellement conjuguées, de module $\sqrt{2/Z} \simeq 1.086$.

Définissons la suite $A(0), A(1), A(2), \dots$ par la formule de récurrence suivante:

$$A(N) = \begin{cases} 1 & \text{si } N < 3, \\ A(N-1) + 2A(N-3) & \text{si } N \geq 3. \end{cases} \quad (2.2)$$

C'est la suite A077949 de l'OEIS [Slo]. En voici les premières valeurs:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$A(N)$	1	1	1	3	5	7	13	23	37	63	109	183	309	527

On voit immédiatement que les $A(N)$ sont tous des entiers naturels impairs. On en déduit que $A(N) \equiv (-1)^N \pmod{4}$ si $N \geq 2$, puis que $A(N) \equiv 6 - (-1)^N \pmod{8}$ si $N \geq 4$.

On définit maintenant la suite $B(0), B(1), B(2), \dots$ comme suit:

$$B(N) = \begin{cases} N & \text{si } N \leq 3, \\ \frac{3}{4} [A(N+1) + (-1)^N] & \text{si } N \geq 3. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ses premières valeurs sont

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$B(N)$	0	1	2	3	6	9	18	27	48	81	138	231	396	669

Par les remarques ci-dessus, les $B(N)$ sont tous des entiers naturels. En outre, $B(N)$ a la même parité que N :

$$\forall N \quad B(N) \equiv N \pmod{2} \quad (2.4)$$

et on vérifie sans peine que les suites $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$ sont croissantes. Par ailleurs, de la définition des $B(N)$ on déduit

$$\forall N \geq 6 \quad B(N) - B(N-1) - 2B(N-3) = 3(-1)^N$$

et par conséquent

$$\forall N \geq 7 \quad B(N) = B(N-2) + 2B(N-3) + 2B(N-4). \quad (2.5)$$

Les nombres $A(N)$ ont pour série génératrice la fonction rationnelle

$$\sum_{n \geq 0} A(n)z^n = \frac{1}{1-z-2z^3}$$

qui, comme fonction méromorphe de z , possède une singularité de plus petit module en $1/Z$, un pôle simple de résidu $-1/(3Z-2)$. On en déduit les équivalents

$$A(N) \sim \frac{Z^N}{3-2/Z} \quad (2.6)$$

$$B(N) \sim \frac{Z^N}{2(Z-1)(Z-2/3)} \quad (2.7)$$

pour N grand.

Une relaxation naturelle du problème original de Scorer et al. consiste à laisser l'empilement initial non spécifié, et demander seulement que l'empilement final soit symétrique par rapport au centre du plateau. Dans ce cadre, on a le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Pour tout entier naturel N , il existe un empilement initial de N disques sur la Tour d'Hanoï Cyclique à 4 aiguilles, et une suite valide de mouvements de disques qui déplace cet empilement d'un demi-tour, avec la propriété suivante: pour tout k dans $[N]$, le disque k effectue*

$$2[B(N-k) - B(N-k-1)] \quad (2.8)$$

mouvements; autrement dit, pour tout $M \leq N$, les M plus grands disques effectuent en tout $2B(M)$ mouvements.

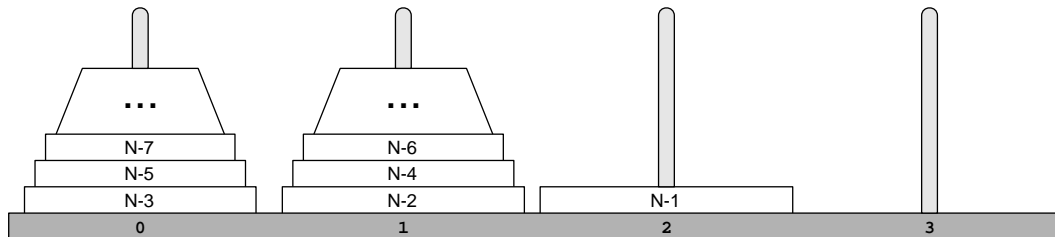
Cet énoncé appelle quelques remarques. D'abord, le nombre total de mouvements de disques est $2B(N)$, donc en $O(Z^N)$ d'après (2.7), comme annoncé dans l'Abstract.

Ensuite, demander que l'empilement effectue un demi-tour équivaut à demander que le nombre de mouvements de chaque disque soit congru à 2 modulo 4; les nombres (2.8) vérifient bien cette propriété, en vertu de (2.4).

On note enfin que tout disque k parmi les trois plus grands, c'est-à-dire tel que $k \geq N-3$, effectue 2 mouvements, ce qui est le minimum possible. En particulier, ces disques sont toujours sur des tiges différentes, et l'empilement initial qui apparaît dans le théorème n'est jamais un

empilement parfait (si $N \geq 2$). Le théorème ne fournit donc pas de majoration directe de $S_2(N)$. Je reviendrai sur ce problème dans la section 4.

Durant la soumission de cet article, un rapporteur anonyme m'a fait remarquer que les demi-tours construits dans la section suivante possèdent une propriété supplémentaire: ils contiennent des empilements très particuliers, où une colonne est vide, la colonne précédente contient uniquement le plus grand disque, et les autres disques sont disposés alternativement sur les deux colonnes restantes (avec éventuellement un échange, inessentiel, des disques $N - 2$ et $N - 3$), comme sur la figure suivante:



Par conséquent, cet empilement peut être pris comme l'empilement initial du demi-tour.

Ce résultat est certainement correct, à en croire les expériences sur ordinateur, mais je ne crois pas qu'on puisse le déduire des méthodes présentées dans la section suivante — en tout cas, pas sans des complications substantielles. Je me contente donc de mentionner ce résultat, mais je ne chercherai pas à en donner une preuve.

3 Démonstration du Théorème 2.1

Le théorème affirme l'existence, pour tout N , d'un chemin dans $\text{CH}_4(N)$ allant d'un sommet \mathbf{u} au sommet $2 + \mathbf{u}$, avec un certain nombre de mouvements pour chaque disque; ce chemin, projeté dans $\text{qCH}_4(N)$, devient un circuit puisque les empilements de départ et d'arrivée diffèrent seulement par translation.

Réciproquement, un circuit $\Gamma(N)$ dans $\text{qCH}_4(N)$ où les nombres de mouvements de disques sont donnés par (2.8), répond au problème posé: en effet, comme on l'a vu plus haut, ces nombres sont congrus à 2 modulo 4, ce qui revient à dire que l'empilement final diffère de l'empilement initial par un demi-tour. La démonstration consistera donc à construire de tels circuits.

Remarquons également que, si on a une solution du problème avec $N + 1$ disques, on peut en déduire une solution à N disques, en oubliant les positions et les mouvements du disque le plus petit. Il suffit donc de résoudre le problème pour N assez grand, disons $N \geq 3$. Cela suggère également de construire une solution à $N + 1$ disques à partir d'une solution à N disques, en ajoutant un nouveau disque plus petit que tous les autres, dont on intercalera les mouvements entre ceux, donnés, des N disques initiaux.

J'aurai besoin d'imposer une condition combinatoire supplémentaire sur les circuits $\Gamma(N)$ pour $N \geq 4$, basée sur la notion suivante.

Considérons deux mouvements consécutifs de disques dans la Tour d'Hanoï cyclique:

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{w} \tag{3.1}$$

où \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} sont trois sommets de $\text{CH}_4(N)$. Dans le premier mouvement, de \mathbf{u} vers \mathbf{v} , un disque se déplace d'une colonne c vers $c + 1$. Dans le second mouvement, un disque se déplace d'une colonne c' vers $c' + 1$. Le *biais* entre ces deux mouvements est défini comme l'élément de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ égal à $c' - c$.

Le biais est toujours non nul: il est impossible d'avoir $c = c'$. En effet, après un mouvement de disque de la tige c vers $c + 1$, les disques restant sur la tige c sont plus gros que celui qu'on vient de déplacer et qui est maintenant sur la tige $c + 1$, ce qui interdit d'avoir un nouveau mouvement de c vers $c + 1$.

Le biais peut donc seulement prendre les valeurs 1, 2, 3 (comme éléments de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$). Notons que le biais vaut 1 si et seulement si c 'est le même disque qui se déplace dans les deux mouvements. Bien sûr, le biais est invariant par l'action de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur $\text{CH}_4(N)$: pour tout k dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, le biais dans

$$k + \mathbf{u} \rightarrow k + \mathbf{v} \rightarrow k + \mathbf{w}$$

vaut $(k + c') - (k + c) = c' - c$. Par conséquent, le biais passe au quotient dans $\text{qCH}_4(N)$: si on a deux arêtes $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}$ entre trois sommets $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ de $\text{qCH}_4(N)$, on en définit le biais comme le biais d'un quelconque relèvement (3.1) de ces arêtes dans $\text{CH}_4(N)$.

L'anti-automorphisme τ de $\text{CH}_4(N)$ préserve également le biais: si on l'applique à (3.1), on obtient un nouveau couple d'arêtes consécutives $\tau\mathbf{w} \rightarrow \tau\mathbf{v} \rightarrow \tau\mathbf{u}$, dont le biais est $(-c - 1) - (-c' - 1) = c' - c$. Bien sûr, cette propriété reste vraie dans le graphe quotient $\text{qCH}_4(N)$.

Dans un circuit de $\text{CH}_4(N)$ ou $\text{qCH}_4(N)$, de longueur L ,

$$\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{x}_L = \mathbf{x}_0,$$

on peut calculer, en chaque sommet, le biais entre les arêtes entrante et sortante: on obtient ainsi un mot de longueur L sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$, qu'on appellera la *signature* du circuit. Choisir un autre sommet origine pour le circuit revient à appliquer une permutation circulaire aux \mathbf{x}_i , et la signature du circuit sera transformée par cette même permutation circulaire. D'autre part, si on applique l'anti-automorphisme τ , on obtient un nouveau circuit

$$\tau\mathbf{x}_0 = \tau\mathbf{x}_L \rightarrow \tau\mathbf{x}_{L-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau\mathbf{x}_0$$

dont la signature est, à permutation circulaire près, le "mot miroir" de la signature du circuit initial, constitué des mêmes lettres mais écrites dans l'ordre inverse.

Commençons par la construction de $\Gamma(3)$.

De manière générale, comme le fait remarquer Stockmeyer [Sto], si on a un circuit Γ dans $\text{CH}_4(N)$ ou $\text{qCH}_4(N)$, et qu'on note $\mathcal{N}_\Gamma(k)$ le nombre de mouvements effectués par le disque k , la fonction $\mathcal{N}_\Gamma : [N] \rightarrow \mathbb{N}$ est décroissante: si $k < k'$ alors $\mathcal{N}_\Gamma(k) \geq \mathcal{N}_\Gamma(k')$. Si on suppose de plus $\mathcal{N}_\Gamma(k') > 0$, l'égalité $\mathcal{N}_\Gamma(k) = \mathcal{N}_\Gamma(k')$ est satisfaite si et seulement si les disques k, k' sont à chaque instant sur des aiguilles distinctes. Dans le cas présent, où $N = 3$, on veut que le circuit $\Gamma = \Gamma(3)$ fasse faire 2 mouvements à chacun de ses disques: ils devront donc toujours se trouver sur des aiguilles distinctes.

En restriction à ces empilements, c'est-à-dire aux fonctions injectives $[3] \rightarrow \mathcal{C}$, les graphes $\text{CH}_4(3)$ et $\text{qCH}_4(3)$ se simplifient beaucoup: à partir d'un empilement (injectif) donné, il y a exactement un mouvement de disque possible, consistant à placer sur l'aiguille vide le disque situé juste à sa gauche. Après six mouvements, chaque disque a effectué deux mouvements, et l'empilement initial a effectué un demi-tour: ceci définit un circuit de longueur 3 dans $\text{qCH}_4(3)$. En fait, il y a deux circuits de longueur 3, qui correspondent aux deux ordres cycliques possibles des trois disques sur le plateau de jeu, et se transforment l'un en l'autre par l'anti-automorphisme τ , ou par une permutation impaire des disques. Nous pouvons prendre pour $\Gamma(3)$ l'un quelconque de ces deux circuits.

Remarquons qu'à chaque mouvement, la colonne vide "recule" d'un quart de tour, et donc, chaque mouvement de disque est en retrait d'un quart de tour par rapport au précédent: tous les biais sont égaux à 3, et la signature du circuit $\Gamma(3)$ est 333333.

La construction de $\Gamma(N + 1)$ à partir de $\Gamma(N)$, pour $N \geq 3$, se base sur une idée déjà proposée par Stockmeyer [Sto], sous le nom “ignore the smallest” (page 7 de l’article). Comme indiqué plus haut, on prescrit d’abord les mouvements des N plus grands disques, selon $\Gamma(N)$, entre lesquels on insèrera les mouvements du “nouveau disque”, le disque 0. On déplacera ce disque 0 de la manière la plus “paresseuse” possible: comme écrit Stockmeyer, “push the smallest disk along the cycle whenever it is in the way of the next move to be made”. Précisons cela.

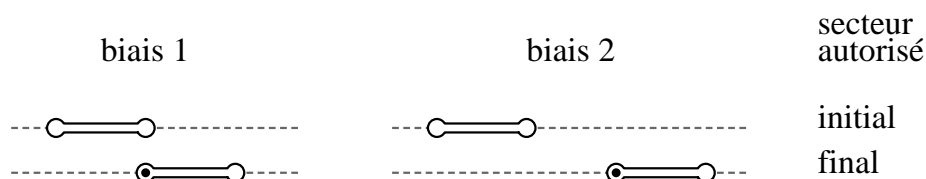
D’abord, tout mouvement d’un disque $k > 0$ est compatible, par construction, avec les positions des autres disques non-nuls; seul le disque 0 peut gêner le mouvement de k . Si k doit se déplacer d’une colonne c vers $c + 1$, il est nécessaire et suffisant qu’à ce moment, le disque 0 ne soit sur aucune de ces deux colonnes; autrement dit, le disque 0 doit être quelque part dans l’ensemble $\{c + 2, c + 3\}$, qu’on pourrait appeler le “secteur autorisé”. En résumé, lors de tout mouvement de disque non-nul, il y a deux positions possibles pour le disque nul: la colonne “de gauche” $c + 2$ et la colonne “de droite” $c + 3$.

La construction du circuit $\Gamma(N + 1)$ nécessite donc de spécifier la position relative du disque nul (gauche/droite du secteur autorisé) lors de chaque mouvement de disque non-nul. Si le circuit initial $\Gamma(N)$ est de longueur $L = L(N)$, on doit fixer les valeurs de L variables booléennes, ce qui autorise 2^L possibilités. C’est beaucoup. Comment sélectionner les plus prometteuses?

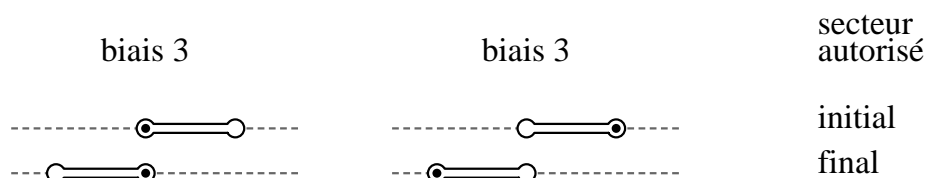
La condition de Stockmeyer peut se formuler comme une contrainte entre les positions relatives (gauche/droite) du disque nul lors de deux mouvements successifs de disques non-nuls, de la manière suivante. Si, lors d’un mouvement de disque non-nul, le disque 0 se trouve sur une tige c_0 , et que lors du mouvement suivant de disque non-nul, il peut se trouver en c ou $c + 1$, on doit choisir celle des deux colonnes qui est accessible à partir de c_0 avec un minimum de mouvements: c’est-à-dire la colonne “de droite” $c + 1$ quand $c + 1 = c_0$, et la colonne “de gauche” c dans tous les autres cas.

En outre, le déplacement du disque nul de la colonne c_0 vers cette nouvelle colonne doit bien se faire avec le minimum de mouvements, c’est-à-dire au plus trois: pas question de faire plusieurs fois le tour du plateau. . .

Examinons de plus près cette contrainte, en observant qu’entre deux mouvements successifs de disques non-nuls, le “secteur autorisé” pour le disque nul avance de b quarts de tour, où b est exactement le biais entre les deux mouvements. A l’intérieur de ce secteur, j’indiquerai par un point noir la position du disque nul, si je la connais (au départ ou à l’arrivée).



On voit que si le biais vaut 1 ou 2, lors du second mouvement de disque non-nul, le disque 0 se retrouve toujours sur la tige de gauche du secteur autorisé, quelle que soit sa position initiale (i.e. lors du premier mouvement).



Si le biais vaut 3, la position finale du disque 0 dépend de sa position initiale. S’il était initialement “à gauche”, il se retrouve “à droite” du nouveau secteur, sans avoir fait aucun

mouvement. S'il était "à droite" du secteur initial, il se retrouve "à gauche" du nouveau secteur, après avoir effectué deux mouvements.

Ecrivons le circuit initial $\Gamma(N)$ comme une suite de points noirs, représentant les *mouvements* de disques (dans le circuit initial; ce seront les disques non-nuls dans $\Gamma(N+1)$), séparés par des segments. Au dessus de ces "points", indiquons la position relative du disque nul: '<' pour la colonne de gauche, '>' pour la colonne de droite. Et, sur le segment joignant deux points noirs consécutifs, écrivons le biais entre les deux mouvements.

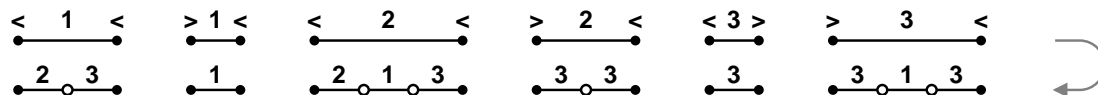
Avec ces notations, la discussion précédente sur la condition de Stockmeyer peut se résumer ainsi: entre deux mouvements consécutifs de disques non-nuls, le triplet (p_1, b, p_2) constitué du biais b et des positions relatives p_1, p_2 du disque nul, peut prendre les six valeurs suivantes:



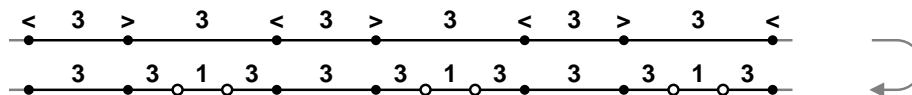
que j'écrirai aussi <1<, etc. La connaissance de ce triplet suffit à déterminer les mouvements du disque nul entre les deux mouvements de disques non-nuls; ces mouvements seront représentés par des points blancs.

Examinons par exemple le cas <1<. Le premier mouvement de disque non-nul se fait d'une certaine colonne c vers $c+1$. Lors de ce mouvement, il y a deux positions autorisées pour le disque nul, à savoir $c+2$ et $c+3$, et par hypothèse, le disque nul est à gauche, c'est-à-dire sur la colonne $c+2$. Le second mouvement de disque non-nul a lieu de $c+1$ vers $c+2$, puisque $b=1$. A ce moment, le disque nul doit être en $c+3$ ou $c+4$, et par hypothèse il est encore à gauche, c'est-à-dire ici sur la colonne $c+3$. Donc, entre les deux mouvements de disques non-nuls, le disque nul effectue un mouvement, de $c+2$ vers $c+3$. Le biais avec le mouvement précédent (d'un disque non-nul) vaut 2, et le biais avec le mouvement suivant vaut 3.

Les autres cas se traitent similairement, et on obtient finalement que la transformation de $\Gamma(N)$ en $\Gamma(N+1)$ se fait selon les règles suivantes, appliquées à chaque segment entre deux points noirs:



Appliquons ces règles pour construire $\Gamma(4)$ à partir de $\Gamma(3)$. La signature du circuit initial est 333333: puisque tous les biais sont égaux à 3, la position relative (gauche/droite) du disque nul doit alterner entre les mouvements successifs de disques non-nuls. A permutation circulaire près, on peut supposer qu'il est initialement à gauche. Le circuit se transforme alors comme suit:



Le nouveau circuit $\Gamma(4)$ est de longueur $L(4) = 12 = 2B(4)$, ce qui est bien la valeur attendue, et sa signature, à permutation circulaire près, est 3331 3331 3331.

La construction de $\Gamma(N+1)$ à partir de $\Gamma(N)$, pour $N \geq 4$, est essentiellement similaire. Cependant, j'imposerai que la signature des circuits $\Gamma(N)$ pour tout $N \geq 4$, soit (à permutation circulaire près) constituée de "blocs" parmi les quatre suivants:

$$331, 3331, 333331, 333231, \tag{3.2}$$

autrement dit, dans le sous-monoïde de $\{1, 2, 3\}^*$ engendré (librement) par ces quatre mots. Cette propriété est bien satisfaite pour $N = 4$; il faudra s'assurer qu'elle reste préservée quand on passe de N à $N + 1$ disques.

Les mots ci-dessus se terminent tous par '1', donc chaque "bloc" est immédiatement précédé par la lettre '1', et la position initiale du disque nul, à l'entrée de n'importe quel bloc, est à gauche. On en déduit que les différents blocs se transforment comme suit:

$$\begin{array}{ll}
\langle 3 \rangle 3 \langle 1 \rangle & \longrightarrow \quad 3 \ 313 \ 23 \\
\langle 3 \rangle 3 \langle 3 \rangle 1 & \longrightarrow \quad 3 \ 313 \ 3 \ 1 \\
\langle 3 \rangle 3 \langle 3 \rangle 3 \langle 3 \rangle 1 & \longrightarrow \quad 3 \ 313 \ 3 \ 313 \ 3 \ 1 \\
\langle 3 \rangle 3 \langle 3 \rangle 2 \langle 3 \rangle 1 & \longrightarrow \quad 3 \ 313 \ 3 \ 33 \ 3 \ 1
\end{array}$$

On note que dans la colonne de droite, tous les mots commencent par '33'. Sans affecter la signature du nouveau circuit, sinon par une permutation circulaire, on peut supposer que ce facteur 33 apparaît plutôt en fin de mot, ce qui nous amène à considérer la substitution

$$\begin{array}{ll}
331 & \longrightarrow \quad 132333 \\
3331 & \longrightarrow \quad 133 \ 133 \\
333331 & \longrightarrow \quad 1333 \ 133 \ 133 \\
333231 & \longrightarrow \quad 133333 \ 133
\end{array}$$

Comme on le voit, la signature du nouveau circuit est constituée de "blocs" parmi les quatre suivants:

$$133, 1333, 133333, 132333$$

qui ne sont pas les mots autorisés (3.2), mais leurs images miroir. On doit donc, pour finir, appliquer l'anti-automorphisme τ au circuit ainsi construit, ce qui a pour effet de "retourner" la signature, et on obtient ainsi un circuit $\Gamma(N + 1)$ ayant la bonne combinatoire.

Il reste à déterminer la longueur $L(N)$ des circuits obtenus par cette construction, pour $N \geq 4$. Pour cela, notons x_N, y_N, z_N, t_N le nombre de blocs de la forme 331, 3331, 333331, 333231 dans la signature de $\Gamma(N)$, si bien que $L(N) = 3x_N + 4y_N + 6z_N + 6t_N$. En examinant la substitution ci-dessus (combinée avec le retournement des mots), on voit que ces nombres se transforment de la manière suivante:

$$\forall N \geq 4 \quad \begin{cases} x_{N+1} = 2y_N + 2z_N + t_N \\ y_{N+1} = z_N \\ z_{N+1} = t_N \\ t_{N+1} = x_N \end{cases}$$

avec les valeurs initiales $x_4 = z_4 = t_4 = 0$ et $y_4 = 3$. En voici les premières valeurs:

N	x_N	y_N	z_N	t_N	$L(N)$	$B(N)$
4	0	3	0	0	12	6
5	6	0	0	0	18	9
6	0	0	0	6	36	18
7	6	0	6	0	54	27

On peut écrire

$$\forall N \geq 4 \quad L(N) = (3 \ 4 \ 6 \ 6) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{N-4} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où la matrice carrée M a pour polynôme caractéristique

$$\det(X.\mathbf{1} - M) = X^4 - X^2 - 2X - 2 = (X + 1)(X^3 - X^2 - 2)$$

et donc $M^4 - M^2 - 2M^1 - 2M^0 = 0$. Il en résulte que

$$\forall N \geq 4 \quad L(N + 4) - L(N + 2) - 2L(N + 1) - 2L(N) = 0$$

qui est la même relation de récurrence que la relation (2.5) satisfaite par les $B(N)$. De plus, le tableau ci-dessus montre que $L(N) = 2B(N)$ pour $N = 4, 5, 6, 7$. Il en résulte que $L(N) = 2B(N)$ pour tout $N \geq 4$, ce qui termine la preuve du Théorème 2.1.

4 Majorations de $S_\ell(N)$ et λ_4

Berend et Sapir ont démontré [BS1, BS3] que les suites $S_\ell(N)$ croissent exponentiellement, dans le sens suivant: il existe un nombre réel $\lambda_4 > 1$ tel que pour tout $\ell \in \{1, 2, 3\}$, la suite $S_\ell(N)^{1/N}$ tend vers λ_4 quand $N \rightarrow \infty$.

Pour $N \geq 1$ donné, disons qu'un circuit Γ dans $\text{CH}_4(N)$ est *essentiel* si chaque disque effectue au moins un mouvement — ou, ce qui revient au même, si le plus grand disque effectue au moins un mouvement.

Notons $\text{dist}(-, -)$ la fonction distance dans $\text{CH}_4(N)$: entre deux sommets \mathbf{u}, \mathbf{v} , la distance (asymétrique) $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est le plus petit nombre de mouvements de disques permettant d'aller de \mathbf{u} à \mathbf{v} . Si W est un ensemble non vide de sommets, on définit son diamètre $\text{diam}(W)$ comme le maximum de $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pour $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$.

La Proposition suivante, et sa démonstration, s'inspirent du Théorème 2 de l'article [BS2] de Berend et Sapir.

Proposition 4.1. *Soit Γ un circuit essentiel dans $\text{CH}_4(N)$, où $N \geq 1$. Alors*

$$\text{diam } \text{CH}_4(N) \leq (2N - 1) \text{diam}(\Gamma).$$

Démonstration. Soit \mathbf{v} un empilement quelconque de N disques. Comme le circuit Γ est essentiel, chaque disque visite chaque colonne; en particulier, il existe dans Γ des empilements $\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1}$ tels que

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0(N - 1) = \mathbf{v}(N - 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N-1}(0) = \mathbf{v}(0) \end{cases}$$

Définissons maintenant les empilements $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{N-1}$ de la manière suivante:

$$\mathbf{v}_\ell(k) = \begin{cases} \mathbf{u}_\ell(k) & \text{si } k \leq N - \ell - 1, \\ \mathbf{v}(k) & \text{si } k \geq N - \ell - 1. \end{cases}$$

En particulier, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0$ et $\mathbf{v}_{N-1} = \mathbf{v}$.

On note que, pour $0 \leq \ell \leq N - 2$, les empilements $\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_{\ell+1}$ et \mathbf{v} coïncident en restriction aux $\ell + 1$ plus grands disques: $\mathbf{v}_\ell(k) = \mathbf{v}_{\ell+1}(k) = \mathbf{v}(k)$ si $k \geq N - \ell - 1$. D'autre part, \mathbf{v}_ℓ coïncide avec \mathbf{u}_ℓ , et $\mathbf{v}_{\ell+1}$ avec $\mathbf{u}_{\ell+1}$, en restriction aux $N - \ell - 1$ disques restants: $\mathbf{v}_\ell(k) = \mathbf{u}_\ell(k)$ et $\mathbf{v}_{\ell+1}(k) = \mathbf{u}_{\ell+1}(k)$ si $k < N - \ell - 1$. Par conséquent, si on prend une suite valide de mouvements

allant de \mathbf{u}_ℓ à $\mathbf{u}_{\ell+1}$, et qu'on ignore les mouvements des $\ell + 1$ plus grands disques, on obtient une suite valide de mouvements allant de \mathbf{v}_ℓ à $\mathbf{v}_{\ell+1}$. On a donc

$$\text{dist}(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_{\ell+1}) \leq \text{dist}(\mathbf{u}_\ell, \mathbf{u}_{\ell+1}) \leq \text{diam}(\Gamma)$$

et

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) &= \text{dist}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_{N-1}) \\ &\leq \text{dist}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) + \cdots + \text{dist}(\mathbf{v}_{N-2}, \mathbf{v}_{N-1}) \\ &\leq (N - 1) \text{diam}(\Gamma). \end{aligned}$$

Par un argument similaire (ou en utilisant l'anti-automorphisme τ pour se ramener au problème précédent), pour tout empilement \mathbf{s} de N disques, on peut trouver un empilement \mathbf{t}_0 dans Γ tel que

$$\text{dist}(\mathbf{s}, \mathbf{t}_0) \leq (N - 1) \text{diam}(\Gamma)$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{s}, \mathbf{v}) &\leq \text{dist}(\mathbf{s}, \mathbf{t}_0) + \text{dist}(\mathbf{t}_0, \mathbf{u}_0) + \text{dist}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \\ &\leq (N - 1) \text{diam}(\Gamma) + \text{diam}(\Gamma) + (N - 1) \text{diam}(\Gamma) \\ &= (2N - 1) \text{diam}(\Gamma) \end{aligned}$$

et cette inégalité est valable pour tous \mathbf{s}, \mathbf{v} sommets de $\text{CH}_4(N)$, ce qu'il fallait démontrer. \square

D'autre part, le Théorème 2.1 affirme l'existence d'un circuit essentiel de longueur $4B(N)$ dans $\text{CH}_4(N)$, pour tout $N \geq 1$. Avec la Proposition 4.1, cela implique

$$\forall \ell \in \{1, 2, 3\} \quad \forall N \geq 1 \quad S_\ell(N) \leq (2N - 1)(4B(N) - 1) \leq 8N B(N) \quad (4.1)$$

et donc $\limsup S_\ell(N)^{1/N} \leq \limsup B(N)^{1/N}$, c'est-à-dire

$$\lambda_4 \leq Z \quad (4.2)$$

en accord avec ce qui a été annoncé dans l'Introduction.

5 Comment minorer le nombre de mouvements

Le Théorème 2.1 affirme qu'on peut faire un demi-tour dans $\text{CH}_4(N)$ avec $2B(N)$ mouvements de disques. Il est naturel de se demander si ce nombre est optimal. Une question liée, au vu de la section précédente, est de savoir si l'inégalité (4.2), déduite de ce théorème, pourrait être une égalité.

Une manière d'aborder ces questions est d'utiliser la notion de *poids moyen minimum/maximum* (minimum/maximum cycle mean) dans un graphe pondéré [DBR, Law, Kar]. Soit V un ensemble fini, $E \subseteq V \times V$ un graphe simple sur V , et $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction "poids". Etant donné un réel c , on voudrait savoir s'il existe une fonction $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in E \quad w(x, y) \leq c + p(y) - p(x). \quad (5.1)$$

On note que, si une telle fonction existe, alors pour tout circuit $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_L = x_0$ du graphe, on a

$$\frac{w(x_0, x_1) + w(x_1, x_2) + \cdots + w(x_{L-1}, x_L)}{L} \leq c. \quad (5.2)$$

Le membre de gauche de (5.2) est le *poids moyen* du circuit (et son numérateur, le poids total). Comme il est bien connu, la réciproque est vraie: si tout circuit vérifie l'inégalité (5.2), alors l'inéquation fonctionnelle (5.1) possède une solution.

Si le graphe est non acyclique, il existe une plus petite constante c qui convient: c'est le maximum des poids moyens de tous les circuits (poids moyen maximum). On le notera $\beta(G)$, où G est le graphe pondéré (V, E, w) . (Bien sûr, on a une propriété de dualité similaire pour le poids moyen minimum.)

Ce maximum est atteint sur un circuit simple (c.à.d. qui ne passe pas deux fois par le même sommet), ce qui montre en particulier que si w est à valeurs entières, alors $\beta(G)$ est un nombre rationnel, dont le dénominateur n'excède pas le nombre de sommets du graphe.

Pour $N \geq 1$, considérons le graphe $\text{CH}_4(N)$ muni de la fonction poids suivante: $w(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vaut 1 si l'arête $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ provient d'un mouvement du plus grand disque, et 0 dans le cas contraire. Le poids moyen d'un circuit dans ce graphe pondéré est donc simplement la proportion (entre 0 et 1) de mouvements du plus grand disque. En particulier, les circuits essentiels sont exactement ceux de poids non nul. Notons $\beta(N)$ le poids moyen maximum de ce graphe pondéré.

C'est un nombre rationnel dans $[0, 1]$, strictement positif car il existe des circuits essentiels. D'autre part, dans tout circuit, le plus grand disque effectue moins de mouvements (au sens large) que n'importe quel autre, si bien que la proportion de mouvements du plus grand disque ne peut excéder $1/N$; et donc,

$$\forall N \geq 1 \quad 0 < \beta(N) \leq 1/N.$$

Notons aussi que la fonction poids w sur $\text{CH}_4(N)$ est invariante par l'action de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; elle passe donc au quotient en une fonction poids sur $\text{qCH}_4(N)$, dont le poids moyen maximum est le même que pour le graphe pondéré $\text{CH}_4(N)$.

Il existe de nombreux algorithmes permettant de calculer le poids moyen maximum (ou minimum) d'un graphe pondéré donné, voir par exemple les articles de revue [HO, Das]. Le plus connu, l'algorithme de Karp [Kar], peut en principe donner un résultat exact, sous forme de fraction, si les poids sont entiers. Avec une implémentation naïve, où les calculs sont faits en virgule flottante, j'obtiens les valeurs suivantes pour les $\beta(N)$, dans la limite des erreurs d'arrondi de l'ordinateur:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\beta(N)$	1	1/2	1/3	1/6	1/9	1/18	1/27	1/48	1/81	1/138	1/231

Ces résultats numériques amènent à conjecturer que

$$\forall N \geq 1 \quad \beta(N) = 1/B(N) \tag{5.3}$$

et nous allons démontrer que c'est effectivement le cas.

La minoration $\beta(N) \geq 1/B(N)$ découle immédiatement du Théorème 2.1, qui affirme l'existence dans $\text{qCH}_4(N)$ d'un circuit de poids moyen $1/B(N)$.

Et l'inégalité inverse $\beta(N) \leq 1/B(N)$ équivaut à l'énoncé suivant:

Théorème 5.1. *Soit Γ un circuit quelconque dans $\text{CH}_4(N)$ ou $\text{qCH}_4(N)$, avec $N \geq 1$. Alors*

$$B(N) x_{N-1} \leq x_0 + x_1 + \cdots + x_{N-1} \tag{5.4}$$

où $x_i = \mathcal{N}_\Gamma(i)$ est le nombre de mouvements du disque i dans Γ .

Ecrivons l'inégalité cherchée sous la forme

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_{N-2} + (1 - B(N)) x_{N-1} \geq 0.$$

Le membre de gauche s'interprète comme le poids (total) du circuit Γ , où chaque arête $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ du graphe $\text{CH}_4(N)$ est munie d'un poids $w(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, qui vaut $1 - B(N)$ si l'arête provient d'un mouvement du plus grand disque, et $+1$ dans le cas contraire.

Le Théorème 5.1 affirme que dans ce graphe pondéré, tout circuit est de poids positif — autrement dit, que le poids moyen minimum de ce graphe est positif. Comme mentionné plus haut, il est bien connu [Sch, Zwi] que cette propriété est satisfaite si et seulement si il existe une fonction $p : \mathcal{C}^{[N]} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$p(\mathbf{v}) - p(\mathbf{u}) \leq w(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

pour toute arête $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ du graphe. Et il existe des algorithmes classiques, notamment celui de Bellman-Ford [Bel, For] pour construire, dans n'importe quel graphe pondéré donné, une telle fonction p si elle existe, et sinon prouver qu'il n'en existe aucune. Ces algorithmes, très faciles à programmer (je tiens ma propre implémentation `check_pos` à la disposition des lecteurs intéressés), permettent de vérifier le Théorème pour les petites valeurs de N , au moins jusqu'à $N = 16$. Avec le même programme, et d'autres poids, on prouve le Lemme suivant:

Lemme 5.2. *Pour tout circuit Γ dans $\text{CH}_4(4)$ ou $\text{qCH}_4(4)$, on a*

$$x_0 \geq x_2 + 2x_3 \tag{5.5}$$

et pour tout circuit Γ dans $\text{CH}_4(6)$ ou $\text{qCH}_4(6)$, on a

$$x_0 + x_1 \geq 3x_3 + 3x_4 + 6x_5 \tag{5.6}$$

où $x_i = \mathcal{N}_\Gamma(i)$ est le nombre de mouvements du disque i dans Γ .

Cependant, un tel programme ne peut pas suffire à démontrer le Théorème 5.1, ni la Proposition ci-dessous, car ces énoncés portent sur une infinité de graphes différents.

Nous allons démontrer le Théorème 5.1 en nous appuyant sur la Proposition suivante, dont la démonstration fera l'objet du chapitre suivant.

Proposition 5.3. *Soit Γ un circuit quelconque dans $\text{CH}_4(N)$ ou $\text{qCH}_4(N)$, avec $N \geq 4$. Alors*

$$x_0 + x_1 \geq 2x_3 + 4(x_4 + x_5 + \cdots + x_{N-1}) \tag{5.7}$$

où $x_i = \mathcal{N}_\Gamma(i)$ est le nombre de mouvements du disque i dans Γ .

Démonstration du Théorème 5.1. On fixe le nombre de disques N , et on suppose que le résultat est vrai pour tout nombre de disques strictement plus petit.

Soit Γ un circuit quelconque dans $\text{CH}_4(N)$, et $x_i = \mathcal{N}_\Gamma(i)$ les nombres de mouvements des disques: ils forment, d'après Stockmeyer [Sto], une suite décroissante. Pour tout entier M tel que $1 \leq M \leq N$, notons Γ_M le circuit de $\text{CH}_4(M)$ obtenu à partir de Γ en gardant seulement les positions et mouvements des M plus grands disques, et

$$y_M = x_{N-1} + x_{N-2} + \cdots + x_{N-M}$$

sa longueur, c'est-à-dire le nombre de mouvements des M plus grands disques dans Γ . L'hypothèse de récurrence appliquée à ces circuits permet d'affirmer que

$$\forall M < N \quad y_M \geq B(M) y_1 \tag{5.8}$$

et on doit démontrer que

$$y_N \geq B(N) y_1. \tag{5.9}$$

Pour $N = 1, 2, 3$, on a $y_N \geq N y_1$ car la suite des x_i est décroissante, ce qui est le résultat cherché puisque $B(N) = N$ si $N \leq 3$.

Pour $N = 4$, on a $y_3 \geq 3y_1$ d'après (5.8), et d'autre part $x_0 \geq 3x_3$ par le Lemme 5.2, donc $y_4 = y_3 + x_0 \geq 6y_1$, ce qui est l'inégalité cherchée.

Pour $N = 6$, on a $y_4 \geq 6y_1$ d'après (5.8), et d'autre part $x_0 + x_1 \geq 12x_5$ par le Lemme 5.2, donc $y_6 = y_4 + x_0 + x_1 \geq 18y_1$, ce qui est l'inégalité cherchée.

Enfin, si $N = 5$ ou $N \geq 7$, on a l'égalité

$$B(N) = B(N - 2) + 2B(N - 3) + 2B(N - 4)$$

(voir (2.5)), dont on déduit

$$\begin{aligned} B(N)y_1 &= B(N - 2)y_1 + 2B(N - 3)y_1 + 2B(N - 4)y_1 \\ &\leq y_{N-2} + 2y_{N-3} + 2y_{N-4} \end{aligned}$$

d'après (5.8). D'autre part, la Proposition 5.3 affirme que

$$y_N \geq y_{N-2} + 2y_{N-3} + 2y_{N-4} \quad (5.10)$$

et on a par conséquent $y_N \geq B(N)y_1$, qui est l'inégalité cherchée. \square

Les “demi-tours” donnés par le Théorème 2.1, vus comme circuits dans $\text{qCH}_4(N)$, réalisent l'égalité dans (5.4), et comme cette inégalité est déduite de la Proposition 5.3, il est naturel de penser que ces circuits vont aussi réaliser l'égalité dans (5.7).

C'est effectivement le cas, à quelques exceptions près. En effet, ces circuits satisfont $y_M = 2B(M)$ pour tout $M \leq N$, et donc pour ces circuits, l'inégalité (5.7), ou l'inégalité (5.10) qui lui est équivalente, s'écrit

$$B(N) \geq B(N - 2) + 2B(N - 3) + 2B(N - 4) \quad (5.11)$$

pour $N \geq 4$. D'après (2.5), cette inégalité est une égalité pour tout $N \geq 7$, et il se trouve qu'on a aussi égalité pour $N = 5$. En revanche, quand N vaut 4 ou 6, l'inégalité (5.11) est stricte, et donc moins fine que (5.4) — ce qui explique pourquoi ces valeurs particulières de N nécessitent un traitement spécial dans la démonstration du Théorème 5.1.

Bien sûr, l'inégalité (5.11) est très facile à démontrer, mais la Proposition 5.3 qui en est pour ainsi dire une extension, l'est beaucoup moins.

Du Théorème 5.1 et de la Proposition 5.3, on déduit les résultats suivants.

Corollaire 5.4. *Pour tous $\ell \in \{1, 2, 3\}$ et N entier naturel, on a*

$$S_\ell(N) \geq \ell B(N). \quad (5.12)$$

Démonstration. Toute suite de mouvements faisant avancer une tour de N disques de ℓ quarts de tour définit un circuit dans $\text{qCH}_4(N)$ où le plus grand disque effectue au moins ℓ mouvements. Par le Théorème 5.1, un tel circuit est toujours de longueur $\geq \ell B(N)$. \square

Corollaire 5.5. *On a $\lambda_4 = Z$, c'est-à-dire que pour tout $\ell \in \{1, 2, 3\}$, la suite $S_\ell(N)^{1/N}$ tend vers Z quand $N \rightarrow \infty$.*

Démonstration. En combinant l'inégalité précédente avec (4.1), on obtient l'encadrement

$$\ell B(N) \leq S_\ell(N) \leq 8N B(N)$$

d'où le résultat, sachant que $B(N)^{1/N} \rightarrow Z$. \square

Corollaire 5.6. *Pour tout $\ell \in \{1, 2, 3\}$, on a*

$$\forall N \geq 4 \quad S_\ell(N) \geq S_\ell(N-2) + 2S_\ell(N-3) + 2S_\ell(N-4).$$

Démonstration. Soit Γ un chemin dans $\text{CH}_4(N)$, partant d'une tour de N disques sur la tige 0 et aboutissant à une tour de N disques sur la tige ℓ , de longueur minimale. Comme plus haut, on définit les chemins Γ_M dans $\text{CH}_4(M)$, pour tout $M \leq N$, en conservant uniquement les positions et mouvements des M plus grands disques, et on note $y_M = x_{N-1} + \dots + x_{N-M}$ leur longueur; en particulier, on a $y_N = S_\ell(N)$.

Chacun de ces chemins part d'une tour de M disques sur la tige 0 et aboutit à une tour de M disques sur la tige ℓ , sans être nécessairement de longueur minimale: on peut donc seulement affirmer que $y_M \geq S_\ell(M)$, quel que soit $M \leq N$.

La projection du chemin Γ dans $\text{qCH}_4(N)$ est un circuit, auquel on peut appliquer la Proposition 5.3, qui s'écrit

$$y_N \geq y_{N-2} + 2y_{N-3} + 2y_{N-4}$$

et entraîne précisément le résultat cherché. \square

6 Démonstration de la Proposition 5.3

Profil d'un empilement. La notion de "profil" n'est pas spécifique à la variante cyclique de la Tour d'Hanoï; on peut le définir pour un nombre arbitraire de colonnes et des mouvements quelconques entre colonnes. Dans ce qui suit, \mathcal{C} désignera un quelconque ensemble fini (l'ensemble des aiguilles), dont le cardinal P est supposé ≥ 2 , et on considèrera des mouvements de disques entre colonnes quelconques.

Soit $\mathbf{u} : [N] \rightarrow \mathcal{C}$ un empilement de N disques sur \mathcal{C} . Dans un premier temps, supposons qu'aucune colonne n'est vide. On peut alors définir la "fonction largeur" $L_{\mathbf{u}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$ de l'empilement, par la formule

$$L_{\mathbf{u}}(c) = \text{Inf } \mathbf{u}^{-1}\{c\} = \text{Inf } \{k \in [N] : \mathbf{u}(k) = c\} \quad (6.1)$$

c'est-à-dire que la "largeur" $L_{\mathbf{u}}(c)$ de la colonne c est la taille du disque situé au sommet de cette colonne, et qui est aussi, bien sûr, le plus petit. Remarquons que la fonction $L_{\mathbf{u}}$ est injective.

Si c_1, c_2 sont deux colonnes distinctes quelconques, les règles de la Tour d'Hanoï autorisent à déplacer un disque de c_1 vers c_2 si et seulement si

$$L_{\mathbf{u}}(c_1) < L_{\mathbf{u}}(c_2). \quad (6.2)$$

On voit que cette condition ne dépend de l'empilement \mathbf{u} que par l'intermédiaire de la fonction $L_{\mathbf{u}}$, et plus précisément, de l'ordre qu'elle induit sur \mathcal{C} . En effet, si on note $\leq_{\mathbf{u}}$ l'ordre total sur \mathcal{C} défini par

$$\forall a, b \in \mathcal{C} \quad a \leq_{\mathbf{u}} b \iff L_{\mathbf{u}}(a) \leq L_{\mathbf{u}}(b),$$

la condition s'écrit simplement $c_1 <_{\mathbf{u}} c_2$. On dira que l'ordre $\leq_{\mathbf{u}}$ est le *profil* de l'empilement, et on le notera $\text{prof}(\mathbf{u})$.

La définition ci-dessus pose problème si l'empilement \mathbf{u} possède des colonnes vides. Bien sûr, on pourrait continuer à définir $L_{\mathbf{u}}$ par la formule (6.1), qui donne $L_{\mathbf{u}}(c) = +\infty$ pour les colonnes vides, et le critère (6.2) resterait inchangé. Le problème est que cette fonction $L_{\mathbf{u}}$ n'est plus nécessairement injective, et donc n'induit plus un ordre sur \mathcal{C} , mais seulement un préordre: s'il y a plusieurs colonnes vides, il ne peut pas les départager.

Une manière de résoudre cette difficulté serait d'enregistrer dans le profil la liste des colonnes non vides: on définirait un profil comme un sous-ensemble de \mathcal{C} muni d'un ordre total.

Cette façon de faire serait certainement la plus propre. Mais pour le problème qui nous occupe présentement (démontrer la Proposition 5.3), elle apporte des complications significatives dans la définition des profils et leurs règles de transition, sans contrepartie.

Je présenterai donc une autre approche, beaucoup moins canonique mais bien adaptée au problème présent, qui consiste pour ainsi dire à “forcer” les colonnes à être toujours non vides. Choisissons un ordre total sur \mathcal{C} ou, ce qui revient au même, une bijection $\omega : \mathcal{C} \rightarrow [P]$. Il nous permettra de départager les colonnes vides. On définit alors la fonction largeur $L_{\mathbf{u}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$ par la formule modifiée suivante

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{u}}(c) &= \text{Inf } \mathbf{u}^{-1}\{c\} \sqcup \{N + \omega(c)\} \\ &= \text{Inf } \{k \in [N] : \mathbf{u}(k) = c\} \sqcup \{N + \omega(c)\}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Bien sûr, cette formule se ramène à (6.1) pour les colonnes non vides. Avec cette nouvelle définition, valable pour des empilements quelconques, la fonction $L_{\mathbf{u}}$ est toujours injective, et induit un ordre total sur \mathcal{C} que je noterai encore $\text{prof}(\mathbf{u})$, même si la notation $\text{prof}(\mathbf{u}, \omega)$ serait préférable, afin d’expliciter la dépendance en ω .

Evidemment, le choix d’un ordre total sur \mathcal{C} a pour effet de briser toutes les symétries qui pouvaient exister entre les colonnes; en particulier, pour la tour d’Hanoï cyclique, l’opération $\mathbf{u} \mapsto \text{prof}(\mathbf{u})$ ne commute pas avec l’action naturelle de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur les colonnes.

Notons qu’on peut écrire

$$L_{\mathbf{u}}(c) = \text{Inf } \mathbf{U}^{-1}\{c\}$$

où $\mathbf{U} : [N + P] \rightarrow \mathcal{C}$ est l’empilement de $N + P$ disques défini par

$$\mathbf{U}(k) = \begin{cases} \mathbf{u}(k) & \text{si } k < N, \\ \omega^{-1}(k - N) & \text{si } k \geq N. \end{cases}$$

En d’autres termes, on s’est ramené à la situation précédente d’un empilement sans colonne vide, en ajoutant fictivement un disque à la base de chaque tige (et donc P disques en tout). Contrairement aux vrais disques, ces disques fictifs, numérotés de N à $N + P - 1$, ne peuvent pas se déplacer: leurs positions sont imposées par la fonction ω .

Avec cette nouvelle définition du profil, qui autorise l’empilement \mathbf{u} à avoir des colonnes vides, la condition $c_1 <_{\mathbf{u}} c_2$ demeure une condition *nécessaire* pour pouvoir déplacer un disque de la colonne c_1 vers c_2 . Mais ce n’est plus une condition suffisante: l’inégalité pourrait être satisfaite alors que les deux colonnes sont vides.

Posons le problème de manière plus précise: soient c_1, c_2 deux colonnes distinctes, et $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ deux empilements de N disques sur \mathcal{C} , tels qu’il existe un mouvement de disque de c_1 vers c_2 qui transforme \mathbf{u}_1 en \mathbf{u}_2 . Que peut-on dire des profils de \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 , sachant c_1 et c_2 ?

Remarquons que les fonctions largeur $L_{\mathbf{u}_1}$ et $L_{\mathbf{u}_2}$ satisfont les relations suivantes:

- (1) Pour tout $c \in \mathcal{C} - \{c_1, c_2\}$, $L_{\mathbf{u}_1}(c) = L_{\mathbf{u}_2}(c)$;
- (2) $L_{\mathbf{u}_1}(c_1) = L_{\mathbf{u}_2}(c_2)$;
- (3) $L_{\mathbf{u}_1}(c_1) < L_{\mathbf{u}_1}(c_2)$;
- (4) $L_{\mathbf{u}_2}(c_2) < L_{\mathbf{u}_2}(c_1)$.

Notons \leq_1 et \leq_2 les profils de \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 , et soit τ_{c_1, c_2} la bijection $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ qui transpose les éléments c_1 et c_2 . Des propriétés ci-dessus, on déduit que les profils satisfont les conditions suivantes:

- (a) L’application restreinte $\tau_{c_1, c_2} : (\mathcal{C} - \{c_2\}, \leq_1) \rightarrow (\mathcal{C} - \{c_1\}, \leq_2)$ est un isomorphisme d’ensembles ordonnés;
- (b) $c_1 \leq_1 c_2$;
- (c) $c_2 \leq_2 c_1$.

On observe que les trois conditions ci-dessus sont équivalentes aux deux conditions suivantes:

(d) Pour tous $a, b \in \mathcal{C} - \{c_1, c_2\}$, $a \leq_1 b \iff a \leq_2 b$;

(e) Pour tout $b \in \mathcal{C}$, $c_1 \leq_1 b \iff c_2 \leq_2 b$.

Notons $\text{TO}(\mathcal{C})$ l'ensemble (de cardinal $P!$) de tous les ordres totaux sur \mathcal{C} , et pour tous c_1, c_2 éléments distincts de \mathcal{C} , notons $\text{Mov}(c_1, c_2)$ le sous-ensemble de $\text{TO}(\mathcal{C}) \times \text{TO}(\mathcal{C})$ constitué de tous les couples (\leq_1, \leq_2) qui vérifient les conditions (a), (b), (c) ou, ce qui revient au même, les conditions (d) et (e).

Pour résumer les observations ci-dessus, s'il existe un mouvement de disque de la colonne c_1 vers c_2 qui transforme l'empilement \mathbf{u}_1 en \mathbf{u}_2 , alors $(\text{prof } \mathbf{u}_1, \text{prof } \mathbf{u}_2) \in \text{Mov}(c_1, c_2)$.

Le résultat suivant, que je n'utiliserai pas et dont je laisse la démonstration au lecteur, affirme qu'il n'y a pas d'autres contraintes sur les profils de \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 , sachant c_1 et c_2 . (Une indication: traiter d'abord le cas $N = P + 1$.)

Lemme 6.1. *Soient c_1, c_2 deux éléments distincts de \mathcal{C} , et p_1, p_2 deux ordres totaux sur \mathcal{C} tels que $(p_1, p_2) \in \text{Mov}(c_1, c_2)$. Pour tout entier $N > P$, on peut trouver deux empilements $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ de N disques sur \mathcal{C} , sans aucune colonne vide, de profils p_1, p_2 respectivement, et un mouvement de disque de la colonne c_1 vers c_2 qui transforme \mathbf{u}_1 en \mathbf{u}_2 .*

Variante cyclique. Revenons à la Tour d'Hanoï cyclique. Ici, on a $\mathcal{C} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et les mouvements entre colonnes $c_1 \rightarrow c_2$ autorisés sont ceux pour lesquels $c_2 - c_1 = 1$, c'est-à-dire que nous avons seulement à examiner les relations $\text{Mov}(c, c + 1)$ pour $c \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Bien sûr, elles ne diffèrent les unes des autres que par une permutation circulaire des colonnes, et dans ce qui suit, nous allons examiner uniquement $\text{Mov}(0, 1)$.

Pour décrire un ordre total sur \mathcal{C} , j'écrirai la liste de ses éléments rangés par ordre croissant: ainsi, le mot 2013 signifie l'ordre total pour lequel $2 < 0 < 1 < 3$.

Examinons par exemple le profil initial 0123. Pour ce profil, on a les inégalités $0 < 2 < 3$ et donc, par la propriété (a), on doit avoir $1 < 2 < 3$ dans le profil final (après le mouvement d'un disque de la colonne 0 vers la colonne 1). Le profil initial satisfait bien $0 < 1$, comme l'exige la condition (b). Enfin, par la condition (c), on doit avoir $1 < 0$ dans le profil final. Il y a donc trois possibilités pour le profil final: 1023, 1203 et 1230.

Les autres profils se traitent de même, et on trouve que $\text{Mov}(0, 1)$ contient 28 couples de profils, donnés par les transitions

0123, 0213, 0231 ----> 1023, 1203, 1230

0132, 0312, 0321 ----> 1032, 1302, 1320

2013, 2031 ----> 2103, 2130

3012, 3021 ----> 3102, 3120

2301 ----> 2310

3201 ----> 3210

Démonstration de la Proposition 5.3. On doit montrer une inégalité de la forme

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{N-1}x_{N-1} \geq 0$$

pour tout circuit Γ dans $\text{CH}_4(N)$, où x_i est le nombre de mouvements du disque i dans Γ , et les a_i des coefficients réels. Notons que le membre de gauche peut s'interpréter comme le poids (total) du circuit Γ , en associant à chaque arête $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ du graphe $\text{CH}_4(N)$ le poids a_i , où i est la taille du disque déplacé.

On a déjà vu des énoncés de ce type, notamment dans le Lemme 5.2. Mais ici on doit prouver la propriété pour *tout* $N \geq 4$, ce qui amène à considérer des graphes pondérés arbitrairement grands. Remarquons cependant que la suite des poids (a_i) n'est pas quelconque; elle est constante à partir d'un certain rang, ce qui permet de réécrire l'inégalité cherchée sous la forme

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{4+}x_{4+} \geq 0$$

avec $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -2$, $a_{4+} = -4$, et $x_{4+} = x_4 + x_5 + \dots$ désigne le nombre de mouvements effectués par les disques de taille 4 et plus.

Appelons *primaires* les (quatre) disques de taille < 4 , et *secondaires* tous les autres, c'est-à-dire ceux de taille ≥ 4 . L'ensemble $\mathcal{C}^{[N]}$ des sommets de $\text{CH}_4(N)$ peut s'écrire

$$\mathcal{C}^{[N]} = \mathcal{C}^{[4]} \times \mathcal{C}^{[N]-[4]} \simeq \mathcal{C}^{[4]} \times \mathcal{C}^{[N-4]}$$

c'est-à-dire qu'un empilement de N disques peut être vu comme un couple, constitué de l'empilement des disques primaires suivi de l'empilement des disques secondaires.

Relativement à cette écriture produit, les arêtes de $\text{CH}_4(N)$ peuvent être de deux formes: les arêtes "primaires", de la forme

$$(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \longrightarrow (\mathbf{p}', \mathbf{s})$$

où $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$ est une arête quelconque de $\text{CH}_4(4)$, c'est-à-dire un mouvement de disque primaire, et \mathbf{s} un quelconque empilement secondaire; et d'autre part les arêtes "secondaires", de la forme

$$(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \longrightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{s}')$$

où $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}'$ est une arête dans $\text{CH}_4(N-4)$, c'est-à-dire un mouvement de disque secondaire, d'une colonne c vers $c+1$, tel que ces deux colonnes ne contiennent aucun disque de \mathbf{p} .

L'idée de la preuve est de considérer un graphe plus simple, indépendant de N , où les empilements secondaires ont été remplacés par leurs profils.

De manière précise, considérons le graphe simple $\text{CH}_4^{\times\text{pr}}(4)$ défini comme suit: l'ensemble de ses sommets est

$$\mathcal{C}^{[4]} \times \text{TO}(\mathcal{C})$$

et ses arêtes sont de deux types: les arêtes primaires, de la forme

$$(\mathbf{p}, \sigma) \longrightarrow (\mathbf{p}', \sigma)$$

où $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$ est une arête quelconque de $\text{CH}_4(4)$, c'est-à-dire un mouvement de disque primaire, et σ un profil quelconque; et les arêtes secondaires, de la forme

$$(\mathbf{p}, \sigma_1) \longrightarrow (\mathbf{p}, \sigma_2)$$

où \mathbf{p} est un empilement primaire, et σ_1, σ_2 deux profils tels qu'il existe une colonne c pour laquelle $(\sigma_1, \sigma_2) \in \text{Mov}(c, c+1)$, et les colonnes c et $c+1$ ne contiennent aucun disque de \mathbf{p} .

On pondère ce graphe $\text{CH}_4^{\times\text{pr}}(4)$ en associant à chaque arête primaire le poids a_i , où i est la taille du disque déplacé, et à chaque arête secondaire le poids a_{4+} . Il n'est pas difficile de prouver, avec l'aide d'un ordinateur et des algorithmes classiques dont j'ai parlé plus haut, que dans le graphe $\text{CH}_4^{\times\text{pr}}(4)$ muni de cette pondération, tous les circuits sont de poids positif. Là encore, je tiens mon programme `hgprof` à la disposition des lecteurs intéressés.

D'autre part, on a une application évidente des sommets de $\text{CH}_4(N)$ vers les sommets de $\text{CH}_4^{\times\text{pr}}(4)$, à savoir

$$\begin{aligned} \varpi : \mathcal{C}^{[4]} \times \mathcal{C}^{[N-4]} &\longrightarrow \mathcal{C}^{[4]} \times \text{TO}(\mathcal{C}) \\ (\mathbf{p}, \mathbf{s}) &\longmapsto (\mathbf{p}, \text{prof } \mathbf{s}) \end{aligned}$$

et il est clair, par la définition de $\text{CH}_4^{\times\text{pr}}(4)$, que pour toute arête $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ dans $\text{CH}_4(N)$, on a une arête $\varpi\mathbf{u} \rightarrow \varpi\mathbf{v}$ dans $\text{CH}_4^{\times\text{pr}}(4)$, et de même poids.

En particulier, tout circuit de $\text{CH}_4(N)$ s'envoie par ϖ sur un circuit de $\text{CH}_4^{\times\text{pr}}(4)$, de même poids. Comme tous les circuits de $\text{CH}_4^{\times\text{pr}}(4)$ sont de poids positif, on en déduit que la même propriété est vraie dans le graphe pondéré $\text{CH}_4(N)$, ce qui démontre la Proposition 5.3.

Références

- [Bel] R. BELLMAN, *On a routing problem*, Quarterly of Applied Mathematics **16** (1958), 87–90
- [BS1] D. BEREND & A. SAPIR, *The cyclic multi-peg tower of Hanoi*, ACM Transactions on Algorithms **2** (2006), 297–317
- [BS2] D. BEREND & A. SAPIR, *The diameter of Hanoi graphs*, Information Processing Letters **98** (2006), 79–85
- [BS3] D. BEREND & A. SAPIR, *Which multi-peg Tower of Hanoi problems are exponential?*, Lecture Notes in Computer Science **7551** (2012)
- [DBR] G. B. DANTZIG, W. BLATTNER & M. R. RAO, *Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem*, in: P. ROSENSTIEHL (ed.), *Theory of graphs*, Dunod & Gordon and Breach (1967), 77–84
- [Das] A. DASDAN, *Experimental analysis of the fastest Optimum Cycle Ratio and Mean algorithms*, ACM Transactions on Design Automation of Electronic Systems **9** (2004), 385–418
- [For] L. R. FORD, *Network flow theory*, technical report P-923, The RAND Corporation (1956)
- [HO] M. HARTMANN & J. B. ORLIN, *Finding minimum cost to time ratio cycles with small integral transit times*, Networks **23**, Wiley (1993), 567–574
- [H+] A. M. HINZ, S. KLAVŽAR, U. MILUTINOVIĆ & C. PETR, *The tower of Hanoi, myths and maths*, Birkhäuser (2013)
- [Kar] R. M. KARP, *A characterization of the minimum cycle mean in a digraph*, Discrete Mathematics **23** (1978), 309–311
- [Law] E. L. LAWLER, *Optimal cycles in doubly weighted linear graphs*, in: P. ROSENSTIEHL (ed.), *Theory of graphs*, Dunod & Gordon and Breach (1967), 209–214
- [Sap] A. SAPIR, *The Tower of Hanoi for general graphs*, thèse de l’Université Ben-Gourion (2005)
- [Sch] A. SCHRIJVER, *On the history of the shortest path problem*, Documenta Mathematica, extra volume ISMP (2012), 155–167
- [SGS] R. S. SCORER, P. M. GRUNDY & C. A. B. SMITH, *Some binary games*, The Mathematical Gazette **28** (1944), 96–103
- [Slo] N. J. A. SLOANE, The On-line Encyclopedia of Integer Sequences, <http://oeis.org>
- [Sto] P. K. STOCKMEYER, *Variations on the four-post Tower of Hanoi puzzle*, Congressus Numerantium **102** (1994), 3–12
- [Zwi] U. ZWICK, *Computing shortest paths and detecting negative cycles*, preprint (2006)