



HAL
open science

Modélisation mathématique en biologie (MOMAB)

Tamara Servi, Pierre Poulain

► **To cite this version:**

Tamara Servi, Pierre Poulain. Modélisation mathématique en biologie (MOMAB). Licence. Modélisation mathématique en biologie (MOMAB), Paris, France. 2020, pp.193. hal-03263031

HAL Id: hal-03263031

<https://hal.science/hal-03263031>

Submitted on 16 Jun 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International License

Licence Sciences, Technologies, Santé
Mention : Sciences de la Vie

SV01U040

Modélisation mathématique en biologie (MOMAB)

Cours de Tamara Servi & Pierre Poulain
servi@math.univ-paris-diderot.fr
pierre.poulain@u-paris.fr

2020/2021



Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons Attribution - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International (CC BY-SA 4.0)

Université de Paris
UFR Sciences du Vivant - Bâtiment Buffon - 4 rue Marie-Andrée Lagroua Weill Hallé
75205 Paris Cedex 13
Téléphone 01-57-27-59-20 / Fax 01-57-27-59-21

Table des matières

I	Modèles mathématiques (Tamara Servi)	6
1	COURS I	7
1.1	Le langage mathématique	7
1.2	L'alphabet	9
1.2.1	Les nombres	9
1.3	Les expressions	11
1.3.1	Opérations arithmétiques	11
1.3.2	Valeur absolue	12
1.4	Les phrases	13
1.4.1	Manipulations arithmétiques des égalités et des inégalités	13
1.4.2	Équations et inéquations avec valeurs absolues	14
1.5	Ensembles et opérations ensemblistes	16
1.5.1	Les ensembles	16
1.5.2	Opérations ensemblistes	18
1.6	Pourcentages et taux	20
1.6.1	Pourcentages	20
1.6.2	Taux d'augmentation/diminution	20
1.7	Formulaire de géométrie plane et solide	22
1.8	Trigonométrie	25
1.9	La droite réelle	28
2	COURS II	31
2.1	Fonctions	31
2.1.1	Graphe	33
2.2	Systèmes dynamiques continus	33
2.2.1	Proportionnalité	34
2.3	Modèles polynomiales	35
2.3.1	Modèle linéaire	35
2.3.2	Modèle quadratique	35
2.3.3	Modèle polynomial de degré n	36
2.4	Rappels sur les limites et les dérivées	38
2.4.1	Limites et continuité	38

2.4.2	Calcul des limites	40
2.4.2.1	Croissance des limites	40
2.4.2.2	Théorème des gendarmes	40
2.4.2.3	Opérations arithmétiques et limites	41
2.4.3	La dérivée	42
2.4.4	Calcul des dérivées	42
2.4.4.1	Opérations arithmétiques et dérivées	42
3	COURS III	43
3.1	Exponentielles, logarithmes, parties entières	43
3.1.1	Puissances ou exponentielles	43
3.1.2	Logarithmes	45
3.1.3	Égalités et inégalités avec puissances et logarithmes	46
3.1.4	Parties entières	46
3.2	Modèles de type puissance, exponentiel et logarithmique	47
3.2.1	Modèle de type puissance	47
3.2.2	Modèle exponentiel (en base e)	50
3.2.3	Modèle logarithmique (en base e)	51
3.3	Suites	52
3.4	Systèmes dynamiques discrets	53
3.4.1	Suites arithmétiques	54
3.4.2	Suites géométriques	57
3.4.3	Suites arithmético-géométriques	59
3.4.4	La suite de Fibonacci	61
4	COURS IV	63
4.1	Notation scientifique	63
4.2	Encadrements	65
4.3	Ordres de grandeur	68
4.4	Approximations	69
4.5	Erreurs	70
4.6	Différence entre encadrements et approximations	72
5	COURS V	73
5.1	Étude graphique de fonction	73
5.1.1	Bornes	73
5.1.2	Croissance	74
5.1.3	Symétries et périodicité	74
5.2	Transformations élémentaires	75
5.3	Modèles homographiques, exponentiels, logarithmiques, sinusoïdales	78
5.3.1	Modèles homographiques	78
5.3.2	Modèles exponentiels	79
5.3.3	Modèles logarithmiques	80

5.3.4	Modèles sinusoïdales	80
5.4	Résolution graphique d'équations et inéquations	83
5.5	Rappels sur l'étude de fonction	85
5.5.1	Domaine et image	85
5.5.2	Limites aux bornes et asymptotes	85
5.5.3	Croissance et décroissance	86
5.5.4	Concavité et convexité	87
5.5.5	Bornes et extrema	87
5.6	Exemples d'étude de fonction	89
5.6.1	Fonction gaussienne	89
5.6.2	Fonction logistique	90
6	COURS VI	91
6.1	Résolution des formes indéterminées	91
6.1.1	Arithmétique infinie et formes indéterminées	91
6.1.2	Résolution des formes indéterminées	93
6.1.2.1	Terme dominant	93
6.1.2.2	La règle de l'Hôpital	96
6.2	Types de croissance	97
6.2.1	Comparaison de croissance aux bord du domaine	97
6.2.2	Propriétés de l'équivalence	98
6.2.3	Types de croissance	100
6.2.3.1	Croissance polynomiale	100
6.2.3.2	Croissance de type puissance (positive ou négative)	101
6.2.3.3	Croissance exponentielle	101
6.2.3.4	Croissance logarithmique	102
6.2.4	Comparaison entre les différents types de croissance	102
6.2.5	Comparaison de croissance sur un temps long	104
6.3	Fonctions rationnelles	106
7	COURS VII	113
7.1	Composition	113
7.1.1	Limite de la composition	114
7.1.2	Dérivée de la composition	114
7.2	La dérivée comme vitesse de variation	115
7.3	Vitesse de changement en fonction d'une fonction du temps et des paramètres	117
7.4	Fonctions de plusieurs variables	119
7.4.1	Dérivées partielles	120
7.4.2	Dérivée d'une composée de deux fonctions	121

II	Modèles de populations (Pierre Poulain)	124
8	COURS VIII	125
8.1	Ordres de grandeurs et calculs simples en biologie	125
8.1.1	Préfixes	125
8.1.2	Ordre de grandeurs et unités	126
8.1.3	Règle de proportionnalité, règle de 3 et produit en croix	127
8.1.4	Conversion d'unités	128
8.2	Modélisation mathématique en biologie	129
8.2.1	Notion de modèle	129
8.2.2	Utilité et limites des modèles	130
8.2.3	Quatre grandes étapes	130
8.2.4	Modélisation de l'évolution d'une population	131
8.2.4.1	Modèles discrets	131
8.2.4.2	Modèles continus	131
8.3	Modèles discrets de croissance	132
8.3.1	Choix du modèle discret	132
8.3.1.1	Modélisation d'après le contexte	133
8.3.1.2	Modélisation d'après des données expérimentales	133
8.3.2	Écart avec les points expérimentaux	137
8.3.3	Interpolation / extrapolation	138
8.3.4	Exemple : croissance de la masse moyenne d'une population de poissons	139
8.3.5	Croissance d'une population de bactéries	140
8.3.5.1	Approche théorique	140
8.3.5.2	Temps de génération de quelques espèces de bactéries	142
8.3.5.3	Représentation graphique	142
8.3.5.4	Méthodes de comptage expérimental de bactéries	144
8.3.6	Exemple : évolution d'une population de bactéries	145
8.3.6.1	Détermination du modèle et de ses paramètres	145
8.3.6.2	Détermination du temps de doublement	147
8.4	Ressources	149
9	COURS IX	151
9.1	Modèles continus d'évolution d'une population isolée	151
9.1.1	Modèle de Malthus	151
9.1.1.1	Évolution exponentielle	152
9.1.1.2	Décroissance exponentielle : la radioactivité	153
9.1.1.3	Croissance exponentielle de population	154
9.1.2	Modèle de Verhulst	157
9.1.2.1	Équation logistique	158

9.1.2.2	Rôle de la capacité biotique (K) : exemple d'une population de lapins	159
9.1.2.3	Effet de la population initiale	160
9.1.2.4	Détermination et stabilité des points d'équilibre	160
9.1.2.5	Exemple : croissance d'une population de bactéries	161
9.1.2.6	Exemple : croissance d'une population d'éléphants	162
9.1.2.7	Théorie de la sélection r/K	164
9.1.3	Modèle logistique avec effet de Allee	165
9.1.3.1	Dépendance positive à la population	165
9.1.3.2	Effet de Allee modéré	166
9.1.3.3	Effet de Allee fort	167
9.2	Ressources	168

Première partie

Modèles mathématiques (Tamara Servi)

Chapitre 1

COURS I

1.1 Le langage mathématique

Les mathématiques sont un langage, comme le français ou l'anglais.

Il y a un **alphabet** (les nombres, les lettres, les symboles...) qu'on utilise pour construire des mots ou **expressions** ($\frac{3}{4}$; $5,1$; $3x^2 - \frac{1}{2}$; $a + b \cdot c$, ...) en suivant certaines règles de syntaxe (" $a+$ " n'est pas une expression compréhensible). On peut combiner les expressions en **phrases** en utilisant les **verbes** ("être égal à...", "être plus petit que", "appartenir à l'ensemble de...",...), en obéissant aux règles de la grammaire. Comme en français, on peut **nier** une phrase, on peut combiner plusieurs phrases en utilisant des **connecteurs** ("...et...", "...ou...", "si...alors...", "...si et seulement si...") et on peut compléter une phrase en utilisant des **quantificateurs** ("il existe x tel que...", "pour tout nombre réel, on a...").

Une **assertion** est une phrase dont on peut affirmer sans ambiguïté si elle est vraie ou fausse : " $3 > 0$ " est une assertion (vraie), " $4 + 5 = 8$ " est une assertion (fausse!), " $x - y = 3$ " n'est pas une assertion car sa vérité dépend des valeurs de x et y .

Nous n'allons pas insister ici sur les règles de grammaire et sur comment établir la vérité ou la fausseté d'une assertion. Dans le type de problèmes que nous allons considérer tout cela sera clair de façon intuitive.

Cependant, nous allons utiliser le langage mathématique pour modéliser des problèmes scientifiques. Il est donc important d'apprendre à s'en servir correctement.

Notation.

- Comme en français, quand on dit en mathématiques "une chose **et** une autre", on entend aussi que les deux choses sont vérifiées au même temps. Le connecteur "et" s'appelle aussi une **conjonction**.
- En français quand on dit "une chose **ou** une autre" d'habitude on entend que l'une des deux choses est vérifiée mais pas les deux en même temps. Par contre, en mathématiques on n'exclut pas que les deux choses soient vérifiées en même temps. Le connecteur "ou" s'appelle aussi une **disjonction**.

- Soient A et B deux assertions. Pour abrégier la phrase “si A est vérifiée, alors B est aussi vérifiée” on dit aussi que “ A implique B ”, et on écrit $A \Rightarrow B$. Pour démontrer que l’**implication** $A \Rightarrow B$ est vraie, on peut procéder de trois façons différentes :
 - Par raisonnement direct : on suppose que A est vraie et on montre, sous cette hypothèse, que B est aussi vraie ;
 - Par contraposée : on suppose que B est fausse et on montre, sous cette assumption, que A est aussi fausse ;
 - Par l’absurde : on suppose que A est vraie et B est fausse, et on déduit une contradiction.
- Soient A et B deux assertions. Pour abrégier la phrase “ A est vérifiée si et seulement si B est vérifiée” on dit aussi que “ A est équivalente à B ”, et on écrit $A \Leftrightarrow B$. Pour démontrer que l’**équivalence** $A \Leftrightarrow B$ est vraie on peut aussi démontrer que A est fausse si et seulement si B est fausse. Au lieu d’écrire “si et seulement si” nous allons souvent écrire “ssi”.

Exemples 1.1.1.

- Nous verrons plus tard dans ce chapitre des exemples d’utilisation de la conjonction et de la disjonction dans des problèmes mathématiques.
- Démontrons, selon les trois méthodes différentes, que pour tout nombre réel x , si $x < 0$ alors $x^3 < 0$. Nous utilisons les règles de calcul de la section 1.3.

Méthode directe : supposons que $x < 0$. Par les règles de calcul, on a que $x \cdot x > 0$. Encore par les même règles, $x \cdot (x \cdot x)$ a le même signe que x , donc négatif.

Par contraposée : supposons que $x^3 \geq 0$. Nous avons deux cas : si $x^3 = 0$, alors, par les règles de calcul, $x = 0$. En particulier $x \geq 0$, et nous avons fini ce cas. Si $x^3 > 0$, alors ré-écrivons $x^3 = x^2 \cdot x$. Nous savons, par les règles de calcul, que tout carré est positif. Donc le signe de x est le même que le signe de x^3 , et nous avons fini.

Par l’absurde : supposons que $x < 0$ et $x^3 \geq 0$. Clairement x^3 ne peut pas être nul, si $x \neq 0$, donc nous pouvons supposer que $x^3 > 0$. Mais $x^3 = x^2 \cdot x$ et $x^2 > 0$, donc si $x < 0$ on a que le produit $x^2 \cdot x$ est aussi négatif. Ceci contredit notre hypothèse que $x^3 \geq 0$.

Une **équation** est une *question*, sous forme d’une égalité entre deux expressions qui contiennent une ou plusieurs **variables** (ou **inconnues**). Résoudre l’équation consiste à déterminer les valeurs des variables pour lesquelles l’égalité est vérifiée. Autrement dit, résoudre une équation consiste à chercher toutes ses **solutions**.

Les expressions qui apparaissent à droite et à gauche du symbole “=” dans une équation contiennent, en plus des variables, des constantes numériques et parfois des **paramètres**. Un paramètre est un symbole (une lettre d’un alphabet, d’habitude) qui désigne une valeur numérique que l’on suppose connue et fixée.

Exemple 1.1.2. Considérons l'équation $ax = 2b$, où a et b sont deux nombres réels fixés (avec $a \neq 0$) et x est une variable. Cette équation a une unique solution, c'est-à-dire la valeur $\frac{2b}{a}$. En effet, si on remplace la variable x par le nombre réel $\frac{2b}{a}$, nous obtenons une assertion vraie et si on remplace la variable x par n'importe quel autre nombre réel nous obtenons une assertion fausse. Les nombres réels a et b (qui sont fixés mais pas donnés de façon explicite dans notre problème) sont des paramètres. Pour tout choix de a et de b , nous avons une équation et la solution associée : si $a = b = 2$ alors la solution est $x = 2$, si $a = 2$ et $b = 3$ alors la solution est $x = 3$, etc.

Une **inéquation** est aussi une question, cette fois sous la forme d'une inégalité entre deux expressions qui contiennent des variables, des valeurs numériques et des paramètres. A nouveau, résoudre une inéquation consiste à trouver toutes ses solutions, c'est-à-dire, toutes les valeurs des variables pour lesquelles l'inégalité est vérifiée.

Exemple 1.1.3. L'inéquation $ax < b$, où x est une variable et a, b sont des paramètres, a comme solution tous les nombres réels qui sont strictement plus petits que le nombre réel $\frac{b}{a}$. Tout nombre qui est plus grand ou égal à $\frac{b}{a}$ n'est pas solution de cette inéquation.

1.2 L'alphabet

1.2.1 Les nombres

Pour débiter, nous allons étudier les différents types de **nombres** que nous utilisons pour décrire des phénomènes biologiques.

Les nombres les plus simples sont les nombres **naturels**, que nous utilisons pour compter :

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots, 25, \dots, 117, \dots, 10000, \dots$$

L'ensemble des nombres naturels est désigné par le symbole \mathbb{N} .

On se rend compte tout de suite que pour mesurer la température en hiver ou le niveau d'endettement d'un compte bancaire, on a aussi besoin de nombres négatifs. Plus généralement, si l'on soustrait deux nombres naturels dont le deuxième est plus grand que le premier, le résultat sera négatif.

Pour cette raison on introduit les nombres **entiers** :

$$-200, \dots, -1, 0, 1, \dots, 450, \dots$$

L'ensemble des nombres entiers est désigné par le symbole \mathbb{Z} .

Si l'on fait la somme, la soustraction ou le produit de deux nombres entiers, le résultat est à nouveau un nombre entier :

$$\begin{aligned} 3 + 6 &= 9 ; & 5 + (-8) &= -3 ; & 4 \times 5 &= 20 \\ 3 \times (-2) &= -6 ; & (-2) \times (-2) &= 4 ; & (-2) - 8 &= -10 \end{aligned}$$

Mais si l'on *divise* deux nombres entiers on peut obtenir comme résultat un nombre qui n'est pas entier, c'est à dire, une *fraction* :

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{5}, \frac{75}{11}, \dots$$

Les fractions sont aussi appelées nombres **rationnels** et l'ensemble des nombres rationnels est désigné par le symbole \mathbb{Q} .

Un nombre rationnel peut être représenté comme une fraction mais aussi par sa *représentation décimale* :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 0,5 ; & \frac{3}{4} &= 0,75 ; \\ \frac{7}{5} &= 1,4 ; & \frac{75}{11} &= 6,81818181\dots \end{aligned}$$

En France les développements décimaux s'écrivent avec une virgule comme séparateur : par exemple, $\frac{1}{2} = 0,5$. Dans les pays anglo-saxons on utilise plutôt un point comme séparateur décimal : $\frac{1}{2} = 0.5$. Il est important de bien connaître ces deux notations.

La représentation décimale d'un nombre rationnel a la propriété suivante : soit elle est *finie* (c'est à dire qu'il y a un nombre fini de chiffres non-nuls après la virgule ; par exemple, $\frac{1}{2} = 0,5 = 0,5000\dots$), soit elle est *périodique* (c'est à dire qu'à partir d'un certain point, les chiffres après la virgule se répètent ; par exemple, $\frac{75}{11} = 6,818181\dots$, que l'on écrit aussi comme $6,\overline{81}$, pour indiquer que le groupe "81" se répète indéfiniment).

Il existe aussi des nombres dont la représentation décimale est ni finie ni périodique. Il s'agit des nombres *irrationnels*, et ceux-ci ne peuvent pas être représentés par une fraction.

L'ensemble de **tous** les nombres qui ont une représentation décimale, qu'ils soient rationnels ou irrationnels, s'appelle l'ensemble des nombres **réels** et il est désigné par le symbole \mathbb{R} .

Exemples 1.2.1.

- Le nombre $0,\overline{3}$ est rationnel. Il correspond à la fraction $\frac{1}{3}$.
- Le nombre $0,294\overline{01} = 0,29401010101\dots$ est rationnel. En effet, à partir du quatrième chiffre après la virgule, il y a un groupe, le "01", qui se répète périodiquement.
- Le nombre 1,756 est rationnel. Puisque il a un développement décimal fini, il est possible de trouver facilement une fraction qui lui correspond. Comment ?
- Les nombres

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1,4\dots \\ \sqrt{3} &= 1,7\dots \\ \sqrt{5} &= 2,2\dots \end{aligned}$$

sont irrationnels.

$\sqrt{2}$ est la taille de la diagonale d'un carré de côté 1.

$\sqrt{3}$ est la taille de la hauteur d'un triangle équilatère de côté 2.

$\sqrt{5}$ intervient dans le **nombre d'or**, qui apparaît dans plusieurs manifestation de la nature (nous verrons des exemples plus tard).

- o Le nombre

$$\pi = 3,141592653\dots$$

est irrationnel.

π est la longueur de la circonférence d'un cercle de diamètre 1.

- o Le nombre

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \dots = 2,718281828459045\dots$$

est irrationnel. Le nombre e est appelé **nombre de Néper** et joue un rôle fondamentale dans la définition de la fonction exponentielle et du logarithme naturel.

1.3 Les expressions

1.3.1 Opérations arithmétiques

Nous connaissons déjà quelques opérations élémentaires entre nombres réels.

La somme, la soustraction, la multiplication (ou produit) et la division (ou quotient) sont des **opérations arithmétiques**.

Rappelons quelques propriétés de ces opérations et quelques **règles de calcul**.

- o Quand on additionne des nombres réels, l'ordre dans lequel on fait la somme n'est pas important : $4 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 4$.
- o De même pour la multiplication : $5 \times 1,2 = 1,2 \times 5$.
- o De plus, si l'on additionne plusieurs nombres réels, on peut le faire en plusieurs étapes, et le choix de l'ordre de ces étapes ne change pas le résultat. Pour calculer $2 + 4,5 + \frac{6}{5}$, je peux d'abord calculer $2 + 4,5$ et en suite ajouter $\frac{6}{5}$ au résultat obtenu. Mais je peux aussi d'abord calculer la somme $4,5 + \frac{6}{5}$ et ensuite ajouter 2. Avec les deux méthodes j'obtiens le même résultat à la fin.
- o De même pour la multiplication : $2 \times 3 \times 5 = 6 \times 5 = 2 \times 15$.
- o Si dans une même expression on a des sommes et des soustractions, on peut choisir librement dans quel ordre exécuter les opérations : $7 - 5 + 3 = 2 + 3 = 7 - 2$. En effet, si a et b sont deux nombres réels, alors faire la soustraction $a - b$ est la même chose que faire la somme $a + (-b)$. Pour tout nombre réel a , on a : $a + (-a) = 0$.

- De même si l'expression contient des produits et des divisions : $\frac{2 \times 3}{4} = \frac{2}{4} \times 3 = \frac{6}{4}$. En effet, si a et b sont deux nombres réels, alors faire la division $\frac{a}{b}$ est la même chose que faire le produit $a \times \frac{1}{b}$. Pour tout nombre réel a différent de zéro, on a : $a \times \frac{1}{a} = 1$.
- Par contre, si l'expression contient des sommes/soustractions et des multiplications/divisions, il existe des règles de priorité : pour calculer l'expression $3 \times 4 + 5$, je dois d'abord exécuter la multiplication 3×4 et ensuite additionner au résultat obtenu le nombre 5. Les multiplications/divisions ont la priorité sur les additions/soustractions. Pour donner la priorité à la somme, il faut ajouter des **parenthèses** : dans l'expression $3 \times (4 + 5)$, je dois d'abord exécuter la somme $4 + 5$ et ensuite multiplier par 3 le résultat obtenu.
- On peut multiplier ou diviser le numérateur et le dénominateur d'une fraction par la même quantité non nulle, sans changer la valeur de la fraction : le nombre rationnel 0,5 s'écrit comme la fraction $\frac{1}{2}$, mais aussi comme la fraction $\frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$ ou comme la fraction $\frac{1 \times 1,5}{2 \times 1,5} = \frac{1,5}{3}$, ou encore comme la fraction $\frac{1}{2}$, etc. La fraction $\frac{1}{2}$ est **réduite**, car il n'est plus possible de simplifier le numérateur et le dénominateur par des produits et des divisions.
- Pour faire la somme/différence de deux fractions, il faut trouver un **dénominateur commun**. La façon la plus simple d'y parvenir est de faire le produit des dénominateurs et la *somme/différence des produits croisés* des numérateurs et dénominateurs : $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{1 \times 5 + 4 \times 2}{2 \times 5} = \frac{5 + 8}{10} = \frac{13}{10}$.
- Pour faire le produit de deux fractions, il suffit de faire le produit des numérateurs et le produit des dénominateurs : $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$.
- Pour faire le quotient de deux fractions, il suffit de multiplier la première fraction par l'inverse de la deuxième : $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Notation 1.3.1. À partir de maintenant, nous utiliserons aussi le symbole “.” pour indiquer la multiplication. Quand on fait des calculs avec des expressions symboliques, on peut aussi omettre le symbole de multiplication : si a et b sont deux nombres réels, alors on écrit de façon interchangeable $a \times b$ ou $a \cdot b$, ou tout simplement ab , pour indiquer le produit de a et b .

1.3.2 Valeur absolue

Exemple 1.3.2. Un couple a deux enfants : une fille, Anne, et un garçon, Pierre. L'écart entre leurs âges respectifs est de trois ans, mais nous ne savons pas lequel des deux enfants est l'aîné. Si a_A est l'âge de Anne et a_P est l'âge de Pierre, alors $a_A - a_P = \pm 3$ ans. La différence d'âge est habituellement considérée commun nombre positif (ce serait bizarre de dire que leur différence d'âge est de -3 ans!). Nous cherchons donc une façon d'indiquer la valeur de cette différence sans nous occuper du signe. Pour cela nous pouvons utiliser la valeur absolue.

Rappelons que la **valeur absolue** d'un nombre réel a est définie comme :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Dans l'exemple ci-dessus nous indiquerons donc que la différence d'âge entre les deux enfants est $|a_A - a_P|$.

Rappels. La valeur absolue a les propriétés suivantes : pour tout choix arbitraire de deux nombres réels a et b , on a

$$|a| = 0 \text{ si et seulement si } a = 0$$

$$|a| \leq |b| \text{ si et seulement si } -|b| \leq a \leq |b|$$

$$|a| \geq |b| \text{ si et seulement si } (a \leq -|b| \text{ ou } a \geq |b|)$$

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a| = |b| \text{ si et seulement si } (a = b \text{ ou } a = -b)$$

$$|-a| = |a| ; \sqrt{a^2} = |a|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| ; \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

1.4 Les phrases

1.4.1 Manipulations arithmétiques des égalités et des inégalités

Étant donnés deux nombres réels a et b , nous savons dire s'ils sont égaux ou distincts. S'ils sont distincts, nous savons dire lequel des deux est le plus grand.

Notation 1.4.1. Si a est **égal** à b , alors on écrit $a = b$. On utilise la notation $a < b$ pour dire que a est **strictement plus petit que** b . Si a est **strictement plus grand que** b , alors on écrit $a > b$. La notation $a \leq b$ signifie que a est **plus petit ou égal** à b . De façon analogue, on définit la notation $a \geq b$.

Rappelons comment les opérations arithmétiques se comportent par rapport aux égalités et aux inégalités entre nombres ou entre expressions symboliques.

Soient a, b, c des nombres réels. Supposons que $a = b$. Nous pouvons alors déduire que :

- $-a = -b$;
- $a \pm c = b \pm c$ et $ac = bc$, pour tout c ;

- $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$, si a, b sont $\neq 0$;
- $a = c$ si et seulement si $b = c$.

Supposons que a, b soient deux nombres réels. Alors $a \cdot b = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$. De plus, $a \cdot b > 0$ si et seulement si a et b ont le même signe et $a \cdot b < 0$ si et seulement si a et b sont de signes différents.

Supposons maintenant que a, b soient deux nombres réels, avec $b \neq 0$. Alors $\frac{a}{b} = 0$ si et seulement si $a = 0$. De plus, $\frac{a}{b} > 0$ si et seulement si a et b ont le même signe et $\frac{a}{b} < 0$ si et seulement si a et b sont de signes différents.

Rappelons aussi que pour tous nombres réels a, b, c nous avons

$$c(a + b) = ca + cb.$$

L'expression de gauche est *factorisée*, l'expression de droite est *développée*.

Soient a, b, c des nombres réels. Supposons que $a \leq b$. Nous pouvons alors déduire que :

- $-a \geq -b$;
- $a \pm c \leq b \pm c$, pour tout c ;
- $ac \leq bc$, pour tout $c > 0$;
- $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$, si $a, b > 0$.

Pour conclure, soient a_1, a_2, b_1, b_2 des nombres réels. Si $a_1 \leq a_2$ et $b_1 \leq b_2$, alors :

- $a_1 + b_1 \leq a_2 + b_2$.
- $a_1 - b_2 \leq a_2 - b_1$. Par contre, nous ne pouvons rien dire sur les différences $a_1 - b_1$ et $a_2 - b_2$.
- $a_1 b_1 \leq a_2 b_2$, si tous les nombres sont > 0 .

1.4.2 Équations et inéquations avec valeurs absolues

Dans cette section nous illustrons le rôle de la conjonction et de la disjonction dans un problème mathématique assez courant.

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions qui contiennent la variable x .

- un nombre réel x est solution de l'équation $|A(x)| = B(x)$ ssi x satisfait l'un des deux systèmes ci-dessous :

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) = B(x) \end{cases} .$$

- un nombre réel x est solution de l'inéquation $|A(x)| > B(x)$ ssi x satisfait l'un des deux systèmes ci-dessous :

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) > B(x) \end{cases} .$$

- un nombre réel x est solution de l'équation $|A(x)| < B(x)$ ssi x satisfait le système ci-dessous :

$$\begin{cases} A(x) < B(x) \\ A(x) > -B(x) \end{cases} .$$

Exemples 1.4.2.

- x est solution de l'équation $|3x - 5| = 7x - 1$ ssi

$$\begin{cases} 3x - 5 \geq 0 \\ 3x - 5 = 7x - 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x - 5 < 0 \\ -3x + 5 = 7x - 1 \end{cases} ,$$

ssi

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ 4x = -4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < \frac{5}{3} \\ 10x = 6 \end{cases} .$$

Le premier système n'a pas de solution, car la solution de l'équation, $x = -1$, ne satisfait pas l'inéquation $x \geq \frac{5}{3}$. Le deuxième système a comme solution $x = \frac{3}{5}$. En effet, telle est la solution de l'équation, qui s'avère aussi vérifier l'inégalité $x < \frac{5}{3}$. Donc l'équation $|3x - 5| = 7x - 1$ a une unique solution $x = \frac{3}{5}$.

- x est solution de l'équation $|2x - 5| = x^2 - 4$ ssi

$$\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ 2x - 5 = x^2 - 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ -2x + 5 = x^2 - 4 \end{cases} ,$$

ssi

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{10} \end{cases} .$$

Le premier système n'a pas solution et le deuxième a deux solutions, $x = 1 + \sqrt{10}$ et $x = 1 - \sqrt{10}$.

- x est solution de l'inéquation $|4x - 1| > 2x$ ssi

$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ 4x - 1 > 2x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 4x - 1 < 0 \\ -4x + 1 > 2x \end{cases} ,$$

ssi

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < \frac{1}{4} \\ x < \frac{1}{6} \end{cases} .$$

Le premier système a comme solutions tous les x tels que $x > \frac{1}{2}$ et le deuxième système a comme solutions tous les x tels que $x < \frac{1}{6}$. Donc les solutions de l'inéquation initiale sont tous les x qui sont plus petits que $\frac{1}{6}$ ou plus grands que $\frac{1}{2}$.

- x est solution de l'inéquation $|2x + 3| < 4$ ssi, en appliquant la définition de la valeur absolue,

$$\begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ 2x + 3 < 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x + 3 < 0 \\ -2x - 3 < 4 \end{cases} ,$$

ssi

$$\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ x > -\frac{7}{2} \end{cases} .$$

Donc tous les x qui vérifient $-\frac{7}{2} < x < \frac{1}{2}$ sont solutions. En effet, on obtient le même résultat en appliquant la règle générale ci-dessus : x est solution ssi $-4 < 2x + 3 < 4$.

- x est solution de l'inéquation $|3x + 9| < -1$ ssi... cette inéquation n'a pas de solution, car la valeur absolue de n'importe quelle quantité est toujours ≥ 0 !

1.5 Ensembles et opérations ensemblistes

1.5.1 Les ensembles

Nous avons déjà utilisé de façon un peu informelle la notion d'*ensemble*. Un **ensemble** est tout simplement une collection d'objets.

Exemple 1.5.1. \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} sont des ensembles de nombres. Vous formez un ensemble d'étudiants. Une population est un ensemble d'individus. Un cercle, une droite, un triangle sont des ensembles de points du plan et une sphère est un ensemble de points de l'espace.

Nous allons maintenant introduire un peu de terminologie liée aux ensembles.

Si A est un ensemble et a est un objet qui fait partie de l'ensemble A , nous allons écrire

$$a \in A \text{ (} a \text{ appartient à } A, a \text{ est un élément de l'ensemble } A \text{)} .$$

Nous écrivons $a \notin A$ si a n'est pas un élément de l'ensemble A .

Si B est un autre ensemble et tout élément de B appartient aussi à A , alors nous allons écrire

$$B \subseteq A \text{ (} B \text{ est un sous-ensemble de } A, B \text{ est } \mathbf{inclu} \text{ dans } A, A \text{ contient } B \text{)} .$$

Si de plus B n'est pas égal à A (c'est à dire, A a des éléments qui ne sont pas dans B), alors nous allons dire que B est un sous-ensemble *propre* de A . Pour souligner que $B \neq A$, nous pouvons écrire $B \subsetneq A$.

Deux ensembles A et B sont *égaux* (et on écrit $A = B$) ssi ils ont exactement les mêmes éléments.

L'**ensemble vide** est l'ensemble qui n'a pas d'élément et on le note \emptyset .

Exemples 1.5.2.

- Soit F l'ensemble de tous les félins. Le chat Félix est un félin, et donc il appartient à F : en symboles, $\text{Félix} \in F$. Par contre, le chien Snoopy n'est pas un félin, donc $\text{Snoopy} \notin F$. Soit G l'ensemble de tous les chats domestiques. Tout chat est un félin, donc $G \subseteq F$. Les guépards sont aussi des félins mais ne sont pas des chats domestiques, donc $G \subsetneq F$, G est un sous-ensemble propre de F . Il n'y a pas de félins volants : si V est l'ensemble des félins volants, alors $V = \emptyset$.
- $2 \in \mathbb{N}$, mais aussi $2 \in \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Q}$, $2 \in \mathbb{R}$. En effet, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Puisque $-2 \in \mathbb{Z}$ mais $-2 \notin \mathbb{N}$, nous avons $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$. Puisque $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, nous avons $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$. Puisque $\pi \in \mathbb{R}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$, nous avons $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Nous avons deux façons de représenter la composition d'un ensemble :

- Nous pouvons faire une liste des éléments de l'ensemble entre accolades, en séparant un élément de l'autre par une virgule :

$$\begin{aligned} \text{Responsables de ce cours } R &= \{\text{Pierre, Tamara}\} \\ \text{Étudiants de ce cours } E &= \{\text{Agathe, Anton, Arthur, \dots, Yannis, Yasmine, Zakia}\} \\ \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \\ \mathbb{R} &= \left\{ \dots, -e, \dots, -1, \dots, \pi, \dots, \frac{27}{2}, \dots, e^{45}, \dots \right\} \end{aligned}$$

Cette façon de procéder n'est pas très appropriée si l'ensemble a un nombre élevé ou infini d'éléments : dans ce cas on est forcé de mettre des "...", ce qui ne correspond pas à une notation mathématique précise.

- Nous pouvons caractériser les éléments de l'ensemble par la propriété, ou les propriétés, qu'ils partagent :

$$\begin{aligned} E &= \{x \text{ tel que } x \in L1 - SDV\} \\ P &= \{x \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x \text{ est pair}\} \\ \mathbb{R}^{>0} &= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x > 0\} \end{aligned}$$

Plus généralement, si A est un ensemble et B est le sous-ensemble de A des objets caractérisés par la propriété p , nous écrivons

$$B = \{x \in A \text{ t.q. } x \text{ a la propriété } p\}.$$

Dans cette écriture x est une variable (on peut choisir n'importe quelle lettre à la place de x) et à la place de "tel que" on écrit souvent une barre verticale "|" ou les deux points ":". Donc l'ensemble B ci-dessus est aussi désigné par l'écriture

$$\begin{aligned} B &= \{x \in A \mid x \text{ a la propriété } p\}, \text{ ou} \\ B &= \{x \in A : x \text{ a la propriété } p\} \end{aligned}$$

Remarque 1.5.3. Attention aux ensembles composés d'un seul élément : l'ensemble $\{\text{Félix}\}$ est différent du chat Félix (l'ensemble ne miaule pas, le chat si!). Cette différence se voit bien dans la notation que nous avons introduite : alors que $\text{Félix} \in G$, car Félix est un chat (Félix est un *élément* de l'ensemble de tous les chats), nous devons écrire $\{\text{Félix}\} \subseteq G$, puisque l'ensemble qui contient comme élément le seul chat Félix est un *sous-ensemble* de G .

1.5.2 Opérations ensemblistes

Remarque 1.5.4. Comme pour les nombres, on peut aussi faire des opérations élémentaires sur les ensembles. Celles qui nous concernent sont les suivantes :

- L'**intersection** $A \cap B$ des ensembles A et B est l'ensemble qui a comme éléments tous les objets qui sont à la fois dans A et dans B , c'est-à-dire

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Ici le “et” est le connecteur logique de conjonction.

Si $A \cap B = \emptyset$ alors on dit que A et B sont **disjoints**.

- L'**union** $A \cup B$ des ensembles A et B est l'ensemble qui a comme éléments tous les objets qui sont dans A et tous les objets qui sont dans B , c'est-à-dire

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Ici le “ou” est le connecteur logique de disjonction.

On remarque que si x est un élément à la fois de A et de B , alors en particulier x appartient à A . Donc :

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B.$$

- La **différence** $A \setminus B$ des ensembles A et B est l'ensemble qui a comme éléments tous les objets qui sont dans A mais pas dans B , c'est à dire

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

- Le **produit cartésien** $A \times B$ des ensembles A et B est l'ensemble de toutes les paires ordonnées de la forme (a, b) telles que a est un élément quelconque de A et b est un élément quelconque de B , c'est à dire

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Attention : les éléments d'un produit cartésien sont des *paires ordonnées* d'objets. On utilise aussi la notation abrégée

$$A \times A = A^2 \text{ et } \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}} = A^n.$$

Exemples 1.5.5. Considérons les ensembles

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ est pair et } n < 8\} = \{0, 2, 4, 6\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n < 3\} = \{0, 1, 2\}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ est impair et } n < 5\} = \{1, 3\}.$$

$$\circ A \cap B = \{0, 2\}, \quad A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6\}, \quad A \setminus B = \{4, 6\}, \quad B \setminus A = \{1\}$$

$$\circ A \cap C = \emptyset, \quad B \subseteq A \cup C, \quad A \setminus C = A, \quad B \setminus C \subseteq A$$

$$\circ B \times C = \{(0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$$

$$C \times B = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$$

Exemple 1.5.6. Quand nous résolvons un système d'équations et inéquations, l'ensemble de toutes les solutions du système est l'*intersection* des ensembles des solutions de chaque équation/inéquation du système. Par exemple, considérons le système

$$\begin{cases} 4x^2 - 25 = 0 & (\text{éq. 1}) \\ x > -1 & (\text{inéq. 2}) \\ x \leq 5 & (\text{inéq. 3}) \end{cases}.$$

La première équation a comme ensemble des solutions $S_1 = \{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{5}{2}\}$.

La deuxième inéquation a comme ensemble des solutions $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$.

La troisième inéquation a comme ensemble des solutions $S_3 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 5\}$.

Le système a comme ensemble des solutions l'ensemble

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{x \in \mathbb{R} : (x = -\frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{5}{2}) \text{ et } -1 < x \leq 5\} = \{\frac{5}{2}\}.$$

Dans l'exemple ci-dessus nous avons implicitement utilisé certaines des propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, & A \cup B = B \cup A \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, & A \cap B = B \cap A \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup \emptyset = A & A \cap \emptyset = \emptyset \end{array}$$

Remarque 1.5.7. Une façon de se souvenir des règles ci-dessus est la suivante : on peut faire une analogie entre les opérations ensemblistes et les opérations sur les nombres, où on considère l'union comme la somme de nombres et l'intersection comme le produit de nombres (et en considérant l'ensemble vide comme le nombre zéro). Cette analogie marche pour toutes les propriétés ci-dessus, sauf une : laquelle ?

1.6 Pourcentages et taux

1.6.1 Pourcentages

L'écriture " $p\%$ ", où p est un nombre réel, est un raccourci pour représenter la fraction $\frac{p}{100}$.

On utilise les pourcentages pour comparer la taille respective de deux entités du même type :

$$\begin{aligned} &y \text{ est le } p\% \text{ de } x \\ &\text{si et seulement si} \\ &y = \frac{p}{100}x. \end{aligned} \tag{1.1}$$

En particulier, pour trouver le $p\%$ d'une quantité x il faut multiplier x par $\frac{p}{100}$.

Exemple 1.6.1. La phrase "une solution contient 7% de sulfate de cuivre" veut dire que, si x est le poids en grammes de la solution, alors la solution contient $y = \frac{7}{100}x$ grammes de sulfate de cuivre.

Remarque 1.6.2. Pour indiquer un pourcentage d'une certaine quantité on utilise aussi le mot "**taux**". Ainsi, la solution de l'exemple ci-dessus a un taux de sulfate de cuivre de 7%.

Si on connaît deux quantités du même type x et y , comment calculer quel pourcentage de x est constitué par y ? Autrement dit, comment établir quel est le taux de y dans x ?

Il suffit d'inverser la formule (1.1) : y constitue le $p\%$ de x , où

$$p = \frac{y}{x} \times 100.$$

Exemple 1.6.3. En France, le taux maximal d'alcool dans le sang autorisé pour le conducteur d'un véhicule est de 0,5 grammes par litre de sang. Un litre de sang a, en moyenne, une masse de 1,06 kg, donc le taux d'alcool dans le sang permis par la loi est de $p\%$, où

$$p = \frac{0,5 \text{ g}}{1,06 \times 10^3 \text{ g}} \times 100 \approx 0,047.$$

1.6.2 Taux d'augmentation/diminution

Exemples 1.6.4.

- Le prix du ticket de métro a augmenté de 10% cette année. On dit aussi que le **taux d'augmentation** du prix du ticket de métro cette année est de 10%. Ceci veut dire que, si l'année dernière un ticket de métro coûtait x euros, cette année

il va coûter x plus les 10% de x . Le nouveau prix du ticket de métro est donné par

$$x + \frac{10}{100}x = \left(1 + \frac{10}{100}\right)x = 1,1 \cdot x.$$

Ainsi, si le prix était, l'année dernière, de 1,3 euros, cette année le ticket va coûter $1,1 \times 1,3 \text{ eur} = 1,43 \text{ eur}$.

- o Le **taux de croissance** d'une population de cerfs est de 20% par année. Ceci veut dire que si une année il y a une population de x cerfs, l'année suivante on aura une population de $\left(1 + \frac{20}{100}\right)x$ cerfs.
- o Une population de cobayes est infectée avec un virus. Le **taux de mortalité** de la population est de 5% chaque mois. Ceci veut dire que, si en janvier il y avait x cobayes, en février il y aura $y = x - \frac{5}{100}x = \left(1 - \frac{5}{100}\right)x$ cobayes. En mars il y aura donc $z = \left(1 - \frac{5}{100}\right)y = \left(1 - \frac{5}{100}\right)^2 x$ cobayes qui auront survécu.

Le **taux d'augmentation/diminution** est le rapport, exprimé en pourcentage, entre la partie augmentée/diminuée et la quantité initiale : si une quantité x augmente/diminue d'une quantité x_0 (au cours d'une unité de temps), alors la quantité finale sera $x \pm x_0$ et le taux d'augmentation/diminution sera de $\left(\frac{x_0}{x} \times 100\right)\%$.

Exercice 1.6.5. Un capital de 5000 euros est placé dans une banque. Après un an, le capital disponible est de 5150 euros. Quel est le taux d'intérêt ?

En un an le capital a augmenté de $x_0 = 5150 - 5000 = 150$ euros. Donc le taux d'intérêt est de $\left(\frac{150}{5000} \times 100\right)\% = 3\%$.

Si une quantité x augmente d'abord de $p\%$ et en suite de $q\%$, la quantité finale sera, si on applique la règle,

$$y = \left(1 + \frac{q}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right)x = \left(1 + \frac{p+q}{100} + \frac{pq}{10^4}\right)x.$$

Donc le taux d'augmentation final n'est pas la somme des deux taux d'augmentation !

Exemple 1.6.6. Une population de cerfs augmente de 20% chaque année. Après deux ans la population de cerfs n'a pas augmenté de 40%, mais de $\left(20 + 20 + \frac{400}{10^4}\right)\% = 40,04\%$. En effet, au bout de la première année la quantité de cerfs avait déjà augmenté par rapport à la quantité initiale x , et donc pour calculer l'augmentation la deuxième année on a calculé le 20% d'une quantité plus grande que x . Le taux de croissance totale sur deux ans s'avère donc être supérieur à la somme des deux pourcentages.

En particulier, une augmentation de 50% suivie par une diminution de 50% ne ramène pas au résultat initial ! En effet,

$$y = \left(1 - \frac{50}{100}\right) \left(1 + \frac{50}{100}\right)x = \left(1 - \left(\frac{50}{100}\right)^2\right)x = \frac{75}{100}x.$$

En effet, lors de l'augmentation nous arrivons à avoir la quantité $\frac{3}{2}x$, que nous allons ensuite, lors de la diminution, multiplier par $\frac{1}{2}$: ainsi nous retrouvons que le 75% de x .

Remarque 1.6.7. Puisque dans un produit l'ordre des facteurs n'est pas important, augmenter une quantité x de $p\%$ et ensuite effectuer une diminution de $q\%$ nous donne le même résultat que si on fait d'abord une diminution de $q\%$ puis une augmentation de $p\%$.

Exercice 1.6.8.

1. Dans un zoo il y a 2000 animaux. Parmi eux, 1200 sont des mammifères. Quel est le pourcentage de mammifères dans le zoo ?

Réponse : $\left(\frac{1200}{2000} \times 100\right)\% = 60\%$.

2. Les reptiles représentent 10% des animaux du zoo. Combien y a-t-il de reptiles ?

Réponse : $2000 \times \frac{10}{100} = 200$.

3. Parmi les 2000 animaux, 25% sont des oiseaux, et 3% des oiseaux sont des aigles. Combien y a-t-il d'aigles ?

Réponse : $2000 \times \frac{25}{100} \times \frac{3}{100} = 15$.

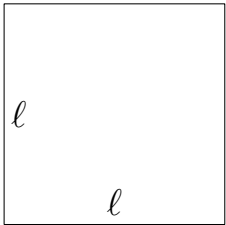
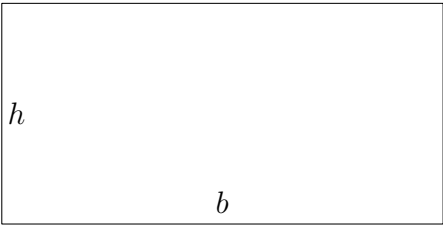
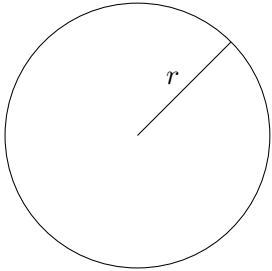
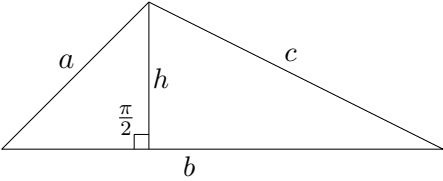
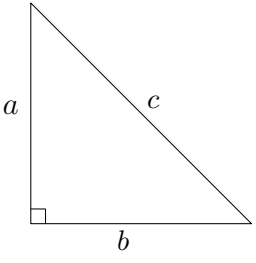
4. Une année s'écoule et on compte alors 2030 animaux dans le zoo. Quel est le taux de croissance du nombre d'animaux ?

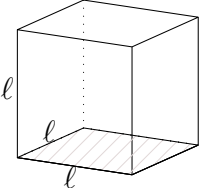
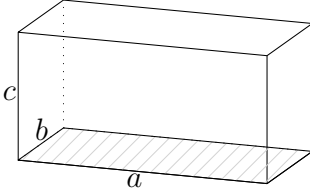
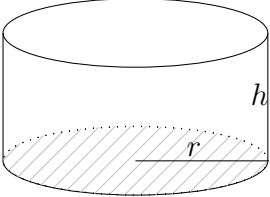
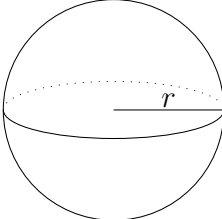
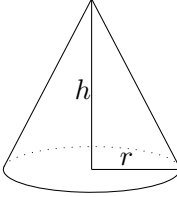
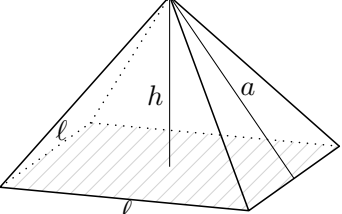
Réponse : $\left(\frac{2030 - 2000}{2000} \times 100\right)\% = 1,5\%$.

5. Après un an le nombre de reptiles a augmenté de 15%, mais l'année suivante il diminue de 10%. Quel est le nombre de reptiles à la fin de la deuxième année ?

Réponse : $200 \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 207$.

1.7 Formulaire de géométrie plane et solide

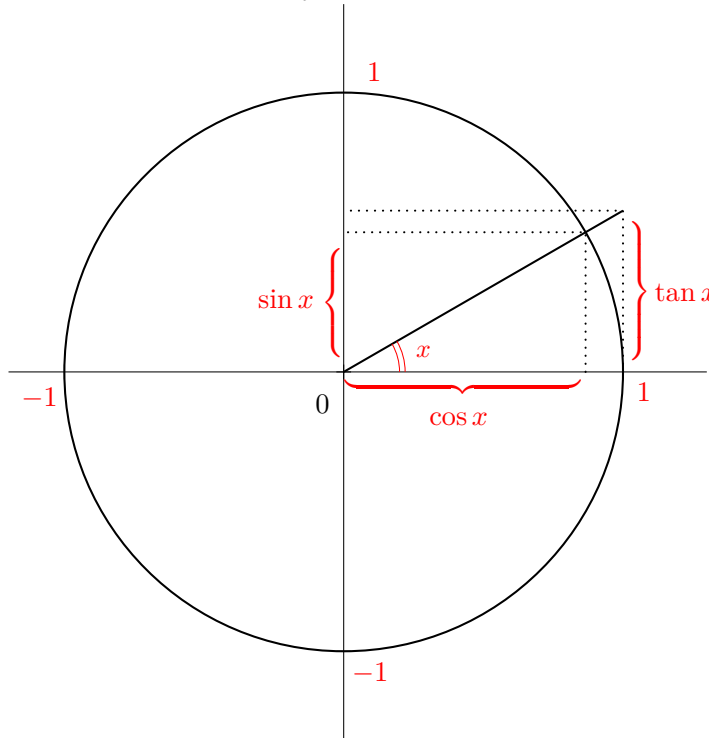
	<p>Périmètre $p = 4\ell$ Aire $A = \ell^2$</p>
	<p>Périmètre $p = 2(b + h)$ Aire $A = bh$</p>
	<p>Périmètre $p = 2\pi r$ Aire $A = \pi r^2$</p>
	<p>Périmètre $p = a + b + c$ Aire $A = \frac{bh}{2}$</p>
	<p>$a^2 + b^2 = c^2$ Théorème de Pythagore</p>

	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Surface totale $S_{\text{tot}} = 6\ell^2$ Volume $V = \ell^3$</p> </div>
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2c(a + b)$ Surface totale $S_{\text{tot}} = 2(ab + ac + bc)$ Volume $V = abc$</p> </div>
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2\pi rh$ Surface totale $S_{\text{tot}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$ Volume $V = \pi r^2 h$</p> </div>
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Surface totale $S_{\text{tot}} = 4\pi r^2$ Volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$</p> </div>
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Surface latérale $S_{\text{lat}} = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ Surface totale $S_{\text{tot}} = \pi r^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} \right)$ Volume $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$</p> </div>
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2\ell a = \ell\sqrt{4h^2 + \ell^2}$ Surface totale $S_{\text{tot}} = 2\ell a + \ell^2$ Volume $V = \frac{\ell^2 h}{3}$</p> </div>

1.8 Trigonométrie

Faisons quelques rappels de trigonométrie.

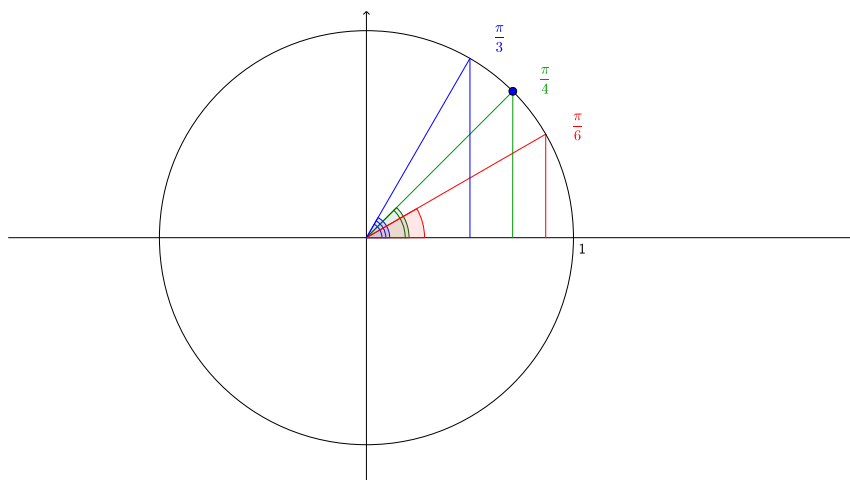
Dessignons le cercle trigonométrique : il s'agit d'un cercle de centre le point $O = (0, 0)$ du plan cartésien et de rayon 1.



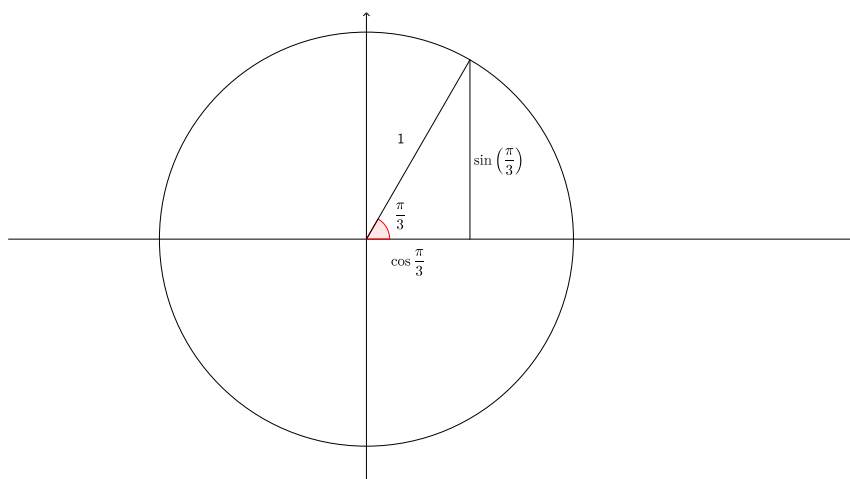
Dans le dessin ci-dessus, nous avons un triangle rectangle dont les côtés mesurent respectivement 1 (côté oblique), $\cos x$ (côté horizontal) et $\sin x$ (côté vertical). Les angles de ce triangle mesurent x , $\frac{\pi}{2}$ et $(\frac{\pi}{2} - x)$ (on rappelle que la somme des trois angles d'un triangle est égale à 180°).

Puisque $2\pi = 360^\circ$, nous avons

$$\begin{aligned} \pi &= 180^\circ, & \frac{\pi}{2} &= 90^\circ, & \frac{\pi}{4} &= 45^\circ, \\ \frac{\pi}{3} &= 60^\circ, & \frac{\pi}{6} &= 30^\circ, & & \text{etc.} \end{aligned}$$

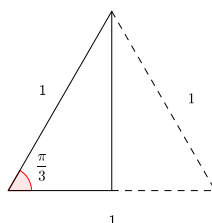


Considérons $x = \frac{\pi}{3}$.

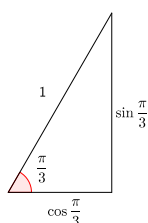


Le triangle dans l'image ci-dessus a un angle de 60° (en bas à gauche), un angle droit (en bas à droite) et un angle de 30° (en haut).

En faisant une symétrie par rapport à l'axe vertical, nous obtenons un triangle équilatère de côté égal à 1.



Grâce à cette remarque, nous voyons que le côté horizontal du triangle ci-dessous



mesure la moitié du côté oblique, c'est-à-dire

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

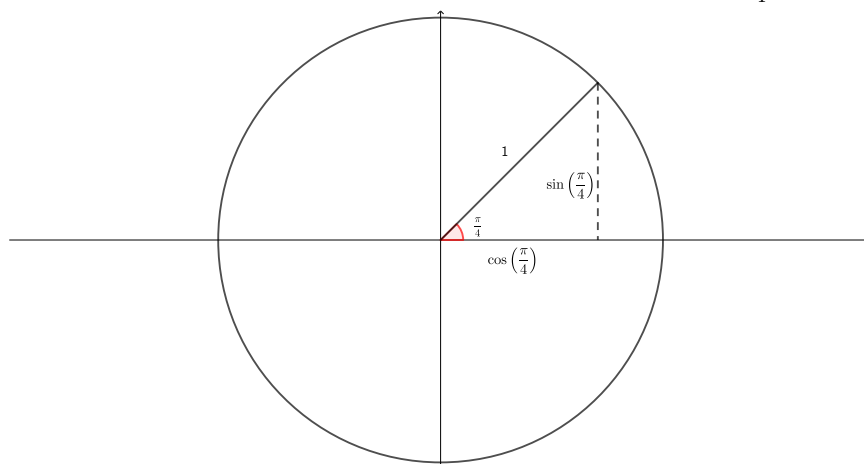
Ensuite, on observe que le côté vertical du triangle ci-dessus se trouve grâce au théorème de Pythagore :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si on procède de façon analogue (en faisant cette fois une symétrie par rapport à l'axe horizontal), nous trouvons que

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pour ce qui concerne $x = \frac{\pi}{4}$, on remarque que dans ce cas le triangle est isocèle (les côtés horizontal et vertical ont la même longueur), donc $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$.



Par le théorème de Pythagore,

$$1 = \sqrt{\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{4}\right)^2} = \sqrt{2 \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2},$$

d'où

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1.9 La droite réelle

Les nombres réels ont une propriété fondamentale : il y a une correspondance entre les nombres réels et les points d'une droite. De plus, cette correspondance est *bijective* : à tout nombre réel correspond un et un seul point de la droite, et vice versa.

Le procédé qui nous permet d'établir cette correspondance est très intéressant pour nous. Il s'agit de choisir une *échelle de mesure*. Décrivons donc ce procédé.

Dessignons une droite.

Nous allons d'abord choisir un point de la droite, désigné par la lettre O majuscule, que l'on va appeler **origine**. Le choix du point O est totalement arbitraire. Cependant, selon le problème que l'on cherche à modéliser, il pourrait y avoir un choix particulièrement convenable.

Exemple 1.9.1. Supposons qu'on veut représenter les distances temporelles relatives des stations de métro sur la ligne 14. Autrement dit, on veut exprimer graphiquement combien de temps il faut pour aller d'une station à la suivante, à partir, disons, du terminus Olympiades. Dans ce cas, nous allons dessiner une droite horizontale, et choisir la station d'Olympiades comme origine.

Supposons maintenant qu'on veut représenter la hauteur d'une montagne. Nous allons alors dessiner une droite verticale et prendre comme origine le niveau de la mer.

Si par contre on veut représenter la hauteur d'un gratte-ciel, il est plus intéressant de choisir comme origine la base du gratte-ciel, même si celle-ci n'est pas au niveau de la mer.

La deuxième étape du procédé consiste à choisir une **unité de mesure**. Ceci veut dire qu'on va choisir un autre point A sur la droite, différent de l'origine, et on va lui associer le nombre réel 1. A nouveau, ce choix est totalement arbitraire, mais certains choix sont plus convenables que d'autres, selon le problème traité.

Exemple 1.9.2. Si l'on veut mesurer la hauteur des montagnes, le mètre est une unité de mesure convenable. Mais si on mesure la taille des cellules, le micromètre est sans doute plus adapté.

En choisissant une unité de mesure, on choisit aussi implicitement une **orientation** de la droite : vers la gauche ou la droite, si la droite est horizontale, et vers le haut ou vers le bas, si la droite est verticale. Pour une droite horizontale, d'habitude on choisit l'orientation vers la droite, mais ce n'est qu'une convention.

Une fois que nous avons choisi une unité de mesure, nous pouvons facilement continuer notre procédé : pour trouver le point auquel on va associer le nombre 2, on va tout simplement reporter l'unité de mesure deux fois sur la droite à partir de l'origine. Pour le nombre -1, on va se déplacer d'une unité de mesure vers la gauche à partir de O . Pour les fractions de la forme $\frac{a}{b}$, on va diviser l'unité de mesure en b parties de la même longueur, et ensuite reporter cette longueur a fois sur la droite, s'il s'agit d'un nombre positif, ou a fois sur la gauche, s'il s'agit d'un nombre négatif.

De cette façon, nous arrivons à associer à chaque nombre rationnel un et un seul point de la droite. Il reste tout de même des trous sur la droite. Ces trous sont remplis par les nombres irrationnels, avec un procédé que l'on décrira plus tard, à l'aide des *limites*.

Nous avons donc représenté les nombres réels comme les points d'une droite. Ceci nous permet de donner une interprétation géométrique à des concepts algébriques.

Par exemple, si x est un nombre réel, alors $|x|$ représente la *distance* entre le point de la droite associé au nombre x et l'origine.

Ou encore, si a et b sont deux nombre réels et $a < b$, alors l'ensemble des nombres réels strictement compris entre a et b est le segment de la droite qui rejoint le point associé à a avec le point associé à b (sans les deux extrémités). Cet ensemble s'appelle aussi un **intervalle ouvert**, et il sera désigné par le symbole $]a, b[$:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

De façon similaire, on définit l'**intervalle fermé** $[a, b]$ comme le même segment mais cette fois en incluant aussi les deux extrémités, et les deux intervalles **demi-ouverts** $]a, b]$ et $[a, b[$ respectivement, où l'on exclu l'extrémité de gauche mais pas celle de droite,

et vice versa, respectivement :

$$\begin{aligned}[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.\end{aligned}$$

Si maintenant on considère tous les nombres réels strictement plus grands que a , on obtient la **demi-droite** $]a, +\infty[$, c'est à dire le segment infini qui a a comme extrémité gauche et qui s'étend indéfiniment vers la droite. On définit de façon similaire la demi-droite $] - \infty, a[$, qui s'étend indéfiniment à la gauche de a .

$$\begin{aligned}]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\ [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\] - \infty, a[&= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\] - \infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}\end{aligned}$$

A partir de maintenant, nous allons toujours identifier les nombres réels avec les points d'une droite, nous parlerons donc de la **droite réelle**.

Chapitre 2

COURS II

2.1 Fonctions

Une fonction

$$f : A \rightarrow B,$$

où A et B sont deux ensembles, est une *loi* qui à tout élément de A associe *un unique* élément de B . Pour tout $a \in A$ on désigne par $f(a) \in B$ l'unique élément de B qui est associé à a par f (on dit que $f(a)$ est l'**élément image** de a par f).

L'ensemble A est appelé le **domaine** de la fonction f et le sous-ensemble de B constitué par tous les éléments de B qui sont des éléments image d'un certain élément de A s'appelle **ensemble image** :

$$\text{Im}(f) = \{b \in B : b = f(a) \text{ pour un quelque } a \in A\} \subseteq B.$$

Exemples 2.1.1.

1. La loi qui associe à chaque jour du mois d'août la température maximale à Paris le jour en question, est une fonction de domaine $\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 31\}$ et à valeurs dans \mathbb{R} (et son ensemble image est contenu dans $\mathbb{R}^{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$).
2. La loi qui à chaque jour de l'année associe le prix de l'essence à Paris n'est pas une fonction : en effet chaque pompe à essence parisienne fixe son propre prix ; donc on ne peut pas associer à chaque jour un unique prix.
Par contre, la loi qui à chaque jour de l'année associe le prix moyen de l'essence à Paris, est une fonction.
3. La loi qui exprime la pression atmosphérique en fonction de la hauteur depuis le niveau de la mer, est une fonction de domaine $\mathbb{R}^{\geq 0}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{>0}$.
4. La loi qui associe à chaque endroit sa latitude et sa longitude est une fonction de domaine une sphère (approximativement !) et à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

Remarque 2.1.2. Une fonction $f : A \rightarrow B$ est comme une boîte magique, avec une entrée et une sortie. A chaque fois qu'un élément $a \in A$ du domaine entre dans la boîte,

la magie s'opère et un élément $b = f(a) \in B$ est expulsé de la boîte. Ce qui se passe à l'intérieur de la boîte n'est pas important. Ce qui compte est que le procédé magique est toujours le même : à chaque fois qu'on fait rentrer a , à la sortie nous allons retrouver toujours le même b .

Cette analogie nous permet de dire quand deux fonctions (avec le même domaine) sont égales : puisque nous ne pouvons pas voir à l'intérieur des boîtes magiques, pour nous deux fonctions sont égales si et seulement si elles ont le même comportement, c'est-à-dire si et seulement si à chaque fois que l'élément $a \in A$ entre dans chacune des deux boîtes, on trouve le même élément $b \in B$ à la sortie de chacune des deux boîtes. Autrement dit, $f : A \rightarrow B$ et $g : A \rightarrow B$ sont égales si et seulement si pour tout $a \in A$ on a $f(a) = g(a)$.

Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction, avec $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Soit $A_0 \subseteq A$ un sous-ensemble du domaine de f . La fonction $f_0 : A_0 \rightarrow B$ qui coïncide avec f sur tous les éléments de A_0 , est aussi une fonction (f_0 s'appelle la **restriction** de f à l'ensemble A_0).

Exemple 2.1.3. Considérons l'écriture

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Quels sont le domaine et l'image de f ? Pour le domaine, plusieurs réponses sont possibles :

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \mathbb{R}, & \text{ou} \\ \text{Dom}(f) &= \mathbb{R}, & \text{ou} \\ \text{Dom}(f) &= \mathbb{R}^{>0}, & \text{ou} \\ \text{Dom}(f) &= \mathbb{N}, & \dots \end{aligned}$$

Est-ce qu'il y a une réponse plus naturelle, ou qui donne plus d'informations qu'une autre?

La réponse qui donne le plus d'informations est celle qui indique le **domaine maximal de définition**. Puisque la fonction f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, autant dire que le domaine est \mathbb{R} .

Nous pouvons trouver l'ensemble image de f une fois qu'on a déclaré que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$:

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}.$$

En effet, soit $b \geq 1$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = b$. Il suffit de prendre $x = \sqrt{b-1}$ (qui est un nombre réel bien défini, puisque $b-1 \geq 0$).

Remarque 2.1.4. Soient f, g deux fonctions avec $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Nous pouvons faire la somme, la soustraction, le produit et aussi, si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \text{Dom}(g)$, le quotient de f par g . Par exemple, $(f+g)$ est la fonction qui associe à tout $x \in \text{Dom}(f)$ le nombre $(f(x) + g(x)) \in \mathbb{R}$. Ou encore : f^2 est la fonction qui associe à tout $x \in \text{Dom}(f)$ le nombre $(f(x))^2 \in \mathbb{R}$.

2.1.1 Graphe

A toute fonction $f : A \rightarrow B$ nous allons associer un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$, qui s'appelle le **graphe** de f :

$$\Gamma_f = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = b\}.$$

Exemples 2.1.5.

- Le graphe de la fonction qui exprime la quantité de sucre en fonction de la quantité de farine dans une recette de gâteau est une droite : en effet, si on double, triple, quadruple la quantité de farine, il faut aussi doubler, tripler, quadrupler la quantité de sucre.
- Le graphe de la fonction qui à chaque étudiant associe son groupe sanguin est l'ensemble (fini) des paires de la forme (x, y) , où x est un étudiant et y est le groupe sanguin de l'étudiant x .

Le graphe de f est donc un sous-ensemble de $A \times B$. Mais tout sous-ensemble de $A \times B$ n'est pas nécessairement le graphe d'une fonction. En effet, un sous-ensemble $X \subseteq A \times B$ est le graphe d'une fonction $f : A \rightarrow B$ si et seulement si pour tout $a \in A$ il existe un unique $b \in B$ tel que $(a, b) \in X$. Dans ce cas, $b = f(a)$.

Si nous représentons les éléments de l'ensemble A comme les points d'une droite horizontale et les éléments de B comme les points d'une droite verticale, alors les éléments de $A \times B$ sont tous les points d'intersections entre les droites verticales qui passent par les éléments de A et les droites horizontales qui passent par les éléments de B . Dans cette représentation graphique, un ensemble $X \subseteq A \times B$ est le graphe d'une fonction si et seulement si toute droite verticale qui passe par un élément de A intersecte X en *exactement* un point.

2.2 Systèmes dynamiques continus

Un **système dynamique** est un ensemble de composants en interaction (un *sys-tème*), qui évolue selon une *loi*.

Exemple 2.2.1. Le pourcentage de graines de tomate qui germent sur une certaine plante dépend de la température ambiante. Pour la tomate cerise, le pourcentage $P_c\%$ de graines qui germent dépend de la température T (exprimée en degrés Celsius) selon la loi

$$P_c(T) = 10T - 200.$$

Par exemple, à 25 degrés Celsius, on a

$$P_c(25) = 10 \cdot 25 - 200 = 50,$$

donc 50% des graines de tomate cerise germent à cette température.
 Pour la tomate de Marmande par contre la loi est la suivante :

$$P_m(T) = \sqrt{T^3} - 60.$$

Donc à 25 degré Celsius on a

$$P_m(25) = 25^{\frac{3}{2}} - 60 = 125 - 60 = 65,$$

donc 65% des graines de tomate de Marmande germent à cette température.

Les lois d'évolution de l'exemple ci-dessus sont des **fonctions réelles**, et la variable indépendante est la température (exprimée en degrés Celsius).

Dans ce chapitre nous allons considérer des unités de mesure **continues** (des nombres réels arbitraires).

La représentation graphique nous aidera à interpréter les données et à formuler un modèle.

2.2.1 Proportionnalité

Exemple 2.2.2. Le prix au *kg* des pommes Reinettes est de 2 euros. Ceci veut dire que si j'achète 1 *kg* de pommes, je vais payer 2 euros, si j'en achète 2 *kg*, je vais payer $2 \cdot 2$ euros,..., si j'en achète 15 *kg*, je vais payer $15 \cdot 2$ euros.

Le coût de mes courses en pommes est **directement proportionnel** au poids des pommes achetées. Ceci veut dire qu'il existe une constante K telle que, si C est le coût de mes courses et P est le poids des pommes achetées, alors

$$C = K \cdot P.$$

La constante K est la **constante de proportionnalité**, dans cet exemple sa valeur est 2 (le prix au *kg*). Le coût C des courses dépend du poids des pommes achetées : C est une fonction de la variable P . Nous sommes en train de dire que C est une fonction *linéaire* de la variable P .

Exemple 2.2.3. La température dans une pièce est **inversement proportionnelle** à la distance du radiateur. Ceci veut dire qu'il existe une constante K telle que, si T est la température à une certaine distance d du radiateur, alors

$$T = \frac{K}{d}.$$

La température T à un certain endroit est une fonction de la variable d . Nous sommes en train de dire que T est une fonction linéaire de la variable $\frac{1}{d}$.

2.3 Modèles polynomiales

2.3.1 Modèle linéaire

Soient $m, q \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = mx + q.$$

Il s'agit d'une fonction linéaire, son graphe est une droite.

Si $m > 0$ alors f est croissante, si $m < 0$ alors f est décroissante, si $m = 0$ alors f est constante.

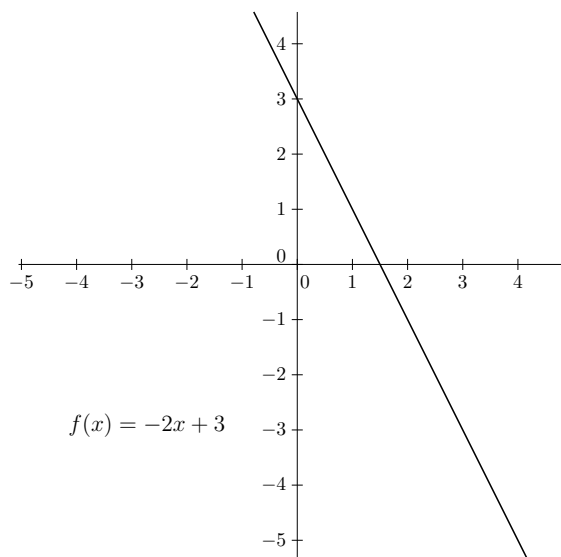
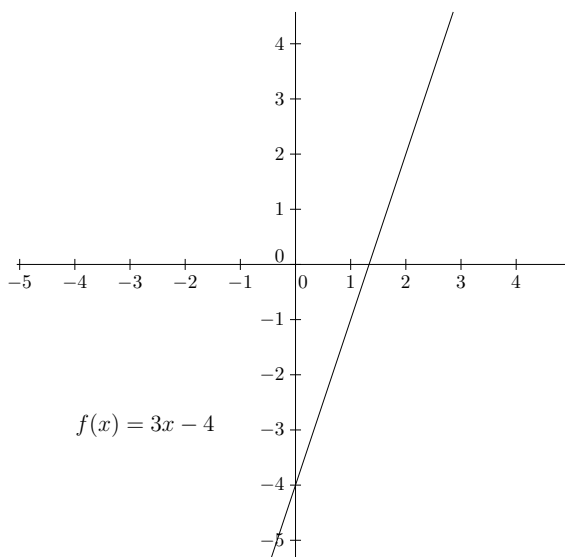
Étant donnés deux points du plan (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , on peut trouver l'équation de l'unique droite qui passe par ces deux points en résolvant le système

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + q \\ y_2 = mx_2 + q \end{cases}$$

où m et q sont les variables et x_1, x_2, y_1, y_2 sont les paramètres. On trouve

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ et donc } q = y_1 - mx_1.$$

Exemples



2.3.2 Modèle quadratique

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

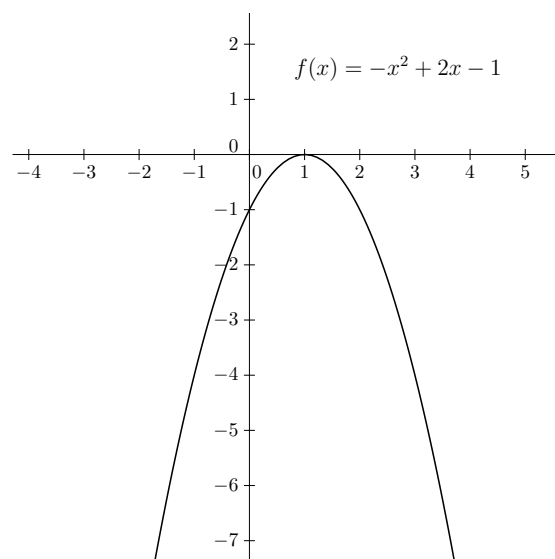
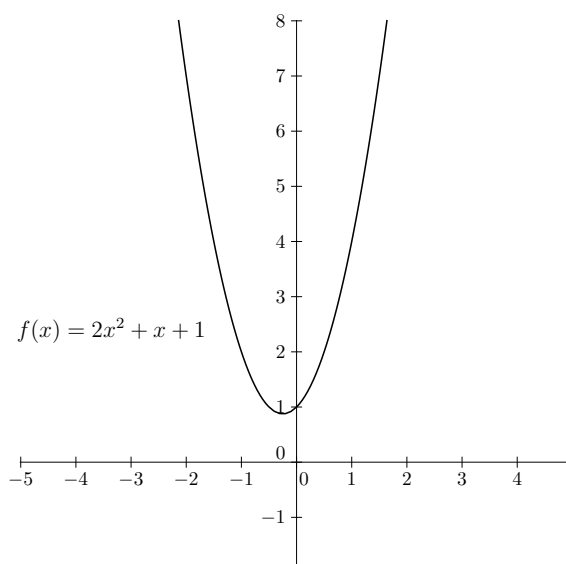
Il s'agit d'une fonction quadratique, son graphe est une parabole.

Si $a > 0$ alors la parabole est convexe (le creux est vers le haut) et son point de minimum est $x = -\frac{b}{2a}$.

Si $a < 0$ alors la parabole est concave (le creux est vers le bas) et son point de maximum est $x = -\frac{b}{2a}$.

Étant donnés trois points du plan non alignés, on peut trouver l'équation de l'unique parabole qui passe par ces trois points en résolvant un système, comme dans le cas linéaire.

Exemples



2.3.3 Modèle polynomial de degré n

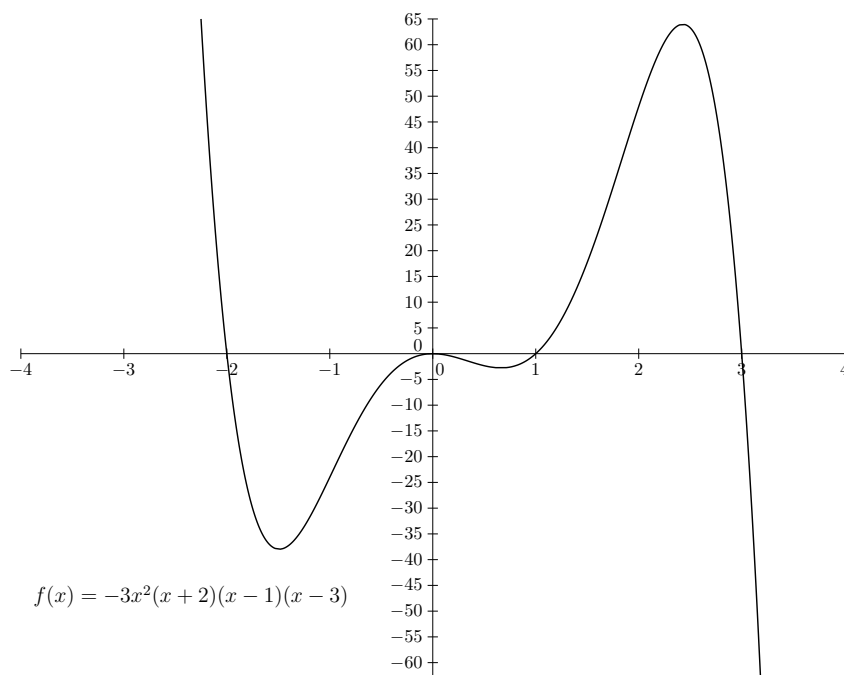
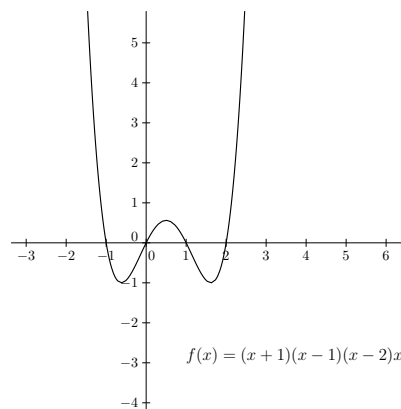
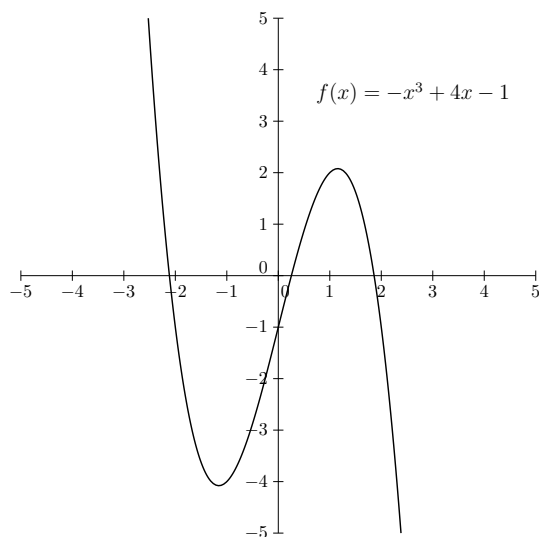
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, avec $a_n \neq 0$. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Il s'agit d'une fonction polynomiale de degré n . Si $n = 1$, on retrouve une fonction linéaire. Si $n = 2$, on retrouve une fonction quadratique. Si $n = 3$, on parle d'une fonction cubique, etc.

La forme du graphe dépend du polynôme considéré.

Exemples



2.4 Rappels sur les limites et les dérivées

2.4.1 Limites et continuité

Soient $f : A \rightarrow B$ une fonction, avec $A, B \subseteq \mathbb{R}$, et $x_0 \in \text{Dom}(f)$. On dit que f est **continue** en x_0 si la valeur de f en les points *suffisamment* proches de x_0 est *arbitrairement* proche de $f(x_0)$. Pour formaliser cette affirmation, nous avons besoin d'introduire la notion de **limite**.

Soient f une fonction réelle, $x_0, l \in \mathbb{R}$. On dit que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ si la valeur de $f(x)$ s'approche autant que l'on veut de l lorsque x s'approche de plus en plus de x_0 .

Remarque 2.4.1. La définition de limite ci-dessus n'est pas très précise mathématiquement. Elle fait appel à l'expression "autant que l'on veut", qu'il faudrait expliquer un peu mieux. L'idée est la suivante : dire que " $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ " signifie que pour tout choix d'un nombre réel positif ε *arbitrairement petit*, on peut trouver un nombre réel positif η *suffisamment petit* de façon à ce que

$$\text{si } |x - x_0| < \eta, \text{ alors } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Autrement dit, en choisissant x *suffisamment* proche de x_0 , on arrive à rendre $f(x)$ *arbitrairement* proche de l .

L'écriture $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se lit aussi " f tend vers l , lorsque x tend vers x_0 ".

Nous avons aussi toutes les variantes suivantes (essayez par exercices de traduire les phrases suivantes en formules mathématiques) :

- On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ si la valeur de $f(x)$ s'approche autant que l'on veut de l lorsque x s'approche de plus en plus de x_0 par la droite.
- On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ si la valeur de $f(x)$ s'approche autant que l'on veut de l lorsque x s'approche de plus en plus de x_0 par la gauche.
- On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ si la valeur de $f(x)$ s'approche autant que l'on veut de l lorsque x s'approche de plus en plus de x_0 (de n'importe quelle direction).
- On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ si la valeur de f est aussi grande que l'on veut lorsque x s'approche de plus en plus de x_0 par la droite.
- On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ si la valeur de f est aussi grande que l'on veut lorsque x s'approche de plus en plus de x_0 par la gauche.
- On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ si la valeur de f est aussi grande que l'on veut lorsque x s'approche de plus en plus de x_0 (de n'importe quelle direction).
- On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ si la valeur de f est de aussi petite que l'on veut lorsque x s'approche de plus en plus de x_0 par la droite.

- On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ si la valeur de f est de aussi petite que l'on veut lorsque x s'approche de plus en plus de x_0 par la gauche.
- On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ si la valeur de f est aussi petite que l'on veut lorsque x s'approche de plus en plus de x_0 (de n'importe quelle direction).
- On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ si la valeur de $f(x)$ s'approche autant que l'on veut de l lorsque x est de plus en plus grand.
- On écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ si la valeur de $f(x)$ s'approche autant que l'on veut de l lorsque x est de plus en plus petit.
- On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si la valeur de f est aussi grande que l'on veut lorsque x est de plus en plus grand.
- On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si la valeur de f est aussi petite que l'on veut lorsque x est de plus en plus grand.
- On écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ si la valeur de f est aussi grande que l'on veut lorsque x est de plus en plus petit.
- On écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ si la valeur de f est aussi petite que l'on veut lorsque x est de plus en plus petit.

Remarque 2.4.2. Soit $l \in \mathbb{R}$. L'écriture $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+$ signifie que lorsque $x \rightarrow x_0$, les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus proches de l , tout en restant *plus grandes* que l . L'écriture $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^-$ signifie que lorsque $x \rightarrow x_0$, les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus proches de l , tout en restant *plus petites* que l .

Exemple 2.4.3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$, car, lorsqu'on s'approche de 0 depuis la droite, la fonction x atteint que des valeurs positives. Par contre $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^-$, car, lorsqu'on s'approche de 0 depuis la gauche, la fonction x atteint que des valeurs négatives. On a aussi $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$, car, lorsqu'on s'approche de 0 depuis n'importe quel côté, la fonction x^2 atteint que des valeurs positives.

Nous pouvons maintenant exprimer de façon précise la notion de fonction continue.

Définition 2.4.4. Soient $f : A \rightarrow B$ une fonction, avec $A, B \subseteq \mathbb{R}$, et $x_0 \in \text{Dom}(f)$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

De façon intuitive, f ne fait pas un saut en x_0 .

On dit que f est continue si elle est continue en tous points de son domaine.

2.4.2 Calcul des limites

Si f est une fonction réelle et $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit que f est **définie au voisinage de x_0** s'il existe un intervalle ouvert I tel que $x_0 \in I$ et $I \subseteq \text{Dom}(f)$. On étend cette définition à $x_0 = \pm\infty$ en disant que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe une demi-droite ouverte I de la forme $]a, +\infty[$ (resp. $] - \infty, a[$) telle que $I \subseteq \text{Dom}(f)$.

De façon similaire, on dit que f a une certaine propriété **P au voisinage de x_0** s'il existe I comme ci-dessus tel que la *restriction* de f à I a la propriété P.

On dit que f a une certaine propriété **P au voisinage épointé de x_0** s'il existe I comme ci-dessus tel que la *restriction* de f à $I \setminus \{x_0\}$ a la propriété P (autrement dit, la propriété P est valable en tous les points de I sauf au plus en le point x_0).

On dit que f a une certaine propriété **P au voisinage à droite de x_0** (resp. **au voisinage épointé à droite de x_0**) s'il existe un intervalle I de la forme $[x_0, a[$ (resp. de la forme $]x_0, a[$), pour un certain nombre réel $a > x_0$, tel que la restriction de f à I a la propriété P.

De façon similaire on peut définir la notion de f ayant une propriété **au voisinage à gauche de x_0** (resp. **au voisinage épointé à gauche de x_0**).

Un théorème fondamental sur les limites nous dit que si une fonction admet une limite, alors cette limite est **unique**.

Quelle sont les règles fondamentales de calcul des limites ?

Tous les résultats de cette section ont aussi des versions analogues, où on remplace l'expression "au voisinage (épointé) de x_0 " par l'expression "au voisinage (épointé) à droite (resp. gauche) de x_0 " et où on remplace " $\lim_{x \rightarrow x_0}$ " par " $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$ " (resp. " $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$ ").

2.4.2.1 Croissance des limites

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et vérifiant $f \leq g$ au voisinage de x_0 . Si les limites en x_0 de f et de g existent, alors elles satisfont $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

2.4.2.2 Théorème des gendarmes

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 et vérifiant $f \leq g \leq h$ au voisinage de x_0 . Si f et h ont la même limite ℓ (finie ou infinie) en x_0 alors g a aussi ℓ pour limite en x_0 .

Soient f, g deux fonctions réelles définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et supposons que les limites en x_0 de f et de g existent (finies ou infinies). Soit $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.4.2.3 Opérations arithmétiques et limites

Soient f, g deux fonctions réelles et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un point dans les domaines de f et de g . Si les limites en x_0 de f et de g existent et sont finies, alors

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) &= c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (\text{si } c \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

Remarque 2.4.5. Les formules ci-dessus ont aussi un sens dans certains cas quand les limites de f et/ou de g ne sont pas finies. En particulier,

- la formule de la somme a un sens sauf si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \mp\infty$
- la formule du produit a un sens sauf si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (ou vice versa)
- la formule du quotient a un sens sauf si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = (\pm)\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = (\pm)\infty$

Notation 2.4.6. Nous allons utiliser une notation raccourcie pour les limites infinies.

Par exemple, l'écriture $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ est un raccourci pour la phrase suivante : si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$.

En utilisant la définition de limite, on démontre que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} x^n = (0^\pm)^n = 0^+ \quad (n \text{ entier positif pair})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} x^n = (0^\pm)^n = 0^\pm \quad (n \text{ entier positif impair}) .$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad (n \text{ entier positif})$$

En utilisant les règles rappelées ci-dessus, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} x^{-n} = +\infty \quad (n \text{ entier positif pair})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-n} = -\infty \quad (n \text{ entier positif impair}) .$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{-n} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n} = \frac{1}{\pm\infty} = 0^\pm \quad (n \text{ entier positif})$$

2.4.3 La dérivée

Si la limite dans la formule

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe et est finie, alors on dit que f est **dérivable** en x_0 . La valeur de cette limite est la **dérivée** $f'(x_0)$ de f en x_0 .

La plus part des fonctions qu'on va considérer dans ce cours sont dérivables sur tout leur domaine. Cependant, il y a une fonction continue très utile pour nous qui n'est pas dérivable en zéro : il s'agit de la fonction valeur absolue.

Une fonction qui est dérivable en tout point de son domaine est dite dérivable, et la **fonction dérivée** f' est la fonction qui associe à tout $x \in \text{Dom}(f)$ le nombre $f'(x) \in \mathbb{R}$.

Toute fonction dérivable est aussi continue.

2.4.4 Calcul des dérivées

En utilisant la définition de dérivée, on démontre que

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2.4.4.1 Opérations arithmétiques et dérivées

Soient f et g deux fonctions dérivables et soit $c \in \mathbb{R}$. Les fonctions $f \pm g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$ sont dérivables et

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f' \quad .$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Si g ne s'annule jamais, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Exemples 2.4.7.

- Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ est un polynôme, alors $p'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$.
- Si f est la fonction constante $f(x) = c$, pour un certain $c \in \mathbb{R}$, alors $f'(x) = 0$, c'est-à-dire, la dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.
Vice versa, une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} qui a comme dérivée la fonction nulle est forcément une fonction constante.

Chapitre 3

COURS III

3.1 Exponentielles, logarithmes, parties entières

3.1.1 Puissances ou exponentielles

Soient a un nombre réel et n un nombre naturel. Quand on multiplie a par lui même n fois, on utilise la notation des **puissances** ou notation **exponentielle** :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fois}}.$$

Le nombre a s'appelle la **base** de la puissance et le nombre n s'appelle l'**exposant**. On rappelle les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} ; & (a^n)^m &= a^{n \cdot m} ; & (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \\ \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} ; & a^0 &= 1 ; & \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} . \end{aligned} \tag{3.1}$$

On remarque que si $n < m$ alors dans l'une des égalités ci-dessus on est en train d'introduire des puissances négatives. Plus précisément, pour tout nombre naturel n , on pose

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

et on remarque que les propriétés dans (3.1) restent aussi valides si on prend des exposants entiers, positifs ou négatifs.

Nous voulons maintenant généraliser cette notation, quand $a \geq 0$, à tout exposant *rationnel*, tout en respectant les propriétés dans (3.1). Si n est un nombre naturel, on voit tout de suite que nécessairement

$$(a^{1/n})^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a.$$

Donc pour définir $a^{1/n}$ la seule possibilité est de prendre l'unique racine n -ème positive de a :

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Si n, m sont entiers, alors nous sommes obligés de définir

$$a^{\frac{n}{m}} = (a^{1/m})^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

Exemples 3.1.1.

$$\begin{aligned} 2^{1/2} &= \sqrt{2} \\ 27^{1/3} &= \sqrt[3]{27} = 3 \\ 8^{-5/6} &= (8^{1/3})^{-5/2} = \frac{1}{2^2 \cdot 2^{1/2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

La notation en puissances rationnelles est plus commode que la notation avec les racines n -èmes et permet de faire moins d'erreurs de calcul.

Cette notion peut être aussi généralisée à tout exposant réel, de façon que, encore une fois, les propriétés dans (3.1) soient respectées (nous verrons plus tard comment le faire).

Exemples 3.1.2.

$$\begin{aligned} (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} &= 2^2 = 4 \\ 3^{2\sqrt{3}} &= 9^{\sqrt{3}} \\ 5^{2-\pi} &= \frac{25}{5^\pi} \end{aligned}$$

Question 3.1.3. Pourquoi avons nous donné une interprétation de cette notation seulement pour $a \geq 0$? Sauriez-vous définir la valeur de $(-2)^{1/2}$?

Remarque 3.1.4. Attention : pour tout nombre réel positif a et pour tout nombre réel (positif ou négatif) b on a **toujours** $a^b > 0$. Ceci peut être expliqué de façon intuitive comme suit : si $b \geq 0$ alors a^b n'est rien d'autre que le nombre positif a multiplié par lui-même b fois ; si $b < 0$ alors a^b n'est rien d'autre que le nombre positif $\frac{1}{a}$ multiplié par lui-même $(-b)$ fois !

On rappelle les **identités remarquables** suivantes :

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Remarque 3.1.5. Les puissances ont la priorité sur les produits et les divisions : ainsi, $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9$ et pas 6^2 !

3.1.2 Logarithmes

L'opération inverse de la puissance est le logarithme.

Exemple 3.1.6. Soit r le nombre réel tel que $4^r = \frac{7}{5}$. Quelle est la valeur de r ?

$$r = \log_4 \left(\frac{7}{5} \right) = 0,242713\dots$$

Étant donnés deux nombre réels *positifs* a et b , on peut calculer le **logarithme de b en base a** : sa valeur est l'unique nombre réel r tel que $a^r = b$.

On rappelle les propriétés fondamentales des logarithmes : pour tout $a, b, c > 0$, avec $a \neq 1$, et pour tout nombre réel r ,

$$\begin{aligned} \log_a (b \cdot c) &= \log_a (b) + \log_a (c) \\ \log_a \left(\frac{b}{c} \right) &= \log_a (b) - \log_a (c) \\ \log_a (1) &= 0 ; \log_a (a) = 1 \\ \log_a (a^r) &= r ; a^{\log_a (b)} = b \\ \log_a (b^r) &= r \log_a (b) \\ \log_a (b) &= \frac{\log_c (b)}{\log_c (a)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

En particulier,

$$\log_a (b) = -\log_a \left(\frac{1}{b} \right) = -\log_{\frac{1}{a}} (b) = \log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{b} \right) = \frac{1}{\log_b (a)}.$$

Lorsque $a = e$, on écrit $\ln (b)$ pour $\log_e (b)$ (le **logarithme naturel**).

Remarque 3.1.7. Les calculatrices souvent ne calculent que le logarithme naturel et le logarithme en base 10. Grâce à la dernière propriété dans (3.2), pour calculer $\log_a (b)$ il suffit de calculer le quotient $\frac{\ln(b)}{\ln(a)}$ ou encore le quotient $\frac{\log_{10}(b)}{\log_{10}(a)}$.

De plus, toujours grâce à la même propriété nous avons une façon facile de passer, par exemple, du logarithme en base 10 au logarithme naturel et vice versa : si c est un nombre réel, alors

$$\ln c = \frac{\log_{10} c}{\log_{10} e} \text{ et } \log_{10} c = \frac{\ln c}{\ln 10}.$$

Maintenant nous pouvons donner la définition précise de a^b , quand $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition 3.1.8. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a > 0$. On définit

$$a^b = e^{b \ln(a)}.$$

Cette définition est cohérente avec tout ce qu'on a dit jusqu'à maintenant, car

$$a^b = e^{\ln(a^b)} \text{ et } \ln(a^b) = b \ln(a).$$

3.1.3 Égalités et inégalités avec puissances et logarithmes

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ des nombres réels strictement positifs.

Si $a = b$ alors :

- $a^c = b^c$, $a^{-c} = b^{-c}$ et $c^a = c^b$, $c^{-a} = c^{-b}$;
- $\log_a c = \log_b c$ et $\log_c a = \log_c b$.

Comment se comportent les puissances et les logarithmes par rapport aux inégalités ?

Si $a < b$ alors :

- si $c > 1$ alors $c^a < c^b$ et donc $c^{-a} = \frac{1}{c^a} > \frac{1}{c^b} = c^{-b}$;
- si $c < 1$ alors $\frac{1}{c} > 1$, et donc $c^a = \left(\frac{1}{c}\right)^{-a} > \left(\frac{1}{c}\right)^{-b} = c^b$ et $c^{-a} < c^{-b}$;
- $a^c < b^c$ et donc $a^{-c} = \frac{1}{a^c} > \frac{1}{b^c} = b^{-c}$;
- $\log_c a < \log_c b$ et donc $\log_a c = \frac{\ln c}{\ln a} > \frac{\ln c}{\ln b} = \log_b c$.

Remarque 3.1.9. Comment faire pour se souvenir des règles ci-dessus ? Nous verrons plus tard que les fonctions exponentielle, logarithme et puissance à exposants positifs sont *strictement croissantes*. Donc, il suffit de se souvenir du fait que, si $x < y$ et $c > 0$, alors

$$\begin{aligned} e^x &< e^y \\ \ln x &< \ln y \\ x^c &< y^c \end{aligned}$$

En effet, $c^x = e^{\ln(c^x)} = e^{x \ln c} = (e^x)^{\ln c}$. Or, $c > 1$ si et seulement si $\ln c > 0$. Donc on peut utiliser la première et la dernière des formules centrées ci-dessus pour déduire que $c^x < c^y$ si $c > 1$ et $x < y$. Un raisonnement analogue vaut si $c < 1$.

Pour le logarithme, on observe que $\log_c x = \frac{\ln x}{\ln c}$ et, en utilisant la deuxième des formules centrées ci-dessus on en déduit que $\log_c x < \log_c y$ si $x < y$.

3.1.4 Parties entières

Exemple 3.1.10.

1. Quand on vous demande quel âge vous avez, vous ne répondez pas “19 ans, 4 mois, 3 jours, 5 heures et 3 minutes”, mais tout simplement “19 ans”, c’est à dire, le plus grand nombre entier qui est plus petit ou égal à votre âge.
2. Le médecin vous dit de faire une cure d’une pilule de fer par jour pendant un mois et demi, le pharmacien ne vend que des boîtes de 30 pilules. Vous allez alors acheter deux boîtes, c’est à dire, le plus petit nombre entier de boîtes qui est plus grand ou égal à 1,5.

La **partie entière inférieure** d’un nombre réel x est le plus grand nombre entier y tel que $y \leq x$.

Elle est désignée par le symbole $\lfloor x \rfloor$.

La **partie entière supérieure** d’un nombre réel x est le plus petit nombre entier y tel que $y \geq x$. Elle est désignée par le symbole $\lceil x \rceil$.

Notons que $\lfloor x \rfloor$ est l’entier qu’on obtient si on oublie tous les chiffres après la virgule dans la représentation décimale de x .

Remarquons aussi que si x est un nombre entier, alors $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor = x$. Si x n’est pas entier, alors $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

En général,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lceil x \rceil.$$

Question 3.1.11. *Est-ce que la partie entière (inférieure/supérieure) de la somme de deux nombres réels est égale à la somme des parties entières (inférieures/supérieures) des deux nombres ? Et pour la différence, le produit, le quotient ?*

3.2 Modèles de type puissance, exponentiel et logarithmique

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x)^{g(x)} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Remarque 3.2.1. La formule de la puissance a un sens sauf si :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

3.2.1 Modèle de type puissance

Soit $r \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^r$$

$$\text{Le domaine de } f \text{ est } \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } r \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{si } r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \text{ et son image est } \\ \mathbb{R}^{>0} & \text{si } r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} \mathbb{R}^{\geq 0} & \text{si } r \in \mathbb{N} \text{ et } r \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } r \in \mathbb{N} \text{ et } r \text{ est impair} \\ \mathbb{R}^{>0} & \text{si } r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \text{ et } r \text{ est pair} \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{si } r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \text{ et } r \text{ est impair} \\ \mathbb{R}^{>0} & \text{si } r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

En utilisant la définition de limite, on démontre que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } r \in \mathbb{N} \text{ et } r \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } r \in \mathbb{N} \text{ et } r \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \text{ et } r \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \text{ et } r \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ si } r < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

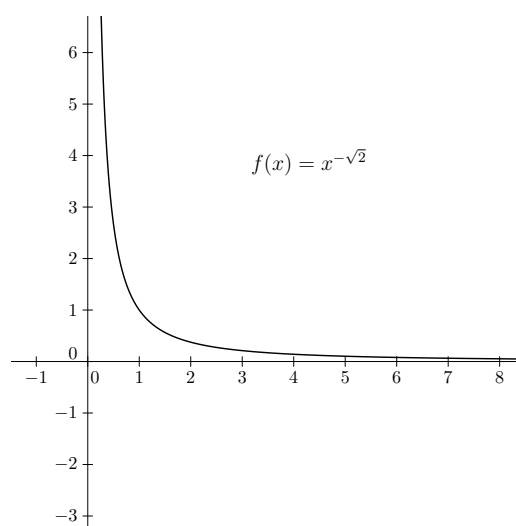
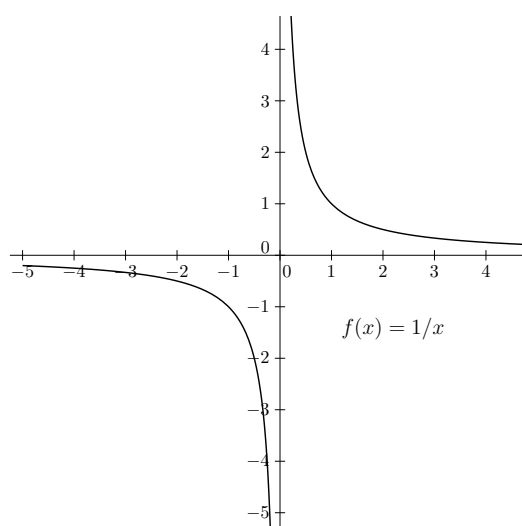
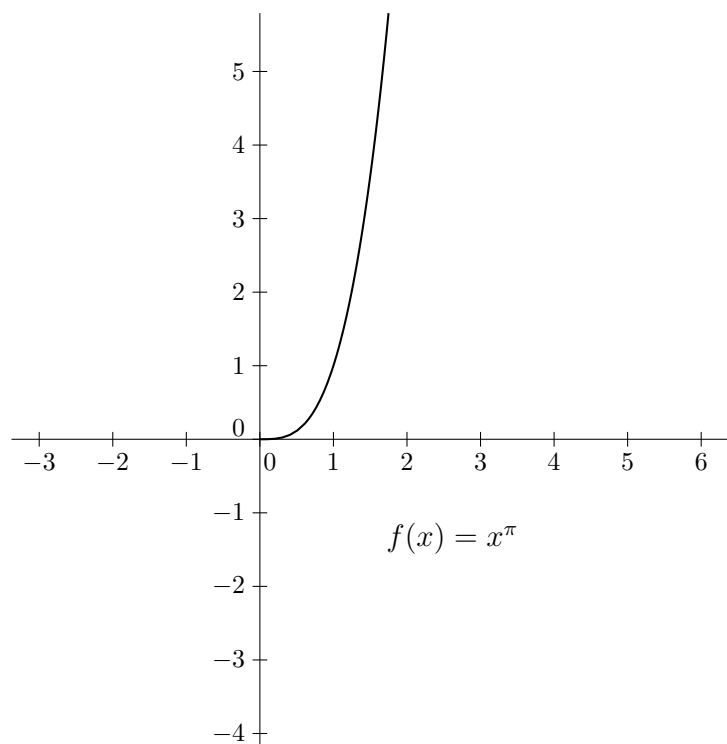
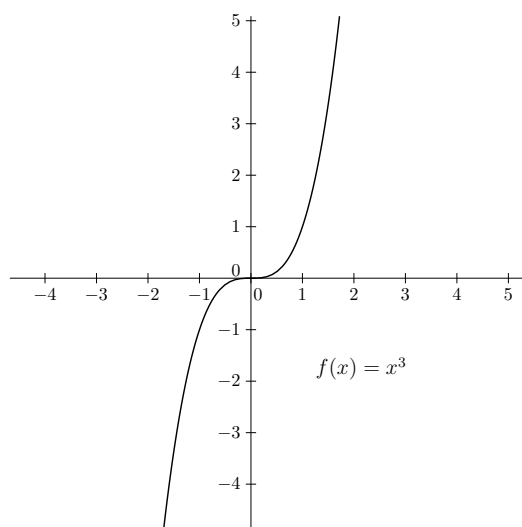
Les fonctions puissances sont dérivables sur tout leur domaine et

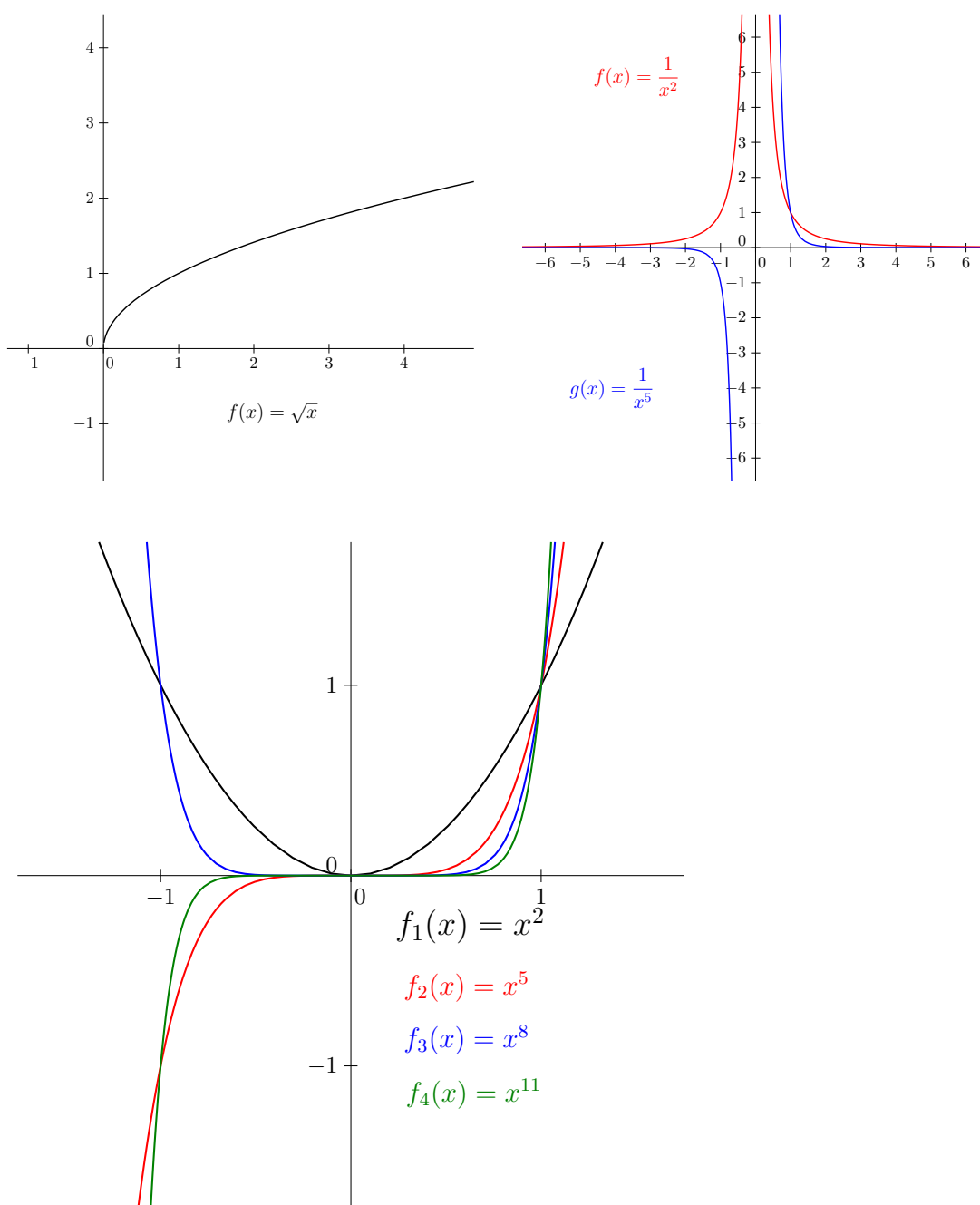
$$(x^a)' = ax^{a-1}, \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

Pour $a = 0$, nous obtenons $(1)' = 0$, c'est-à-dire : la dérivée de la fonction constante 1 est la fonction nulle.

Le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe vertical si $r \in \mathbb{Z}$ et r est pair, et symétrique par rapport à l'origine si $r \in \mathbb{Z}$ et r est impair.

Exemples





3.2.2 Modèle exponentiel (en base e)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = e^x.$$

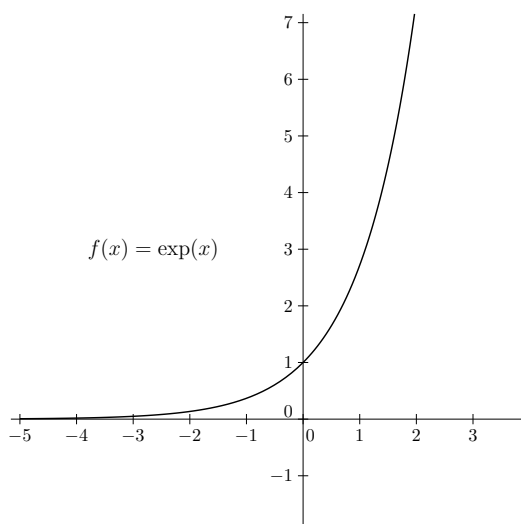
f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, est croissante et positive pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En utilisant la définition de limite, on démontre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$.

La fonction exponentielle est dérivable sur tout son domaine et

$$(e^x)' = e^x,$$

Graphes



3.2.3 Modèle logarithmique (en base e)

On considère la fonction f définie par :

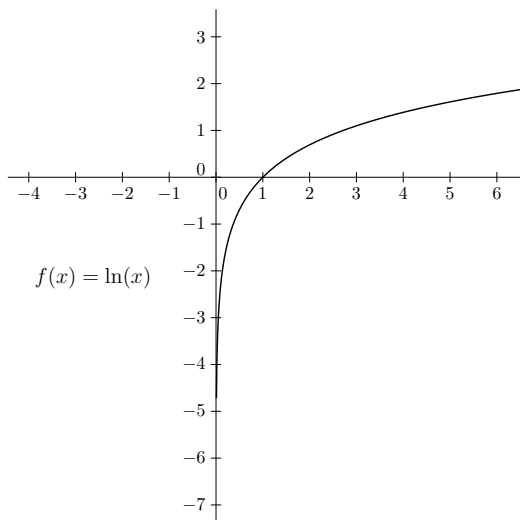
$$f(x) = \ln x.$$

f est définie pour tout $x > 0$, est croissante et son image est \mathbb{R} .

En utilisant la définition de limite, on démontre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

La fonction logarithme est dérivable sur tout son domaine et

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Graphe

Remarque 3.2.2. Grâce aux règles des dérivées, nous pouvons calculer les dérivées suivantes.

- Si $f(x) = \log_a x$, pour un certain $a \in \mathbb{R}^{>0}$, alors $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$
- Si $f(x) = x^3 \cdot e^x$, alors $f'(x) = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x$.
- Si $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln x$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \ln x + x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \ln x + x^{-\frac{3}{2}} \\ &= x^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2} \ln x + 1\right) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

3.3 Suites

Nous allons considérer un type spécial de fonctions réelles : les suites.

Une *suite* est une fonction de domaine \mathbb{N} et à valeurs dans \mathbb{R}

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Puisque la variable est un nombre naturel, d'habitude on la note par n et non pas par x .

L'élément image de n est souvent noté x_n (ou a_n, b_n, c_n , etc.) et non pas $f(n)$. De cette façon, une suite devient une collection de nombres réels indicés par des nombres naturels : $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Ce n'est qu'un choix de notation, ne vous laissez pas confondre : dans l'écriture x_n la *variable indépendante* est n et la *valeur de la fonction* f en n est x_n .

Une suite est une fonction réelle comme une autre. Le graphe d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc l'ensemble (infini) des paires (n, x_n) .

Exemples 3.3.1. On définit :

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\ b_n &= n^2 \\ c_n &= \text{le } n\text{-ème nombre premier} \\ d_n &= \sqrt{n} \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} &= 0, 1, 3, 6, 10, \dots \\ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} &= 0, 1, 4, 9, 16, \dots \\ (c_n)_{n \in \mathbb{N}} &= 1, 2, 3, 5, 7, \dots \\ (d_n)_{n \in \mathbb{N}} &= 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \dots \end{aligned}$$

Les suites dans les exemples sont exprimées en tant que fonctions : on donne de façon explicite la loi qui associe à la variable n son image x_n . On peut aussi exprimer le terme général d'une suite par rapport à des termes précédents. Par exemple :

$$x_{n+1} = 2x_n.$$

Dans ce cas, il faut aussi spécifier le premier terme. Par exemple :

$$x_0 = 1.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée *par récurrence* : on définit le terme initial et la loi qui nous permet de passer d'un terme au terme successif. Dans l'exemple ci-dessus :

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 2x_0 = 2 \cdot 1 = 2 \\ x_2 &= 2x_1 = 2 \cdot 2 = 4 \\ x_3 &= 2x_2 = 2 \cdot 4 = 8 \\ &\dots \end{aligned}$$

3.4 Systèmes dynamiques discrets

Exemple 3.4.1. Le taux de croissance annuel d'une population de cerfs est de 20% et le problème n'indique aucune cause externe de mortalité. Nous allons supposer qu'au

début la population de cerfs est constituée de x_0 individus.
Après un an la population de cerfs sera de

$$x_1 = \left(1 + \frac{20}{100}\right) x_0.$$

Après deux ans, on aura $x_2 = \left(1 + \frac{20}{100}\right) x_1 = \left(1 + \frac{20}{100}\right)^2 x_0$ et après trois ans, $x_3 = \left(1 + \frac{20}{100}\right) x_2 = \left(1 + \frac{20}{100}\right)^3 x_0$.

Nous pouvons résumer la situation en disant que pour tout nombre naturel n ,

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{20}{100}\right) x_n \quad (3.3)$$

Nous voyons que pour calculer la valeur de x_n pour une année n donnée, nous n'avons pas besoin de calculer d'abord $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ mais nous savons trouver une formule explicite qui exprime x_n en fonction de n et de la donnée initiale x_0 . Il s'agit de la formule

$$x_n = \left(1 + \frac{20}{100}\right)^n x_0. \quad (3.4)$$

Le système dynamique décrit ci-dessus est un exemple de système dynamique **discret**. Le mot "discret" indique que le temps est mesuré en unités fixées (dans ce cas, les années) et on ne se demande pas ce qui se passe après une fraction de l'unité de temps (par exemple, après quelques mois, ou jours, ou secondes).

L'équation (3.3), qui nous dit comment évolue le système entre deux unités de temps successives s'appelle **équation de récurrence**. Pour pouvoir prédire le comportement du système pour des temps très grands, il est utile de savoir déterminer aussi une **solution explicite**, comme dans l'équation (3.4). La valeur x_0 représente la **condition initiale**.

Comme l'exemple ci-dessus l'indique, pour décrire un système dynamique discret nous utilisons une **suite**.

Nous allons voir quelques exemples de problèmes qui se modélisent avec les suites.

3.4.1 Suites arithmétiques

Exemple 3.4.2. La masse d'un poisson croît de 100 g par an. A la naissance, le poisson pèse 45 g. Combien pèse-t-il à l'âge de 4 ans ?

Nous notons x_n le poids du poisson (en grammes) à l'âge de n ans. Nous avons l'équation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n + 100 \quad (3.5)$$

et la condition initiale $x_0 = 45$ g. Écrivons

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + 100 \\x_2 &= x_1 + 100 \\x_3 &= x_2 + 100 \\x_4 &= x_3 + 100 .\end{aligned}$$

Si nous faisons la somme des termes de gauche et des termes de droite de ces quatre équations, nous obtenons

$$x_4 + x_3 + x_2 + x_1 = x_3 + x_2 + x_1 + x_0 + 4 \times 100 .$$

En simplifiant,

$$x_4 = x_0 + 4 \times 100 = 445 \text{ g.}$$

Une suite **arithmétique** de *facteur additif* b et valeur initiale x_0 est une suite qui satisfait l'équation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n + b. \quad (3.6)$$

La solution explicite de cette équation de récurrence est

$$x_n = x_0 + n \cdot b. \quad (3.7)$$

On utilise les suites arithmétiques pour modéliser des situations où il y a une augmentation/diminution *constante* de la quantité mesurée, à chaque unité de temps. Une augmentation correspond à une valeur positive de b et une diminution correspond à une valeur négative de b .

Exemple 3.4.3. Considérons le poisson de l'exemple précédant. Après combien d'années va-t-il avoir un poids ≥ 1 kg ?

L'équation de récurrence (3.5) a comme solution explicite

$$x_n = 45 + n \cdot 100 .$$

On se demande au bout de combien d'années le poids du poisson va franchir les 1000 g. D'abord voyons à quelle âge le poisson va peser exactement 1 kg : ceci revient à résoudre l'équation

$$1000 = 45 + n \cdot 100 \quad (3.8)$$

par rapport à la variable n . La solution est

$$n = \frac{1000 - 45}{100} = 9,55.$$

Donc le poisson pèsera 1 kg à l'âge de 9 ans, 6 mois, 18 jours et quelques heures. Or, nous sommes intéressés seulement par des valeurs entières de la variable n , car nous pesons le poisson seulement une fois par an. Ce sera donc après 10 ans de vie du poisson que nous allons mesurer pour la première fois un poids supérieur ou égal à 1 kg.

On remarque que 10 est la partie entière supérieure de $9,55$, noté $[9,55]$.

Exemple 3.4.4. Dans l'exemple ci-dessus, étant donné un nombre naturel M , jusqu'à quelle année notre poisson aura-t-il un poids inférieur ou égal à M g? A partir de quelle année aura-t-il un poids $\geq M$ g?

La réponse à la première question est donnée par

$$n = \left\lfloor \frac{M - 45}{100} \right\rfloor,$$

la réponse à la deuxième question est donnée par

$$n = \left\lceil \frac{M - 45}{100} \right\rceil.$$

Au fur et à mesure des années, notre poisson devient de plus en plus gros. Nous pouvons fixer un poids M arbitrairement grand et nous trouverons toujours un entier n tel qu'après n ans le poisson ait un poids $\geq M$.

Cette intuition se traduit de façon précise avec le concept de *limite*, que nous allons voir plus tard. Les remarques ci-dessus nous conduisent à affirmer qu'une suite arithmétique de raison r tend vers $+\infty$ si $b > 0$ et tend vers $-\infty$ si $b < 0$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3.4.5. Le prix de vente d'une voiture commercialisée initialement en 1995 diminue tous les ans de la même valeur. En 2002, elle est affichée au prix de 13 200 euros. On relève en 2006 un prix de vente de 11 600 euros. On note x_n le prix de vente de ce modèle l'année $(1995 + n)$.

1. Quelle est la valeur de la diminution annuelle du prix de la voiture?

Comme le prix de vente diminue tous les ans de la même valeur, nous pouvons modéliser ce problème avec une suite arithmétique, d'équation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n + b,$$

dont la solution est

$$x_n = x_0 + nb.$$

Voilà nos données : $x_7 = 13200$ euros et $x_{11} = 11600$ euros. La première question nous demande d'établir la valeur de b . Nous avons donc à résoudre le système

$$\begin{cases} 13200 = x_0 + 7b \\ 11600 = x_0 + 11b \end{cases}$$

par rapport à la variable b . Faisons la soustraction terme à terme des deux équations :

$$1600 = -4b,$$

soit $b = -400$. Le prix diminue donc de 400 euros chaque année.

2. Quel était le prix initial de vente en 1995 ?

Il s'agit d'établir la valeur de x_0 . Maintenant que nous connaissons la valeur du facteur additif, nous pouvons résoudre n'importe laquelle des deux équations dans le système ci-dessus. Nous trouvons $x_0 = 16000$ euros.

3. A partir de quelle année sera-t-il possible d'acquérir la voiture pour moins de 10 000 euros ?

Le prix sera exactement 10000 euros quand

$$n = \frac{16000 - 10000}{400} = 15,$$

donc en 2010. Donc à partir de 2011 le prix sera strictement inférieur à 10000 euros.

4. Quelle sera la dernière année pendant laquelle il sera possible de vendre cette voiture ?

Il s'agit d'une suite arithmétique de facteur additif négatif, donc la suite tend vers $-\infty$. Le prix va donc descendre jusqu'à arriver à zéro : à ce moment vendre la voiture n'aura plus de sens, il faudrait payer l'acheteur ! Le prix sera exactement 0 quand $n = \frac{16000}{400} = 40$, donc en 2035.

Remarque 3.4.6. Après l'année 2035 (et donc pour $n > 40$) notre modèle mathématique continue à avoir un sens, simplement les valeurs de la suite seront négatives. Par contre, du point de vue de la modélisation, le modèle cesse d'être pertinent, car l'interprétation ne nous donne plus des résultats sensés par rapport à notre problème initial. Il faut donc toujours se souvenir des contraintes implicites dans notre problème. Dans cet exemple, on pourrait dire que le problème nous intéresse uniquement pour $x_n \geq 0$.

3.4.2 Suites géométriques

Une suite **géométrique** de *facteur multiplicatif* $a > 0$ et valeur initiale x_0 est une suite qui satisfait l'équation de récurrence

$$x_{n+1} = ax_n. \quad (3.9)$$

La solution explicite de cette équation de récurrence est

$$x_n = a^n x_0. \quad (3.10)$$

On utilise les suites géométriques pour modéliser des situations où on a une augmentation/diminution *en pourcentage* de la quantité mesurée, à chaque unité de temps. La croissance d'une population, comme dans l'exemple 3.4.1, est un problème que typiquement nous modélisons à l'aide d'une suite géométrique.

Si le taux d'augmentation/diminution est de $\pm p\%$, alors le facteur multiplicatif de la suite sera $a = (1 \pm \frac{p}{100})$.

Exemple 3.4.7. La population des otaries de Steller décroît de 5% par an. Combien de temps faudra-t-il pour que la population se réduise de moitié ?

Nous notons x_0 la taille de la population d'otaries aujourd'hui (que nous ne connaissons pas) et par x_n la taille de la population dans n ans. Nous avons l'équation de récurrence

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{5}{100}\right) x_n,$$

dont la solution explicite est

$$x_n = (0,95)^n x_0.$$

On se demande pour quelle valeur de n on aura $x_n = \frac{1}{2}x_0$. On résout donc l'équation

$$\frac{1}{2}x_0 = (0,95)^n x_0$$

par rapport à la variable n (en supposant naturellement que $x_0 > 0$) et on trouve

$$n = \log_{0,95} \left(\frac{1}{2}\right) \approx 13,5.$$

Après $\lceil \log_{0,95} \left(\frac{1}{2}\right) \rceil = 14$ ans, la population d'otaries sera moins importante que la moitié de la population actuelle.

Lorsque le temps passe, la taille de la population diminue de plus en plus : elle sera réduite à un dixième de sa taille initiale après $\lceil \log_{0,95} \left(\frac{1}{10}\right) \rceil = 45$ ans, à un centième après $\lceil \log_{0,95} \left(\frac{1}{100}\right) \rceil = 90$ ans et à un millièmè après $\lceil \log_{0,95} \left(\frac{1}{1000}\right) \rceil = 135$ ans.

De plus, quelle que soit la valeur de x_0 , il existe un nombre naturel n tel que après n ans il reste moins de 100 otaries : il suffit de résoudre l'équation

$$100 = (0,95)^n x_0$$

par rapport à la variable n en considérant x_0 comme un paramètre :

$$n = \log_{0,95} \left(\frac{100}{x_0}\right).$$

Donc après $\lceil \log_{0,95} \left(\frac{100}{x_0}\right) \rceil$ ans il y aura moins de 100 otaries, après $\lceil \log_{0,95} \left(\frac{10}{x_0}\right) \rceil$ ans il y aura moins de 10 otaries et après $\lceil \log_{0,95} \left(\frac{1}{x_0}\right) \rceil$ ans il y aura moins d'une otarie (et on peut donc considérer que à partir de ce moment cette espèce aura disparu).

Encore une fois, cette intuition se traduit de façon précise à travers le concept de limite, que nous verrons plus tard. Une suite géométrique de facteur multiplicatif a tend vers $+\infty$ si $a > 1$ (autrement dit, si le taux de croissance est positif) et tend vers 0 si $0 < a < 1$ (autrement dit, si le taux de croissance est négatif), lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque 3.4.8. Dans un modèle à croissance géométrique la variable n n'indique pas toujours une unité de temps. Elle peut aussi indiquer une unité de longueur, ou de masse ou d'une autre quantité physique.

Exercice 3.4.9. Au niveau de la mer, la pression atmosphérique est de 1013 hPa (hectopascals). On admet que la pression atmosphérique diminue de 1,25% à chaque élévation de 100 m. On note x_n la pression en hectopascal à $100n$ mètres d'altitude.

1. Déterminer les pressions x_0, x_1, x_2 aux altitudes respectives de 0 m, 100 m et 200 m.

$$x_0 = 1013 \text{ hPa}; x_1 = \left(1 - \frac{1,25}{100}\right) x_0 \approx 1000 \text{ hPa}; x_2 = \left(1 - \frac{1,25}{100}\right)^2 x_0 \approx 987 \text{ hPa}.$$

2. Trouver l'équation de récurrence et sa solution explicite.

Il s'agit d'une suite géométrique. L'équation de récurrence est

$$x_{n+1} = \frac{98,75}{100} x_n$$

et sa solution est

$$x_n = \left(\frac{98,75}{100}\right)^n \cdot 1013 \text{ hPa}.$$

3. Déterminer à partir de quelle altitude la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hPa.

Résolvons par rapport à la variable n l'équation

$$600 = \left(\frac{98,75}{100}\right)^n \cdot 1013.$$

Nous trouvons $n = \log_{0,9875} \left(\frac{600}{1013}\right) = \log_{0,9875} (0,5923) \approx 41,6$. Donc à partir de 4200 m la pression sera inférieure à 600 hPa.

3.4.3 Suites arithmético-géométriques

Exemple 3.4.10. Une perfusion de pénicilline est donnée à un patient, où une dose de 10 mg de pénicilline est délivrée toutes les 5 minutes. Pendant cet intervalle de temps, les reins du patient éliminent 20% de la pénicilline déjà présente dans le sang. On suppose qu'à l'instant zéro le patient n'a pas encore reçu aucun apport de pénicilline. Étudions l'évolution dans le temps de la présence de pénicilline dans le sang du patient.

Notre unité de temps est ici l'intervalle de temps de 5 minutes. Soit x_n la quantité de pénicilline présente dans le sang du patient après $5n$ minutes. Notre hypothèse est que $x_0 = 0$, donc pendant les premières 5 minutes les reins du patient n'ont pas de pénicilline à éliminer. Après 5 minutes, c'est-à-dire pour $n = 1$, le patient reçoit une dose de 10 mg de pénicilline. Nous pouvons résumer la situation en disant que

$$x_1 = 10 \text{ mg},$$

mais nous allons ré-écrire cette équation de la façon suivante :

$$x_1 = (1 - 20\%) x_0 + 10 .$$

Après les 5 minutes qui suivent (c'est à dire pour $n = 2$), les reins du patient ont éliminé 20% de la quantité de pénicilline qui était présente à l'instant $n = 1$ et le patient reçoit une nouvelle perfusion de 10 mg. Donc,

$$x_2 = (1 - 20\%) x_1 + 10 = 0,8x_1 + 10 = 18 \text{ mg.}$$

Après un quart d'heure la situation sera la suivante :

$$x_3 = 0,8x_2 + 10 = 24,4 \text{ mg.}$$

Avec la même méthode on calcule $x_4 = 29,52$ mg, $x_8 \approx 39,51$ mg, $x_{12} \approx 46,56$, $x_{15} \approx 48,24$ mg, $x_{20} \approx 49,42$, $x_{30} \approx 49,94$, $x_{50} \approx 49,99$, ...

Une suite **arithmético-géométrique** de *facteur multiplicatif* $a > 0$, de *facteur additif* b et de valeur initiale x_0 est une suite qui satisfait l'équation de récurrence

$$x_{n+1} = ax_n + b. \quad (3.11)$$

On utilise les suites arithmético-géométriques pour modéliser des situation où on a une augmentation/diminution *en pourcentage* de la quantité mesurée (facteur multiplicatif) ainsi qu'un apport externe (facteur additif), à chaque unité de temps.

Si le taux d'augmentation/diminution est de $\pm p\%$, alors le facteur multiplicatif de la suite sera $a = (1 \pm \frac{p}{100})$.

Dans l'exemple ci-dessus nous avons un apport externe constant (la perfusion de pénicilline), qui se traduit en un facteur additif de $b = 10$ mg, et un phénomène de décroissance, qui se traduit en un facteur multiplicatif $a = 80\%$.

Nous voulons maintenant trouver la solution explicite de l'équation de récurrence (3.11). Reprenons l'exemple ci-dessus. Nous remarquons que pour n de plus en plus grand, la valeur de la suite semble approcher de plus en plus la valeur de 50 mg. Autrement dit, pour n suffisamment grand, $x_{n+1} \approx x_n \approx 50$ mg.

Comment faire pour trouver la valeur limite sans calculer les valeurs de x_n pour n de plus en plus grand? Reformulons le problème : nous cherchons un nombre réel e tel que $e = ae + b$, soit

$$e = \frac{b}{1 - a}. \quad (3.12)$$

Le nombre e s'appelle **valeur d'équilibre**. Si $0 < a < 1$, alors la suite tend vers sa valeur d'équilibre e , lorsque n tend vers $+\infty$. Si $a > 1$, alors la suite tend vers $+\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Nous allons utiliser la valeur d'équilibre pour trouver la solution explicite de l'équation de récurrence (3.11). Étudions la suite

$$y_n = x_n - e.$$

Nous remarquons que $y_{n+1} = x_{n+1} - e = ax_n + b - e = ax_n + e(1 - a) - e = ax_n - ae = ay_n$. Donc la suite y_n est géométrique, de raison a . Nous connaissons la solution explicite de cette équation, à savoir

$$y_n = a^n y_0.$$

En remplaçant les valeurs de y_n et y_0 , nous obtenons $x_n - e = a^n(x_0 - e)$, c'est à dire

$$x_n = a^n(x_0 - e) + e. \quad (3.13)$$

Exemple 3.4.11. Dans l'exemple ci-dessus la valeur d'équilibre est $e = 50$ mg et la quantité de pénicilline présente dans le sang après $5n$ minutes se calcule avec la formule

$$x_n = (0,8)^n(0 - 50) + 50 \text{ mg.}$$

Combien de temps faut-il attendre avant que la quantité de pénicilline dans le sang du patient dépasse les 90% de la valeur d'équilibre ?

Résolvons par rapport à l'inconnue n l'équation

$$0,9 \cdot 50 = (0,8)^n \cdot (-50) + 50,$$

soit $n = \log_{0,8} 0,1 \approx 10,3$. Il faut donc attendre $\lceil 10,3 \times 5 \rceil = \lceil 51,5 \rceil = 52$ minutes pour mesurer une quantité de pénicilline dans le sang supérieure à 45 mg.

3.4.4 La suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent :

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad (3.14)$$

Puisque le terme général de la suite dépend des *deux* termes précédents, il faut donner deux conditions initiales : généralement, on pose $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.

Cette suite doit son nom à Leonardo Fibonacci, un mathématicien italien du XIII^e siècle qui, dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages, le *Liber Abaci*, décrit la croissance d'une population de lapins : «*Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?*».

Le problème de Fibonacci est à l'origine de la suite dont le n -ième terme correspond au nombre de paires de lapins au n -ème mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- au (début du) premier mois, il y a juste une paire de lapereaux ;
- les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois ;
- chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux ;
- les lapins ne meurent jamais (donc la suite de Fibonacci est *strictement croissante*).

Jusqu'à la fin du deuxième mois, la population se limite à un couple (ce qui donne $x_2 = 1$).

Dès le début du troisième mois, le couple de lapins a deux mois et il engendre un autre couple de lapins ; on a donc $x_3 = 1 + 1 = 2$.

Plaçons-nous maintenant au mois n et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard, soit au mois $n + 2$: la valeur de x_{n+2} sera la somme des couples de lapins au mois $n + 1$ et des couples nouvellement engendrés. Or, n'engendent au mois $(n + 2)$ que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existent deux mois auparavant.

On a donc, pour tout entier n strictement positif, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.

Nous donnons maintenant (sans faire ici les détails des calculs) la solution explicite de l'équation de récurrence (3.14), c'est-à-dire une expression telle que le calcul du nombre de couples pour une valeur de n donnée ne présuppose la connaissance d'aucun nombre de couples pour une quelconque autre valeur de n , ce que ne permet pas l'équation de récurrence.

La solution est donnée par la *Formule de Binet* :

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (1 - \varphi)^n),$$

où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$ est le célèbre *nombre d'or*.

4. S'il n'y a que zéro avant la virgule, alors on calcule le nombre m de zéros consécutifs immédiatement après la virgule (à droite). On prend comme b le nombre qu'on obtient à partir de a en déplaçant la virgule vers la droite de $m + 1$ places et on prend $c = -m - 1$.

Exemples 4.1.4. Si $a = 101,386$, alors $n = 2$; donc $b = 1,01386$ et $c = 2$.

Si $a = 9,365$, alors a est déjà en notation scientifique, donc $b = a$ et $c = 0$.

Si $a = 0,0003005$, alors $m = 3$; donc $b = 3,005$ et $c = -4$.

- Passer de la notation scientifique à la notation décimale est très facile : si $c \geq 0$ alors on déplace la virgule dans b de c places vers la droite (en ajoutant des zéros si nécessaire). Si $c < 0$ alors on ajoute c zéros à la gauche de b et on déplace la virgule de $-c$ places vers la gauche.

Exemples 4.1.5. Si $a = 1,02 \times 10^5$, alors on ajoute d'abord 3 zéros "inutiles" sur la droite : $a = 1,02000 \times 10^5$; ensuite, on déplace la virgule de 5 places vers la droite : $a = 102000$.

Si $a = 2,3 \times 10^{-3}$ alors on ajoute d'abord 3 zéros "inutiles" à gauche : $a = 0002,3 \times 10^{-3}$; ensuite, on déplace la virgule de 3 places vers la gauche : $a = 0,0023$.

La notation scientifique est très utile pour simplifier les calculs de sommes et de produits de nombres (et en déduire rapidement l'ordre de grandeur). Soient $a_1 = b_1 \times 10^{c_1}$ et $a_2 = b_2 \times 10^{c_2}$ deux nombres réels en notation scientifique.

- Pour calculer la somme $a_1 + a_2$, il faut se rendre dans une situation où les puissances de 10 ont le même exposant. Pour faire ceci, on écrit

$$a_2 = b_2 \times 10^{c_2} = b_2 \times 10^{c_2} \times 10^{-c_1} \times 10^{c_1} = (b_2 \times 10^{c_2-c_1}) \times 10^{c_1}.$$

Ensuite, on calcule la somme $b = b_1 + b_2 \times 10^{c_2-c_1}$. Le résultat sera $a_1 + a_2 = b \times 10^{c_1}$. Pour terminer, on écrit le résultat en notation scientifique.

- Le même procédé marche pour la soustraction.

Exemples 4.1.6.

1. Soient $a_1 = 3,4 \times 10^{-2}$ et $a_2 = 9,2 \times 10^{-2}$. Les deux quantités ont le même exposant, il suffit de faire la somme des deux mantisses. La somme $a_1 + a_2$ est clairement égale à $12,6 \times 10^{-2}$. Le résultat n'est pas encore en notation scientifique. En notation scientifique, $a_1 + a_2 = 1,26 \times 10^{-1}$. Donc nous sommes montés d'un ordre de grandeur.

2. Soient $a_1 = 4,5 \times 10^3$ et $a_2 = 8,2 \times 10^5$. Pour calculer $a_1 - a_2$, on voudrait pouvoir factoriser une puissance de 10. Laquelle ? Prenons la plus grande, 10^5 . Écrivons donc $a_1 - a_2 = (4,5 \times 10^{3-5} - 8,2) \times 10^5$. Calculons la quantité entre parenthèses : $0,045 - 8,2 = -8,155$. Cette quantité est déjà en notation scientifique. N'oublions pas maintenant la puissance de 10 : le résultat sera $a_1 - a_2 = -8,155 \times 10^5$. L'ordre de grandeur de la différence dans ce cas est le même que celui de la quantité la plus grande, a_2 .
3. Soient $a_1 = 9,9 \times 10^4$ et $a_2 = 2 \times 10^3$. Avec la même méthode que précédemment, on a $a_1 + a_2 = 10,1 \times 10^4 = 1,01 \times 10^5$. Donc l'ordre de grandeur de la somme n'est pas toujours le même que celui de la quantité la plus grande.
4. Soient $a_1 = 5,2 \times 10^{-5}$ et $a_2 = 9,3 \times 10^{-8}$. Sauriez-vous, sans faire les calculs, deviner l'ordre de grandeur de la somme $a_1 + a_2$? Vérifions : $a_1 + a_2 = (5,2 + 9,3 \times 10^{-8-(-5)}) \times 10^{-5} = 5,2093 \times 10^{-5}$.
 - Pour calculer le produit/quotient de deux nombres en notation scientifique, on multiplie/divise les mantisses entre elles et on additionne/soustrait les exposants entre eux. Pour conclure, on écrit le résultat en notation scientifique.

Exemples 4.1.7. Calculons le produit de a_1 et a_2 dans les exemples 1. et 2. ci-dessus et le quotient de a_1 et a_2 dans les exemples 3. et 4.

1. $a_1 \cdot a_2 = 3,4 \times 10^{-2} \times 9,2 \times 10^{-2} = 31,28 \times 10^{-2+(-2)} = 3,128 \times 10^{-3}$.
2. $a_1 \cdot a_2 = 4,5 \times 10^3 \times 8,2 \times 10^5 = 36,9 \times 10^{3+5} = 3,69 \times 10^9$.
3. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{9,9 \times 10^4}{2 \times 10^3} = 4,95 \times 10^{4-3}$.
4. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{5,2 \times 10^{-5}}{9,3 \times 10^{-8}} = 0,559... \times 10^{-5-(-8)} = 5,59... \times 10^2$.

4.2 Encadrements

Exemple 4.2.1. Nous souhaitons comparer les nombres $a = \frac{4587,64}{3}$ et $b = \frac{758926,5}{643,8}$ sans utiliser de calculatrice et en faisant le moins possible de calculs. Comment procéder ?

Nous allons d'abord écrire le numérateur et le dénominateur de a et de b en notation scientifique :

$$a = \frac{4,58764 \times 10^3}{3 \times 10^0} = \frac{4,58764}{3} \times 10^3$$

$$b = \frac{7,589265 \times 10^5}{6,438 \times 10^2} = \frac{7,589265}{6,438} \times 10^3$$

Puisque $a \approx \frac{5}{3} \times 10^3 = 1, \dots \times 10^3$ et $b \approx \frac{8}{6} \times 10^3 = 1, \dots \times 10^3$, nous voyons tout de suite que a et b ont le même exposant. Par contre, il n'est pas immédiatement clair lequel des deux nombres est plus grand que l'autre.

Puisque a et b ont le même exposant, il suffit de comparer les deux mantisses (c'est à dire qu'on oublie la puissance de 10).

Soient donc maintenant

$$a = \frac{4,58764}{3} \text{ et } b = \frac{7,589265}{6,438}.$$

Considérons d'abord a . Puisque $4,5 < 4,58764 < 4,6$, nous avons (d'après les règles apprises dans le cours précédent)

$$A_1 = \frac{4,5}{3} < a < \frac{4,6}{3} = A_2.$$

Or, les deux fractions ci dessus sont faciles à calculer à la main : $A_1 = 1,5$. Pour A_2 , il suffit en fait de le **majorer** : puisque (si on commence à faire le calcul) on a $4,6 : 3 = 1,53\dots$, nous allons déduire que $A_2 < 1,6$.

Donc,

$$1,5 < a < 1,6.$$

Considérons maintenant b . Comme tout à l'heure, on peut remarquer que

$$\frac{7,5}{6,438} < b < \frac{7,6}{6,438}.$$

Regardons maintenant le dénominateur de b : $6 < 6,438 < 7$. D'après les règles apprises dans le cours précédent, nous pouvons en déduire que

$$B_1 = \frac{7,5}{7} < b < \frac{7,6}{6} = B_2.$$

Nous allons **minorer** B_1 : puisque $7,5 : 7 = 1,0\dots$, nous allons déduire que $B_1 > 1$. Pour B_2 , il est facile de le majorer : $7,6 : 6 = 1,2\dots$, donc $B_2 < 1,3$. Donc

$$1 < b < 1,3.$$

Puisque $1,3 < 1,5$, nous pouvons déduire que $b < a$.

Étant donnés deux nombre réels a, b , pour établir si $a < b$ ou $b < a$, il est suffisant de trouver des **encadrements** des deux nombres

$$A_1 \leq a \leq A_2 \text{ et } B_1 \leq b \leq B_2$$

tels que soit $A_2 < B_1$ (et dans ce cas $a < b$), soit $B_2 < A_1$ (et dans ce cas $b < a$).

Remarque 4.2.2. On rappelle que quand on compare deux fractions $a = \frac{n_1}{d_1}$ et $b = \frac{n_2}{d_2}$, alors si $n_1 \leq n_2$ et $d_1 \geq d_2$, nous pouvons conclure que $a \leq b$.

Exemple 4.2.3. On souhaite comparer les nombres $a = \ln \frac{1}{27}$ et $b = -\sqrt{2} - 1$, en se souvenant que $\lfloor e \rfloor = 2$. Nous allons donc chercher des encadrements de a et de b qui nous permettent de comprendre lequel des deux nombre est le plus grand.

Considérons $a = \ln \frac{1}{27} = \ln(3^{-3}) = -3 \ln 3$. Il nous suffira donc de trouver un encadrement pour $c = \ln 3$. Remarquons que

$$2 < e^1 < 3 = e^c \text{ et } e^c < 4 = 2^2 < e^2.$$

$$\text{Donc } 1 < c < 2, \text{ d'ou } -6 < a < -3.$$

Considérons maintenant b .

$$\text{Puisque } 1 = 1^2 < 2 = (\sqrt{2})^2 < 4 = 2^2, \text{ nous en déduisons que } 1 < \sqrt{2} < 2,$$

d'où

$$-3 = -2 - 1 < b = -\sqrt{2} - 1 < -1 - 1 = -2.$$

Donc $a < b$.

Nous allons maintenant considérer un problème auquel une calculatrice standard ne peut pas répondre.

Problème 4.2.4. Nous souhaitons estimer la taille de 2^{2400} . Une calculatrice standard ne va pas pouvoir calculer de telles puissances. Nous allons donc essayer d'utiliser uniquement des raisonnements pour répondre à cette question.

Écrire 2^{2400} en notation scientifique serait trop difficile. Nous cherchons alors à encadrer 2^{2400} entre deux puissances de 10, qui ne soient pas trop différentes de l'exposant de 2^{2400} .

Voyons comment procéder.

Nous remarquons que $2^{2400} = (2^3)^{\frac{2400}{3}} = 8^{800} < 10^{800}$. Nous avons **majoré** la quantité 2^{2400} avec 10^{800} .

Nous remarquons que $2^{2400} = (2^4)^{600} = 16^{600} > 10^{600}$. Nous avons **minoré** la quantité 2^{2400} avec 10^{600} .

On en déduit que

$$10^{600} < 2^{2400} < 10^{800}.$$

Donc l'exposant de 2^{2400} , écrit en notation scientifique, se trouve entre 600 et 800.

Nous pouvons généraliser cette méthode de la façon suivante. Étant donnés trois nombres réels positifs a, b, c , cherchons des encadrements des nombres $2^a, 3^b, 5^c$ entre deux puissances de 10.

1. On remarque que $2^a = (8)^{\frac{a}{3}} < 10^{\frac{a}{3}} \leq 10^{\lceil \frac{a}{3} \rceil}$ et $2^a = (2^4)^{\frac{a}{4}} = 16^{\frac{a}{4}} > 10^{\frac{a}{4}} \geq 10^{\lfloor \frac{a}{4} \rfloor}$.

On peut conclure donc que

$$10^{\lfloor \frac{a}{4} \rfloor} < 2^a < 10^{\lceil \frac{a}{3} \rceil}.$$

2. De même, $3^b = (9)^{\frac{b}{2}} < 10^{\frac{b}{2}} \leq 10^{\lceil \frac{b}{2} \rceil}$ et $3^b = (3^3)^{\frac{b}{3}} = 27^{\frac{b}{3}} > 10^{\frac{b}{3}} \geq 10^{\lfloor \frac{b}{3} \rfloor}$.

On peut conclure donc que

$$10^{\lfloor \frac{b}{3} \rfloor} < 3^b < 10^{\lceil \frac{b}{2} \rceil}.$$

3. Pour finir, puisque $5^c = (\frac{10}{2})^c = 10^c \cdot 2^{-c}$, on a

$$10^{\lfloor \frac{2c}{3} \rfloor} \leq 10^{\frac{2c}{3}} = 10^{c-\frac{c}{3}} < 5^c < 10^{c-\frac{c}{4}} = 10^{\frac{3c}{4}} \leq 10^{\lceil \frac{3c}{4} \rceil}.$$

4.3 Ordres de grandeur

La notation scientifique permet de comparer rapidement les **ordres de grandeur**.

Définition 4.3.1. Soit $a = b \times 10^c$ un nombre réel écrit en notation scientifique. Si $1 \leq b < 5$, alors on dit que l'ordre de grandeur de a est 10^c . Par contre, si $5 \leq b < 10$, alors on dit que l'ordre de grandeur de a est 10^{c+1} .

Exemple 4.3.2. L'ordre de grandeur de 354,6 est 10^2 , celui de $758, \bar{5}$ est 10^3 . L'ordre de grandeur de $0,00457 = 4,57 \times 10^{-3}$ est 10^{-3} , celui de $0,00\bar{9} = 9, \bar{9} \times 10^{-3}$ est 10^{-2} .

Remarque 4.3.3. Deux quantités peuvent donc avoir le même ordre de grandeur même si elles n'ont pas le même exposant. Par exemple 9×10^3 et 2×10^4 ont le même ordre de grandeur : les deux quantités sont de l'ordre de 10000.

Exemple 4.3.4. Une vache a en moyenne une masse de 350 kg et un taureau a en moyenne une masse de 450 kg. Autrement dit,

$$m_v = 3,5 \times 10^5 \text{ g et } m_t = 4,5 \times 10^5 \text{ g.}$$

Donc les deux masses sont du même ordre de grandeur. Par contre un mouton a une masse moyenne de 45 kg, soit $m_m = 4,5 \times 10^4$ g, donc d'un ordre de grandeur plus petit par rapport à la masse d'une vache ou d'un taureau.

Remarque 4.3.5. Attention : le concept d'ordre de grandeur dépend du choix de l'unité de mesure. Un abricot a, en moyenne, une masse triple de celle d'une prune verte. Si on mesure les deux masses en grammes, dans les deux cas on obtient quelques dizaines grammes (disons, 30 g pour l'abricot et 10 g pour la prune verte), donc de l'ordre de 10^1 g. Mais si on prend comme unité de mesure la masse d'un abricot moyen (qu'on note am), alors la masse de la prune est de approximativement 3×10^{-1} am et la masse de l'abricot est naturellement de 1 am. Donc avec ce choix d'unité de mesure les deux masses n'ont pas le même ordre de grandeur ! Naturellement, le bon sens nous guide dans la pratique pour choisir des unités de mesure appropriées au problème en considération.

Exercice 4.3.6. Un réservoir d'eau cylindrique a un diamètre de 8 m et une hauteur de 15 m. En se souvenant qu'un litre équivaut à un volume de 1 dm^3 , établir l'ordre de grandeur (en litres) de la quantité de liquide que l'on peut stocker dans le réservoir.

Estimons d'abord le volume du réservoir : $V = \left(\frac{\text{diamètre}}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \text{hauteur} = 16 \cdot 15\pi \text{ m}^3 \approx 16 \cdot 15 \cdot 3 \text{ m}^3 = 720 \times 10^3 \text{ dm}^3 = 7,2 \times 10^5 \text{ dm}^3$.

Donc on peut stocker une quantité de l'ordre de 10^6 litres de liquide dans ce réservoir.

Remarque 4.3.7. Comment change l'ordre de grandeur lorsque on passe d'une mesure de longueur à une mesure d'aire et à une mesure de volume ?

Exemple 4.3.8. Combien de cm^3 y a-t-il dans 1 m^3 ?

$1 \text{ m}^3 = (10^2 \text{ cm})^3 = 10^6 \text{ cm}^3$. Donc la réponse est 1 millions de cm^3 .

4.4 Approximations

Nous avons vu que l'on peut représenter un nombre rationnel par une quantité *finie* de données : en effet, en représentant le nombre sous forme de fraction, nous avons un nombre entier au numérateur et un nombre entier au dénominateur. Même si on considère la représentation décimale périodique d'un nombre rationnel, on peut identifier le groupe (fini) de chiffres qui se répète, et donc représenter le nombre par une quantité finie de données.

Par contre, un nombre irrationnel peut être seulement représenté par une suite *infinie* de chiffres, sans aucun motif qui se répète. Pour pouvoir représenter un nombre irrationnel sur un support fini (une feuille de papier, un ordinateur...) nous sommes obligés d'utiliser une notation imprécise :

$$\pi = 3,141592653\dots$$

La signification de “...” n'est pas claire du tout. Heureusement, dans la pratique nos calculs sont toujours pertinents à un certain ordre de grandeur près. Pour faire des calculs nous pouvons donc *approximer* les nombres réels.

Il y a deux façons de faire ceci :

- o Première méthode : par **troncation**. Tout simplement, on oublie les chiffres après la virgule à partir d'un certain point.

Exemple 4.4.1. On considère le nombre $\pi = 3,14159265\dots$ et on oublie les chiffres à partir du 5ème chiffre après la virgule. Nous obtenons donc la troncation 3,1415, qui nous donne une valeur approximée du nombre π .

On voit tout de suite que ce procédé peut introduire une erreur importante : dans l'exemple ci-dessus, le premier chiffre oublié est un 9, et donc π est beaucoup plus proche de la valeur 3,1416 que de la valeur 3,1415. Pour éviter d'introduire une erreur trop grande, nous n'allons pas utiliser la méthode d'approximation par troncation, mais plutôt la méthode suivante.

- Deuxième méthode : en **arrondissant**. Si le premier chiffre oublié est 0, 1, 2, 3 ou 4, alors on fait une approximation *par défaut*, comme dans la troncation. Si par contre le premier chiffre oublié est 5, 6, 7, 8 ou 9, alors on fait une approximation *par excès*, c'est à dire qu'on ajoute 1 au dernier chiffre non oublié.

Exemple 4.4.2. Le nombre 3,1416 est la valeur arrondie de π à quatre décimales près.

Remarque 4.4.3. Puisque π n'est pas *égal* à 3,1416 mais seulement *proche de* 3,1416, nous allons écrire $\pi \approx 3,1416$ et **jamais** écrire $\pi = 3,1416$. A droite du symbole " \approx " on trouve la valeur arrondie de la quantité à gauche du même symbole. La formule " $a \approx b$ " se lit " a est approximativement égal à b ".

Exemple 4.4.4. Si vous utilisez la calculatrice basique de votre ordinateur pour calculer $\sqrt{3}$ vous obtenez la valeur 1,732 050 808. Si vous demandez à une calculatrice scientifique de calculer $\sqrt{3}$ la réponse sera 1,732 050 807 568 877. Dans les deux cas il s'agit de valeurs arrondies, mais dans le premier cas à 9 décimales près et dans le deuxième cas à 15 décimale près. En effet, le 9e chiffre après la virgule n'est pas le même dans les deux cas.

Remarque 4.4.5. Les deux méthodes d'approximations montrent une propriété fondamentale des nombres réels : *pour tout nombre réel r et tout nombre naturel n , il existe un nombre rationnel q qui approxime r à n décimales près*. Donc nous pouvons toujours approximer un nombre réel avec une précision arbitraire. En particulier, nous pouvons définir la valeur a^r , pour tout $a > 0$ et tout nombre réel r , comme l'unique nombre réel approximé par les nombres a^{q_n} , où q_n est la troncation de r à n décimales près.

4.5 Erreurs

Lorsqu'on arrondi un nombre réel, on commet une erreur.

Exemple 4.5.1. Soit a un nombre réel et supposons que la valeur arrondie de a à 3 décimales près soit $v = 1,732$. En remplaçant dans nos calculs a par v , nous avons commis une erreur. Quelle est la taille de cette erreur? Voyons les cas limite : si $a = 1,7324\bar{9} = 1,732499999\dots$ ou si $a = 1,7315\bar{0} = 1,731500000\dots$, alors on a commis une erreur de 5×10^{-4} . Dans tous les autres cas on a commis une erreur plus petite. Donc quand nous arrondissons un nombre réel à n décimales près, nous commettons une erreur $e \leq 5 \times 10^{-n-1}$.

Plus généralement, quand nous faisons des expériences scientifiques, les mesures relevées sont toujours approximées : nous avons déjà remarqué que tous les instruments de mesure ont une précision finie (à un certain nombre de décimales près). Donc toute mesure est connue avec une erreur (qu'on espère être petite!). Dans la pratique, il est fondamental de savoir suivre l'évolution des ces erreurs lorsqu'on fait des calculs avec des valeurs approximées.

Exemple 4.5.2. Imaginons qu'on veut mesurer le volume d'une boîte avec une règle qui a une précision au centimètre, mais pas au millimètre. Nous mesurons les trois côtés et nous relevons entre 5 et 6 cm pour le premier côté, entre 15 et 16 cm pour le deuxième et entre 8 et 9 cm pour le troisième. Puisque nous ne savons pas dire exactement si la mesure du premier côté est plus proche de 5 ou de 6, nous prenons la valeur du milieu 5,5. Si nous calculons ainsi le volume et si nous ne tenons pas compte des erreurs commises, nous obtenons un volume de $5,5 \text{ cm} \times 15,5 \text{ cm} \times 8,5 \text{ cm} = 7,2 \times 10^2 \text{ cm}^3$. Supposons maintenant que nous connaissions les mesures exactes des trois côtés, et qu'elles soient de $5,84\bar{0}$ cm, $15,79\bar{0}$ cm et $8,45\bar{0}$ cm. La valeur exacte du volume est donc de $779,20492\bar{0} \text{ cm}^3$, soit $\approx 7,8 \times 10^2 \text{ cm}^3$. La différence entre les deux valeurs calculées est importante.

Il faut donc déclarer que la mesure obtenue pourrait s'éloigner de la valeur réelle. De combien ?

Dans l'exemple 4.5.2, dans chaque mesure on a commis une erreur d'au plus $\pm 0,5$ cm. Nous allons donc écrire que la valeur du premier côté est de $5,5 \pm 0,5$ cm. La valeur 5,5 s'appelle **valeur estimée** et la valeur (positive) 0,5 s'appelle l'**erreur absolue**. Autrement dit, si nous appelons x la valeur réelle, v la valeur estimée et e l'erreur absolue, l'écriture

$$x = v \pm e,$$

veut dire que

$$v - e \leq x \leq v + e.$$

- *Comment déterminer la valeur estimée ?* Dans l'exemple 4.5.2, notre instrument était capable de nous indiquer que la mesure du premier côté était entre 5 et 6 cm. Nous avons donc pris comme valeur estimée la valeur qui se trouve exactement à mi-chemin entre la valeur minimale et la valeur maximale. Plus généralement, dans une expérience scientifique on fait d'habitude plusieurs mesures et comme valeur estimée nous pouvons prendre la valeur à mi-chemin entre la valeur la plus petite et la valeur la plus grande parmi toutes les valeurs mesurées :

$$v = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}.$$

- *Comment déterminer l'erreur absolue ?* L'exemple 4.5.2 nous suggère de définir

$$e = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}.$$

Il est important de savoir établir si l'instrument que nous utilisons a une précision adaptée à l'expérience que l'on veut faire. Autrement dit, nous voulons que l'erreur absolue soit "petite" par rapport aux valeurs mesurées. Que signifie "petite" ? Une réponse raisonnable à cette question est la suivante : nous voulons que le rapport entre e et v soit au plus de 10^{-1} . Dans la plupart des problèmes que nous allons considérer, cela est suffisant.

La quantité $e^{\text{rel}} = \frac{e}{v}$ s'appelle l'**erreur relative** et nous allons dire que e^{rel} est *petite* si $e^{\text{rel}} \leq 10^{-1}$. Dans ce cas, l'instrument choisi est adapté à l'expérience que nous voulons faire.

Exercice 4.5.3. Est-ce que la règle de l'exemple 4.5.2 est adaptée au problème en question? Voyons : l'erreur relative la plus grande s'obtient pour la mesure la plus petite, c'est à dire celle du premier côté. Dans ce cas nous avons $\frac{0,5}{5,5} = 0,09... \leq 0,1 = 10^{-1}$, donc nous sommes satisfaits de la précision de l'instrument, au moins pour mesurer les côtés de la boîte.

4.6 Différence entre encadrements et approximations

Nous mesurons la longueur d'une rue avec un instrument qui a la précision d'un mètre. Le résultat de l'expérience est que la rue mesure entre 503 et 504 mètres, et il nous semble que la longueur soit plus proche de 503 que de 504 mètres. Soit x la longueur de la rue. L'affirmation

$$503 \leq x \leq 504$$

est une affirmation mathématique précise. Par contre, l'affirmation

$$x \approx 503$$

n'est pas une affirmation mathématique précise.

Le premier est un encadrement, la deuxième est une approximation. Selon la situation, il peut être opportun d'utiliser un encadrement ou une approximation. Par exemple, si nous souhaitons mettre des haies le long de toute la rue, si nous prenons seulement 503 mètres de haies, nous en aurons pas assez. Si notre priorité est celle de longer vraiment toute la rue, alors un encadrement est plus utile : dans le doute, je prends 504 mètres de haies. Par contre, si nous n'avons que 503 mètres de haies, l'approximation nous dit qu'il restera une portion "très petite" (affirmation pas précise) de la rue qui ne sera pas longée par les haies.

Pour l'encadrement, nous pouvons calculer l'erreur absolue et l'erreur relative commise : l'erreur absolue de l'encadrement est égal à $\frac{504 - 503}{2} = 0,5$ et la valeur estimée de l'encadrement est $\frac{504 + 503}{2} = 503,5$, donc l'erreur relative de l'encadrement est $e^{\text{rel}} = \frac{0,5}{503,5} \approx 0,00099$.

Chapitre 5

COURS V

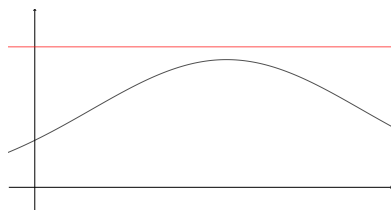
5.1 Étude graphique de fonction

Certaines propriétés de la fonction f se traduisent en propriétés géométriques du graphe de f .

5.1.1 Bornes

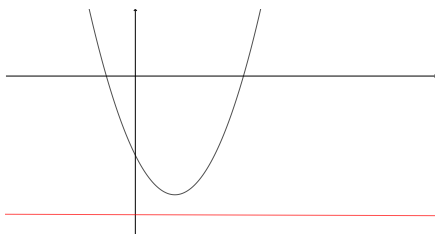
- f est **bornée supérieurement** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \text{Dom}(f)$ on a

$$f(x) \leq M.$$



- f est **bornée inférieurement** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \text{Dom}(f)$ on a

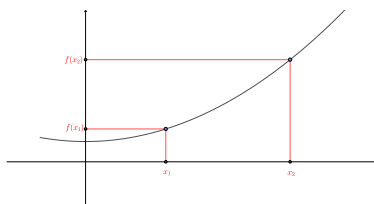
$$f(x) \geq m.$$



5.1.2 Croissance

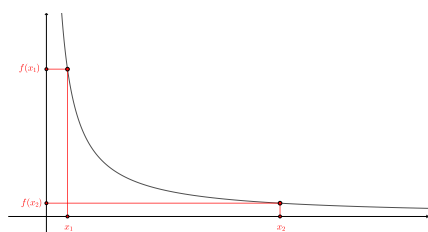
- f est **croissante** si pour tout $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ tels que $x_1 < x_2$ on a

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$



- f est **décroissante** si pour tout $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ tels que $x_1 < x_2$ on a

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$



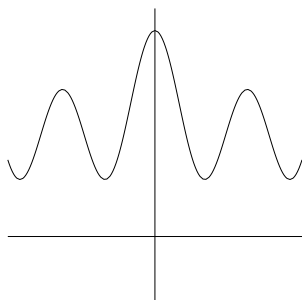
- si l'inégalité est stricte, alors on dit **strictement croissante/décroissante**.

5.1.3 Symétries et périodicité

- f est une fonction **paire** si pour tout $x \in \text{Dom}(f)$ on a

$$-x \in \text{Dom}(f) \text{ et } f(-x) = f(x).$$

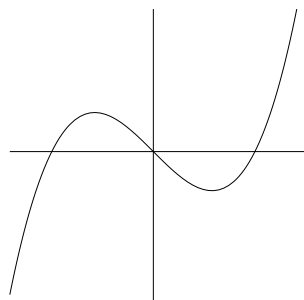
Dans ce cas, le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : si $(x, y) \in \Gamma_f$ alors $(-x, y) \in \Gamma_f$.



- f est une fonction **impair** si pour tout $x \in \text{Dom}(f)$ on a

$$-x \in \text{Dom}(f) \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

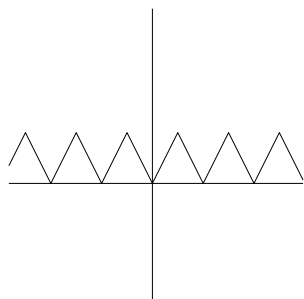
Dans ce cas, le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine : si $(x, y) \in \Gamma_f$ alors $(-x, -y) \in \Gamma_f$.



- f est **périodique**, de période $p > 0$, si pour tout $x \in \text{Dom}(f)$ on a

$$x + p \in \text{Dom}(f) \text{ et } f(x + p) = f(x).$$

Dans ce cas, le graphe de f est invariant par translation horizontale de p unités de longueur : si $(x, y) \in \Gamma_f$ alors $(x + p, y) \in \Gamma_f$.



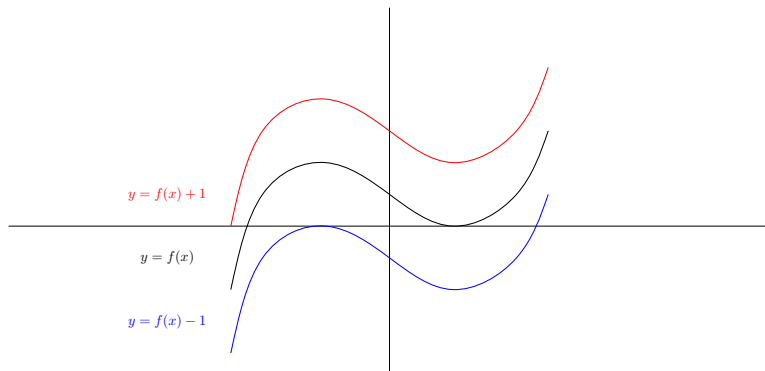
5.2 Transformations élémentaires

Les fonctions que nous étudions dans ce cours sont souvent (mais pas toujours !) obtenues à partir des fonctions élémentaires par une suite de transformations élémentaires, que nous décrivons maintenant.

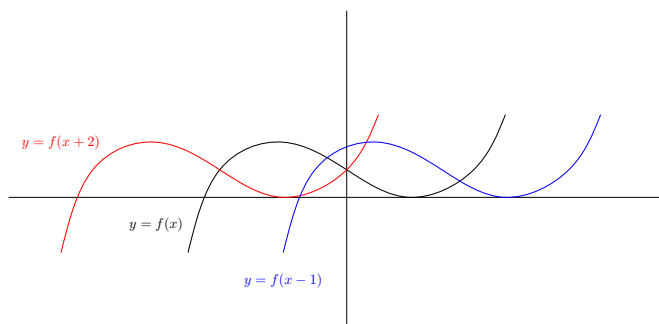
Supposons qu'on a dessiné le graphe de f .

- **Translation verticale** : soit $c \in \mathbb{R}$ et supposons qu'on veut tracer le graphe de la fonction $g(x) = f(x) + c$. Le graphe de g s'obtient en tradant le graphe de f verticalement : vers le haut de c unités, si c est positif, et vers le bas de c unités

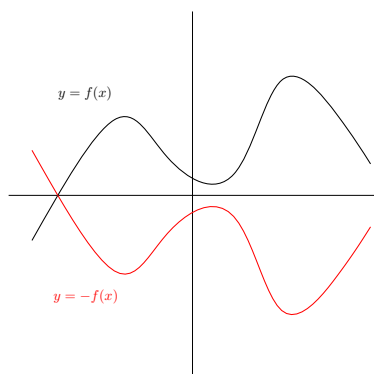
si c est négatif.



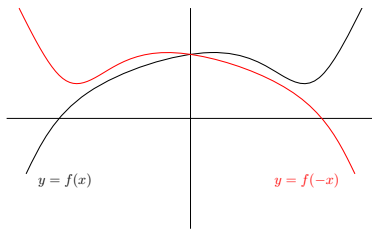
- **Translation horizontale** : soit $c \in \mathbb{R}$ et supposons qu'on veut tracer le graphe de la fonction $g(x) = f(x + c)$. La valeur de g en 0 est égale à la valeur de f en c . Le graphe de g s'obtient en tradant le graphe de f horizontalement : vers la gauche de c unités, si c est positif, et vers la droite de c unités si c est négatif.



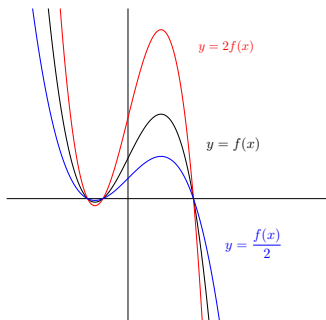
- **Symétrie par rapport à l'axe horizontal** : le graphe de la fonction $g(x) = -f(x)$ est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des abscisses.



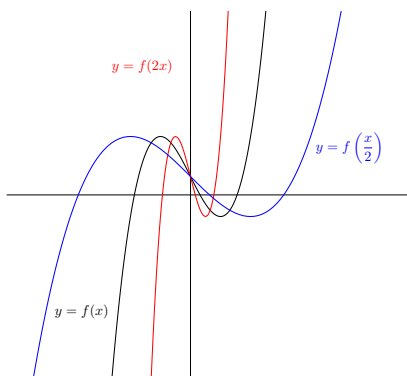
- **Symétrie par rapport à l'axe vertical** : le graphe de la fonction $g(x) = f(-x)$ est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des ordonnées.



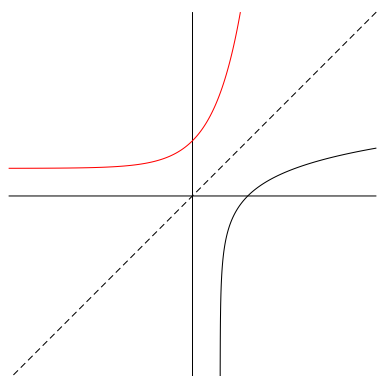
- **Contraction ou dilatation verticale** : soit $c \in \mathbb{R}^{>0}$ et supposons qu'on veut tracer le graphe de la fonction $g(x) = cf(x)$. Si $0 < c < 1$, alors le graphe de g s'obtient en *contractant* verticalement le graphe de f d'un facteur c . Si $c > 1$, alors le graphe de g s'obtient en *dilatant* verticalement le graphe de f d'un facteur c .



- **Contraction ou dilatation horizontale** : soit $c \in \mathbb{R}^{>0}$ et supposons qu'on veut tracer le graphe de la fonction $g(x) = f(cx)$. La valeur de g en 0 est la même que la valeur de f en 0, et la valeur de g en 1 est égale à la valeur de f en c . Si $0 < c < 1$, alors le graphe de g s'obtient en *dilatant* horizontalement le graphe de f d'un facteur $1/c$. Si $c > 1$, alors le graphe de g s'obtient en *contractant* horizontalement le graphe de f d'un facteur $1/c$.



- **Fonction réciproque** : si g est la fonction réciproque de f , alors le graphe de g est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

**Exemples 5.2.1.**

1. La fonction g telle que $g(x) = x^2 + bx + c$ peut être obtenue à partir de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ à partir d'une translation horizontale suivie par une translation verticale : soient f_1 la fonction telle que $f_1(x) = f\left(x + \frac{b}{2}\right)$ et f_2 la fonction telle que $f_2(x) = f_1(x) + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$. On a alors

$$g(x) = f_2(x).$$

2. Le graphe de la fonction e^{-x} est le symétrique du graphe de la fonction e^x par rapport à l'axe des ordonnées.

5.3 Modèles homographiques, exponentiels, logarithmiques, sinusoïdales

5.3.1 Modèles homographiques

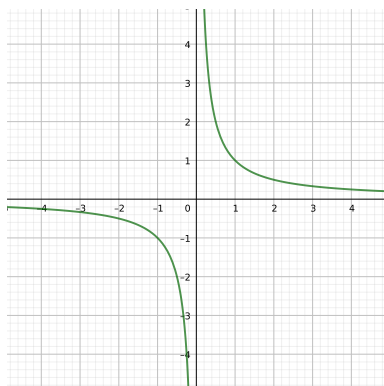
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, avec $ad - bc \neq 0$. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Pour étudier cette fonction, considérons d'abord le cas $a = d = 0$ et $b = c = 1$, donc la fonction puissance

$$g(x) = \frac{1}{x},$$

dont le graphe est le suivant :

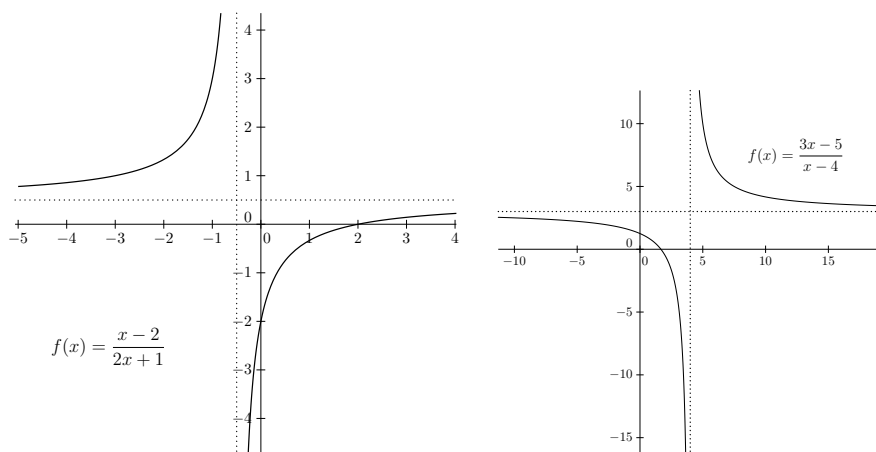


Les homographies peuvent être obtenues à partir de $g(x) = \frac{1}{x}$, grâce à une suite d'opérations élémentaires. Soit $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Soient $f_1(x) = g(x + \frac{d}{c})$, $f_2(x) = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot f_1(x)$ et $f_3(x) = \frac{a}{c} + f_2(x)$. On a alors

$$f(x) = f_3(x),$$

donc f peut être obtenue à partir de g grâce à une translation horizontale, suivie par une contraction/dilatation verticale (et éventuellement une symétrie par rapport à l'axe vertical), suivie par une translation verticale.

Exemples



5.3.2 Modèles exponentiels

Soit $a \in \mathbb{R}^{>0}$. On considère la fonction exponentielle $g(x) = a^x$. Si $f(x) = e^x$ et $f_1(x) = f(x \cdot \ln a)$, alors

$$g(x) = f_1(x).$$

Donc on obtient g en contractant/dilatant horizontalement f .

5.3.3 Modèles logarithmiques

Soit $a \in \mathbb{R}^{>0}$. On considère la fonction logarithmique $g(x) = \log_a x$.

Puisque g est la réciproque de la fonction a^x , le graphe de g est le symétrique du graphe de a^x par rapport à la droite d'équation $y = x$. On peut aussi obtenir le graphe de g à partir du graphe de la fonction \ln par contraction/dilatation verticale, en remarquant que $g(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$.

5.3.4 Modèles sinusoïdales

On rappelle les propriétés des fonctions

$$f_0(x) = \sin x \text{ et } g_0(x) = \cos x.$$

f_0 et g_0 sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ et leur image est l'intervalle $[-1, 1]$.

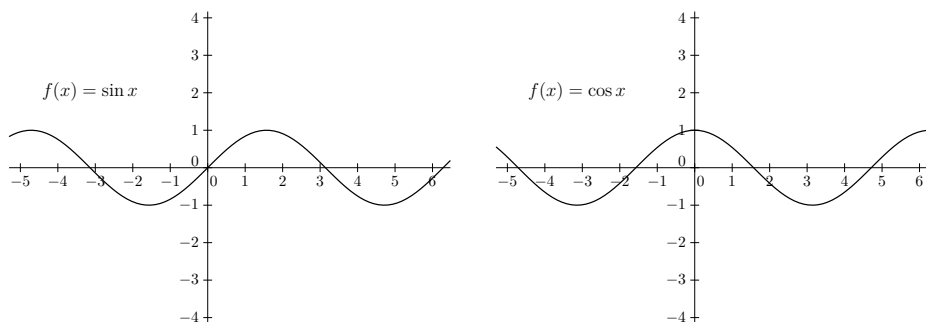
On a

$$(\sin)'(x) = \cos x \text{ et } (\cos)'(x) = -\sin x.$$

Il s'agit de fonctions périodiques, de période 2π .

f_0 atteint la valeur maximale 1 en les points de la forme $x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et la valeur minimale en les points de la forme $x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Graphe

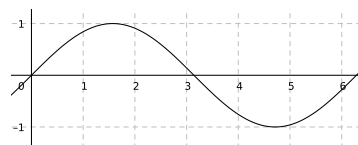


Une fonction *sinusoïdale* est une fonction f de la forme

$$f(x) = a + b \sin(c(x + d)),$$

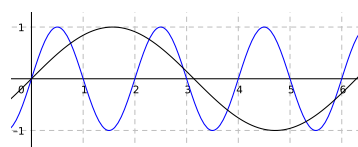
avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $b, c > 0$.

Nous allons d'abord expliquer comment on peut obtenir f à partir de la fonction sinus grâce à une suite finie de transformations élémentaires. Soit $f_0(x) = \sin x$.

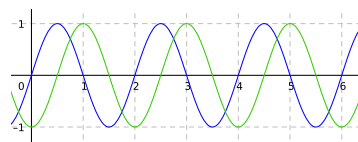


Nous faisons les transformations suivantes :

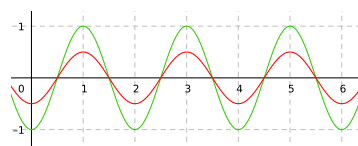
Contraction/dilatation horizontale de facteur $\frac{1}{c}$: $f_1(x) = f_0(cx)$



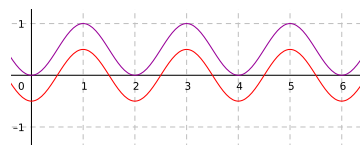
Translation horizontale : $f_2(x) = f_1(x + d)$.



Contraction/dilatation verticale de facteur b : $f_3(x) = bf_2(x)$



Translation verticale : $f_4(x) = f_3(x) + a$



Donc $f_4(x) = f(x)$.

Nous allons maintenant étudier la fonction f : trouver le domaine, l'image, les extrema locaux et globaux, les limites aux bornes, les asymptotes, la dérivée et les autres propriétés notables de la fonction, en fonction des valeurs des paramètres a, b, c, d .

Utilisons les transformations élémentaires ci-dessus pour comprendre les propriétés de f :

- puisque f est obtenue à partir de la fonction sinus grâce à une suite de transformations élémentaires, la forme du graphe de f n'est pas très différente de la forme du graphe du sinus. En particulier : le domaine de f est \mathbb{R} , l'image de f est un intervalle borné et f est une fonction périodique ;
- pour trouver l'image de f , on considère l'image de la fonction sinus, qui est l'intervalle fermé $[-1, 1]$. Les transformations horizontales agissent sur le domaine de la fonction et non pas sur l'image de la fonction, donc $\text{Im}(f_2) = \text{Im}(f_0) = [-1, 1]$. Considérons les transformations verticales que nous avons faites : puisque nous avons fait une contraction/dilatation verticale de facteur b , suivie d'une translation verticale de facteur a , on a que $\text{Im}(f) = [a - 1 \cdot b, a + 1 \cdot b]$;
- f est une fonction périodique. Sa période T dépend du facteur de dilatation/contraction horizontale, à savoir c . En particulier, la période de f est aussi la période de f_1 (les transformations suivantes ne changent plus la période de la fonction). Nous pouvons donc travailler avec f_1 . Puisque f_1 est obtenue à partir de f_0 en faisant une contraction/dilatation horizontale de facteur $\frac{1}{c}$, la période T de f_1 est obtenue en contractant/dilatant la période de f_0 d'un facteur $\frac{1}{c}$. La période de f_0 est de 2π . Donc

$$T = \frac{1}{c} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{c}.$$

- pour trouver les points x où f atteint son maximum et son minimum, on remarque que cette information se lit déjà sur le graphe de f_2 (les transformations suivantes ne changent pas les endroits où la fonction atteint ses extrema). Comme la fonction f_0 , la fonction f_1 aussi atteint son maximum à un quart de sa période, à savoir en $x_0 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2c}$. Puisque f_2 est obtenue à partir de f_1 en faisant une translation

horizontale de facteur d , la fonction f_2 va atteindre son maximum en $x_0 - d$ (en effet, $f_2(x_0 - d) = f_1(x_0 - d + d) = f_1(x_0)$), à savoir quand

$$x = \frac{\pi}{2c} - d$$

(et donc aussi en tous les points de la forme $x = \frac{\pi}{2c} - d + kT$, avec $k \in \mathbb{Z}$). De façon analogue on trouve que f_2 atteint son minimum quand $x = -\frac{\pi}{2c} - d + kT$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On retrouve ce résultat en regardant les points où f' s'annule :

$f'(x) = bc \cos(c(x+d))$.

f' s'annule en les points tels que $\cos(c(x+d)) = 0$, c'est-à-dire

$$c(x+d) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

c'est-à-dire,

$$x = \left(\frac{T}{4} - d\right) + k\frac{T}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Chacun de ces points est un point d'extremum local (maximum ou minimum, selon la parité de k).

Pour conclure,

$$f \text{ est périodique, de période } T = \frac{2\pi}{c}$$

$$f \text{ atteint son maximum en } x_{\max} = \frac{\pi}{2c} - d$$

$$f \text{ atteint son minimum en } x_{\min} = \frac{3\pi}{2c} - d$$

Le maximum de f est $a + b$

Le minimum de f est $a - b$

Remarque 5.3.1. N'essayez pas de mémoriser les formules ci-dessus ! Apprenez plutôt la méthode pour les retrouver.

5.4 Résolution graphique d'équations et inéquations

- Supposons qu'on veut résoudre l'équation $f(x) = 0$. Autrement dit, on cherche tous les $x \in \text{Dom}(f)$ tels que $(x, 0) \in \Gamma_f$. Donc on cherche les *points d'intersection du graphe de f avec l'axe des abscisses*.

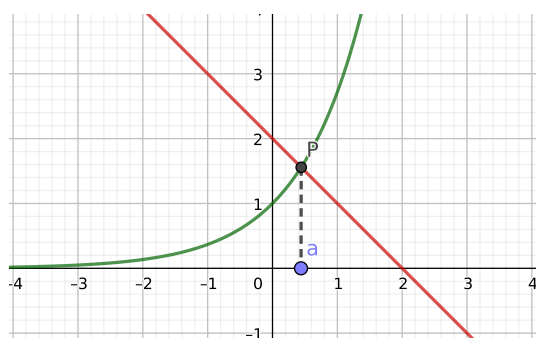
- De façon analogue, si nous voulons résoudre l'équation $f(x) = c$, pour un certain $c \in \mathbb{R}$ fixé, nous cherchons tous les $x \in \text{Dom}(f)$ tels que le graphe de f intersecte la droite horizontale d'équation $y = c$.
- Si nous voulons trouver les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, alors il faut chercher les abscisses de tous les points d'intersection des graphes de f et de g .
- Si on veut résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$, alors il faut chercher les abscisses de tous les points du graphe de f dont l'ordonnée est positive ou nulle. Autrement dit, on cherche tous les points du graphe de f qui se trouvent dans le *demi-plan supérieur* $y \geq 0$ et on considère les abscisses de ces points.
- Si on veut résoudre l'inéquation $f(x) > c$, pour un certain $c \in \mathbb{R}$ fixé, alors il faut dessiner la droite d'équation $y = c$ et trouver les abscisses de tous les points du graphe de f qui se trouvent *strictement au dessus* de cette droite.
- Si nous voulons trouver les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$, alors il faut chercher les abscisses de tous les points du graphe de f qui se trouvent *au dessus* des points du graphe de g .

Remarque 5.4.1. Ce genre d'interprétation géométrique ne sert pas forcément à trouver la ou les solutions de façon *explicite*. Par contre, cela donne une bonne idée de la situation : y a-t-il des solutions ? Combien sont-elles ? Où se trouvent-elles, par rapport aux axes ?

Exemple 5.4.2. Résolvons graphiquement l'inéquation

$$e^x > -x + 2.$$

Pour cela, traçons le graphe approximatif des deux fonctions :



On remarque qu'il y a un point P , d'abscisse a , où les graphes s'intersectent. Autrement dit,

$$e^a = -a + 2.$$

Nous pouvons donc dire que l'ensemble des solutions de l'inéquation ci-dessus est de la forme

$$]a, +\infty[,$$

où a est un paramètre approprié.

Si on souhaite être un peu plus précis, on peut essayer d'estimer a . Par exemple, on remarque que, si $f(x) = e^x$ et $g(x) = -x + 2$, alors

$$f(0) = e^0 = 1 < 2 = -0 + 2 = g(0)$$

et que

$$f(1) = e^1 = e > 2 > 1 = -1 + 2 = g(1).$$

Puisque $f(0) < g(0)$ et $f(1) > g(1)$, on en déduit que

$$0 < a < 1.$$

5.5 Rappels sur l'étude de fonction

Nous allons réviser les étapes de l'étude de fonction.

5.5.1 Domaine et image

On identifie le domaine et, si possible, l'image.

5.5.2 Limites aux bornes et asymptotes

Pour dessiner correctement le graphe d'une fonction, il est souvent utile de connaître le comportement de la fonction aux bornes de son domaine.

Pour cette raison, on calcule

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

pour $a = \pm\infty$ et pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \text{Dom}(f)$.

Exemples 5.5.1. Les valeurs de la fonction $f(x) = 3x + 5$ sont de plus en plus grandes lorsque x est de plus en plus grand. En effet, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Les valeurs de cette même fonction sont de plus en plus petites lorsque x est de plus en plus petit. En effet, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Par contre, les valeurs de la fonction $g(x) = -2x^2 + 59$ sont de plus en plus petites lorsque x est de plus en plus grand, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$. Les valeurs de la fonction $h(x) = \frac{1}{x}$ sont de plus en plus grandes lorsque x s'approche de zéro par la droite, et de plus en plus petites lorsque x s'approche de zéro par la gauche. En effet, $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} h(x) = \pm\infty$.

Une **asymptote** de f est une droite dont le graphe de f s'approche de plus en plus, lorsque x s'approche de plus en plus d'un point de \mathbb{R} qui se trouve *près* du domaine de f mais *pas* dans le domaine de f (sur le *bord* du domaine de f , ou *aux bornes* du domaine de f). Plus précisément,

- Une **asymptote verticale** est une droite verticale d'équation $x = x_0$, pour un certain $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \text{Dom}(f)$, telle qu'on a $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$.
- Une **asymptote horizontale** est une droite horizontale d'équation $y = l$, pour un certain $l \in \mathbb{R}$, telle qu'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.
- Une **asymptote oblique** est une droite d'équation $y = mx + q$ telle qu'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$.

5.5.3 Croissance et décroissance

Une autre caractéristique importante des fonctions est la croissance : sur quels intervalles la fonction croît-elle ? Sur quels intervalles décroît-elle ? Sur quels intervalles est-elle constante ? La réponse à ces questions a naturellement des conséquences sur le comportement du modèle qu'on étudie.

Soient f une fonction réelle et $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle.

- f est **croissante sur** I si pour tout $x, x' \in I$, si $x < x'$ alors $f(x) \leq f(x')$.
- f est **strictement croissante sur** I si pour tout $x, x' \in I$, si $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$.
- f est **décroissante sur** I si pour tout $x, x' \in I$, si $x < x'$ alors $f(x) \geq f(x')$.
- f est **strictement décroissante sur** I si pour tout $x, x' \in I$, si $x < x'$ alors $f(x) > f(x')$.
- f est **constante sur** I si pour tout $x, x' \in I$ on a $f(x) = f(x')$.

Remarque 5.5.2. Une fonction strictement croissante ne tend pas forcément vers $+\infty$, lorsque $x \rightarrow +\infty$. Par exemple, une telle fonction pourrait avoir une asymptote horizontale, lorsque $x \rightarrow +\infty$.

La dérivée première f' est utile pour l'étude de la croissance/décroissance de f .

Soient f une fonction dérivable au moins deux fois et $I \subseteq \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle.

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I .
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I .

Remarque 5.5.3. Si f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I , alors on peut seulement conclure que $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$). En effet, f pourrait être strictement

croissante sur tout un intervalle I même si f' s'annule en un point de I . Par exemple, pour la fonction

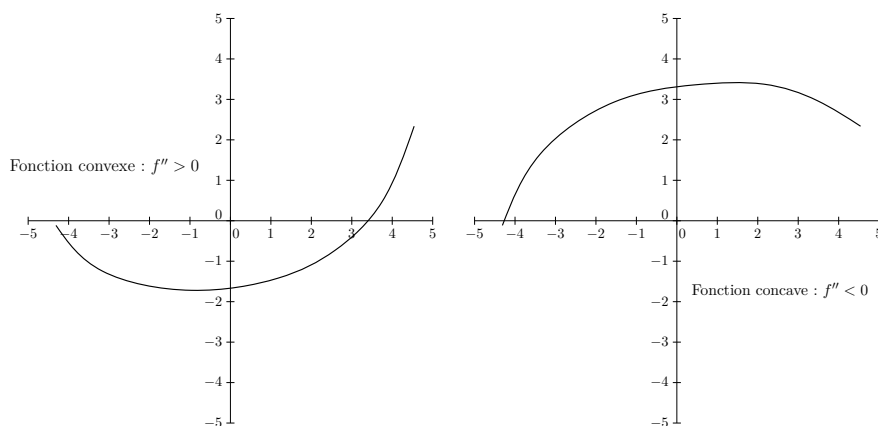
$$f : x \mapsto x^3$$

on a que $f'(0) = 0$ mais f est strictement croissante sur tout son domaine.

5.5.4 Concavité et convexité

La dérivée première d'une fonction f donne la variation instantanée de f .

La dérivée seconde de f donne la variation instantanée de f' . Donc, si la dérivée seconde de f est positive, c'est que la variation instantanée de la pente de la tangente au graphe de f est positive et donc la pente de la tangente augmente (la fonction est **convexe**). Si la dérivée seconde est négative, la pente de la tangente diminue (la fonction est **concave**).



Remarque 5.5.4. L'étude de la dérivée seconde n'est pas toujours nécessaire pour comprendre le comportement de la fonction.

5.5.5 Bornes et extrema

Une autre information importante concerne les valeurs atteintes par la fonction. Une fonction qui tend vers $+\infty$ au bord de son domaine, par définition va atteindre toute valeur positive. Elle n'est donc pas **bornée supérieurement**. De même, une fonction qui tend vers $-\infty$ n'est pas **bornée inférieurement**.

Soit f une fonction bornée supérieurement et soit $M \in \mathbb{R}$ un nombre tel que :

- il existe $x \in \text{Dom}(f)$ tel que $f(x) = M$;
- pour tout $x \in \text{Dom}(f)$ on a $f(x) \leq M$.

On dit que M est le **maximum absolu** ou **global** de la fonction f .

De façon analogue on définit le **minimum absolu** ou **global**, pour une fonction bornée inférieurement.

Remarque 5.5.5. Toute fonction bornée supérieurement n'a pas forcément un maximum : par exemple, une fonction croissante qui a une asymptote horizontale d'équation $y = l$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, n'atteint jamais la valeur l .

Soit $x_0 \in \text{Dom}(f)$. On dit que x_0 est un point de **maximum local** ou **relatif** de f si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout x suffisamment proche de x_0 .

On dit que x_0 est un point de **minimum local** ou **relatif** de f si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout x suffisamment proche de x_0 .

Il s'en suit de la discussion ci-dessus que si f admet un extremum local en un point $x_0 \in \text{Dom}(f)$, alors forcément $f'(x_0) = 0$.

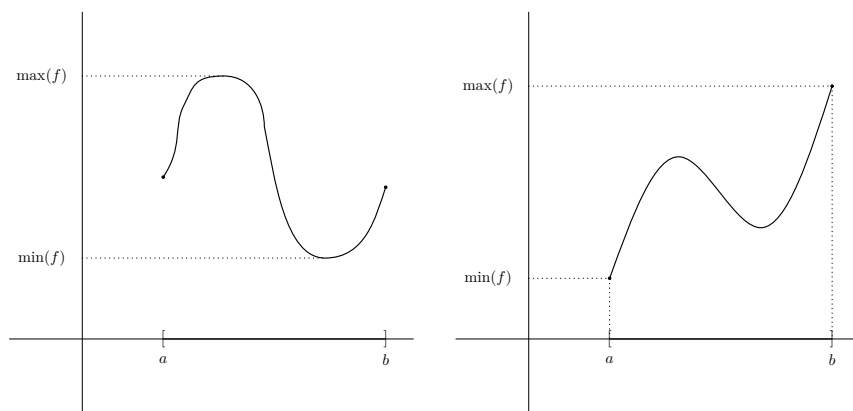
D'autre part, si $x_0 \in \text{Dom}(f)$ est tel que $f'(x_0) = 0$, on peut en déduire les informations suivantes :

- si $f''(x_0) < 0$, alors f admet un maximum local en x_0 ;
- si $f''(x_0) > 0$, alors f admet un minimum local en x_0 ;
- si $f''(x_0) = 0$, alors en général on ne peut rien dire. Si $f''(x)$ change de signe lorsqu'on passe de x_0^- à x_0^+ , alors on dit que f admet un *point d'inflexion* en x_0 .

Pour conclure, si on considère une fonction continue f sur un intervalle fermé de la forme $[a, b] \subseteq \text{Dom}(f)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors f est bornée supérieurement et inférieurement. De plus, elle admet un maximum global et un minimum global. Comment trouver les extrema globaux ? Considérons le maximum global.

- D'abord on cherche tous les points de maximum local dans l'intervalle ouvert (a, b) . Si f est dérivable deux fois, alors nous pouvons étudier le signe des dérivées première et seconde, comme indiqué ci-dessus.
- On calcule la valeur de la fonction en les points de maximum local.
- On compare toutes ces valeurs avec les valeurs $f(a)$ et $f(b)$.
- On prend comme maximum global la plus grande de toutes les valeurs considérés dans les deux points précédents.

De façon similaire, on trouve le minimum global.



5.6 Exemples d'étude de fonction

5.6.1 Fonction gaussienne

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Domaine \mathbb{R}

Image $]0, 1]$

Limites aux bornes $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

Asymptotes $y = 0$ est une asymptote horizontale.

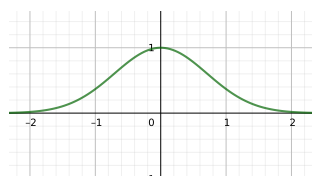
Croissance f est strictement croissante sur $] -\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Bornes et extrema globaux f est bornée inférieurement par 0 mais n'admet pas de minimum absolu.

f est bornée supérieurement par 1 et atteint son maximum en 0, c'est-à-dire $f(0) = 1$.

Autres propriétés f est une fonction paire.

Graphe



5.6.2 Fonction logistique

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Domaine \mathbb{R}

Image $]0, 1[$

Limites aux bornes $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

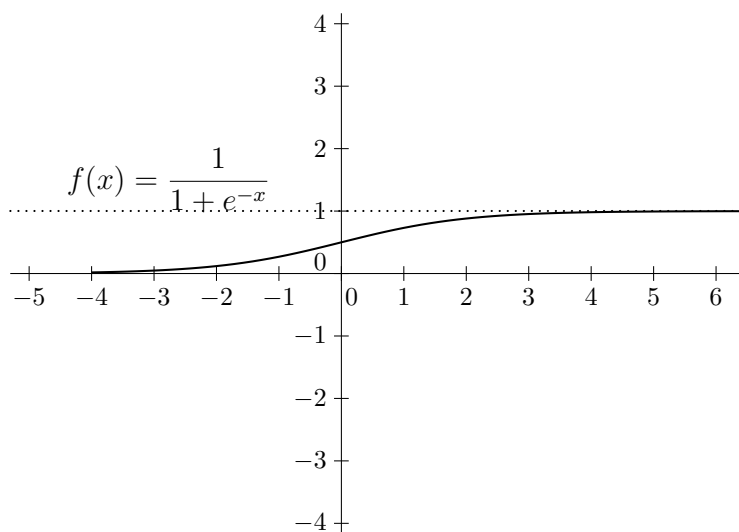
Asymptotes $y = 0$ est une asymptote horizontale pour $x \rightarrow -\infty$.

$y = 1$ est une asymptote horizontale pour $x \rightarrow +\infty$

Croissance f est strictement croissante sur tout son domaine.

Bornes et extrema globaux f est bornée inférieurement par 0 et supérieurement par 1, mais n'admet ni de minimum absolu ni de maximum absolu.

Graphe



Chapitre 6

COURS VI

6.1 Résolution des formes indéterminées

6.1.1 Arithmétique infinie et formes indéterminées

Nous rappelons la notation raccourcie pour les limites infinies.

Par exemple, l'écriture $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ est un raccourci pour la phrase suivante : si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$.

Soit $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dans les cas suivants, la limite existe et on peut dire quelle est sa valeur :

$$l \pm \infty = \pm \infty \quad 0 \pm \infty = \pm \infty \quad \pm \infty \pm \infty = \pm \infty.$$

$$\begin{array}{ll} l \cdot \pm \infty = \pm \infty & \text{si } l > 0 \\ l \cdot \pm \infty = \mp \infty & \text{si } l < 0 \end{array} .$$
$$\pm \infty \cdot \pm \infty = +\infty \quad \pm \infty \cdot \mp \infty = -\infty$$

$$\frac{l}{\pm \infty} = 0 \quad \frac{0}{\pm \infty} = 0$$

$$\frac{\pm \infty}{l} = \pm \infty \quad \text{si } l > 0 .$$

$$\frac{\pm \infty}{l} = \mp \infty \quad \text{si } l < 0$$

$$\begin{aligned}
 (+\infty)^\ell &= +\infty && \text{si } \ell > 0 \\
 (+\infty)^\ell &= 0 && \text{si } \ell < 0 \\
 (+\infty)^{+\infty} &= +\infty && (+\infty)^{-\infty} = 0 \\
 \ell^{+\infty} &= +\infty && \text{si } \ell > 1 \\
 \ell^{+\infty} &= 0 && \text{si } 0 < \ell < 1 \\
 \ell^{-\infty} &= \frac{1}{\ell^{+\infty}} && (0^+)^{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0^\pm$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Le signe du résultat dépend du signe du numérateur et du dénominateur.

Exemple 6.1.1. Si $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^3$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^x}{x^3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^\pm} e^x}{\lim_{x \rightarrow 0^\pm} x^3} = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty$.

Par contre, si $g \rightarrow 0$ en changeant de signe (par exemple, si g oscille près de x_0), alors la limite du quotient $\frac{f}{g}$ pourrait ne pas exister.

Exemple 6.1.2. Si $f(x) = 1$ et $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$, mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas, car g continue de changer de signe lorsque $x \rightarrow 0^+$. Par contre, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ existe et vaut $+\infty$.

Pour résumer,

$$\begin{aligned}
 \frac{\ell}{0^\pm} &= \pm\infty && \text{si } \ell > 0 \\
 \frac{\ell}{0^\pm} &= \mp\infty && \text{si } \ell < 0 \\
 \frac{+\infty}{0^\pm} &= \pm\infty && \frac{-\infty}{0^\pm} = \mp\infty
 \end{aligned}$$

Dans certains cas, on ne peut pas dire en général si la limite existe, et même quand elle existe, on ne peut pas dire en général quelle est sa valeur (on parle de *forme*

indéterminée) :

$$\begin{array}{ccc}
 (+\infty) + (-\infty) & & (-\infty) + (+\infty) \\
 \\
 \frac{\pm\infty}{\pm\infty} & \frac{\pm\infty}{\mp\infty} & (\pm\infty) \cdot 0 \\
 \\
 \frac{\ell}{0} & \frac{0}{0} & \frac{\pm\infty}{0} \\
 \\
 1^{\pm\infty} & (+\infty)^0 & 0^0
 \end{array}$$

Remarque 6.1.3. Quand on fait de l'arithmétique avec $\pm\infty$, et qu'on ne se souvient plus des formules, une façon de retrouver la valeur de la limite est de remplacer $+\infty$ (resp. $-\infty$) par un nombre entier très grand (resp. dont l'opposé est très grand) et de remplacer 0^+ (resp. 0^-) par l'inverse multiplicatif d'un nombre entier très grand (resp. dont l'opposé est très grand). Si la forme n'est pas indéterminée, souvent cette méthode aide à en comprendre la valeur. Attention : si la forme est indéterminée, cette méthode ne va pas marcher ! Pour cette raison, il faut apprendre à résoudre les formes indéterminées.

Exemple 6.1.4. Pour vérifier que $\frac{0}{+\infty} = 0$, on va remplacer le zéro au numérateur par 10^{-n} (avec n un nombre naturel très grand) et on va remplacer $+\infty$ par 10^m (avec m un nombre naturel très grand). Le quotient vaut donc $10^{-(n+m)}$, donc un nombre réel positif très petit. La conclusion ne change par si on remplace les nombres n et m par d'autres nombres naturels n' et m' . En particulier, la conclusion ne dépend pas du fait que n soit plus grand ou plus petit que m .

Essayons d'appliquer la même méthode à la forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$: remplaçons le $+\infty$ au numérateur avec 10^n et le $+\infty$ au dénominateur avec 10^m . Le résultat du calcul est donc 10^{n-m} . Attention : si $n < m$ alors le résultat est petit, si $n = m$ alors le résultat est 1 et si $n > m$ alors le résultat est grand. Cette méthode donc ne nous dit pas quelle est la valeur de $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Si on applique la même méthode à la forme $\frac{+\infty}{0}$, alors *il faut d'abord savoir que la limite qu'on est en train d'étudier existe*. C'est le cas par exemple si le dénominateur tend vers 0^+ . Dans ce cas, la méthode va nous dire combien vaut la limite : on va remplacer le zéro au dénominateur par 10^{-n} (avec n un nombre naturel très grand) et on va remplacer $+\infty$ par 10^m (avec m un nombre naturel très grand). Le quotient vaut donc $10^{(n+m)}$, donc un nombre réel positif très grand. On peut donc conclure dans ce cas que la limite vaut $+\infty$.

6.1.2 Résolution des formes indéterminées

6.1.2.1 Terme dominant

Exemples 6.1.5.

- Nous voulons calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2x)$. Pour appliquer la règle de la limite d'une somme, nous calculons d'abord les limites des deux termes de la somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$$

Nous trouvons la forme indéterminée $(+\infty - \infty)$. Comment faire ? L'idée est la suivante : la fonction $3x^2$ croît plus vite que la fonction $2x$ (une parabole est plus "pentue" qu'une droite), la fonction $3x^2$ va "tirer vers le haut" plus fort que la fonction $-2x$ ne "tire vers le bas". Comment formaliser cette intuition ? Écrivons

$$3x^2 - 2x = 3x^2 \left(1 - \frac{2}{3x}\right).$$

De cette façon, en utilisant la règle de la limite d'un produit, nous pouvons calculer

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2x) &= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3x}\right) \right) \\ &= (+\infty) \cdot \left(1 - \frac{2}{3 \cdot (+\infty)}\right) = (+\infty) \cdot (1 - 0) = +\infty. \end{aligned}$$

Nous avons mis en facteur le terme **dominant** de la somme : quand on met en facteur ce terme, ce qui reste entre parenthèses tend vers 1. Nous avons donc résolu cette forme indéterminée.

- Nous voulons calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$. Pour appliquer la règle de la limite d'un quotient, nous calculons d'abord les limites du numérateur et du dénominateur :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2) = +\infty$$

Nous trouvons la forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$. Comment faire ? L'idée est la suivante : la fonction $x^2 + 2$ croît plus vite que la fonction $2x + 1$ (une parabole est plus "pentue" qu'une droite), la fonction $x^2 + 2$, qui est à dénominateur, va donc "tirer vers zéro" plus fort que la fonction $2x + 1$, qui est à numérateur, ne "tire vers $+\infty$ ". Comment formaliser cette intuition ? Mettons d'abord en facteur les termes dominants du numérateur et du dénominateur

$$2x + 1 = 2x \left(1 + \frac{1}{2x}\right)$$

$$x^2 + 2 = x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$$

Ré-écrivons ainsi le quotient et simplifions :

$$\frac{2x+1}{x^2+2} = \frac{2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{2}{x} \cdot \left(\frac{1+\frac{1}{2x}}{1+\frac{2}{x^2}}\right).$$

De cette façon, en utilisant la règle de la limite d'un produit, nous pouvons calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x^2+2} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{2x}}{1+\frac{2}{x^2}}\right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Nous avons fait le quotient des termes **dominants** du numérateur et du dénominateur, et ce qui reste entre parenthèses tend vers 1. Nous avons donc résolu cette forme indéterminée.

Définition 6.1.6. Le **terme dominant** d'une somme, lorsque $x \rightarrow x_0$, est le terme tel que, quand on le met en facteur, ce qui reste entre parenthèses tend vers 1, lorsque $x \rightarrow x_0$. Le terme dominant d'un produit est le produit des termes dominants des facteurs. Le terme dominant d'un quotient est le quotient des termes dominants du numérateur et du dénominateur.

Exemple 6.1.7. Nous voulons calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^{2x} + 4e^{-2x} - 5e^x + 2)$. Dans cette somme, la limite du premier terme est $+\infty$, la limite du deuxième terme est zéro, la limite du troisième terme est $-\infty$ et le dernier terme est constant. Donc, à cause du premier et du troisième terme, on trouve la forme indéterminée $+\infty - \infty$. Nous allons procéder comme dans le cas du polynôme ci-dessus : nous mettons en facteur le terme qui croît le plus vite en $+\infty$ (le terme dominant), c'est à dire le premier terme. En effet, $e^{2x} = (e^x)^2$, donc le premier terme est plus grand, en valeur absolue, que le troisième terme, quand x est grand. Donc,

$$3e^{2x} + 4e^{-2x} - 5e^x + 2 = 3e^{2x} \left(1 + \frac{4}{3}e^{-4x} - \frac{5}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{-2x}\right).$$

On remarque que la limite pour $x \rightarrow +\infty$ de la fonction entre parenthèses est égale à 1. Nous pouvons donc conclure que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^{2x} + 4e^{-2x} - 5e^x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{2x} = +\infty.$$

Nous voulons maintenant calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^{2x} + 4e^{-2x} - 5e^x + 2)$? Attention, le premier et le troisième terme tendent maintenant vers zéro et le deuxième terme tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers $-\infty$. Cette fois nous n'avons même pas de forme indéterminée à résoudre :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^{2x} + 4e^{-2x} - 5e^x + 2) = 0 + \infty - 0 + 2 = +\infty.$$

6.1.2.2 La règle de l'Hôpital

Nous présentons maintenant une méthode pour résoudre les formes indéterminées du type $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$, qui peut être utile quand la méthode des fonctions équivalentes ne permet pas de conclure.

Soient f, g deux fonctions définies et dérivables au voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons que :

1. g' ne s'annule pas au voisinage épointé de x_0 ;
2. la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe et vaut $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$;
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$.

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Exemple 6.1.8. Nous souhaitons calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{3x}$. Il s'agit d'une forme indéterminée de type $\frac{+\infty}{+\infty}$. Soient $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = 3x$. Les deux fonctions sont dérivables, avec $f'(x) = 2e^{2x}$ et $g'(x) = 3$. Les trois conditions ci-dessus sont vérifiées. En effet, g' ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$ et la limite du quotient des dérivées existe. D'après la règle de l'Hôpital, nous avons donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{3} = +\infty.$$

Ce résultat a l'interprétation suivante : les fonctions f et g de l'exemple croissent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Toutefois, la fonction f croît beaucoup plus vite que la fonction g .

Remarque 6.1.9. La règle de l'Hôpital peut être utilisée pour résoudre les formes indéterminées $\frac{0}{0}$ et $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (quand les hypothèses 1., 2., 3. sont vérifiées, bien entendu). Elle peut aussi être utilisée pour résoudre la forme indéterminée $0 \cdot \pm\infty$, grâce à l'identité

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

et pour résoudre la forme indéterminée $+\infty - \infty$, grâce à l'identité

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}.$$

6.2 Types de croissance

6.2.1 Comparaison de croissance aux bord du domaine

Grâce aux méthodes de résolution des formes indéterminées, nous pouvons maintenant comparer la vitesse de croissance de plusieurs fonctions qui ont la même limite en un point qui se trouve au bord de leur domaine.

Exemple 6.2.1. Soient

$$f_1(x) = x^2 + 2x ; f_2(x) = 3x^3 ; f_3(x) = 3x^2 - 10.$$

Nous souhaitons comparer la croissance de ces trois fonctions lorsque $x \rightarrow +\infty$. Nous remarquons que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty.$$

Comment comparer donc la croissance des trois fonctions en $+\infty$? Nous avons besoin d'une définition.

Définition 6.2.2. Soient f, g deux fonctions définies au voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et supposons que g ne s'annule pas au voisinage épointé de x_0 .

- On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Dans ce cas, on écrit

$$f \sim_{x_0} g.$$

- On dit que f est **comparable à** g au voisinage de x_0 s'il existe une constante $K > 0$, avec $K \neq 1$, telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Dans ce cas, on écrit

$$f \sim_{x_0} Kg.$$

- On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Dans ce cas, on écrit

$$f = o_{x_0}(g).$$

Remarque 6.2.3. $f \sim_{x_0} g$ si et seulement si $g \sim_{x_0} f$.

$f \sim_{x_0} Kg$ si et seulement si $g \sim_{x_0} \frac{1}{K}f$.

$f = o_{x_0}(g)$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$.

Reprenons l'exemple ci-dessus. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, en mettant en facteur les termes dominants de f_1 et de f_2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{3x^2}\right)}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{3x^2}\right)}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x} = 0.$$

Nous en déduisons que f_1 est négligeable devant f_2 . Un calcul similaire montre que f_3 est négligeable devant f_2 au voisinage de $+\infty$.

Pour comparer f_1 et f_3 , nous calculons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{f_3(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{3x^2}\right)}{3x^2 \left(1 - \frac{10}{3x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Donc f_1 et f_3 sont comparables au voisinage de $+\infty$ et précisément f_3 croît 3 fois plus vite que f_1 .

Ce résultat a l'interprétation suivante : la croissance de f_2 en $+\infty$ est de type polynomial de degré 3, alors que la croissance de f_1 et de f_3 est de type polynomial de degré 2, donc une croissance plus lente.

6.2.2 Propriétés de l'équivalence

La **propriété fondamentale de l'équivalence** de fonctions (et donc l'intérêt de cette définition) est la suivante :

si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $f \sim_{x_0} g$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Nous avons déjà utilisé cette propriété dans les exemples 6.1.5 pour remplacer une limite par une limite plus simple, et ainsi résoudre certaines formes indéterminées.

Fait 6.2.4. Soient f, \hat{f}, g, \hat{g} des fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, telles que $f \sim_{x_0} \hat{f}$ et $g \sim_{x_0} \hat{g}$. Alors on peut en déduire que :

- $f \cdot g \sim_{x_0} \hat{f} \cdot \hat{g}$
- $\frac{f}{g} \sim_{x_0} \frac{\hat{f}}{\hat{g}}$ si g et \hat{g} ne s'annulent pas au voisinage épointé de x_0
- $f^n \sim_{x_0} \hat{f}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $f^a \sim_{x_0} \hat{f}^a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, si f et \hat{f} sont strictement positives au voisinage épointé de x_0 .

Attention : on ne peut pas en général déduire que $f + g \sim_{x_0} \hat{f} + \hat{g}$, ni que $e^f \sim_{x_0} e^{\hat{f}}$, ni que $\ln(f) \sim_{x_0} \ln(\hat{f})$.

Exemples 6.2.5.

- Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme, avec $a_n \neq 0$. Nous avons

$$p(x) \sim_{\pm\infty} a_n x^n.$$

En effet, on peut écrire

$$p(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} x^{-n+1} + \frac{a_0}{a_n} x^{-n} \right).$$

Par exemple, $4x^4 - 3x^3 + 1 \sim_{\pm\infty} 4x^4$.

- Soit $j \in \mathbb{N}$ le plus petit indice tel que $a_j \neq 0$. Alors $p(x) \sim_0 a_j x^j$.
Par exemple, $3x^6 + 7x^4 + 1 \sim_0 1$ et $4x^4 + 3x^2 \sim_0 3x^2$.
- Soit $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ un autre polynôme, avec $b_m \neq 0$. Alors

$$\frac{p(x)}{q(x)} \sim_{\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}.$$

- Soit $i \in \mathbb{N}$ le plus petit indice tel que $b_i \neq 0$. Alors

$$\frac{p(x)}{q(x)} \sim_0 \frac{a_j}{b_i} x^{j-i}.$$

- Soit $g(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 + a_{-1} x^{-1} + \dots + a_{-m} x^{-m}$ une somme de puissances positives et négatives. Nous avons montré ci-dessus que

$$g \sim_{\pm\infty} a_n x^n \text{ et } g \sim_0 a_{-m} x^{-m}.$$

Cette règle est valable pour les puissances entières, mais aussi pour les puissances réelles (ordonnées selon l'ordre décroissant, de la plus grande à la plus petite).

- Soient $f(x) = x^3$ et $\hat{f}(x) = x^3 + x$. Nous avons montré que $f \sim_{+\infty} \hat{f}$. Par contre,

$$e^{\hat{f}(x)} = e^{x^3} \cdot e^x = f(x) \cdot e^x$$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\hat{f}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \neq 1$. Donc $e^f \not\sim_{+\infty} e^{\hat{f}}$.

- Soit $h(x) = a_n e^{nx} + a_{n-1} e^{(n-1)x} + \dots + a_1 e^x + a_0 + a_{-1} e^{-x} + \dots + a_{-m} e^{-mx}$ une somme d'exponentielles. L'exemple 6.1.7 montre que

$$h \sim_{+\infty} a_n e^{nx} \text{ et } h \sim_{-\infty} a_{-m} e^{-mx}.$$

6.2.3 Types de croissance

6.2.3.1 Croissance polynomiale

Exemple 6.2.6. On considère les fonctions

$$f(x) = 2x + 3 \quad g(x) = \frac{3x^2 + x}{4x - 1} \quad h(x) = \sqrt{x^2 - e^{-x}} .$$

Trouvons les termes dominants de ces fonctions lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) = 2x \left(1 + \frac{3}{2x}\right) \sim_{+\infty} 2x$$

$$g(x) = \frac{3x^2 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)}{4x \left(1 - \frac{1}{4x}\right)} \sim_{+\infty} \frac{3}{4}x .$$

$$h(x) = \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2 e^x}\right)} \sim_{+\infty} x$$

La fonction f est une fonction affine, la fonction g est une fonction rationnelle et la fonction h est la somme d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle.

Cependant, ces trois fonctions ont le même type de croissance qualitative lorsque $x \rightarrow +\infty$: f est comparable à $2h$ et g est comparable à $\frac{3}{4}h$.

Définition 6.2.7. On dit que une fonction f a une **croissance linéaire** (ou **polynomiale de degré 1**) lorsque $x \rightarrow +\infty$ s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f \sim_{+\infty} cx .$$

On dit que une fonction f a une **croissance quadratique** (ou **polynomiale de degré 2**) lorsque $x \rightarrow +\infty$ s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f \sim_{+\infty} cx^2 .$$

On dit que une fonction f a une **croissance cubique** (ou **polynomiale de degré 3**) lorsque $x \rightarrow +\infty$ s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f \sim_{+\infty} cx^3 .$$

Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$, on dit que une fonction f a une **croissance polynomiale de degré n** lorsque $x \rightarrow +\infty$ s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f \sim_{+\infty} cx^n .$$

6.2.3.2 Croissance de type puissance (positive ou négative)

Définition 6.2.8. On dit que une fonction f a une **croissance de type puissance** lorsque $x \rightarrow +\infty$ s'il existe $a, c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f \sim_{+\infty} cx^a.$$

Le nombre a est l'**exposant** de la puissance.

Exemple 6.2.9. Puisque

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \sim_{+\infty} \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

la fonction $\sqrt{x+1}$ a une croissance de type puissance, avec exposant $\frac{1}{2}$.

La fonction $\frac{1}{x} = x^{-1}$ a croissance de type puissance, avec exposant -1 .

Puisque

$$\frac{\sqrt{x^3}}{x^2+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

cette fonction a une croissance de type puissance, avec exposant $-\frac{1}{2}$.

6.2.3.3 Croissance exponentielle

Exemple 6.2.10. On considère les fonctions

$$f(x) = 2e^x + 3 \quad g(x) = \frac{3x^2 e^{2x} + xe^x}{x^2 e^x - 2x} \quad h(x) = e^{3x}.$$

Trouvons les termes dominants de ces fonctions lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) = 2e^x \left(1 + \frac{3}{2e^x}\right) \sim_{+\infty} 2e^x$$

$$g(x) = \frac{3x^2 e^{2x} \left(1 + \frac{1}{3xe^x}\right)}{x^2 e^x \left(1 - \frac{2}{xe^x}\right)} \sim_{+\infty} 3e^x.$$

$$h(x) = e^{3x}$$

Ces trois fonctions ont une croissance exponentielle.

Définition 6.2.11. On dit que une fonction f a une **croissance exponentielle** lorsque $x \rightarrow +\infty$ s'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$f \sim_{+\infty} ce^{bx}.$$

Puisque $e^{bx} = (e^x)^b$, on va appeler le nombre b l'**exposant** de l'exponentielle.

6.2.3.4 Croissance logarithmique

Définition 6.2.12. On dit que une fonction f a une **croissance logarithmique** lorsque $x \rightarrow +\infty$ s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f \sim_{+\infty} c \ln(x).$$

Exemple 6.2.13. Puisque $\ln(2x^3) = \ln(2) + 3 \ln(x)$, la fonction $\ln(2x^3)$ a une croissance logarithmique.

6.2.4 Comparaison entre les différents types de croissance

- On remarque que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m \\ 1 & \text{si } n = m. \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

Soit $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ un polynôme (avec $a_n > 0$) de degré n . Puisque

$$p(x) \sim_{+\infty} a_n x^n,$$

la croissance de p est comparable à la croissance de x^n (croissance polynomiale de degré n). Puisque si $m > n$ alors

$$p(x) = o_{+\infty}(x^m),$$

on en déduit que **la croissance de tout polynôme de degré n est négligeable devant la croissance de tout polynôme de degré $m > n$** , lorsque $x \rightarrow +\infty$.

- On remarque que, pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{a-b} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > b \\ 1 & \text{si } a = b. \\ 0 & \text{si } a < b \end{cases}$$

Puisque, pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$x^a = o_{+\infty}(x^b) \iff a < b,$$

on en déduit que **la croissance d'une puissance d'exposant a est négligeable devant la croissance de toute puissance d'exposant $b > a$** , lorsque $x \rightarrow +\infty$.

- On remarque que, pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{e^{bx}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(a-b)x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > b \\ 1 & \text{si } a = b. \\ 0 & \text{si } a < b \end{cases}$$

Puisque, pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$e^{ax} = o_{+\infty}(e^{bx}) \iff a < b,$$

on en déduit que **la croissance d'une exponentielle d'exposant a est négligeable devant la croissance de toute exponentielle d'exposant $b > a$** , lorsque $x \rightarrow +\infty$.

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En utilisant la règle de l'Hôpital n fois, on montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Soit $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ un polynôme (avec $a_n > 0$). Puisque $p(x) \sim_{+\infty} a_n x^n$, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0.$$

De la même façon on montre que, pour tout $b, c > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{ce^{bx}} = 0.$$

Autrement dit, *les fonctions exponentielles d'exposant positif croissent beaucoup plus vite que n'importe quel polynôme, lorsque $x \rightarrow +\infty$* . Puisque

$$p(x) = o_{+\infty}(ce^{bx}),$$

on en déduit que **la croissance polynomiale est négligeable devant la croissance exponentielle d'exposant positif**, indépendamment du degré du polynôme et de l'exposant $b > 0$ de l'exponentielle, lorsque $x \rightarrow +\infty$.

- Soit $a \in \mathbb{R}^{>0}$. En utilisant l'encadrement

$$[a] \leq a \leq [a]$$

et le Théorème des gendarmes, on voit tout de suite que, pour tout $b > 0$ et tout $c, d \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{dx^a}{ce^{bx}} = 0.$$

Autrement dit, *les fonctions exponentielles d'exposant positif croissent beaucoup plus vite que n'importe quelle fonction puissance, lorsque $x \rightarrow +\infty$.*

Puisque pour tout $a, c, d \in \mathbb{R}$ et tout $b > 0$, on a

$$dx^a = o_{+\infty}(ce^{bx}),$$

donc **la croissance en puissance est négligeable devant la croissance exponentielle d'exposant positif**, indépendamment des exposants, lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On remarque que si $a, b > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ce^{-bx}}{dx^a} = \frac{0}{\infty} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ce^{-bx}}{dx^{-a}} = \frac{c}{d} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0.$$

Donc **la croissance exponentielle d'exposant négatif est négligeable devant la croissance en puissance** (et polynomiale), indépendamment des exposants, lorsque $x \rightarrow +\infty$.

- o Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En utilisant la règle de l'Hôpital une fois, on montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

En raisonnant comme ci-dessus, on voit que *la fonction logarithme Népérien croît beaucoup moins vite que tout quel polynôme, lorsque $x \rightarrow +\infty$.* Puisque pour tout $c \in \mathbb{R}$ et pour tout polynôme $p(x)$

$$c \ln(x) = o_{+\infty}(p(x)),$$

on en déduit que **la croissance logarithmique est négligeable devant la croissance polynomiale**, indépendamment du degré du polynôme $p(x)$, lorsque $x \rightarrow +\infty$.

6.2.5 Comparaison de croissance sur un temps long

6.2.14. Les effectifs de trois populations F, G et H de bactéries évoluent, respectivement, selon les lois

$$f(x) = 300x + 150, \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = 150x + 500$$

où x mesure le temps.

Au début de l'expérience ($x = 0$), la population F est composée par $f(0) = 150$ bactéries, la population G est composée par $g(0) = 1$ bactérie et la population H est composée par $h(0) = 500$ bactéries.

Que va se passer sur un temps très long ?

Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Pour comparer la croissance des trois populations, on calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{h(x)}.$$

Nous trouvons dans les trois cas la forme indéterminée

$$\frac{+\infty}{+\infty}.$$

Dans les deux premières limites, nous savons résoudre cette forme indéterminée en utilisant la règle de l'Hôpital :

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} \underset{+\infty}{\sim} \frac{f'}{g'} &= \frac{300}{e^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \frac{h}{g} \underset{+\infty}{\sim} \frac{h'}{g'} &= \frac{150}{e^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc la règle de l'Hôpital nous dit aussi que, dans ce cas, comparer la croissance et comparer la *vitesse* de croissance des deux populations sur des temps longs revient à la même chose.

Autrement dit, nous avons que $f, h = o_{+\infty}(g)$ et aussi $f', h' = o_{+\infty}(g')$. Donc f et h sont négligeables devant g , lorsque $x \rightarrow +\infty$. En effet, f et h ont une croissance *linéaire*, alors que g a une croissance *exponentielle*.

Pour calculer la troisième limite, nous utilisons la méthode des termes dominants :

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{300x \left(1 + \frac{150}{x}\right)}{150x \left(1 + \frac{500}{x}\right)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Donc $f \underset{+\infty}{\sim} 2h$, c'est à dire que f est comparable à h , lorsque $x \rightarrow +\infty$. En effet f et h ont *le même type de croissance* (linéaire).

Interprétation (point de vue qualitatif et point de vue quantitatif). Sur des temps longs,

- o la croissance des populations F et H est **qualitativement** la même (croissance linéaire). Du point de vue **quantitatif**, la population F croit deux fois plus vite que la population H .

- la croissance des populations F et H est très différente de la croissance de la population G , à la fois **du point de vue qualitatif et quantitatif**. En effet, la croissance des populations F et G (croissance linéaire) est négligeable devant la croissance de la population G (croissance exponentielle).

6.2.15. Deux populations F et G de souris sont infectées par le même virus, mais réagissent de façon différente : les effectifs évoluent dans le temps (mesuré en semaines) selon les lois

$$\begin{aligned} f(x) &= 100e^{-x} \\ g(x) &= \frac{200}{x+1} \end{aligned} .$$

Comment vont évoluer les deux populations à long terme ?

Calculons les limites des deux fonctions lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Comme il était prévisible, les deux populations décroissent jusqu'à la disparition. Comparons leurs comportements lorsque $x \rightarrow +\infty$. Pour cela, calculons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100e^{-x}}{200(x+1)^{-1}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x} = 0.$$

Donc $f = o_{+\infty}(g)$.

Interprétation (point de vue qualitatif et point de vue quantitatif). Sur des temps longs, qualitativement et quantitativement les deux populations décroissent de façon très différente (F a une décroissance exponentielle et G a une décroissance de type puissance d'exposant -1).

On en déduit que la population F va disparaître beaucoup plus rapidement que la population G .

6.3 Fonctions rationnelles

On considère deux polynômes

$$\begin{aligned} p_1(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ avec } a_n \neq 0 \\ p_2(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0, \text{ avec } b_m \neq 0 \end{aligned}$$

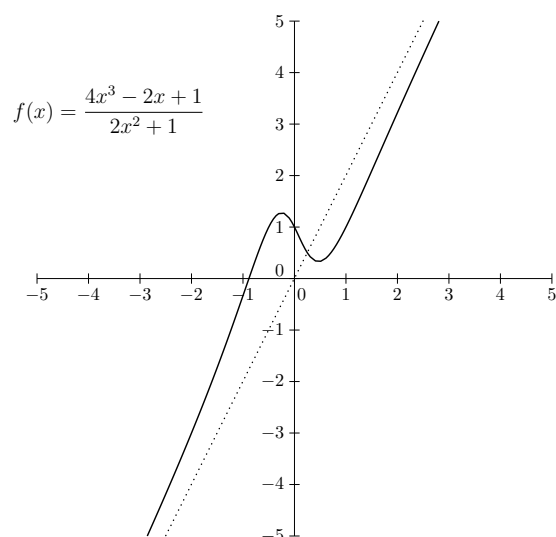
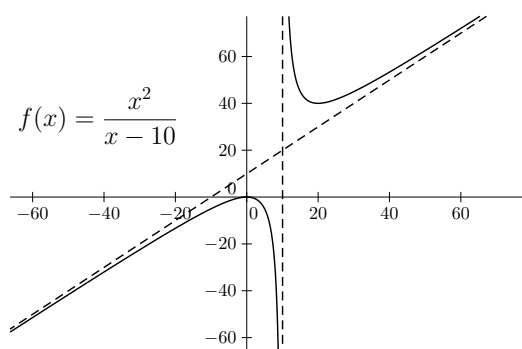
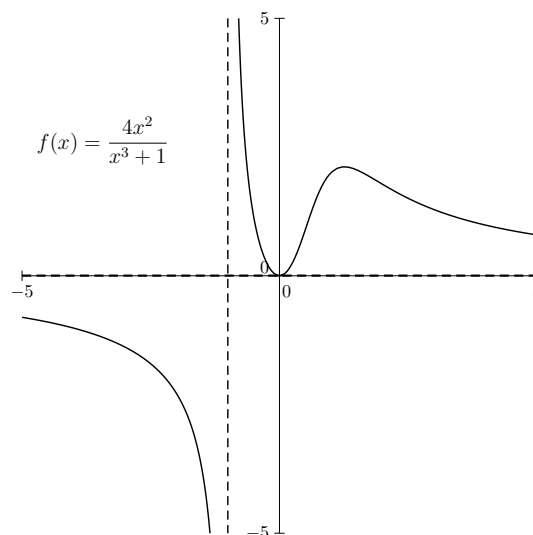
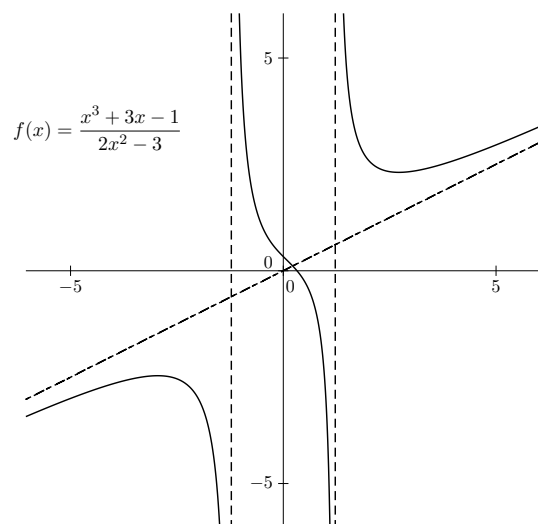
tels que p_1 et p_2 n'ont pas de racines communes, c'est-à-dire, il n'existe pas un nombre réel r tel que $p_1(r) = p_2(r) = 0$.

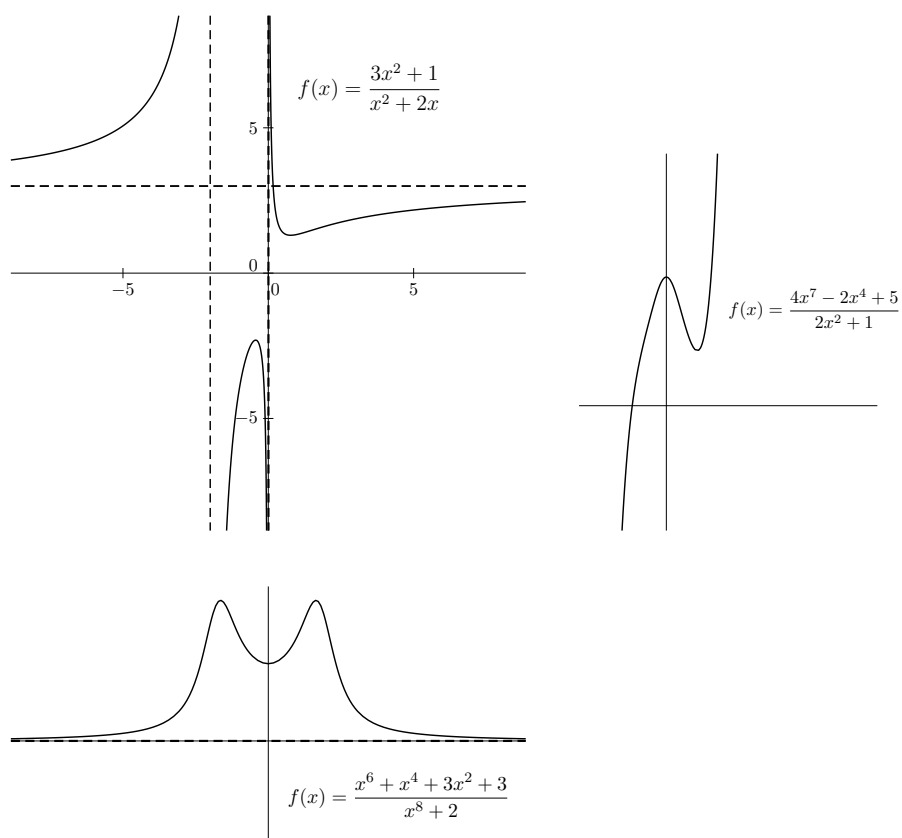
Le quotient

$$f = \frac{p_1}{p_2}$$

définit alors une **fonction rationnelle**.

Voilà quelques exemples :





On peut remarquer en regardant les graphes que le comportement change beaucoup selon le choix des deux polynômes.

Domaine

La fonction $f = \frac{p_1}{p_2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{r \in \mathbb{R} : p_2(r) = 0\}$.

Image

Ça dépend des polynômes considérés.

Voilà quelques considérations :

- soit $b \in \mathbb{R}$, on veut savoir si $b \in \text{Im}(f)$. Autrement dit, on se demande si l'équation

$$f(x) = b$$

admet une solution. Ré-écrivons l'équation de la façon suivante :

$$p_1(x) - p_2(x) \cdot b = 0.$$

Le polynôme $p_b(x) = p_1(x) - p_2(x) \cdot b$ a un degré $d \leq \max\{n, m\}$. On se demande si le polynôme p_b admet au moins une racine.

FAIT IMPORTANT : Tout polynôme de degré impair admet au moins une racine.

Nous pouvons donc conclure que, si le degré du polynôme p_b est impair, alors $b \in \text{Im}(f)$. Si le degré du polynôme p_b est pair, alors nous ne savons pas procéder en général : il faudrait comprendre si le polynôme p_b a au moins une racine, et ceci peut être un problème difficile.

- o Si tous les monômes qui apparaissent dans p_1 et p_2 ont degré pair et tous les coefficients sont positifs, alors on peut conclure que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \text{Dom}(f)$. En particulier, dans ce cas nous avons $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Limites et asymptotes

On remarque que

$$f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{x^n (a_n + a_{n-1}x^{-1} + \dots + a_1x^{1-n} + a_0x^{-n})}{x^m (b_m + b_{m-1}x^{-1} + \dots + b_1x^{1-m} + b_0x^{-m})}.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m \text{ et } n - m \text{ est pair} \\ \pm\infty & \text{si } n > m \text{ et } n - m \text{ est impair} \\ \frac{a_n}{b_n} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}.$$

Si $n < m$ alors $y = 0$ est une asymptote horizontale.

Si $n = m$ alors $y = \frac{a_n}{b_n}$ est une asymptote horizontale.

Si $n \leq m$ ou si $n > m + 1$, alors il n'y a pas d'asymptotes obliques.

Si $n = m + 1$ alors on a une asymptote oblique d'équation $y = \frac{a_{m+1}}{b_m}x + \frac{a_m b_m - a_{m+1} b_{m-1}}{b_m^2}$

(nous verrons dans le prochain chapitre comment on trouve cette formule).

Si $r \in \mathbb{R}$ est tel que $p_2(r) = 0$ alors $x = r$ est un asymptote verticale. En effet, puisque $p_1(r) \neq 0$ par hypothèse, nous pouvons conclure que les limites $\lim_{x \rightarrow r^\pm} \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ existent et sont infinies (le signe dépend des signes des coefficients de p_1 et de p_2).

Exemple 6.3.1. Étudions la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{3x^3 - 3x}{x^2 - 4}.$$

Soient $p_1(x) = 3x^3 - 3x$ et $p_2(x) = x^2 - 4$.

On remarque que

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 3x(x-1)(x+1) \\ p_2(x) &= (x-2)(x+2) \end{aligned} .$$

Donc f s'annule en $x = 0$, $x = -1$ et $x = 1$.

En particulier, p_1 et p_2 n'ont pas de racines communes.

Domaine

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$$

Image

Soit $b \in \mathbb{R}$. L'équation $f(x) = b$ s'écrit aussi comme $p_b(x) = 0$, où $p_b(x) = 3x^3 - bx^2 - 3x + 4b$. Puisque p_b est de degré 3 (impair) pour tout $b \in \mathbb{R}$, on peut conclure que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Limites et asymptotes

$x = -2$ et $x = 2$ sont des asymptotes verticales.

Calculons les limites $\lim_{x \rightarrow \pm 2^\pm} f(x)$.

Calculons par exemple $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. On remarque que $p_1(2) = 3 \cdot 8 - 3 \cdot 2 = 18 > 0$ et quand $x \rightarrow 2^+$, alors $p_2(x) \rightarrow 0^+$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

En raisonnant de la même manière, on trouve que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$.

En appliquant la règle ci-dessus, on trouve que f a une asymptote oblique d'équation $y = 3x$.

Autres propriétés

On remarque que $f(-x) = -f(x)$, donc f est impaire.

Avec ces informations et le calcul des valeurs de f en quelques points de coordonnées simples, nous pouvons déjà nous faire une idée de la forme du graphe de f .

Pour avoir des informations plus précises, on calcule f' .

$$f'(x) = \frac{x^4 - 11x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}.$$

Nous pouvons calculer les racines de f' .

Soit $y = x^2$ et considérons l'équation $y^2 - 11y + 4 = 0$. Elle a deux solutions

distinctes : $y = \frac{11 \pm \sqrt{(11)^2 - 16}}{2}$. On remarque que $\sqrt{(11)^2 - 16} < 11$, donc les deux

solutions sont positives. On en déduit que f' a quatre racines :

$$\pm\sqrt{\frac{11 + \sqrt{(11)^2 - 16}}{2}} ; \pm\sqrt{\frac{11 - \sqrt{(11)^2 - 16}}{2}}.$$

Il y a donc au plus quatre points d'extrema locaux. Essayons d'estimer où ils se trouvent.

D'abord, $(11)^2 - 16 = (10 + 1)^2 - 16 = 100 + 20 + 1 - 16 = 105$. On va donc estimer $\sqrt{105} \approx 10$.

Ensuite,

$$\pm\sqrt{\frac{11 + \sqrt{105}}{2}} \approx \pm\sqrt{\frac{21}{2}} \approx \pm\sqrt{10} \approx \pm 3$$

et

$$\pm\sqrt{\frac{11 - \sqrt{105}}{2}} \approx \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm\frac{2}{3}.$$

Puisque f est impaire, il suffit de se concentrer sur le demi-plan $x > 0$.

Avec les données que nous avons, sans faire d'autres calculs nous pouvons déduire que f a un point de maximum local en $x \approx \frac{2}{3}$ et un point de minimum local en $x \approx 3$.

Calculons donc la valeur de f en ces points.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4} = 2 \cdot \frac{2^2 - 3^2}{2^2 - 4 \cdot 3^2} = 2 \cdot \frac{-5}{-4 \cdot 8} = \frac{5}{16} \approx \frac{1}{3}$$

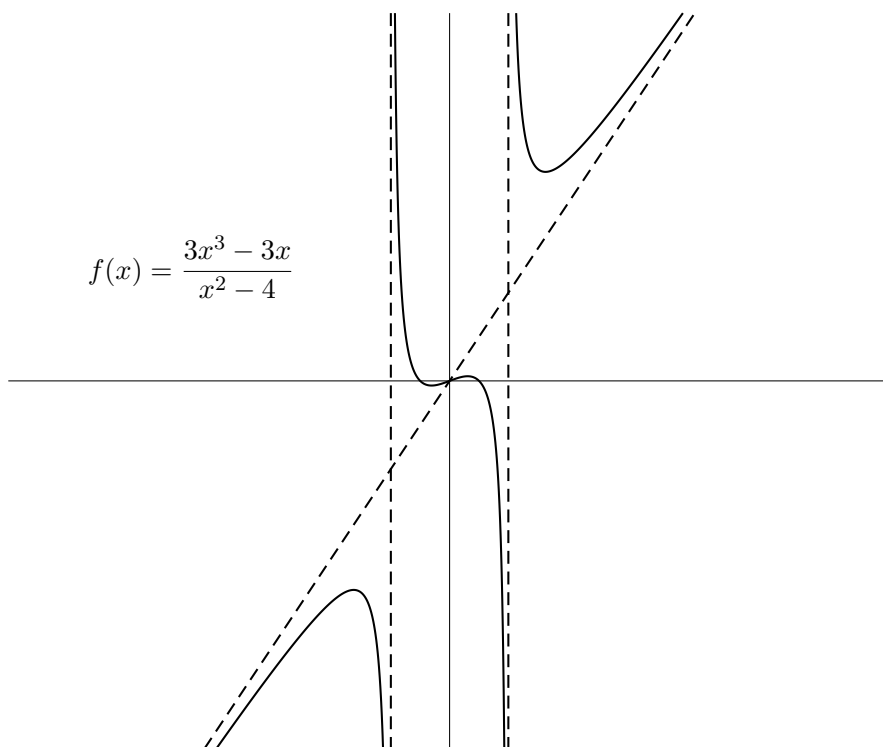
$$f(3) = 3 \cdot 3 \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2 - 4} = 9 \cdot \frac{8}{5} = \frac{72}{5} \approx 14$$

Où se trouve le graphe de f par rapport au graphe de la fonction g qui représente l'asymptote oblique $y = 3x$?

$f'(0) = \frac{1}{4} < 3 = g'(0)$, donc pour $x \in]0, 2[$, le graphe de f se trouve au dessous de l'asymptote oblique.

$f(3) \approx 14 > 9 = g(3)$, donc pour $x \in]2, +\infty[$, le graphe de f se trouve au dessus de l'asymptote oblique.

Nous avons maintenant une idée assez précise de comment dessiner le graphe de f , même sans utiliser la calculatrice.



Chapitre 7

COURS VII

7.1 Composition

Supposons qu'on a deux fonctions $f : A \rightarrow B$ et $g : C \rightarrow D$ telles que

$$\text{Im}(f) \subseteq \text{Dom}(g) = C$$

(c'est le cas, par exemple, si $B = C$). Dans ce cas, nous pouvons définir une nouvelle fonction : la **composition**

$$g \circ f : A \rightarrow D,$$

définie comme la fonction qui envoie tout $a \in A$ sur l'élément $g(f(a)) \in D$. Il s'agit bien d'une fonction, de domaine $\text{Dom}(f)$ et à valeurs dans D , car à tout élément de A on associe un unique élément de D .

Remarque 7.1.1. Pour reprendre l'analogie des boîtes magiques, pour faire la composition $g \circ f$ on met les boîtes magiques de f et de g côte à côte, avec la sortie de la boîte de f en correspondance avec l'entrée de la boîte de g . Pour tout élément $a \in A$, quand a entre dans la boîte de f , l'élément $f(a) \in B$ en sort et, puisque $\text{Im}(f) \subseteq C$, on a que $f(a) \in \text{Dom}(g)$; donc $f(a)$ entre ensuite dans la boîte de g et l'élément $g(f(a))$ en sort à la fin.

Exemple 7.1.2. Soit f la fonction qui associe à toute ville de France son maire et soit g la fonction qui associe à tout être humain son groupe sanguin. Puisque les maires sont des êtres humains, l'image de f est contenue dans le domaine de g . Nous pouvons donc faire la composition $g \circ f$: il s'agit de la fonction qui à toute ville de France associe le groupe sanguin de son maire.

Remarque 7.1.3. Attention à l'ordre : faire $g \circ f$ n'est pas la même chose que faire $f \circ g$! D'abord, le fait que $g \circ f$ soit bien définie n'implique pas que $f \circ g$ le soit aussi : dans l'exemple ci-dessus, faire $f \circ g$ reviendrait à considérer le maire d'un groupe sanguin...

Ensuite, même si les deux compositions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies, en général elles ne définissent pas la même fonction. Par exemple, considérons les deux fonctions

suyvantes, de domaine et à valeurs dans l'ensemble \mathbb{R} : $f(x) = x + 3$ et $g(x) = x^2$. On a que $g \circ f(x) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ et $f \circ g(x) = x^2 + 3$. Donc les deux compositions donnent deux fonctions différentes comme résultat.

Si $f : A \rightarrow B$ est une fonction bijective, alors la fonction réciproque $g : B \rightarrow A$ est l'unique fonction qui satisfait

$$\text{pour tout } a \in A, g \circ f(a) = a \text{ et pour tout } b \in B, f \circ g(b) = b.$$

7.1.1 Limite de la composition

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ et g est définie et continue au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(a).$$

Exemple 7.1.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{5x^3} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3} = 0$.

7.1.2 Dérivée de la composition

Soient f et g deux fonctions dérivables telle que $\text{Im}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$. La composée $g \circ f$ est dérivable sur $\text{Dom}(f)$ et

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Exemples 7.1.5.

- Si $f(x) = a^x$, pour un certain $a \in \mathbb{R}^{>0}$, alors $f'(x) = (e^{x \cdot \ln a})' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x$.
- Si f est dérivable, alors $(e^{f(x)})' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$.
- Si f est dérivable et strictement positive, et $a \in \mathbb{R}$, alors $((f(x))^a)' = a \cdot f'(x) \cdot (f(x))^{a-1}$ et $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.
- Si $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ alors $f'(x) = \left((x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- Si $f(x) = e^{3x^2+x}$ alors $f'(x) = e^{3x^2+x} \cdot (6x + 1)$.
- La dérivée de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ est $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.
- La dérivée de la fonction $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ est la fonction $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$.

7.2 La dérivée comme vitesse de variation

Soit f une fonction dérivable. Souvent il est plus intéressant d'étudier la *vitesse de variation* de f plutôt que les valeurs de f . Pour étudier la vitesse de variation de f en un point x_0 , considérons un autre point x_1 du domaine de f . Calculons d'abord la **variation absolue** de f

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

quand on passe de x_0 à x_1 .

Comme on l'a déjà vu quand nous avons introduit les erreurs absolues, la variation absolue ne donne pas beaucoup d'information sur la vitesse de variation : une variation absolue de 100 peut être très lente, si on l'obtient en un intervalle de temps d'un million d'années, ou très rapide, si on l'obtient en un intervalle de temps d'une nanoseconde.

Ceci suggère de comparer la variation absolue Δf avec la longueur

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

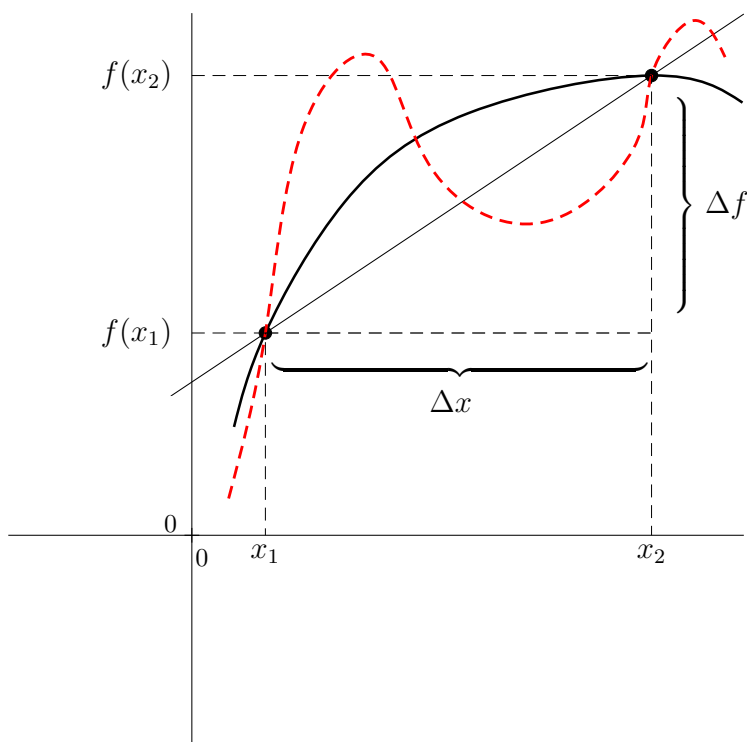
de l'intervalle de variation. Autrement dit, on calcule la **variation moyenne** (ou **variation relative**) de f

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

quand on passe de x_0 à x_1 . De façon graphique, la variation relative est la *pente* de la droite qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$, dont l'équation est

$$y = f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0).$$

La variation relative nous donne plus d'informations que la variation absolue, mais il s'agit toujours d'une mesure un peu grossière de la vitesse de variation. En effet, nous ne savons rien de ce qui se passe entre x_0 et x_1 , dans cette intervalle la fonction pourrait varier très peu ou beaucoup, sans que la variation relative nous l'indique :

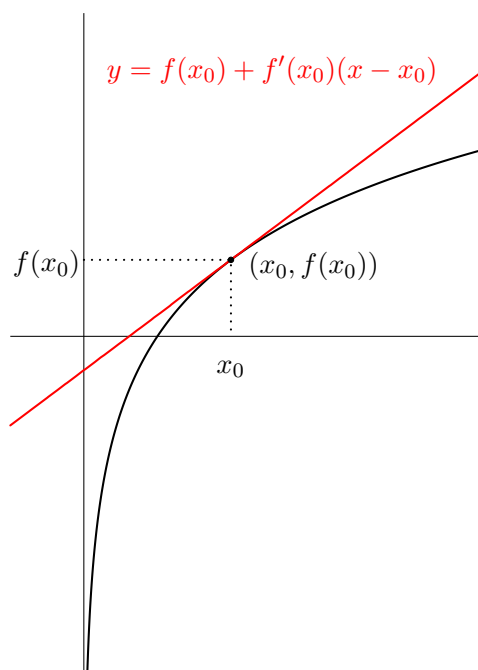


D'autre part, plus x_1 est proche de x_0 , plus l'information donnée par la variation relative sera précise. Ceci suggère de considérer la **variation instantanée** ou **vitesse de variation** de f

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (7.1)$$

Il s'agit de la **dérivée** $f'(x_0)$ de f en x_0 . De façon graphique, la dérivée $f'(x_0)$ représente la *pente* de la **droite tangente** au graphe de f en le point $(x_0, f(x_0))$, c'est-à-dire la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



Exemple 7.2.1. Une population d'oiseaux évolue selon la loi

$$f(x) = x^2 + 200,$$

où x mesure le temps (en trimestres) et $f(x)$ mesure la taille de la population au temps x . Le début de l'expérience est fixé à $x = 0$. Quelle est la vitesse de croissance de la population d'oiseaux un an après le début de l'expérience ? On calcule

$$f'(x) = 2x.$$

On en déduit que la vitesse de croissance de la population d'oiseaux un trimestre après le début de l'expérience est de $f'(1) = 2$ individus par trimestre.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \ln x + x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \ln x + x^{-\frac{3}{2}} \\ &= x^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2} \ln x + 1 \right) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

7.3 Vitesse de changement en fonction d'une fonction du temps et des paramètres

L'effectif E d'une population de poissons est directement proportionnel à la racine carrée de la quantité N de nourriture disponible :

$$E = K\sqrt{N},$$

où K est une constante positive appropriée.

La quantité de nourriture disponible évolue dans le temps, selon une certaine loi, qui ne fait pas partie des données disponibles dans cet exemple. Autrement dit, N est en réalité une fonction $N(t)$ de la variable t , qui représente le temps.

Nous pouvons donc voir E comme une fonction de la variable N , mais aussi comme une fonction de la variable t , à travers la formule de la fonction composée :

$$E(t) = K\sqrt{N(t)}.$$

La fonction $N(t)$ n'est pas connue, mais nous connaissons l'expression de E en fonction de la variable N et du paramètre K .

En comptant l'effectif de la population, on se rend compte que ce dernier croît selon une loi quadratique :

$$E(t) = at^2 + bt + c,$$

où a, b, c sont des constantes appropriées. On en déduit que la vitesse de changement (dans le temps) de l'effectif est donnée par une fonction affine :

$$E'(t) = 2at + b.$$

Est-ce qu'on peut exprimer la vitesse de changement de la quantité de nourriture en fonction de la nourriture disponible à un certain instant t ? Utilisons la formule pour le calcul de la dérivée de la fonction composée :

$$E'(t) = K \cdot \left(\sqrt{N(t)}\right)' = K \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{N'(t)}{\sqrt{N(t)}}.$$

Nous savons que

$$2at + b = \frac{K \cdot N'(t)}{2\sqrt{N(t)}},$$

d'où

$$N'(t) = \frac{4at + 2b}{K} \sqrt{N(t)}.$$

Remarque 7.3.1. La formule ci-dessus est un exemple d'équation différentielle, c'est à dire une équation qui implique une fonction $N(t)$, la variable t et la dérivée $N'(t)$ de la fonction. Ici, nous avons déduit l'équation différentielle satisfaite par la fonction N des autres données du problème. L'année prochaine vous apprendrez comment résoudre une équation différentielle donnée, c'est à dire comment trouver l'expression explicite de N en fonction de t . Il s'agit du procédé analogue à celui qui nous a permis, dans les systèmes dynamiques discrets, de passer de l'équation de récurrence à la solution explicite.

Question 7.3.2. Dans l'exemple ci-dessus, sauriez-vous trouver l'expression explicite de N en fonction de t et des paramètres du problème ?

7.4 Fonctions de plusieurs variables

Une fonction réelle de **deux** variables est une fonction

$$F : D \longrightarrow \mathbb{R},$$

où $D = \text{dom}(F) \subseteq \mathbb{R}^2$, c'est à dire que les valeurs $F(x, y)$ de F dépendent de deux variables indépendantes x et y .

Exemple 7.4.1. La probabilité qu'une graine de salade germe dépend de la température et de l'humidité du terrain, selon la loi

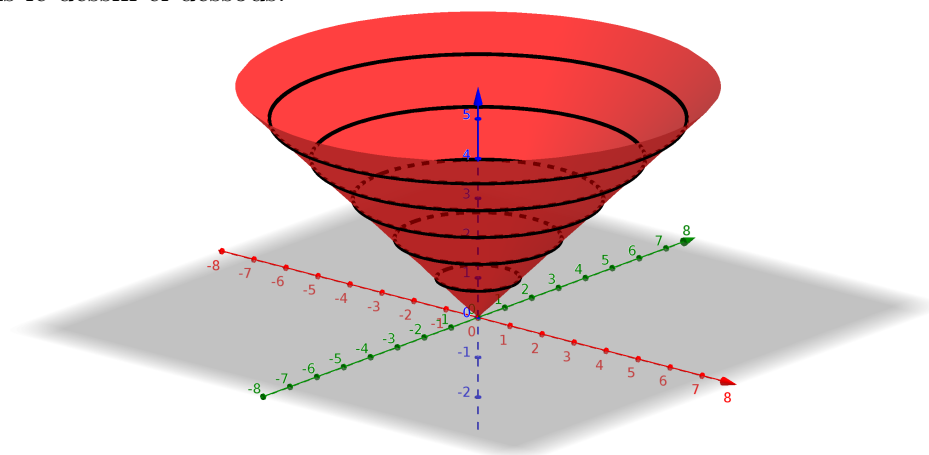
$$F(x, y) = K \frac{e^{-(x-15)^2}}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1},$$

où x mesure la température (en degrés Celsius), y mesure le pourcentage d'humidité et K est une constante positive appropriée.

La fonction F est bien définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mais pour notre problème, elle nous intéresse uniquement sur le domaine $D = [-50, 50] \times [0, 1]$.

Le **graphe** de F est l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x, y) \in \text{dom}(F)$ et $z = F(x, y)$. Donc le graphe d'une fonction de deux variables est un sous-ensemble de l'espace \mathbb{R}^3 . Il s'agit d'une *surface*.

Exemple 7.4.2. On considère la fonction $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Son graphe est le cône dans le dessin ci-dessous.

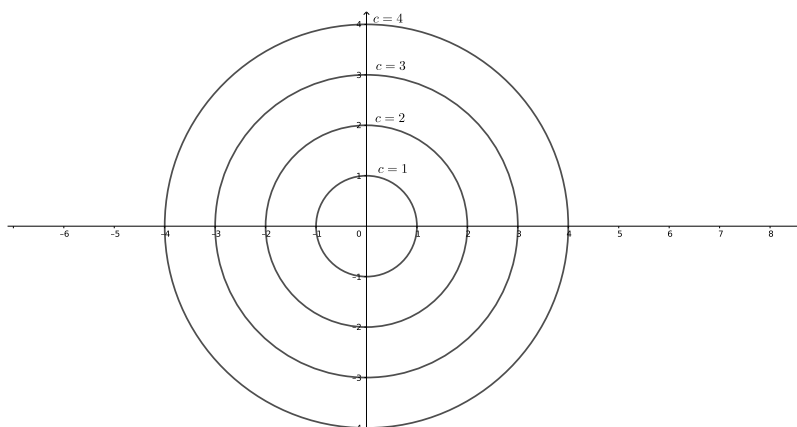


Dessiner le graphe d'une fonction de deux variables veut dire faire un dessin tri-dimensionnel, ce qui n'est pas toujours facile. Une façon de visualiser avec un dessin bi-dimensionnel le graphe d'une fonction de deux variables est celle de tracer dans le

plan des coordonnées x et y , les *courbes de niveau* de F : pour chaque $c \in \text{Im}(F)$, on peut tracer la courbe d'équation

$$F(x, y) = c,$$

c'est à dire on considère le sous-ensemble $D_c \subseteq \text{dom}(F)$ qui consiste en les points $P = (x, y)$ du domaine de F au dessus desquels F prend la valeur c . Géométriquement, cette opération correspond à intersecter le graphe de F avec le plan horizontal d'équation $z = c$, et à projeter le résultat sur le plan des coordonnées x et y .



7.4.1 Dérivées partielles

On peut étudier la variation instantanée de F comme dans le cas des fonctions d'une variable. Une façon de le faire est la suivante : nous fixons une valeur y_0 de la variable y (que l'on considère comme une paramètre) et nous étudions maintenant la fonction $F_{y_0} : x \mapsto F(x, y_0)$ comme une fonction de la seule variable x . Si la fonction F_{y_0} est dérivable, alors nous savons calculer sa dérivée première

$$(F_{y_0})'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_{y_0}(x+h) - F_{y_0}(x)}{h}.$$

Soit $(x_0, y_0) \in \text{dom}(F)$. Si la limite $(F_{y_0})'(x_0)$ existe et est finie, alors on dit que F est dérivable par rapport à x en (x_0, y_0) et on note

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = (F_{y_0})'(x_0),$$

la **dérivée partielle de F par rapport à x** en le point (x_0, y_0) . Si F est dérivable par rapport à x en tout point $(x, y) \in \text{dom}(F)$ alors on peut considérer la fonction de deux variables

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x, y).$$

De la même façon, en fixant x et en considérant la fonction d'une variable $F^x : y \mapsto F(x, y)$, on définit la dérivée partielle de F par rapport à y :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = (F^x)'(y).$$

Les dérivées partielles par rapport à une variable se calculent exactement comme d'habitude, en traitant l'autre variable comme un paramètre constant.

Exemple 7.4.3. Dans l'exemple 7.4.1 ci-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{K}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} \left(e^{-(x-15)^2}\right)' = \frac{K}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} \cdot (-2)(x - 15) \cdot e^{-(x-15)^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \left(K e^{-(x-15)^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}\right)' = \left(K e^{-(x-15)^2}\right) \cdot (-2) \cdot \frac{y - \frac{1}{2}}{\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)^2}. \end{aligned}$$

Dans l'exemple 7.4.1, quand est-ce que la probabilité de germination est maximale ? Puisque le numérateur a son maximum lorsque $x = 15$ et le dénominateur a son minimum lorsque $y = \frac{1}{2}$, la probabilité qu'une graine germe est maximale quand la température est de 15 degrés Celsius et l'humidité est de 50%. Dans ces conditions, la probabilité est :

$$F\left(15, \frac{1}{2}\right) = K \frac{e^{-(15-15)^2}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} = K \frac{e^0}{0 + 1} = K.$$

On remarque que le maximum de la fonction F est atteint en un point où les deux dérivées partielles s'annulent, en analogie avec le cas d'une variable.

Remarque 7.4.4. Le procédé décrit ci-dessus s'étend aussi aux fonctions de 3, 4, ..., n variables.

7.4.2 Dérivée d'une composée de deux fonctions

Dans l'exemple 7.4.1, supposons que la température et l'humidité du terrain varient dans le temps selon les lois

$$x = g(t)$$

$$y = h(t),$$

où t mesure le temps (en heures). Autrement dit, x et y sont maintenant elles mêmes des fonctions d'une autre variable indépendante t . Donc la probabilité qu'une graine de

salade germe à l'heure t est donnée par la fonction composée

$$P(t) = F(g(t), h(t)) = K \frac{e^{-(g(t)-15)^2}}{\left(h(t) - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}.$$

Nous souhaitons répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la vitesse de changement de la probabilité de germination à humidité constante ?
2. Quelle est la vitesse de changement de la probabilité de germination à température constante ?
3. Quelle est la vitesse de changement de la probabilité de germination, si on fait varier la température et l'humidité ?

Nous savons déjà répondre aux deux premières questions : dans le premier cas, on considère l'humidité y comme un paramètre constant. Nous devons donc calculer la dérivée de la fonction

$$P_y(t) = F(g(t), y) = K \frac{e^{-(g(t)-15)^2}}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}.$$

Nous savons faire ce calcul :

$$(P_y)'(t) = \frac{K}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} \cdot \left(e^{-(g(t)-15)^2}\right)' = \frac{K}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} \cdot (-2)(g(t) - 15) \cdot e^{-(g(t)-15)^2} \cdot g'(t).$$

On observe que ce calcul revient à faire :

$$(P_y)'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(g(t), y) \cdot g'(t).$$

De façon similaire, pour répondre à la deuxième question, nous devons donc calculer la dérivée de la fonction

$$(P^x)(t) = F(x, h(t)) = K \frac{e^{-(x-15)^2}}{\left(h(t) - \frac{1}{2}\right)^2 + 1},$$

où la température x est maintenant considérée comme un paramètre constant. Cette dérivée se calcule de la façon suivante :

$$(P^x)'(t) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, h(t)) \cdot h'(t) = \left(K e^{-(x-15)^2}\right) \cdot (-2) \cdot \frac{h(t) - \frac{1}{2}}{\left(\left(h(t) - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)^2} \cdot h'(t).$$

Pour répondre à la troisième question, il faut savoir calculer la dérivée de la fonction $P(t)$.

Voilà la formule :

$$P'(t) = (P_{h(t)})'(t) + (P^{g(t)})'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(g(t), h(t)) \cdot h'(t).$$

Dans notre exemple,

$$P'(t) = \frac{-2Ke^{-(g(t)-15)^2}}{(h(t) - \frac{1}{2})^2 + 1} \left((g(t) - 15) \cdot g'(t) + \frac{(h(t) - \frac{1}{2}) \cdot h'(t)}{(h(t) - \frac{1}{2})^2 + 1} \right).$$

En sachant que entre 11 heures et 14 heures la température du terrain augmente linéairement de 13 à 16 degrés Celsius et qu'aujourd'hui il y a une humidité de 75%, quelle est la vitesse de variation de la probabilité de germination aujourd'hui à midi ?

Nous avons les données suivantes :

$$g(11) = 13, \quad g(14) = 16$$

et

$$g(t) = at + b$$

(croissance linéaire). Donc

$$\begin{cases} 13 = a \cdot 11 + b \\ 16 = a \cdot 14 + b \end{cases},$$

d'où

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Donc

$$g(t) = t + 2$$

entre 11 heures et 14 heures, d'où :

$$g(12) = 14, \quad h(12) = \frac{3}{4}.$$

Puisque l'humidité est constante, nous savons aussi que

$$g'(12) = 1, \quad h'(12) = 0.$$

Nous pouvons donc calculer

$$P'(12) = \frac{-2Ke^{-(14-15)^2}}{(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})^2 + 1} \left((14 - 15) \cdot 1 + \frac{(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) \cdot 0}{(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})^2 + 1} \right) = \frac{2Ke^{-1}}{\frac{17}{16}}.$$

Nous remarquons qu'à midi la probabilité de germination est en train de croître (dérivée positive).

Deuxième partie

Modèles de populations (Pierre Poulain)

Chapitre 8

COURS VIII

8.1 Ordres de grandeurs et calculs simples en biologie

La biologie est une science fascinante car elle implique des phénomènes se produisant à des échelles très différentes : depuis l'étude de certains écosystèmes, dont les dimensions peuvent atteindre plusieurs centaines voire milliers de kilomètres, jusqu'à l'activité d'une protéine, dont la taille est de l'ordre de quelques nanomètres

8.1.1 Préfixes

En science, on utilise un certain nombre de préfixes qui correspondent à des puissances de 10 (tableau 8.1).

TABLE 8.1 – Quelques préfixes utilisés en science.

Préfixe	Abbréviation	Valeur
péta	G	10^{15}
téra	T	10^{12}
giga	G	10^9
méga	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
déca	da	10^1
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

Exemple 8.1.1. Le diamètre moyen d'une protéine est d'environ 4 nm (nanomètres), c'est-à-dire 4×10^{-9} m.

Exemple 8.1.2. La taille d'un génome s'exprime souvent en unité « bp » qui signifie « *base pairs* », c'est-à-dire paires de bases d'ADN. Le génome humain contient approximativement 3,2 Gbp (*giga base pairs*), c'est-à-dire $3,2 \times 10^9$ bp.

Bien sur, il existe quantité d'autres préfixes, depuis le « yotta » (10^{24}) jusqu'au « yocto » (10^{-24}).

8.1.2 Ordre de grandeurs et unités

Les caractéristiques d'un système biologique sont décrites quantitativement par une valeur numérique associée à une unité.

Voici quelques ordres de grandeurs utilisés en biologie.

Diamètre de la Terre : 12700 km ($1,27 \times 10^7$ m)

Population de la Terre en 2016 : 7,4 milliards d'habitants ($7,4 \times 10^9$ habitants)

Nombre de cellules dans le corps humain : 4×10^{23} cellules

Dimension moyenne d'une cellule humaine : 20 μm (2×10^{-5} m)

Taille du génome humain : 3,2 Gbp

Diamètre moyen d'une protéine : 4 nm (4×10^{-9} m)

Distance moyenne de la liaison chimique double carbone-oxygène (C=O) : 1,16 Å (ångströms), soit 0,116 nm ou $1,16 \times 10^{-10}$ m

Voici quelques ressources pour explorer la notion d'ordre de grandeur en biologie :

1. Le site internet *The Universe Within*¹ propose une animation très intéressante sur les différents ordres de grandeurs (Figure 8.1).
2. Le site internet *Cell size and Scale*² propose quelque chose d'équivalent mais plus axé sur la biologie.
3. La vidéo *Microorganisms Size Comparison*³ sur Youtube compare la taille de plusieurs micro-organismes.
4. Le livre *Cell Biology by the numbers*, de R. Millo, R. Philipps et N. Orme (2016, Garland Science) est une très bonne référence qui présente la quantification de nombreux phénomènes en biologie. Cet ouvrage est disponible à la bibliothèques des Grands Moulins (côte 576 MIL). Il est également consultable gratuitement sur internet⁴.

1. <http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/powersof10/index.html>

2. <https://learn.genetics.utah.edu/content/cells/scale/>

3. <https://www.youtube.com/watch?v=h0xTKxbIE1U>

4. <http://book.bionumbers.org/>

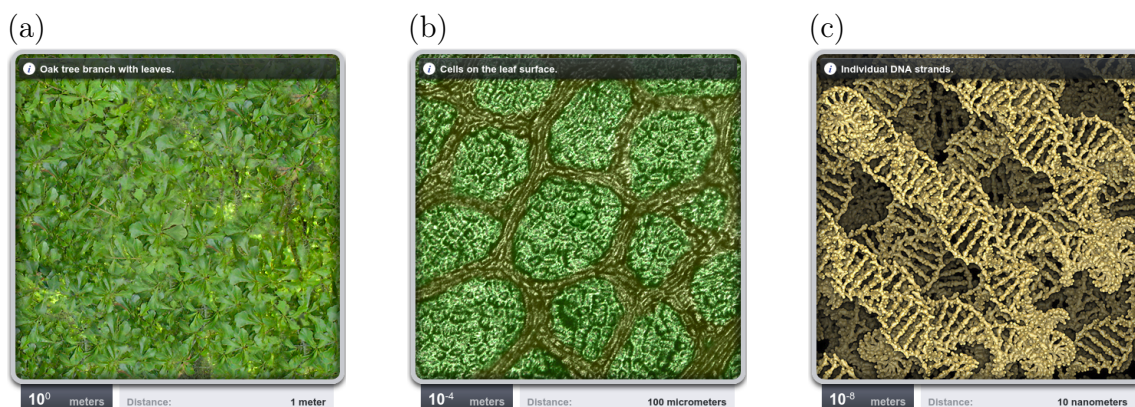


FIGURE 8.1 – Captures d’écran du site *The Universe Within* aux échelles du mètre (a), 100 μm (b) et 10 nm (c).

8.1.3 Règle de proportionnalité, règle de 3 et produit en croix

La règle de proportionnalité, la règle de 3 et le produit en croix supposent une relation de proportionnalité entre deux grandeurs A et B .

S’il existe une relation de proportionnalité entre A et B , alors pour $x_A \in A$ et $x_B \in B$, il existe une constante K tel que $x_B = K \cdot x_A$. La constante K est appelée coefficient de proportionnalité.

La règle de proportionnalité permet de dire que connaissant $y_A \in A$, on peut obtenir $y_B \in B$ tel que $y_B = K \cdot y_A$. Et puisque $K = \frac{x_B}{x_A}$ alors $y_B = \frac{x_B}{x_A} y_A$.

La règle de 3 et le produit en croix sont souvent représentés sous forme d’un tableau.

A	B
x_A	x_B
y_A	$y_B ?$

On accède à y_B « simplement » par $y_B = \frac{y_A \times x_B}{x_A}$.

Exemple 8.1.3. 5 kg de pommes coûtent 10 €, combien coûtent 7 kg de pommes ?

En représentant les données du problème sous la forme d’un tableau,

poids (kg)	prix (€)
5	10
7	?

on peut en déduire que le prix de 7 kg de pommes est $7 \times 10/5 = 14$ €

Exemple 8.1.4. Le coeur a un fonctionnement similaire à une pompe. Chez un adulte au repos, le débit cardiaque est de 70 mL par battement, c'est-à-dire qu'à chaque battement, 70 mL de sang sont pompés par le coeur. Sachant que la fréquence cardiaque moyenne est de 70 battements par minute et que la quantité totale de sang dans l'organisme est d'environ 5 L, combien de temps faut-il au coeur pour pomper tout le sang du système sanguin ?

Encore une fois, on peut représenter les données du problème dans un tableau :

battements	quantité de sang (mL)
1	70
70	?

Chaque minute, la quantité de sang propulsée par le coeur est de $70 \times 70/1 = 4900$ mL/min, soit 4,9 L/min. Ce volume est très proche du volume sanguin total (5 L). Il faut donc approximativement une minute au coeur pour pomper tout le sang présent dans l'organisme.

8.1.4 Conversion d'unités

Lorsqu'on a besoin de convertir des valeurs dans la même unité mais avec des suffixes différents, il suffit de manipuler les puissances de 10.

Exemple 8.1.5. Conversion de distances

$$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} = 10^6 \text{ mm} = 10^9 \text{ }\mu\text{m}$$

Lorsqu'on convertit des valeurs entre deux unités différentes, il faut alors prendre en compte un coefficient additif ou multiplicatif qui permet de passer de l'une à l'autre.

Exemple 8.1.6. Conversion de volumes

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ mL} = 10^{-3} \text{ L} = 10^{-3} \text{ dm}^3 = 10^{-3} \times (10 \text{ cm})^3 = 10^{-3} \times (10^3 \text{ cm}^3) = 1 \text{ cm}^3$$

Exemple 8.1.7. Conversion d'énergies

$$1 \text{ calorie (cal)} = 4,18 \text{ joules (J)}$$

Une pomme de taille moyenne apporte $85 \text{ kcal} = 8,5 \times 10^4 \text{ cal} = 8,5 \times 10^4 \times 4,18 \text{ J} \simeq 3,6 \times 10^5 \text{ J} = 3,6 \times 10^2 \text{ kJ}$.

Exemple 8.1.8. Conversion de températures

$$0 \text{ degré Celsius (}^\circ\text{C)} = 273,15 \text{ degrés Kelvin (}^\circ\text{K)}$$

$$20 \text{ }^\circ\text{C} = 20 + 273,15 = 293,15 \text{ }^\circ\text{K}$$

8.2 Modélisation mathématique en biologie

8.2.1 Notion de modèle

Un modèle est une représentation simplifiée de la réalité. Modéliser un système, c'est donc simplifier volontairement ce système pour mieux comprendre certaines de ses propriétés. Un modèle est par définition toujours imparfait et n'est utile que dans un domaine d'application limité.

Exemple 8.2.1. Un modèle moléculaire est un ensemble de billes et de tubes en plastique (voir figure 8.2). Il est très utile pour construire un modèle tridimensionnel d'une molécule chimique. Il est pertinent pour comprendre les problèmes de stéréochimie. Par contre, il n'est pas très utile pour expliquer une réaction chimique.

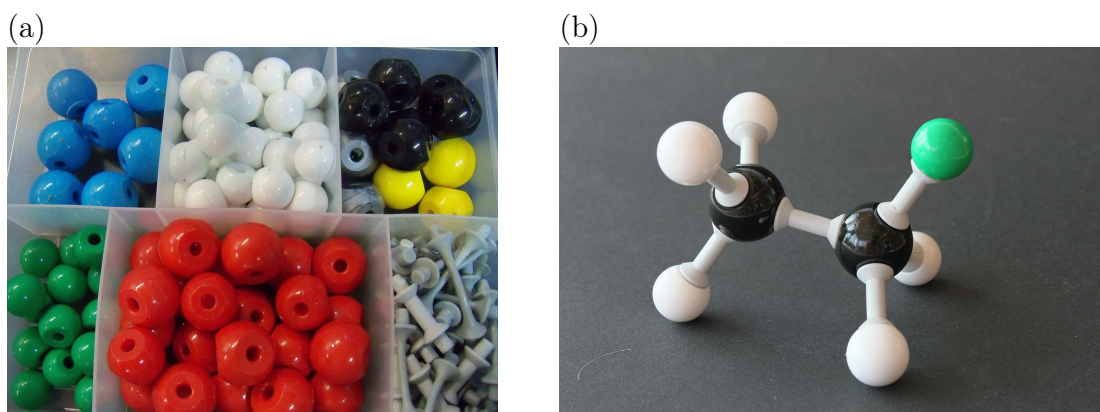


FIGURE 8.2 – (a) Kit de modèles moléculaires en plastique (source : Sonia, Wikimedia). (b) Molécule de chloroéthane (source : Bin in Garten, Wikimedia).

Exemple 8.2.2. En biologie, on peut utiliser souvent des organismes modèles pour mieux comprendre un organisme plus complexe. Par exemple, le rat et la souris sont des organismes modèles utilisés en laboratoire pour étudier, entre autre, l'hypertension chez l'homme (figure 8.3(a)). Il existe de nombreux autres organismes modèles, depuis la bactérie *Escherichia coli* (figure 8.3(b)), jusqu'au poisson zèbre (figure 8.3(c)), en passant par la drosophile, le maïs ou et le macaque rhésus.

Pour ceux qui souhaitent aller plus loin, le journal du CNRS a publié sur ce sujet un article très intéressant intitulé « Peut-on se passer des modèles animaux ? »⁵

5. <https://lejournal.cnrs.fr/articles/peut-se-passer-des-modeles-animaux>



FIGURE 8.3 – Exemples de modèles animaux. (a) Souris (source : Meditations, Pixabay). (b) Escherichia coli (source : Gerald Koli, Wikimedia). (c) Poisson zèbre (source : Brian Gratwicke, Wikimedia).

8.2.2 Utilité et limites des modèles

La modélisation mathématique en biologie, dont il est question dans ce cours, tente d'**expliquer des phénomènes biologiques avec des outils mathématiques**. Le formalisme mathématique est rigoureux, robuste et puissant. Il fournit de nombreux outils d'analyse. Le modèle est donc d'abord un outil descriptif pour comprendre un phénomène biologique mais il peut aussi devenir un outil prédictif pour prévoir l'évolution future d'un phénomène biologique.

Pour autant un modèle n'est pas la preuve d'un comportement biologique. Un modèle est supposé vrai tant qu'on n'a pas montré qu'il était faux. Il est donc important d'être toujours critique par rapport à un modèle. En effet, celui-ci peut décrire un phénomène biologique avec de petites erreurs, qui sont admissibles, ou avec de grosses erreurs, qui ne sont plus admissibles.

C'est au biologiste de savoir faire la différence entre petites et grandes erreurs, erreurs admissibles ou non, et, le cas échéant changer de modèle quand cela est nécessaire. Et pour rappel, le biologiste, c'est vous !

8.2.3 Quatre grandes étapes

On peut résumer la démarche de modélisation mathématique en biologie par quatre grandes étapes :

1. Observation et description du phénomène biologique avec un certains nombre de grandeurs physiques quantifiables comme le temps, le volume, le nombre d'individus, une quantité de produit...
2. Construction du modèle. Choix et mise en place des équations qui vont décrire le phénomène biologique.
3. Calcul des valeurs. Applications numériques.
4. Retour à la biologie :

- Est-ce que les grandeurs physiques calculées avec le modèle sont en accord avec celles mesurées dans le phénomène biologique ? Le modèle est-il bien descriptif ?
- Que nous disent les valeurs obtenues sur le comportement futur du phénomène biologique (utilisation du modèle prédictif) ?

8.2.4 Modélisation de l'évolution d'une population

8.2.4.1 Modèles discrets

Les modèles discrets sont utilisés pour modéliser l'évolution d'une population d'individus dont les périodes de reproduction sont saisonnières ou régulièrement espacées dans le temps.

Exemple 8.2.3. Les coquelicots poussent au printemps, produisent des graines en été puis meurent tous à l'automne. Les graines libérées passent l'hiver en vie ralentie, puis serviront à engendrer une nouvelle génération de coquelicots le printemps d'après.

Exemple 8.2.4. Un certains nombre d'insectes ont également des modes de développement saisonniers.

Les modèles discrets font intervenir la notion de *pas de temps* qui désigne un *temps constant et indivisible* entre le passage de l'étape d'avant à celle d'après. Ce pas de temps peut-être une génération d'individus, une année, un mois, un jour, un nombre fixe de minutes ou de secondes.

L'outil mathématique adapté pour décrire le comportement des modèles discrets est la suite.

8.2.4.2 Modèles continus

Les modèles continus sont utilisés lorsque plusieurs générations d'individus peuvent coexister en même temps ou que les périodes de reproduction des individus ne sont plus saisonnières.

Exemple 8.2.5. Les micro-organismes comme les bactéries et les levures ont un mode de croissance continue. Les êtres humains aussi.

L'outil mathématique adapté pour décrire le comportement des modèles continus est la fonction (le plus souvent continue) qui permet de connaître les effectifs d'une population à n'importe quel temps et présente l'avantage de pouvoir utiliser la notion de limite et de dérivée.

Remarque : on peut tout à fait utiliser un modèle discret pour décrire des populations d'individus dont la reproduction n'est pas saisonnière (comme les bactéries ou les êtres humains) mais en utilisant un pas de temps constant et régulier (qui peut être quelques secondes, minutes...) lié à la mesure de cette population. C'est d'ailleurs ce qui sera fait dans le prochain chapitre.

8.3 Modèles discrets de croissance

8.3.1 Choix du modèle discret

Un modèle discret de croissance dépend d'un pas de temps qui est lié au mode de reproduction de l'espèce considérée (par exemple, les saisons pour les coquelicots) ou du protocole expérimental (par exemple, la mesure d'une population d'éléphants réalisée tous les ans). Par la suite, le pas de temps sera simplement appelé « temps » et sera noté n . Ce n'est bien sûr qu'une convention et le pas de temps pourra être noté m , p , $t...$ dans d'autres contextes.

La grandeur mesurée à chaque pas de temps peut être un nombre d'individus dans une population mais aussi une masse, une taille...

Expérimentalement, on va donc avoir accès à des couples de points (temps ; grandeur mesurée). Il faut ensuite déterminer quel modèle peut décrire le mieux possible le comportement de système dynamique.

Soit G_n la grandeur mesurée au temps n , il existe principalement trois modèles pour modéliser l'évolution de G_n :

1. La suite arithmétique, d'équation de récurrence $G_{n+1} = r + G_n$ et de solution explicite $G_n = G_0 + r \times n$ avec G_0 la valeur de la grandeur au début de l'expérience et r la raison de la suite.
2. La suite géométrique, d'équation de récurrence $G_{n+1} = r \times G_n$ et de solution explicite $G_n = G_0 \times r^n$ avec G_0 la valeur de la grandeur au début de l'expérience et r la raison de la suite.
3. La suite arithmético-géométrique, d'équation de récurrence $G_{n+1} = a \times G_n + b$ et de solution explicite $G_n = a^n(G_0 - e) + e$ avec G_0 la valeur de la grandeur au début de l'expérience, a le facteur multiplicatif, b le facteur additif et $e = \frac{b}{1-a}$ la valeur d'équilibre atteinte lorsque n tend vers $+\infty$ et que $-1 < a < 1$.

On note ici les termes d'une suite par la lettre G alors qu'ils étaient préalablement notés x dans la première partie du cours. Une autre notation courante est U . La manière de noter une suite n'a pas d'importance. La notation G a été choisie ici pour souligner le fait que G est une grandeur physique mesurée.

Par ailleurs, le fait qu'on ne décrive ici que les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques ne signifie pas qu'il n'existe que 3 types de suites. Dans la première partie du cours, vous avez déjà rencontré un autre type de suite : la suite de

Fibonacci. Cette suite a d'ailleurs, à l'origine, été conçue pour modéliser la croissance d'une population de lapins.

Le choix d'un de ces modèles peut se faire de deux manières : d'après le contexte ou d'après des mesures expérimentales.

8.3.1.1 Modélisation d'après le contexte

La description du fonctionnement du système biologique peut parfois suffire à en déduire le modèle mathématique adapté.

- Si le contexte précise un apport ou une perte constante de la grandeur étudiée, alors le modèle à privilégier est la suite arithmétique.
- Si le contexte précise un gain ou une diminution proportionnelle à la grandeur étudiée (souvent exprimé en pourcentage, en fraction ou en taux), alors le modèle à privilégier est la suite géométrique.
- Enfin, si le contexte précise un gain ou une diminution proportionnelle à la grandeur étudiée **et** un apport ou un perte constant, alors le modèle à privilégier est la suite arithmético-géométrique.

8.3.1.2 Modélisation d'après des données expérimentales

La plupart du temps, on ne connaît pas suffisamment le système pour choisir simplement le modèle mathématique adéquat et déterminer ses paramètres. Des données expérimentales sont alors très utiles.

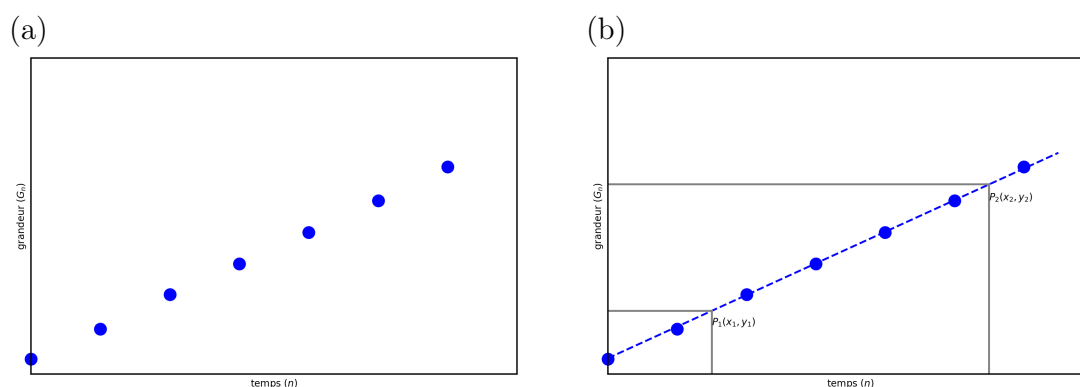
En premier lieu, il est important de développer une intuition sur le modèle qui pourrait expliquer les valeurs expérimentales mesurées. Pour cela, il est pertinent de calculer les valeurs de la différence $G_{n+1} - G_n$ et du quotient $\frac{G_{n+1}}{G_n}$. En effet, si $G_{n+1} - G_n$ semble constant, alors il s'agit probablement d'une suite arithmétique. Si $\frac{G_{n+1}}{G_n}$ semble constant, alors il s'agit probablement d'une suite géométrique.

Attention cependant, calculer ces valeurs ne fournit **qu'une indication** sur le caractère arithmétique ou géométrique du modèle et n'est, en général, pas suffisant pour déterminer avec précision les paramètres du modèle (notamment la raison de la suite).

L'étude graphique permet de déterminer le modèle et ses paramètres. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à l'évolution d'une grandeur dans trois cas de figure.

Cas 1 (ronds bleus)

Toutes les formes explicites des suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques dépendent du pas de temps n , il est donc judicieux de représenter graphiquement G_n en fonction du temps (figure 8.4).

FIGURE 8.4 – Évolution de G_n en fonction de n pour le cas 1.

Dans la figure 8.4(a), on observe une relation affine entre G_n et n de la forme $G_n = A \cdot n + B$. Cette équation est caractéristique de la solution explicite d'une **suite arithmétique**.

Un moyen simple d'obtenir les paramètres A et B de ce modèle est de tracer une droite qui passe le plus près possible des points expérimentaux (figure 8.4(b)), puis de choisir deux points P_1 et P_2 sur cette droite et de lire sur le graphique leurs coordonnées $(x_1; y_1)$ pour P_1 et $(x_2; y_2)$ pour P_2 . On obtient alors les paramètres du modèle :

- la pente : $A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- l'ordonnée à l'origine : $B = y_2 - A \cdot x_2 = y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_2$. Un résultat similaire aurait été obtenu avec le point P_1 .

Par comparaison avec la solution explicite d'une suite arithmétique, $G_n = G_0 + r \times n$, nous obtenons $G_0 = B$ et $r = A$.

Cas 2 (carrés verts)

Dans un premier temps, on représente graphiquement l'évolution de la grandeur en fonction du temps (figure 8.5(a)). L'évolution de la grandeur G_n en fonction du temps ne semble pas linéaire. Par contre, G_n évolue très rapidement avec n .

Comme G_n semble augmenter très vite, on peut s'intéresser à la variation de la grandeur G_n entre deux temps successifs ($G_{n+1} - G_n$) et comparer cette différence à la grandeur G_n elle-même, ce qui donne la représentation graphique de la figure 8.5(b).

On observe une relation linéaire entre $G_{n+1} - G_n$ et G_n de la forme $G_{n+1} - G_n = A \cdot G_n$. Ceci est caractéristique d'une **suite géométrique**. On trace alors une droite (en pointillés verts sur le graphique de la figure 8.5(c)) qui passe le plus près possible des points expérimentaux.

Pour obtenir le paramètre A , on choisit un point P sur cette droite et on lit sur le graphique ses coordonnées $(x_P; y_P)$. On obtient alors :

- la pente : $A = \frac{y_P}{x_P}$

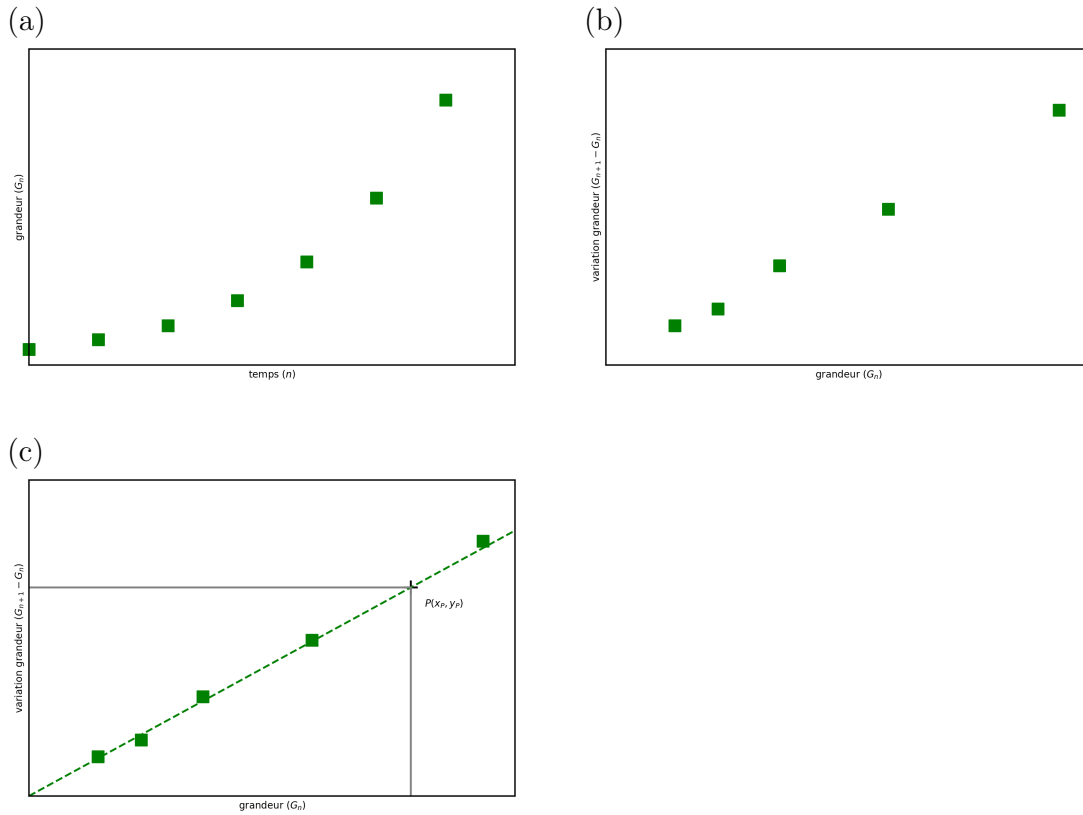


FIGURE 8.5 – Évolution de G_n en fonction de n (a), puis de $G_{n+1} - G_n$ en fonction de G_n (b) et (c) pour le cas 2.

Nous connaissons maintenant le paramètre A de l'équation $G_{n+1} - G_n = A \cdot G_n$. On en déduit que $G_{n+1} = (A + 1) \cdot G_n$. Par comparaison avec l'équation de récurrence d'une suite géométrique, $G_{n+1} = a \times G_n$, nous avons donc $a = A + 1$.

Pour obtenir la valeur G_0 , qui intervient dans la solution explicite d'une suite géométrique, $G_n = G_0 \times a^n$, on utilise les valeurs numériques d'un des points expérimentaux, de préférence un point qui se situe sur la droite verte. Par exemple, avec le k -ième point, $G_k = G_0 \times a^k$ d'où $G_0 = \frac{G_k}{a^k}$.

Cas 3 (triangles rouges)

Comme précédemment, on représente graphiquement l'évolution de la grandeur en fonction du temps (figure 8.6(a)). L'évolution de la grandeur G_n en fonction du temps ne semble pas linéaire, mais évolue assez rapidement avec le temps.

Ici encore, on peut s'intéresser à la variation de la grandeur G_n entre deux temps successifs ($G_{n+1} - G_n$) et comparer cette différence à la grandeur G_n elle-même, ce qui donne la représentation graphique de la figure 8.6(b).

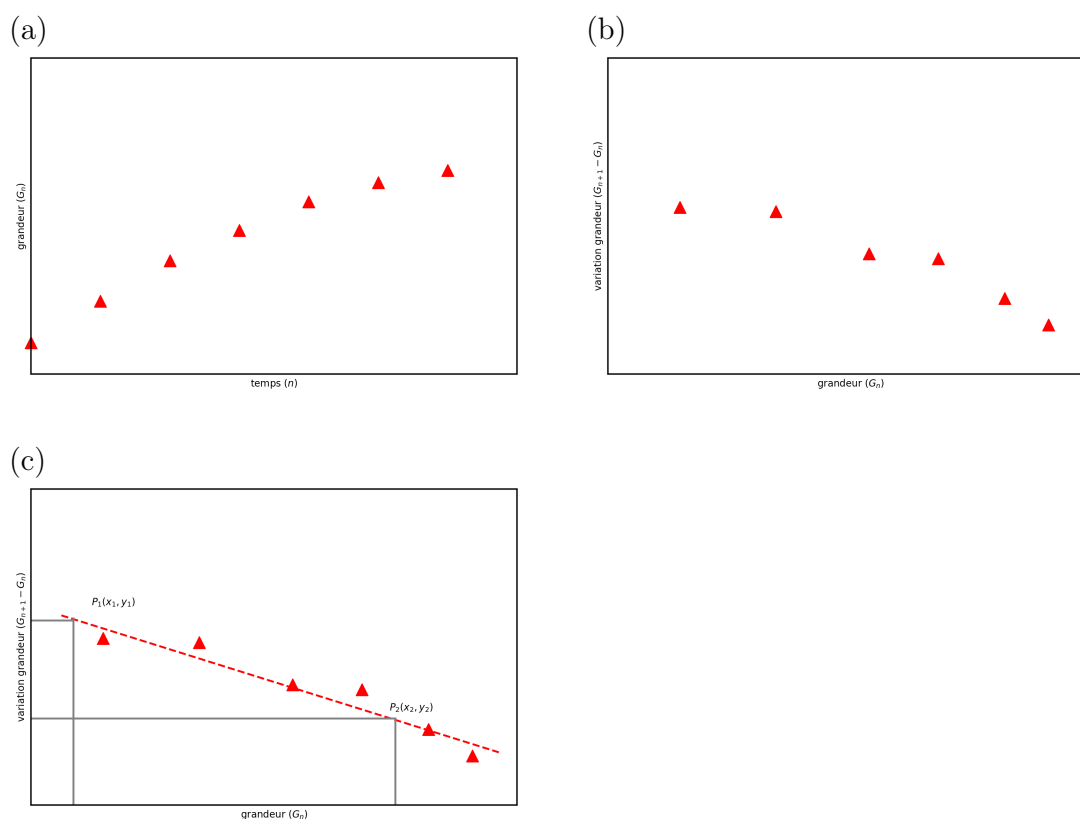


FIGURE 8.6 – Évolution de G_n en fonction de n (a), puis de $G_{n+1} - G_n$ en fonction de G_n (b) et (c) pour le cas 3.

On observe une relation affine entre $G_{n+1} - G_n$ et G_n de la forme $G_{n+1} - G_n = A \cdot G_n + B$. Ceci est caractéristique d'une **suite arithmético-géométrique**. On trace alors une droite (en pointillés rouges sur le graphique de la figure 8.6(c)) qui passe le plus près possible des points expérimentaux.

Pour obtenir les paramètres A et B , on choisit deux points P_1 et P_2 sur cette droite et on lit sur le graphique leurs coordonnées $(x_1; y_1)$ pour P_1 et $(x_2; y_2)$ pour P_2 . On obtient alors :

- la pente : $A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- l'ordonnée à l'origine : $B = y_2 - A \cdot x_2 = y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_2$. Un résultat similaire aurait été obtenu avec le point P_1 .

Nous connaissons maintenant les paramètres A et B de l'équation $G_{n+1} - G_n = A \cdot G_n + B$. On en déduit que $G_{n+1} = (A + 1) \cdot G_n + B$. Par comparaison avec l'équation de récurrence d'une suite arithmético-géométrique $G_{n+1} = a \times G_n + b$, nous avons donc $a = A + 1$ et $B = b$.

Pour obtenir la valeur G_0 , qui intervient dans la solution explicite d'une suite

arithmético-géométrique, $G_n = (G_0 - e) \times a^n + e$ avec $e = \frac{b}{1-a}$, on utilise les valeurs numériques d'un des points expérimentaux, de préférence un point qui se situe sur la droite rouge. Par exemple, avec le k -ième point, $G_k = (G_0 - e) \times a^k + e$ d'où $G_0 = \frac{G_k - e}{a^k} + e$.

8.3.2 Écart avec les points expérimentaux

Lorsqu'on trace une droite qui passe le plus près possible des points expérimentaux, on appelle souvent cette droite « droite théorique » car c'est elle qui représente le modèle mathématique qui décrit le système biologique étudié.

Le fait de tracer une droite qui passe « le plus près possible » des points expérimentaux peut ne pas sembler très rigoureux. Mais cela donne la plupart du temps de bons résultats.

Lorsqu'on observe un écart entre les points expérimentaux et la droite théorique, celui-ci peut avoir plusieurs origines :

1. Le tracé de la droite entre les points expérimentaux a été fait à la main et est donc imprécis.
2. Des erreurs liées à la mesure de la grandeur ont été faites (erreurs liées à l'opérateur qui a pris la mesure, à l'appareil ou au protocole expérimental).
3. Le comportement du système biologique ne suit pas exactement le modèle proposé. Le modèle n'est donc pas adapté.

L'écart entre la droite théorique et les points expérimentaux peut se quantifier en mesurant la somme des carrés des différences entre les points expérimentaux et les valeurs mesurées sur la droite théorique. Dans le graphique 8.7(a), cela revient concrètement à sommer les carrés de toutes les distances (traits pleins rouges) entre les points expérimentaux (croix noires) et la droite théorique (en traits pointillés rouges).

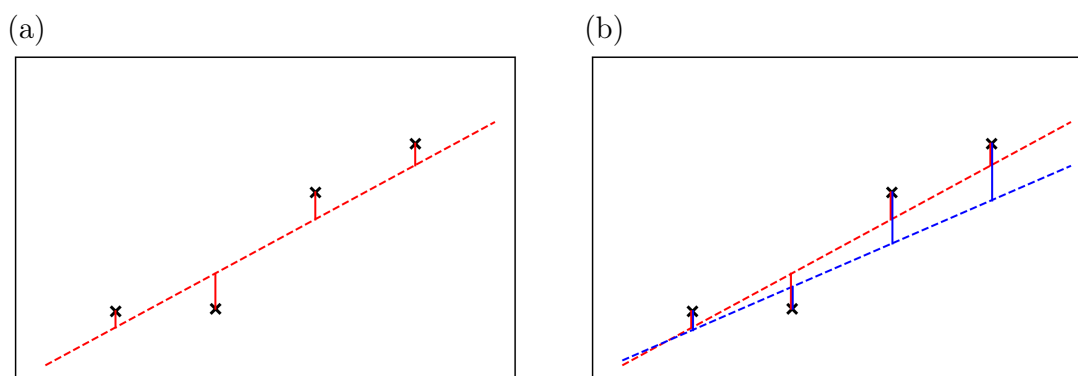


FIGURE 8.7 – Quantification de l'écart avec les points expérimentaux.

On peut aussi utiliser cette technique pour comparer deux modèles. Le meilleur modèle étant celui qui a une distance par rapport aux points expérimentaux la plus

petite.

Par exemple dans la figure 8.7(b), le meilleur modèle est le modèle rouge car il a les plus petites distances (traits pleins rouges pour le modèle rouge et traits pleins bleus pour le modèle bleu) par rapport aux points expérimentaux (croix noires).

Lorsque qu'on utilise un ordinateur pour tracer une droite entre plusieurs points, celui-ci utilise une méthode dite *des moindres carrés* pour minimiser l'erreur commise. Cette technique supprime la première raison de l'écart entre les points expérimentaux et la droite théorique mais les deux autres subsistent : erreurs liées à la mesure et/ou modèle mal adapté.

8.3.3 Interpolation / extrapolation

Une fois qu'un modèle a été choisi, il est possible de « prédire » la valeur d'une grandeur sans que celle-ci n'ait été mesurée expérimentalement.

- L'interpolation permet de prédire une valeur entre les points expérimentaux (points rouges sur la figure 8.8).
- L'extrapolation permet de prédire une valeur au delà des points expérimentaux (carrés bleus sur la figure 8.8). Plus on prédit des valeurs éloignées des points expérimentaux, plus on risque de faire une erreur importante car on ne sait pas si le modèle est encore valide.

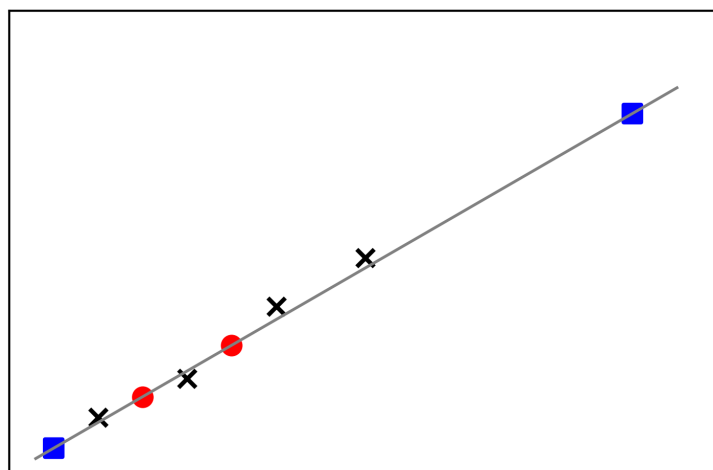


FIGURE 8.8 – Exemple d'interpolation (points rouges) et d'extrapolation (carrés bleus). Les points expérimentaux sont représentés par les croix noires. La droite théorique représentant le modèle est représentée en gris.

8.3.4 Exemple : croissance de la masse moyenne d'une population de poissons

Nous étudions l'évolution de la masse moyenne d'une population de poissons nés la même année. Chaque année, plusieurs poissons sont capturés, pesés puis relâchés. On note M_n la masse moyenne (en grammes) des poissons pour chaque année n . Les valeurs obtenues sont reportées dans le tableau 8.2.

TABLE 8.2 – Masse moyenne des poissons en fonction des années.

année n	masse moyenne $M_n(\text{g})$
0	45
1	146
2	253
3	351
4	443
5	555
6	641
7	749

Dans un premier temps, il est intéressant de calculer les valeurs $M_{n+1} - M_n$ et $\frac{M_{n+1}}{M_n}$ (tableau 8.3). Les valeurs de $\frac{M_{n+1}}{M_n}$ ne semblent pas constantes. Par contre, cela semble être le cas pour $M_{n+1} - M_n$. La masse moyenne de la population de poissons peut sans doute être modélisée par une suite arithmétique. Nous supposons que la raison de cette suite se situe entre les valeurs 86 et 108 mais il est difficile de dire quelle valeur prendre.

TABLE 8.3 – Masse moyenne des poissons en fonction des années, différences et rapports de masses entre deux années successives.

année n	masse moyenne $M_n(\text{g})$	$M_{n+1} - M_n$	$\frac{M_{n+1}}{M_n}$
0	45	101	3,24
1	146	107	1,73
2	253	98	1,39
3	351	92	1,26
4	443	112	1,25
5	555	86	1,15
6	641	108	0,75
7	749		

L'étude graphique permet d'obtenir précisément la valeur de ce paramètre. On représente d'abord l'évolution de la masse moyenne en fonction du temps, comme dans la figure 8.9(a). On observe une relation affine entre la masse moyenne M_n et le temps

n , de la forme $M_n = A \cdot n + B$. Ceci est caractéristique d'une suite arithmétique et est en accord avec nos observations sur les valeurs $M_{n+1} - M_n$. On trace alors une droite (en pointillés bleus sur figure 8.9(b)) qui passe le plus près possible des points expérimentaux.

Pour obtenir les paramètres A et B , on choisit deux points P_1 et P_2 sur cette droite et on lit sur le graphique leurs coordonnées, par exemple, $(0, 5; 95)$ pour P_1 et $(6, 5; 695)$ pour P_2 . On obtient alors :

◦ la pente : $A = \frac{695-95}{6,5-0,5} = 100$;

◦ l'ordonnée à l'origine : $B = 95 - 0,5 \times A = 95 - 0,5 \times 100 = 45$.

Nous obtenons donc le modèle d'évolution de la masse moyenne des poissons en fonction du nombre d'années :

$$M_n = 45 + 100 \times n.$$

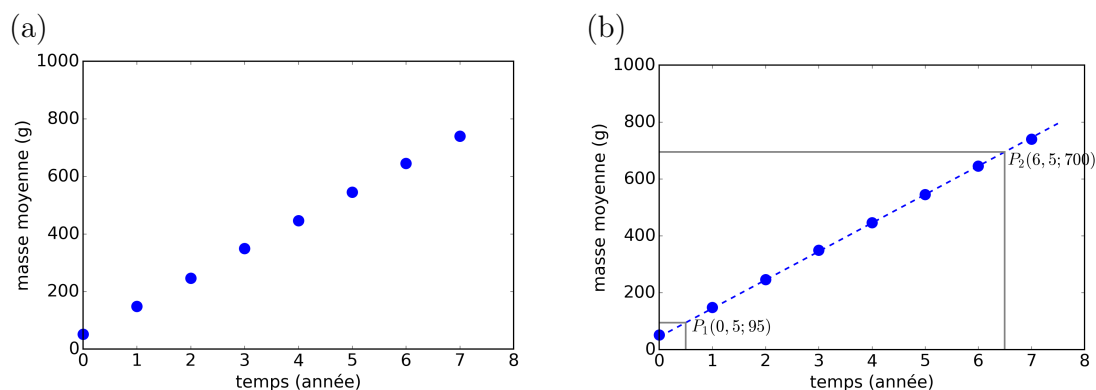


FIGURE 8.9 – Masse moyenne en fonction du temps

Nous pouvons maintenant comparer le modèle théorique avec les points expérimentaux dans le tableau 8.4, puis construire le graphique de la figure 8.10 pour comparer visuellement les valeurs expérimentales et théoriques. Graphiquement, les points bleus et les croix noires sont très proches. Le modèle explique donc bien les points expérimentaux.

8.3.5 Croissance d'une population de bactéries

8.3.5.1 Approche théorique

Dans un milieu nutritif adéquat, une bactérie se multiplie par fission binaire, c'est-à-dire qu'une bactérie *mère* va se dédoubler et engendrer deux bactéries *filles*, et ainsi de suite. Si il y a B_n bactéries à la génération n , alors il y aura $2 \times B_n$ bactéries à la génération suivante ($n + 1$). La relation entre B_n et B_{n+1} est donc :

$$B_{n+1} = 2 \times B_n$$

TABLE 8.4 – Masse moyenne des poissons en fonction des années, valeurs expérimentales et théoriques.

année n	masse moyenne M_n (g)	masse moyenne théorique (g)
0	45	45
1	146	145
2	253	245
3	351	345
4	443	445
5	555	545
6	641	645
7	749	745

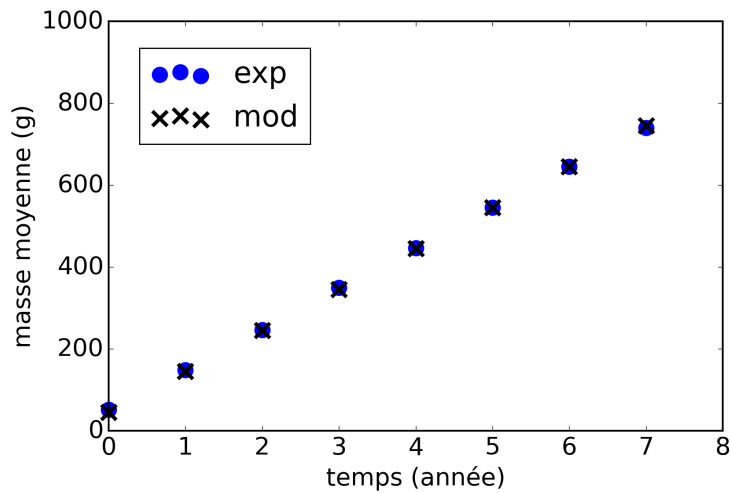


FIGURE 8.10 – Comparaison entre masse moyenne expérimentale (exp) et théorique (mod) en fonction du temps.

Cette croissance peut être modélisée par une suite géométrique de raison 2 dont la solution explicite est :

$$B_n = B_0 \times 2^n, \text{ avec } B_0 \text{ le nombre de bactéries initialement présentes dans le milieu.}$$

Pour chaque génération n , on peut calculer le nombre de bactéries, en prenant, par exemple, $B_0 = 1 \times 10^3$ bactéries on obtient les valeurs du tableau 8.5. En 10 générations, la population de bactéries a été multipliée par mille, c'est-à-dire qu'elle a augmenté de 3 ordres de grandeurs ! Une population de bactéries peut donc croître très rapidement, d'autant plus que le temps entre deux générations (temps de doublement) est court.

TABLE 8.5 – Évolution du nombre de bactéries B_n en fonction de la génération n .

génération n	nombre de bactéries B_n
0	1×10^3
1	2×10^3
2	4×10^3
3	8×10^3
4	$1,6 \times 10^4$
5	$3,2 \times 10^4$
6	$6,4 \times 10^4$
7	$1,28 \times 10^5$
8	$2,56 \times 10^5$
9	$5,12 \times 10^5$
10	$1,024 \times 10^6$

8.3.5.2 Temps de génération de quelques espèces de bactéries

Le tableau 8.6 recense le temps de génération (temps de doublement) de quelques espèces de bactéries. L'écart important entre les valeurs *in vitro* et *in vivo* s'expliquent par les conditions de développement particulièrement bonnes en milieu de culture et le fait qu'*in vivo*, les bactéries peuvent être phagocytées (par les macrophages) ou inhibées par des antibactériens (lysozyme).

TABLE 8.6 – Temps de génération de quelques espèces de bactéries.

Bactéries	<i>In vitro</i> (minutes)	<i>In vivo</i> (heures)
<i>Escherichia coli</i>	20-40	5
<i>Salmonella Typhimurium</i>	20-40	3-5
<i>Staphylococcus aureus</i>	40	3-5
<i>Vibrio cholerae</i>	20	2-5
<i>Mycobacterium tuberculosis</i>	120-140	24-48

8.3.5.3 Représentation graphique

Lorsqu'on essaie de représenter graphiquement l'évolution de cette population de bactéries, comme dans la figure 8.11, nous sommes confrontés à un problème. Nous avons l'impression que le nombre de bactéries est nul pendant les premières générations. Les valeurs numériques montrent pourtant clairement le contraire! En fait, le nombre important de bactéries obtenues pour les générations > 5 fait que le graphique est « écrasé », c'est-à-dire que l'échelle du graphique n'est pas adaptée pour représenter l'ensemble des valeurs prises par la population de bactéries.

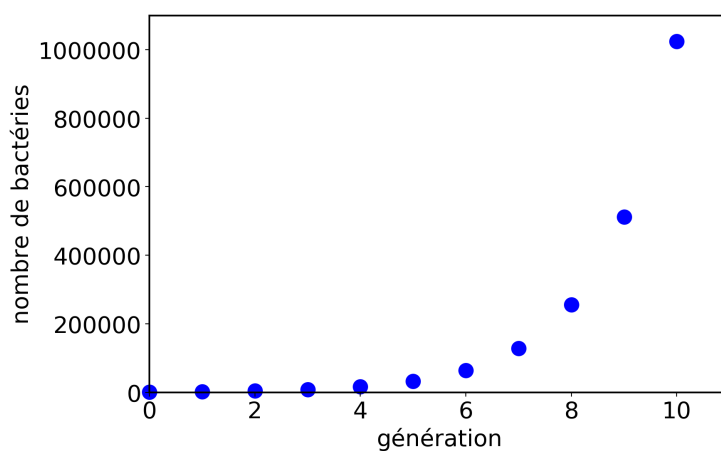


FIGURE 8.11 – Évolution du nombre de bactéries en fonction de la génération.

Une solution consisterait à augmenter la taille du graphique, notamment sur l'axe des ordonnées (nombre de bactéries). Le graphique serait encore difficilement lisible et consommerait une énorme surface de papier pour être imprimé.

Une autre solution couramment utilisée en science est de changer l'échelle de l'axe des ordonnées et de ne plus afficher le nombre de bactéries mais le \log_{10} du nombre de bactéries. On utilise alors une propriété intéressante de la fonction \log_{10} à savoir $\log_{10}(10) = 1$ et par conséquent $\log_{10}(10^2) = 2$, $\log_{10}(10^3) = 3$... Nous obtenons les valeurs du tableau 8.7 pour la population de bactéries que nous étudions.

TABLE 8.7 – Évolution du nombre de bactéries B_n en fonction de la génération n , avec $\log_{10}(B_n)$.

génération n	nombre de bactéries B_n	$\log_{10}(B_n)$
0	1×10^3	3,00
1	2×10^3	3,30
2	4×10^3	3,60
3	8×10^3	3,90
4	$1,6 \times 10^4$	4,20
5	$3,2 \times 10^4$	4,51
6	$6,4 \times 10^4$	4,81
7	$1,28 \times 10^5$	5,11
8	$2,56 \times 10^5$	5,41
9	$5,12 \times 10^5$	5,71
10	$1,024 \times 10^6$	6,01

La représentation graphique de $\log_{10}(B_n)$ en fonction de n est représentée figure 8.12. On remarque que la forme générale du graphique a changé. Nous n'avons plus une

courbe exponentielle mais une droite. Cela s'explique par les propriétés de la fonction \log :

$$B_n = B_0 \times 2^n$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} B_n = \log_{10}(B_0 \times 2^n)$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} B_n = \log_{10}(B_0) + \log_{10}(2^n)$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} B_n = \log_{10}(B_0) + n \times \log_{10}(2)$$

Graphiquement, une unité sur l'axe des ordonnées correspond à une multiplication par 10 du nombre de bactéries, soit 1 ordre de grandeur. Après 10 générations, le \log_{10} du nombre de bactéries passe de 3 à 6, soit une différence de $6 - 3 = 3$, ce qui correspond à une multiplication par $10^3 = 1000$ du nombre de bactéries, soit une augmentation de 3 ordres de grandeur.

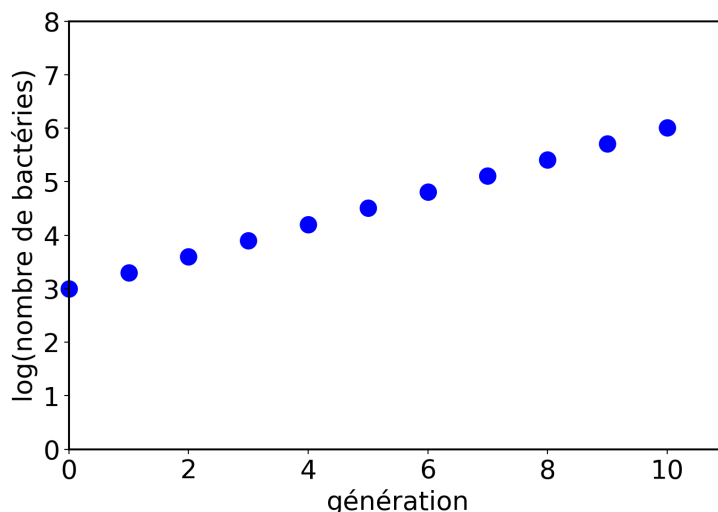


FIGURE 8.12 – Évolution de $\log_{10}(B_n)$ en fonction de n .

8.3.5.4 Méthodes de comptage expérimental de bactéries

Une méthode simple pour compter des bactéries est de placer un milieu de culture contenant des bactéries sur une lame de microscope puis de compter régulièrement le nombre de bactéries en observant la lame au microscope. On peut même utiliser un colorant pour mieux les voir. Cette technique est par contre très fastidieuse.

Une autre méthode consiste à placer un milieu de culture contenant des bactéries dans un tube puis de faire passer un faisceau de lumière à travers ce tube et de mesurer la quantité de lumière qui passe à travers ce tube. Ainsi, plus le milieu contient des bactéries, moins la lumière passera à travers le tube. Cette différence de lumière est mesurée par un spectrophotomètre (figure 8.13).

La quantité de bactéries ou « densité de bactéries » est exprimée en absorbance (A), où

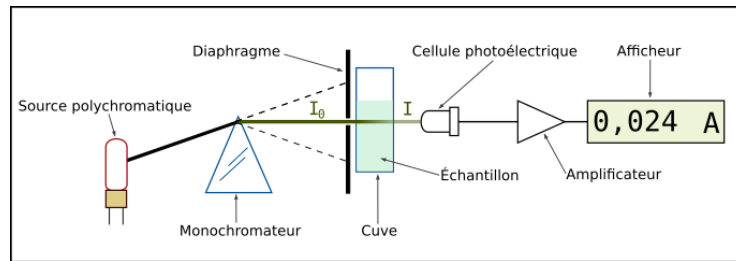


FIGURE 8.13 – Schéma d'un spectrophotomètre (source : Yassine Mrabet, Wikimedia).

$$A = -\log_{10} \frac{I_n}{I_0},$$

avec I_0 l'intensité lumineuse qui passe à travers le milieu de culture sans bactérie et I_n l'intensité lumineuse qui passe à travers le milieu de culture avec des bactéries au temps n .

D'autres techniques de comptage, automatisées et plus sophistiquées, existent comme le compteur Coulter qui détecte le passage d'une bactérie entre deux électrodes par variation de conductivité ou la cytométrie en flux qui détecte le passage d'une bactérie devant un faisceau laser.

Remarque : les bactéries ont une taille moyenne de $1 \mu\text{m}$. Elles sont à peu près 20 fois plus petites qu'une cellule humaine.

8.3.6 Exemple : évolution d'une population de bactéries

La plupart du temps, on ne connaît pas avec précision le temps de génération de l'espèce de bactéries étudiée.

Expérimentalement, on va donc mesurer la quantité de bactéries présentes dans le milieu de culture à des intervalles de temps réguliers, par exemple toutes les 16 minutes. Après la mesure initiale (à $t = 0$), la mesure au premier pas de temps ($t = 1$) se fera à 16 minutes, la mesure au deuxième pas de temps ($t = 2$) se fera à 32 minutes, la mesure au troisième pas de temps ($t = 3$) se fera à 48 minutes...

Dans le tableau 8.8 se trouve un exemple de mesures de la densité de la population de bactéries (B_n) à différents pas de temps (n). À titre indicatif, le temps réel écoulé est précisé.

8.3.6.1 Détermination du modèle et de ses paramètres

Comme première étape, il est intéressant de calculer les valeurs $B_{n+1} - B_n$ et $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ (tableau 8.9). Les valeurs de $B_{n+1} - B_n$ ne semblent pas constantes. Par contre, cela semble être le cas pour $\frac{B_{n+1}}{B_n}$. La densité de la population de bactéries peut sans doute être modélisée par une suite géométrique. Nous supposons que la raison de cette suite se situe entre les valeurs 1,57 et 1,68 mais il est difficile de dire quelle valeur exactement. L'étude graphique permet d'obtenir précisément la valeur de ce paramètre.

TABLE 8.8 – Densité d'une population de bactéries en fonction du temps.

temps réel (min)	temps n	densité B_n
0	0	0,022
16	1	0,036
32	2	0,060
48	3	0,101
64	4	0,169
70	5	0,266

TABLE 8.9 – Densité d'une population de bactéries en fonction du temps avec $B_{n+1} - B_n$ et $\frac{B_{n+1}}{B_n}$.

temps n	densité B_n	$B_{n+1} - B_n$	$\frac{B_{n+1}}{B_n}$
0	0,022	0,014	1,64
1	0,036	0,024	1,67
2	0,060	0,041	1,68
3	0,101	0,068	1,67
4	0,169	0,097	1,57
5	0,266		

Dans la figure 8.14(a), on représente graphiquement l'évolution de la densité en fonction du temps. La densité de bactéries croît très vite avec le temps. On peut alors s'intéresser à la variation de la densité ($B_{n+1} - B_n$) en fonction de la densité (B_n). En utilisant les valeurs numériques du tableau 8.9, on obtient le graphique de la figure 8.14(b).

On observe une relation linéaire entre la variation de la densité ($B_{n+1} - B_n$) et la densité (B_n), de la forme $B_{n+1} - B_n = A \cdot B_n$. Ceci est caractéristique d'une suite géométrique et est en accord avec nos observations sur les valeurs $\frac{B_{n+1}}{B_n}$. On peut déterminer graphiquement les paramètres de cette relation en traçant une droite qui passe le plus près possible des points.

On choisit un point sur la droite, par exemple le point P de coordonnées $(0,15; 0,10)$. La pente A de la droite est $A = \frac{0,10}{0,15} = \frac{2}{3}$.

On remarque que le dernier point n'est pas sur la droite alors que les points précédents sont alignés. Laissons ce point de côté pour le moment.

Nous avons la relation $B_{n+1} - B_n = A \cdot B_n$. D'où,

$$B_{n+1} = (A + 1) \times B_n = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \times B_n = \frac{5}{3} \times B_n.$$

Nous retrouvons une suite géométrique donc la solution explicite est $B_n = B_0 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n = 0,022 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

Pour terminer, nous pouvons comparer le modèle théorique avec les points expérimentaux (tableau 8.10) et représenter graphiquement cette comparaison dans la figure

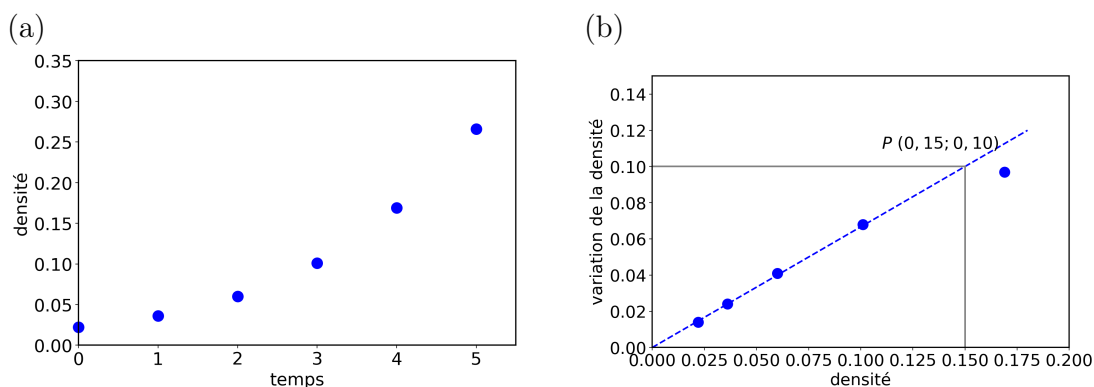


FIGURE 8.14 – (a) Évolution de la densité en fonction du temps. (b) Évolution de la variation de la densité en fonction de la densité.

8.15. Le modèle explique très bien les points expérimentaux sur les premiers temps. Graphiquement, les points bleus et les croix noires sont superposés.

Pour le dernier point en revanche, on note un écart entre le modèle et la valeur expérimentale. Cet écart sera discuté en détail lors du prochain chapitre mais vous pouvez déjà réfléchir à des explications possibles.

TABLE 8.10 – Comparaison modèle théorique et données expérimentales.

temps n	densité B_n	densité théorique
0	0,022	0,022
1	0,036	0,037
2	0,060	0,061
3	0,101	0,102
4	0,169	0,170
5	0,266	0,283

8.3.6.2 Détermination du temps de doublement

Une question intéressante pour ce type de croissance est de déterminer le temps de doublement. C'est-à-dire qu'on cherche à connaître en combien de temps la population initiale a doublé.

Pour répondre à cette question, on cherche alors la valeur du temps n pour laquelle $B_n = 2 \times B_0$.

Cela revient à écrire :

$$2 \times B_0 = B_0 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

$$\iff 2 = \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

$$\iff n = \log_{\frac{5}{3}} 2$$

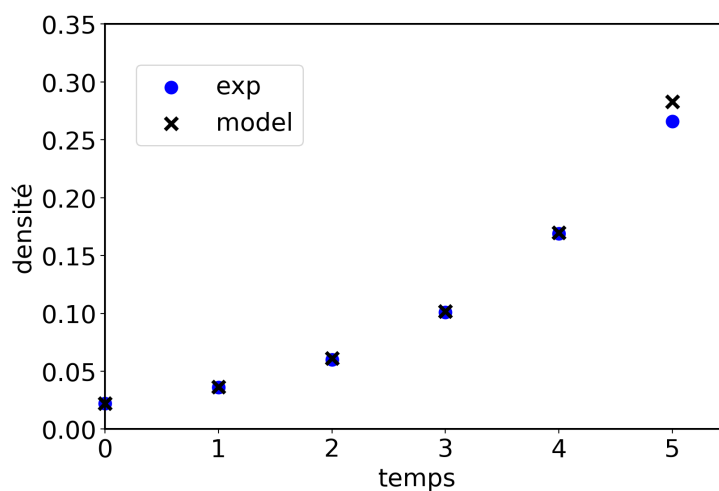


FIGURE 8.15 – Densité de la population de bactéries en fonction du temps, données expérimentales (exp) et modèle théorique (model).

$$\Leftrightarrow n \simeq 1,4$$

Pour répondre complètement à la question posée, n doit respecter deux conditions :

1. n doit être un nombre entier car c'est un pas de temps.
2. Au temps n , le double de la population initiale doit être atteint (à minima).

Par conséquent, on prend l'entier immédiatement supérieur $\lceil n \rceil = 2$.

On peut également vérifier ce résultat graphiquement sur la figure 8.16, en cherchant le temps pour lequel la densité de population vaut au moins $2 \times B_0$ soit 0,044. Cette valeur est représentée par la droite horizontale (en trait plein) sur la figure 8.16. L'intersection de cette droite avec la courbe expérimentale puis la projection de cette intersection (droite verticale en trait pointillé) sur l'axe des abscisses donne une valeur comprise entre 1 et 2, ce qui est cohérent avec le calcul précédent.

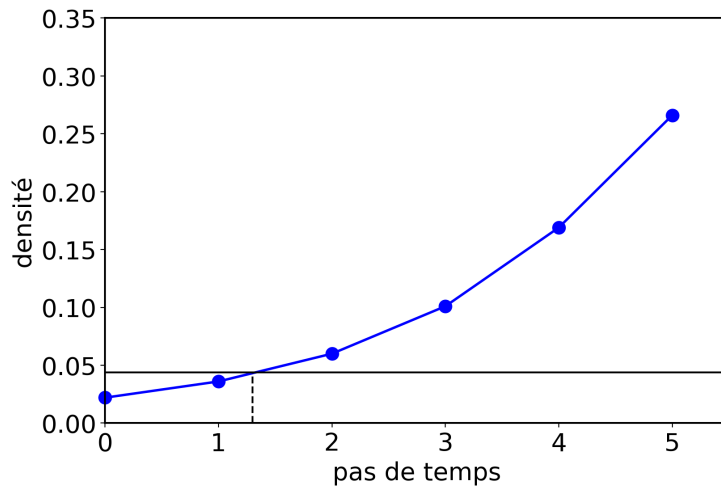


FIGURE 8.16 – Méthode graphique pour déterminer le temps de doublement.

Enfin, une fois qu'on a déterminé n , on peut revenir au temps réel, $n = 2$ correspond à 32 minutes. Au bout de 32 minutes, le nombre de bactéries a donc doublé.

8.4 Ressources

Ordres de grandeurs

- Le site internet *The Universe Within* propose une animation très intéressante sur les différents ordres de grandeurs.
<http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/powersof10/index.html>
- Le site internet *Cell size and Scale* propose quelque chose d'équivalent mais plus axé sur la biologie.
<https://learn.genetics.utah.edu/content/cells/scale/>
- La vidéo *Microorganisms Size Comparison* sur Youtube compare la taille de plusieurs micro-organismes.
<https://www.youtube.com/watch?v=h0xTKxbIE1U>
- Le livre *Cell Biology by the numbers*, de R. Millo, R. Philipps et N. Orme (2016, Garland Science) est une très bonne référence qui présente la quantification de nombreux phénomènes en biologie. Cet ouvrage est disponible à la bibliothèques des Grands Moulins (côte 576 MIL). Il est également consultable gratuitement sur internet.
<http://book.bionumbers.org/>

Modèles animaux

- « Peut-on se passer des modèles animaux ? », Journal du CNRS, 26/10/2017.
<https://lejournald.cnrs.fr/articles/peut-se-passer-des-modeles-animaux>
- « La surprenante entrée des poissons dans le challenge de l'épilepsie », blog CBio-Num, 12/03/2018.
<http://bionum.univ-paris-diderot.fr/2018/03/12/la-surprenante-entree-des-poissons>
Remarque : CBioNum est un blog alimenté par les étudiants de l'UFR Sciences du Vivant à l'Université Paris Diderot. Modèles animaux

Évolution « rapide » des bactéries

- « Cette guerre microbiologique que nous sommes en train de perdre », Léo Grasset / DirtyBiology, Youtube, 29/04/2019.
<https://www.youtube.com/watch?v=LIDBmyT3YfA>

Chapitre 9

COURS IX

9.1 Modèles continus d'évolution d'une population isolée

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'évolution continue d'une population en fonction du temps, c'est-à-dire que nous n'allons plus utiliser des pas de temps entiers et réguliers comme dans le cas de la modélisation par des suites. L'énorme avantage des modèles continus est que nous pouvons connaître la valeur d'une grandeur f en fonction du temps t , sans que t ne corresponde à un pas de temps entier et surtout sans connaître a priori la valeur de f à un temps antérieur. Nous pouvons ainsi connaître la valeur de $f(t + \Delta t)$ quelque soit la valeur de Δt .

9.1.1 Modèle de Malthus

Le modèle de l'économiste britannique Thomas Malthus (1798) est basé sur l'hypothèse que la production de nouveaux individus est proportionnelle au nombre d'individus présents.

Tout d'abord, pendant un intervalle de temps Δt , on considère que la variation ΔN de la population est donnée par la différence entre les naissances et les décès :

$$\Delta N = (B - D)\Delta t$$

avec B le nombre de naissances par unité de temps et D le nombre de décès par unité de temps.

Comme Malthus l'a fait, on peut ensuite raisonnablement supposer que les naissances et les décès sont proportionnels à l'effectif de la population. Autrement dit, plus l'effectif est important, plus il y aura de naissances et de décès (et inversement). On a alors :

$$B = b \times N$$

$$D = d \times N$$

avec b le taux de natalité et d le taux de mortalité.

Si nous revenons à la première relation,

$\Delta N = (b - d)N\Delta t$, ce qui donne,

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = (b - d)N$$

Si on fait tendre Δt vers 0, alors :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{dN}{dt} = N'(t) = (b - d)N(t)$$

et nous obtenons finalement :

$$N'(t) = rN(t) \tag{9.1}$$

Avec, $r = b - d$, le taux apparent d'accroissement de la population, c'est-à-dire de combien d'individus la population augmente quand on prend en compte les naissances et les décès. Dans la suite, r sera appelé **taux de croissance intrinsèque**.

Ici, $N'(t)$ correspond au taux de variation de la population.

Remarque 1

Dans le précédent chapitre sur les modèles discrets de croissance, nous manipulons des suites et nous comparions souvent $G_{n+1} - G_n$ à G_n . Cela correspond ici à ΔN et N .

Remarque 2

Outre les naissances et les décès, il faudrait en toute rigueur prendre en compte la migration qui peut modifier l'effectif de la population, positivement ou négativement. Dans ce chapitre, on considèrera le cas d'une population isolée, c'est-à-dire sans flux migratoire.

9.1.1.1 Évolution exponentielle

L'équation précédente fait intervenir une fonction ($N(t)$) et sa dérivée ($N'(t)$). C'est une équation différentielle du premier ordre dont la solution est de la forme¹ :

$$N(t) = N_0 \times e^{rt} \tag{9.2}$$

avec N_0 l'effectif initial de la population à $t = 0$.

Trois évolutions de la population sont alors possibles :

1. Pour $r = 0$, $N(t) = N_0 \times e^{0 \times t} = N_0$. Quelque soit t , l'effectif de la population reste constant et vaut N_0 .
2. Pour $r < 0$, l'effectif de la population décroît exponentiellement vers 0. La population va disparaître à terme.

1. Vous avez pu aborder la résolution de ce type d'équation en Terminale S, si ce n'est pas le cas, vous le verrez en 2e année.

3. Pour $r > 0$, l'effectif de la population croît exponentiellement vers l'infini. C'est ce qu'on appelle une *croissance exponentielle*. Dans ce cas, la population va exercer une pression démographique importante sur le milieu, c'est-à-dire que de plus en plus d'individus vont consommer de plus en plus de ressources trouvées dans le milieu.

Malthus a également fait remarquer que puisque les ressources d'un milieu suivent en général une croissance linéaire, la croissance exponentielle d'une population (cas où $r > 0$) n'est pas viable à terme.

Cette idée a donné lieu au malthusianisme qui est la politique visant le contrôle et la limite démographique d'une population. La politique de « l'enfant unique », mise en oeuvre en Chine de 1979 à 2015, peut être considérée comme un exemple de malthusianisme.

9.1.1.2 Décroissance exponentielle : la radioactivité

Le modèle de décroissance exponentielle (équation 9.2 avec $r < 0$) est utilisé pour modéliser le phénomène de décroissance radioactive. La désintégration des noyaux radioactifs ($N(t)$) en fonction du temps t suit en effet une loi du type :

$$N(t) = N_0 \times e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec N_0 le nombre initial de noyaux radioactifs et τ une constante de temps positive caractéristique de l'isotope.

Exemple avec le carbone 14 (^{14}C) Le ^{14}C est un isotope radioactif du carbone, dont l'isotope stable le plus connu est le ^{12}C . Le ^{14}C étant radioactif, il est instable, c'est-à-dire qu'il va progressivement se désintégrer en ^{14}N avec l'émission d'une particule bêta. Pour le ^{14}C , la constante τ vaut 8281 années. L'allure de la courbe de décroissance radioactive du ^{14}C est représentée figure 9.1.

Temps de demi-vie Le temps de demi-vie est le temps pour lequel la moitié des noyaux radioactifs initiaux ont été désintégrés. Le temps de demi-vie est noté T . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{2} &= N_0 e^{-\frac{T}{\tau}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= e^{-\frac{T}{\tau}} \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{T}{\tau} \\ \Leftrightarrow \ln(2) &= \frac{T}{\tau} \end{aligned}$$

Dans le cas du ^{14}C , le temps de demi-vie vaut $T = \ln(2) \times \tau = \ln(2) \times 8281 \simeq 5740$ années.

La valeur du temps de demi-vie peut également se déterminer graphiquement en lisant la valeur en abscisse de t correspondant à une quantité de noyaux $N(t) = \frac{N_0}{2}$ (figure 9.2).

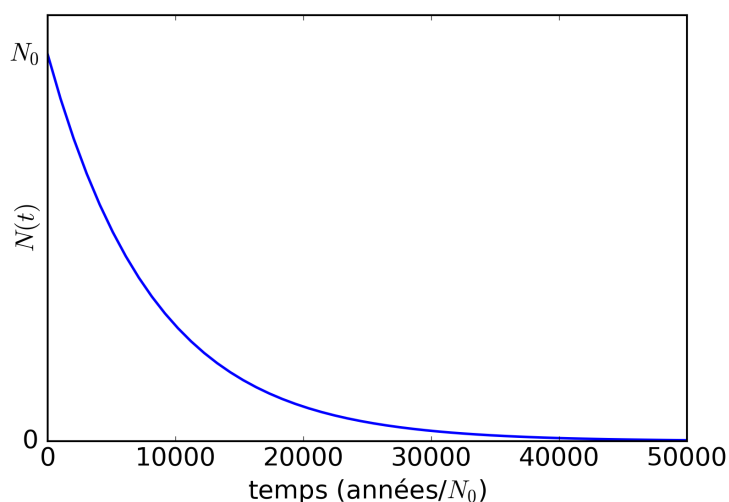


FIGURE 9.1 – Courbe de décroissance radioactive du ^{14}C . Le temps est normalisé, c'est-à-dire qu'il est divisé par la quantité initiale (N_0) de noyaux de ^{14}C .

9.1.1.3 Croissance exponentielle de population

Exemple : croissance d'une population de bactéries Nous reprenons ici l'exemple de la croissance d'une population de bactéries, vue précédemment sous l'angle d'un modèle discret de suite géométrique. Cette fois, la densité de bactéries en fonction du temps t de l'expérience est notée $B(t)$. Les différentes valeurs mesurées expérimentalement sont listées dans le tableau 9.1.

TABLE 9.1 – Mesures de la densité d'une population de bactéries à différents temps.

temps t (min)	densité $B(t)$
0	0,022
16	0,036
32	0,060
48	0,101
64	0,169
80	0,266

On peut représenter la densité de bactéries en fonction du temps, comme dans la figure 9.3(a). On observe que la densité de bactéries croît « très vite » avec le temps, ce qui laisse supposer qu'on pourrait modéliser la relation entre $B(t)$ et t par une fonction exponentielle du type $B(t) = ke^{rt}$, avec k et r les paramètres du modèle.

Pour vérifier cette hypothèse de croissance exponentielle, on trace $\ln(B(t))$ en fonction du temps t (figure 9.3(b)). On remarque alors qu'il existe une relation affine entre $\ln(B(t))$ et t , ce qui confirme la forme générale de notre modèle et permet d'obtenir ses

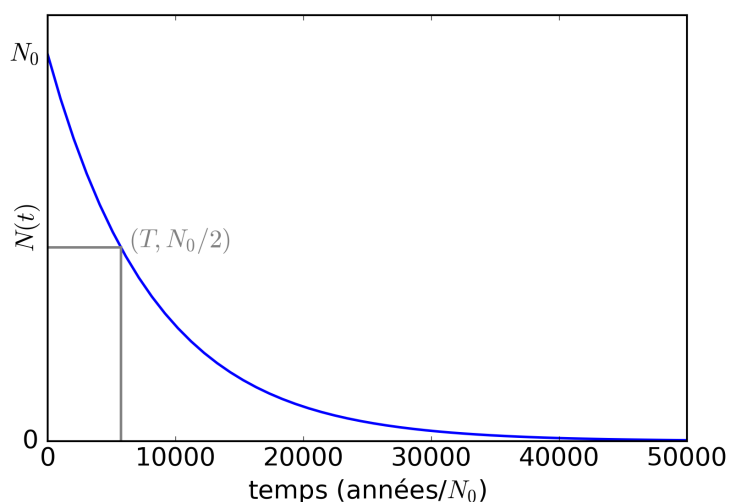


FIGURE 9.2 – Courbe de décroissance radioactive du ^{14}C . Le temps de demie-vie est obtenue pour $N(T) = \frac{N_0}{2}$.

paramètres. Pour cela, on trace une droite qui passe le près possible des points.

En prenant deux points sur la droite, on peut déterminer la pente de cette droite ($r = 0,032$) et son ordonnée à l'origine ($\ln(k) = \ln(B(0)) = \ln(0,022)$). Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \ln(B(t)) &= \ln(k) + r \times t \\ \Leftrightarrow \ln(B(t)) &= \ln(B(0)) + 0,032 \times t \\ \text{d'où,} \\ B(t) &= B(0)e^{0,032t}. \end{aligned}$$

Pour terminer, on peut comparer les points expérimentaux et le modèle (figure 9.4).

On observe une très bonne corrélation entre les points expérimentaux et le modèle. Seul le dernier point ne semble pas correspondre, indiquant que le modèle n'est plus adapté pour cette valeur de temps. Nous verrons pourquoi un peu plus loin.

Catastrophe malthusienne Une catastrophe malthusienne s'observe dans le cas d'une croissance exponentielle. La pression démographique est tellement forte que les ressources du milieu vont s'épuiser et conduire à un effondrement voire à une extinction de la population.

Exemple 9.1.1. Exemple chez l'animal

En 1944, 29 rennes ont été introduits sur l'île Saint-Mathieu en mer de Béring. En l'absence de prédateur, et en présence de ressources alimentaires abondantes, la population a augmenté très rapidement, atteignant 6000 individus dans l'été 1963, soit

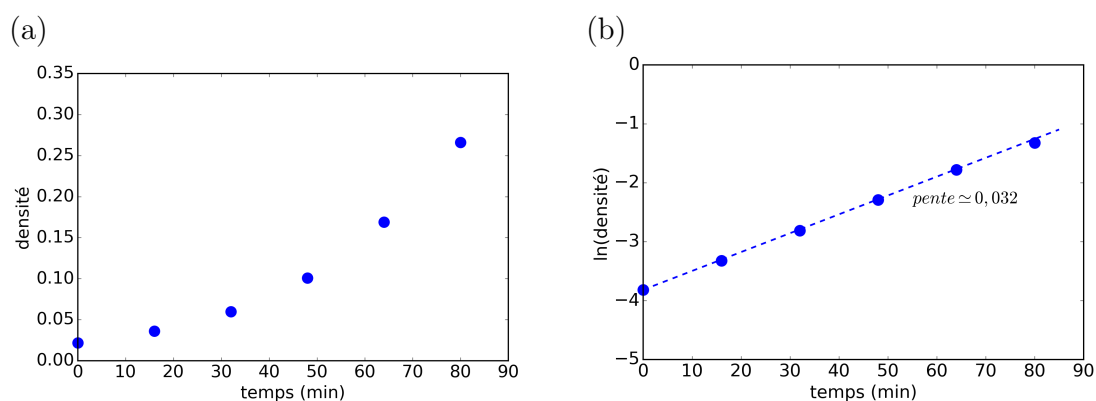


FIGURE 9.3 – Évolution en fonction du temps de (a) la densité de la population de bactéries, (b) le logarithme népérien de la densité.

une croissance de 30 % par an. Six mois plus tard, toute la population exceptées 42 femelles était morte de faim et la végétation gravement et durablement dégradée.²

Exemple 9.1.2. Exemple chez l'homme

L'île de Pâques est une des îles les plus isolées au monde, située au sud-est de l'océan Pacifique. Elle a été colonisée par des indonésiens qui ont traversé l'océan Pacifique en pirogue pour venir y vivre. Une hypothèse pour expliquer la quasi-disparition de sa population lorsque les occidentaux ont découvert l'île en 1722 est aussi une catastrophe malthusienne. La population de l'île a semble-t-il augmenté régulièrement alors que les ressources naturelles ont été sur-exploitées, notamment les arbres qui ont été abattus en masse et utilisés pour la construction et le déplacement des fameuses statues.³

Une catastrophe écologique : l'introduction des lapins en Australie En 1857, un britannique ayant immigré en Australie apporte avec lui quelques couples de lapins qui s'échappent. Sans prédateur, ces lapins s'adaptent très vite à leur nouvel environnement. En 1950, on estimait à 50 millions le nombre de lapins en Australie. Dévorant une grosse partie de la végétation, ils participent à la désertification et fragilisent tout l'écosystème écologique, menaçant des espèces locales comme les wallabies.

Pour lutter contre cette invasion, des renards puis des chats, prédateurs naturels des lapins ont été introduits massivement en Australie. Ce fut un désastre, car ces prédateurs s'attaquèrent aux espèces locales, comme les marsupiaux, déjà gravement menacées.

Dans les années 1950, le virus de la myxomatose fut introduit en Australie. Ce virus mortel vise spécifiquement les lapins. Il fut très efficace dans un premier temps, puisqu'il

2. https://fr.wikipedia.org/wiki/Catastrophe_malthusienne

3. https://fr.wikipedia.org/wiki/Catastrophe_malthusienne

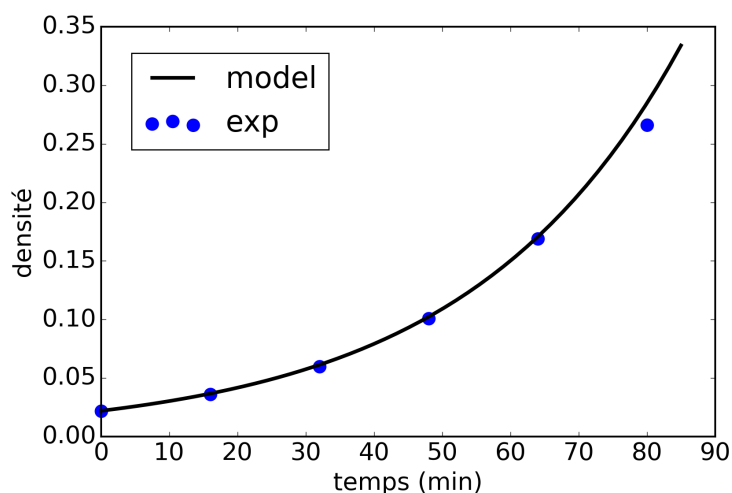


FIGURE 9.4 – Évolution de la densité de la population de bactéries en fonction du temps. Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques produites par le modèle de croissance exponentielle.

décima 80% de la population de lapins. Pourtant, certains lapins devinrent résistants à ce virus. Aujourd’hui, celui-ci n’a plus aucun effet.

En 1995, un virus de la fièvre hémorragique a été également introduit en Australie, mais son efficacité est aujourd’hui limitée.

9.1.2 Modèle de Verhulst

Presque quarante ans après Malthus, le mathématicien belge Pierre-François Verhulst proposa en 1836 un modèle qui corrige le défaut majeur du modèle de Malthus lorsque $r > 0$, à savoir la croissance infinie de la population alors que le milieu dans lequel se développe cette population est, lui, fini et limité en ressources.

Verhulst introduit un paramètre K , appelé *charge utile du système* ou *capacité de charge* ou bien encore *capacité biotique*. Ce paramètre prend en compte la capacité du milieu à fournir de la nourriture. L’équation différentielle 9.1 devient alors :

$$N'(t) = rN(t) \times \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \quad (9.3)$$

On retrouve l’équation de Malthus lorsque K tend vers l’infini, c’est-à-dire lorsque le milieu peut fournir des ressources illimitées et donc que la population peut croître indéfiniment, comme dans le cas de la croissance exponentielle.

Cette équation différentielle admet plusieurs solutions à une constante près. Une solution est :

$$N(t) = N_0 \frac{K \times e^{rt}}{K + N_0 \times (e^{rt} - 1)} \quad (9.4)$$

Ici r est toujours le taux de croissance intrinsèque de la population, N_0 la population initiale et K la capacité biotique du milieu.

En multipliant par e^{-rt} , puis en simplifiant par N_0 , on obtient une autre forme, parfois plus facile à manipuler :

$$N(t) = N_0 \frac{K \times e^{rt}}{K + N_0 \times (e^{rt} - 1)} \times \frac{e^{-rt}}{e^{-rt}} = \frac{N_0 K}{K e^{-rt} + N_0 (1 - e^{-rt})} = \frac{K}{\frac{K}{N_0} e^{-rt} + 1 - e^{-rt}},$$

ce qui conduit à,

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt} + 1}. \quad (9.5)$$

9.1.2.1 Équation logistique

En 1845, lorsque Verhulst discute de son modèle, il indique « nous donnerons le terme de logistique à cette courbe », mais sans qu'il n'explique pourquoi. Ce terme a perduré, et aujourd'hui, l'équation du modèle de Verhulst s'appelle aussi « équation logistique ».

Cette équation particulière a déjà été vue dans les premiers chapitres, sous la forme : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

Le graphe de $N(t)$ en fonction de t est représenté figure 9.5.

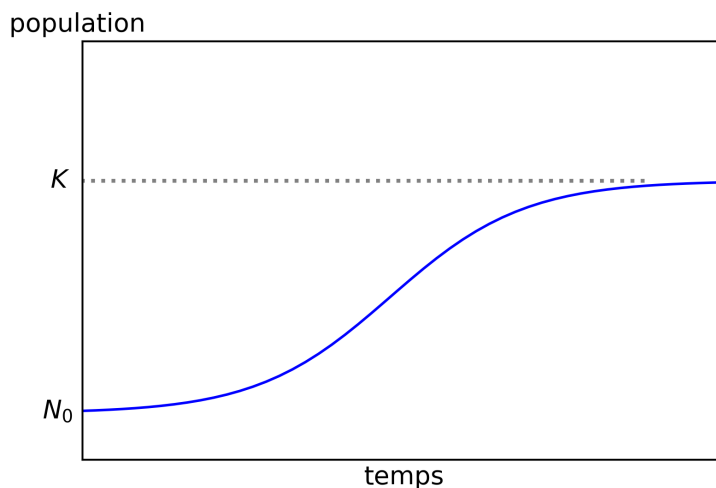


FIGURE 9.5 – Graphe de l'équation logistique.

La courbe représentative de $N(t)$ admet une asymptote horizontale N_0 quand $t \rightarrow 0$ et une autre asymptote horizontale K quand $t \rightarrow +\infty$.

Remarque

La fonction logistique est aussi connue sous le nom de fonction sigmoïde de part sa forme caractéristique en S. Ce type de fonction est très utilisé dans les algorithmes d'apprentissage automatisé qu'on appelle « réseau de neurones ».

9.1.2.2 Rôle de la capacité biotique (K) : exemple d'une population de lapins

Pour mieux comprendre le rôle de la capacité biotique dans l'évolution d'une population, considérons une population de N lapins, constituée initialement de 2 lapins ($N_0 = 2$), avec un taux de croissance intrinsèque de 1 ($r = 1$) et une capacité biotique de 10 lapins ($K = 10$).

L'évolution de la population de lapins à un temps t (dans une unité de temps arbitraire) est décrite par :

$$N'(t) = rN(t) \times \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Pour calculer l'évolution de cette population à différents temps successifs, nous allons faire l'approximation que $N'(t) \simeq \frac{\Delta N(t)}{\Delta t}$ où $\Delta N(t)$ est la différence de population entre deux temps successifs ($t+1$ et t) et Δt est la différence de temps correspondantes (entre $t+1$ et t). Les valeurs de $N(t)$ en fonction de t pour différents temps sont listées dans le tableau 9.2.

$$\text{Nous avons donc } N'(t) \simeq \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{N(t+1) - N(t)}{(t+1) - t} = N(t+1) - N(t),$$

$$\Leftrightarrow N'(t) \simeq N(t+1) - N(t),$$

$$\Leftrightarrow N(t+1) \simeq N'(t) + N(t).$$

La relation $N'(t) = rN(t) \times \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$ permet de calculer, pour un temps t donné, tous les éléments d'une ligne du tableau 9.2.

La relation $N(t+1) \simeq N'(t) + N(t)$, permet de passer à la ligne suivante.

TABLE 9.2 – Effectifs d'une population de lapins $N(t)$ et ses valeurs intermédiaires en fonction du temps.

temps t	r	$N(t)$	$1 - \frac{N(t)}{K}$	$N'(t)$
0	1	2	0,8	1,6
1	1	3,6	0,64	2,3
2	1	5,9	0,41	2,4
3	1	8,3	0,17	1,4
4	1	9,7	0,03	0,29
5	1	9,99	0,001	0,009

On remarque que plus la population augmente et s'approche de la capacité biotique K , plus le facteur $1 - \frac{N(t)}{K}$ s'approche, lui, de 0, limitant alors la croissance $N'(t)$ de la population.

9.1.2.3 Effet de la population initiale

La figure 9.6 représente plusieurs scénarios pour lesquels on fait varier la population initiale (N_0) pour une même capacité biotique K . Les courbes rouges correspondent aux scénarios pour lesquels $N_0 > K$ et les courbes bleues à $N_0 < K$. Quelle que soit la valeur de la population initiale, la population tend vers K .

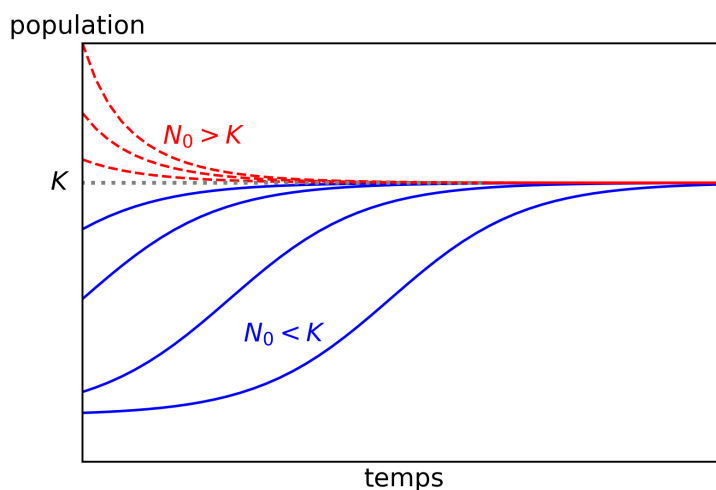


FIGURE 9.6 – Évolution de la population en fonction du temps pour différentes valeurs de N_0 .

9.1.2.4 Détermination et stabilité des points d'équilibre

Les points d'équilibre de l'équation différentielle 9.3 qui définit le modèle de Verhulst sont les valeurs de $N(t)$ pour lesquelles $N'(t) = 0$. $N'(t)$ s'annule en deux points d'équilibre, pour $N(t) = 0$ et $N(t) = K$.

Pour étudier la stabilité de ces points d'équilibre, nous allons tracer $N'(t)$ en fonction de $N(t)$ (graphique 9.7).

Étude au voisinage de 0

Au voisinage à gauche de $N(t) = 0$, $N'(t) < 0$ donc $N(t)$ est décroissante et s'éloigne de 0.

Au voisinage à droite de $N(t) = 0$, $N'(t) > 0$ donc $N(t)$ est croissante et s'éloigne de 0.

Par conséquent, le point d'équilibre $N(t) = 0$ est **instable**. Une population inférieure à 0 n'a pas de sens. Si la population est supérieure à 0, alors elle va augmenter jusqu'à atteindre la population d'équilibre K .

Étude au voisinage de K

Au voisinage à gauche de $N(t) = K$, $N'(t) > 0$ donc $N(t)$ est croissante et se rapproche de K .

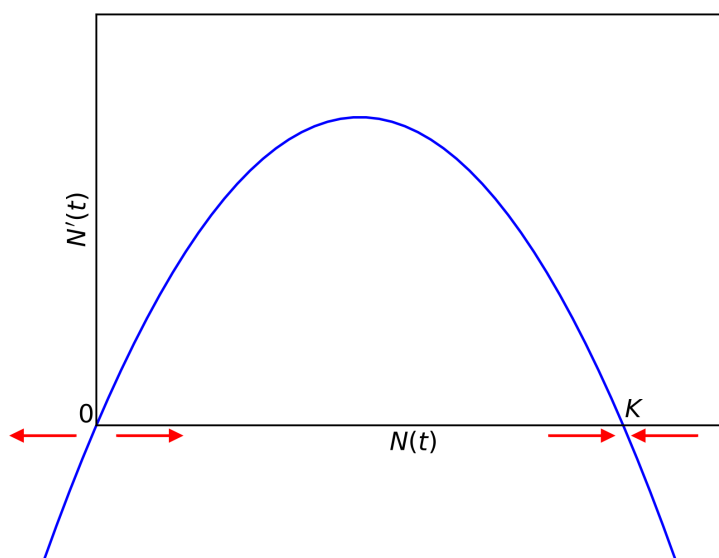


FIGURE 9.7 – Évolution de $N'(t)$ en fonction de $N(t)$ pour étudier la stabilité des points d'équilibre $N(t) = 0$ et $N(t) = K$ dans le modèle de Verhulst.

Au voisinage à droite de $N(t) = K$, $N'(t) < 0$ donc $N(t)$ est décroissante et se rapproche de K .

Par conséquent, le point d'équilibre $N(t) = K$ est **stable**. Si la population est inférieure à K alors elle va augmenter jusqu'à atteindre la population d'équilibre K . Si la population est supérieure à K , alors elle va diminuer jusqu'à atteindre la population d'équilibre K .

9.1.2.5 Exemple : croissance d'une population de bactéries

L'expérience précédente avec les bactéries (voir paragraphe 9.1.1.3) a été poursuivie et la densité de bactéries $B(t)$ dans le milieu de culture a été mesurée plus longtemps, jusqu'à 160 min. Les valeurs mesurées expérimentalement sont listées dans le tableau 9.3.

L'évolution de la densité de bactéries en fonction du temps de l'expérience est représentée dans la figure 9.8. La courbe noire représente le modèle de Malthus avec le paramètre $r = 0,032$ déterminé dans le paragraphe 9.1.1.3. Ce modèle n'est plus du tout adapté pour expliquer l'évolution de la densité de bactéries.

La courbe rouge représente le modèle logistique (de Verhulst). Ce modèle est en accord avec les points expérimentaux. Pour ce modèle, $r = 0,036$ et $K = 1,030$.

TABLE 9.3 – Mesures de la densité d’une population de bactéries à différents temps.

temps t (min)	densité $B(t)$
0	0,022
16	0,036
32	0,060
48	0,101
64	0,169
80	0,266
96	0,360
112	0,510
128	0,704
144	0,827
160	0,928

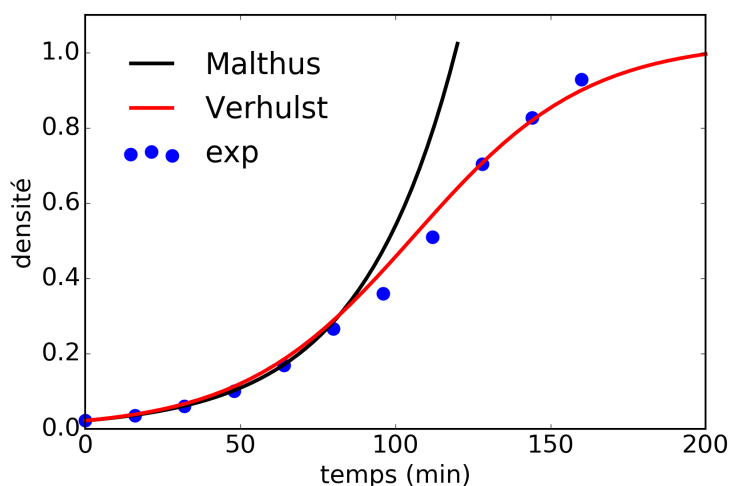


FIGURE 9.8 – Évolution de la densité de la population de bactéries en fonction du temps. Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques produites par les modèles de Malthus et Verhulst.

9.1.2.6 Exemple : croissance d’une population d’éléphants

Les éléphants sont des animaux qui peuplaient autrefois par millions la savane africaine. Chassés pour l’ivoire de leurs défenses, leur population n’a fait que décroître. À la fin du 19^e siècle, très peu d’éléphants étaient encore présents en Afrique du Sud.

En 1903, à la création du parc national Kruger, à la frontière entre l’Afrique du Sud et le Mozambique, il n’y avait aucun éléphant. En 1905, on repéra un troupeau de 10 éléphants, probablement venus du Mozambique. Des mesures furent alors prises pour protéger cette espèce et son habitat. La population d’éléphants ($N(t)$) dans le parc

national Kruger a été comptée régulièrement tout au long du 20^e siècle (tableau 9.4).

TABLE 9.4 – Évolution de la population d'éléphants en fonction des années

années t	population d'éléphants $N(t)$
1905	10
1923	13
1930	29
1939	450
1945	980
1950	3010
1960	5800
1970	6500
1980	7400
1990	7200
2000	7310

À partir des années 1960, on observa un ralentissement de la croissance de la population d'éléphants ainsi qu'un début de dégradation de l'écosystème, notamment des baobabs. La direction du parc mis alors en place un programme d'abatage contrôlé destiné à limiter la population d'éléphants autour de la capacité biotique du parc, estimée à environ 7500 éléphants.

Le graphique de la figure 9.9 montre que cet équilibre a été atteint depuis. L'évolution de cette population peut être modélisée par une croissance logistique avec pour paramètres $r = 0,15$ éléphants / années ; $N_0 = 10$ éléphants et $K = 7500$ éléphants.

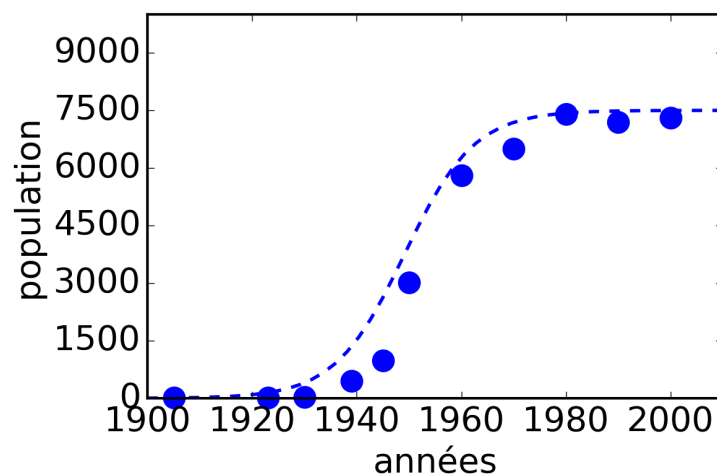


FIGURE 9.9 – Évolution de la population d'éléphants en fonction des années (points bleus) et comparaison avec un modèle de Verhulst (pointillés bleus).

9.1.2.7 Théorie de la sélection r/K

La théorie de la sélection r/K est une théorie simple développée dans les années 1970 par Robert MacArthur et qui part du principe que pour maximiser les chances de survie de leur descendance, des espèces ont pu adopter des stratégies différentes, qu'on appelle stratégie (ou sélection) r/K .

Stratégie r Ces espèces vont avoir beaucoup de jeunes en espérant que quelques uns survivent jusqu'à l'âge adulte.

Les espèces qui adoptent cette stratégie sont en général des espèces avec des individus de petite taille, ayant une maturité sexuelle rapide, une espérance de vie courte, des temps de gestation court et évoluant dans des environnements instables.

Exemple : les grenouilles, les souris, les bactéries, certains insectes, la plupart des rongeurs (voir Figure 9.10)

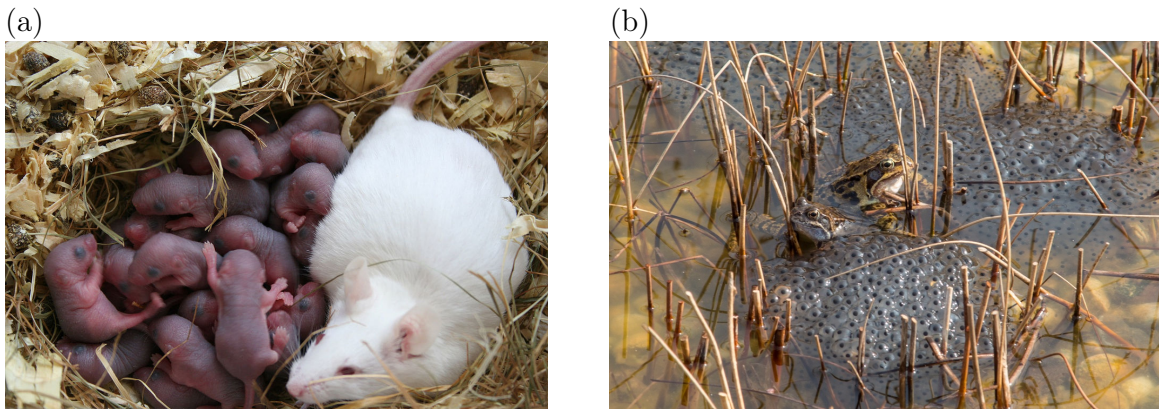


FIGURE 9.10 – (a) Souris et ses petits (source : Seweryn Olkowicz, Wikimedia). (b) Grenouille et ses oeufs (source : hrohmann, Pixabay).

Stratégie K Ces espèces engendrent en général peu de jeunes mais vont dépenser énormément d'énergie et d'attention pour la survie de cette descendance. Les espèces qui adoptent cette stratégie sont en général des espèces constituées d'individus de taille plus importante que précédemment, avec une espérance de vie plus importante et évoluant dans des environnements plus stables.

Exemple : les éléphants, les baleines, les oiseaux, les caméléons, les humains (voir Figure 9.11).

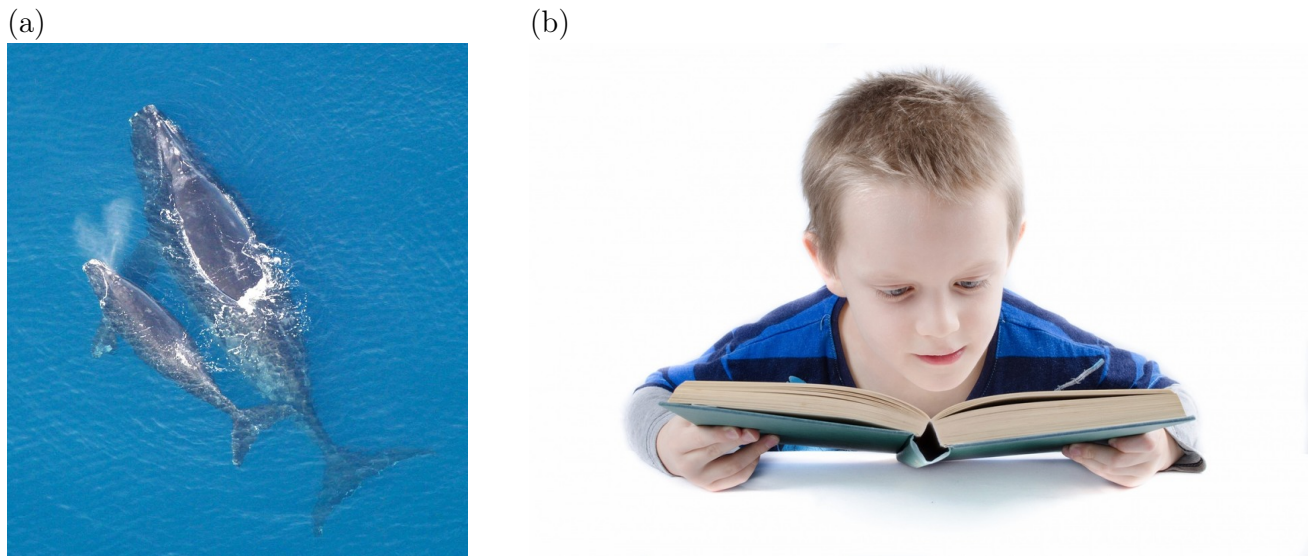


FIGURE 9.11 – (a) Baleine et son baleineau (source : Pcb21, Wikimedia). (b) Jeune humain (source : PublicDomainPictures, Pixabay).

Limitations Bien sur, la séparation entre les espèces qui adoptent la stratégie r ou la stratégie K n'est pas toujours évidente. Il existe des espèces qui sont entre les deux. Par exemples, les tortues marines sont des individus de taille importante et elles ont une vie très longue mais elles pondent beaucoup d'œufs qu'elles abandonnent.

Cette théorie de la sélection r/K n'explique pas non plus le développement des arbres : individus de grande taille, avec un vie longue mais avec une descendance très nombreuse. Aujourd'hui cette thérie a évoluée vers une théorie plus complexe prenant en compte la mortalité spécifique tout au long de la vie de l'individu (théorie de « l'histoire de la vie »).

9.1.3 Modèle logistique avec effet de Allee

9.1.3.1 Dépendance positive à la population

Le modèle de Verhulst (modèle logistique, voir équation 9.5) corrige le modèle de Malthus (modèle exponentiel, voir équation 9.2) avec un dépendance négative à la population. Cela signifie que plus la population augmente, plus le taux de croissance diminue jusqu'à ce que la population atteigne la capacité biotique.

Pour autant, une dépendance positive à la population est possible. Lorsqu'une population comporte peu d'individus, cette population peut en effet avoir intérêt à augmenter, et ce pour plusieurs raisons :

- Rencontres en partenaires sexuels. Plus la population sera dense, plus la rencontre entre partenaires sera facilitée.

- Effet de groupe. Chez certains arbres, les groupes denses attirent plus d'insectes pollinisateurs, favorisant ainsi la survie de l'espèce.
- Coopération entre individus. Chez les lycaons, chaque individu joue un rôle précis dans le groupe (soin des jeunes, chasse...). En deçà de 4 ou 5 individus, le groupe n'est pas viable.

Dans les années 1930, l'écologiste américain Warder Clyde Allee, introduit cet effet de dépendance positive à la population dans le modèle logistique (équation 9.3) :

$$N'(t) = rN(t) \times \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \times \left(\frac{N(t) - A}{K}\right) \quad (9.6)$$

où A est une constante positive qui représente une population critique en dessous de laquelle la croissance de la population est négative.

9.1.3.2 Effet de Allee modéré

Si $A = 0$, on obtient un effet de Allee dit modéré. L'équation différentielle 9.6 devient alors :

$$N'(t) = rN(t) \times \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \times \frac{N(t)}{K} \quad (9.7)$$

Les points d'équilibre sont $N(t) = 0$ et $N(t) = K$. Le graphique représentant $N'(t)$ en fonction de $N(t)$ permet d'étudier la stabilité de ces deux points d'équilibre (figure 9.12).

Étude au voisinage de 0

Au voisinage à gauche de $N(t) = 0$, $N'(t) > 0$ donc $N(t)$ est croissante et se rapproche de 0.

Au voisinage à droite de $N(t) = 0$, $N'(t) > 0$ donc $N(t)$ est croissante et s'éloigne de 0.

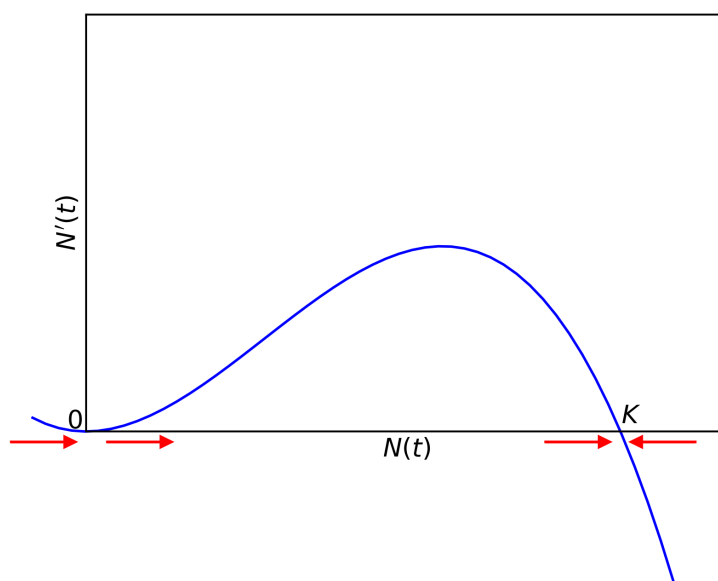
Par conséquent, le point d'équilibre $N(t) = 0$ est **instable**. Une population inférieure à 0 n'a pas de sens. Si la population est supérieure à 0, alors elle va augmenter jusqu'à atteindre la population d'équilibre K .

Étude au voisinage de K

Au voisinage à gauche de $N(t) = K$, $N'(t) > 0$ donc $N(t)$ est croissante et se rapproche de K .

Au voisinage à droite de $N(t) = K$, $N'(t) < 0$ donc $N(t)$ est décroissante et se rapproche de K .

Par conséquent, le point d'équilibre $N(t) = K$ est **stable**. Si la population est inférieure à K , alors elle va augmenter jusqu'à atteindre la population d'équilibre K . Si la population est supérieure à K , alors elle va diminuer jusqu'à atteindre la population d'équilibre K .

FIGURE 9.12 – Évolution de $N'(t)$ en fonction de $N(t)$ avec effet de Allee modéré.

9.1.3.3 Effet de Allee fort

Si $A \neq 0$, on obtient un effet de Allee dit fort. On retrouve l'équation différentielle 9.6 exprimant $N'(t)$ en fonction de $N(t)$, telle que Allee l'a défini initialement.

Les points d'équilibre sont $N(t) = 0$, $N(t) = A$ et $N(t) = K$. Le graphique représentant $N'(t)$ en fonction de $N(t)$ permet d'étudier la stabilité de ces trois points d'équilibre (figure 9.13).

Étude au voisinage de 0

Au voisinage à gauche de $N(t) = 0$, $N'(t) > 0$ donc $N(t)$ est croissante et se rapproche de 0.

Au voisinage à droite de $N(t) = 0$, $N'(t) < 0$ donc $N(t)$ est décroissante et se rapproche de 0.

Par conséquent, le point d'équilibre $N(t) = 0$ est **stable**. Une faible population déclinera jusqu'à disparaître.

Étude au voisinage de A

Au voisinage à gauche de $N(t) = A$, $N'(t) < 0$ donc $N(t)$ est décroissante et s'éloigne de A .

Au voisinage à droite de $N(t) = A$, $N'(t) > 0$ donc $N(t)$ est croissante et s'éloigne de A .

Par conséquent, le point d'équilibre $N(t) = A$ est **instable**. Si la population est inférieure à A , alors elle va diminuer jusqu'à disparaître. Si la population est supérieure à A , alors elle va augmenter jusqu'à atteindre la population d'équilibre K .

Étude au voisinage de K

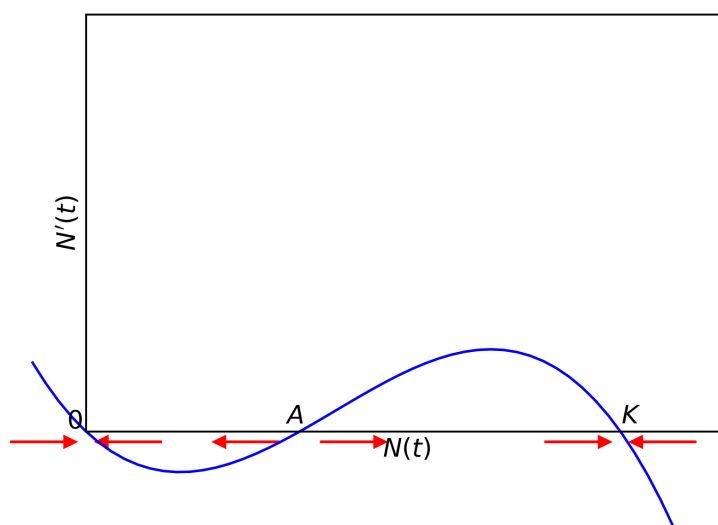


FIGURE 9.13 – Évolution de $N'(t)$ en fonction de $N(t)$ avec effet de Allee fort.

Au voisinage à gauche de $N(t) = K$, $N'(t) > 0$ donc $N(t)$ est croissante et se rapproche de K .

Au voisinage à droite de $N(t) = K$, $N'(t) < 0$ donc $N(t)$ est décroissante et se rapproche de K .

Par conséquent, le point d'équilibre $N(t) = K$ est **stable**. Si la population est inférieure à K alors elle va augmenter jusqu'à atteindre la population d'équilibre K . Si la population est supérieure à K , alors elle va diminuer jusqu'à atteindre la population d'équilibre K .

Pour conclure, lors d'un effet Allee fort, une population n'est viable que si $N(t) > A$. La population va alors progressivement augmenter pour atteindre la capacité biotique du milieu K .

9.2 Ressources

Catastrophe malthusienne

Bande dessinée illustrant la catastrophe malthusienne de l'île Saint-Matthieu, Stuart McMillen, 02/2011.

<http://www.stuartmcmillen.com/fr/comic/ile-saint-matthieu/>

Modèle de Verhulst

Vidéo de Paul Andersen (en anglais) expliquant la croissance logistique (modèle de Verhulst) et notamment l'influence de la capacité biotique sur l'augmentation de la

population (de 5'38 à 9'05)

<https://www.youtube.com/watch?v=rXlyYFXyfIM>

Remarque : *carrying capacity* se traduit par capacité biotique.

Bibliographie

- [A] M. Abate, “Matematica e statistica”, McGraw-Hill, 2013
- [AC] R. A. Ackermann, J. L. Cornette, “Calculus For the Life Sciences : A Modeling Approach”, 2011
- [C] L. Chaumont, “Introduction à la modélisation mathématique en biologie”, 2011
- [F] G. Faccanoni, “Mathématiques”, <http://faccanoni.univ-tln.fr/enseignements.html>, 2014

TD 01

semaine n° 38

L'utilisation de la calculatrice pendant le TD est interdite !

DEVOIR MAISON.

Un commerçant fait des soldes avec une réduction de 40%. Vous voyez un pull dont le prix initial était de 50 euros, et vous décidez de l'acheter. Au moment de payer, vous vous rendez compte qu'il y a une tâche. Vous demandez alors au commerçant d'appliquer une réduction de 45% sur le prix initial. Le vendeur vous répond qu'il ne peut pas faire cela, et il vous propose en échange une réduction supplémentaire de 10% sur le prix soldé. Est-ce que vous acceptez ? Justifiez votre réponse.

EXERCICES DE TD.

Exercice 1. Pierre et Jacques sont deux frères, nés le même jour mais à huit années de distance, et aujourd'hui c'est leur anniversaire. Dans cinq ans, Jacques aura le double de l'âge de Pierre, moins vingt. Quel âge ont Pierre et Jacques aujourd'hui ?

Exercice 2. Les soldes vont bientôt commencer et un commerçant malhonnête veut augmenter le prix de sa marchandise, de façon à ce que quand il fera une réduction pendant les soldes, il vendra la marchandise à son prix initial.

1. Supposons que le commerçant vende des plantes. Le nombre total de plantes à vendre est de 150 et le prix à l'unité est de 2 euros. S'il veut pouvoir faire une réduction de $q\%$, de quel pourcentage doit-il augmenter le prix ?
 2. Supposons maintenant que le commerçant vende des chaussettes, pour une quantité totale de 200 paires de chaussettes au prix initial de 5 euros la paire. S'il augmente le prix initial de $p\%$, quelle réduction peut-il faire pour revenir au prix initial ?
 3. Dans les questions ci-dessus, identifiez les constantes numériques, les paramètres et les inconnus. Identifiez les données inutiles du problème.
-

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES POUR S'ENTRAÎNER.

Exercice 3. On suppose que les concombres sont composés de $a\%$ d'eau. On laisse reposer M kilogrammes de concombres pendant une nuit et le lendemain les concombres ne contiennent plus que $b\%$ d'eau avec $0 < b < a < 100$. Quelle est la masse des concombres après la nuit ?

Exercice 4. Dans un panier de fruits, $\frac{1}{7}$ de tous les fruits sont des ananas, $\frac{3}{8}$ des pamplemousses et $\frac{2}{5}$ des nectarines. Si les 23 fruits restants sont des pommes, combien d'ananas y a-t-il dans le panier ?

EXERCICES DE RÉVISION DES MATHÉMATIQUES DE BASE.

Exercice 5. Soient a, b, c, d des nombres réels. On va supposer que $a < b$ et que $c \leq d$. Déterminez si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en produisant une preuve ou un contre-exemple.

1. $\frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}$, si $b \neq 0$.
2. $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, si $c \neq 0$.
3. $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$, si $a, b, c, d > 0$.

Exercice 6.

1. Trouver toutes les solutions réelles de l'inéquation

$$|3x - 1| > 4x.$$

2. Mettre sous forme de fraction réduite les trois expressions suivantes :

- (a) $\frac{51}{136}$
- (b) $1 - \frac{23}{125} - \frac{54}{100}$
- (c) $3,46$

3. Exprimer sous forme d'une seule fraction les expressions suivantes :

- (a) $\frac{a}{b} - \frac{a}{b^2}$
- (b) $\frac{1}{a+b} - \frac{3}{a-b}$
- (c) $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{2}{b(a+b)}$

Exercice 7. Calculer la valeur de l'expression $\left[\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^3 - 1$.

Exercice 8. La surface latérale S et le volume V d'un cône de rayon r et hauteur h valent, respectivement :

- a) $S = \pi r^2 h$; $V = \frac{1}{3} \pi^2 r h^2$.
- b) $S = \pi r h$; $V = \frac{1}{3} \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.
- c) $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$; $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.
- d) $S = \pi r h$; $V = \pi r^2 h$.

TD 02

semaine n° 39

L'utilisation de la calculatrice pendant le TD est interdite !

DEVOIR MAISON.

Vous mesurez la pression atmosphérique en fonction de l'altitude : au niveau de la mer, la pression vaut 1 atm ; à 1000 mètres la pression est de 0,92 atm ; à 5000 mètres la pression est 0,6 atm ; à 10000 mètres la pression est de 0,2 atm.

1. Formulez un modèle mathématique de type système dynamique continu pour modéliser l'évolution de la fonction $P(h)$, où h mesure l'altitude en milliers de mètres et P mesure la pression en atmosphères.
 2. De quel type de modèle s'agit-il ?
 3. Tracez le graphe de la fonction P .
 4. Combien vaut la pression sur le mont Everest selon votre modèle, si on approxime la hauteur du mont à 9 km ?
-

EXERCICES DE TD.

Exercice 1. Après avoir sorti une tarte aux pommes du four, vous mesurez la température du gâteau : au moment où vous sortez la tarte, sa température est de 180 degrés Celsius ; après 20 minutes, sa température est de 120 degrés Celsius et après 40 minutes, sa température est de 20 degrés Celsius.

Un raisonnement théorique vous mène à supposer que la température $T(x)$ du gâteau (mesurée en dizaines de degrés Celsius) s'exprime en fonction du temps x (mesuré en dizaines de minutes) selon une loi quadratique, c'est-à-dire polynomiale de degré 2.

L'instant $x = 0$ correspond au moment où vous sortez la tarte du four.

1. Trouvez la fonction T et dessinez son graphe.
2. En sachant que la température de votre cuisine est de 20 degrés Celsius, pour quel(s) intervalle(s) de temps ce modèle est-il raisonnable ?

Exercice 2. On mesure l'effectif d'une population de bactéries et on obtient les données suivantes, où x mesure le temps en heures et $f(x)$ mesure l'effectif de la population (en milliers de bactéries) x heures après le début de l'expérience :

x	$f(x)$
0,25	2
1	4
4	8
9	12

Vos assistants proposent trois modèles possibles :

- a) l'effectif est directement proportionnel au temps
- b) l'effectif est directement proportionnel au carré du temps
- c) l'effectif est directement proportionnel à la racine carrée du temps

Est-ce que l'un de ces trois modèles est compatible avec les données expérimentales ?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES POUR S'ENTRAÎNER.

Exercice 3. On mesure l'effectif d'une population de souris et on obtient les données suivantes, où x mesure le temps en années et $f(x)$ mesure l'effectif de la population (en centaines d'individus) x années après le début de l'expérience :

x	$f(x)$
0,25	1
1	2
4	4
9	6

Vos trois assistants proposent les modèles suivants :

- l'effectif est directement proportionnel au temps
 - l'effectif est inversement proportionnel à la racine carrée du temps
 - l'effectif est directement proportionnel à la racine carrée du temps
- Est-ce que l'un de ces modèles est compatible avec les données expérimentales ?

Lequel parmi vos assistants vous aller tout de suite licencier ?

Exercice 4. Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes lorsque x qui tend vers 0, vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

- $\sqrt{\cos x + 2}$
- $\frac{3x^2}{-2x^2 - x^3}$
- $\ln\left(\frac{2x-1}{3x}\right)$

TD 03

semaine n° 40

L'utilisation de la calculatrice pendant le TD est interdite !

DEVOIR MAISON.

On mesure l'effectif d'une population de bactéries et on obtient les données suivantes, où n mesure le temps en heures et x_n mesure l'effectif de la population (en milliers de bactéries) n heures après le début de l'expérience :

n	x_n
0	2
1	3
2	5
3	9
4	17

1. Trouvez l'équation de récurrence de la suite et sa solution explicite.
 2. De quel type de modèle s'agit-il?
-

EXERCICES DE TD.

Exercice 1. La belladone est un poison très puissant. En très faible dose, cette plante a la réputation de soigner les maux de gorge. En une journée, les reins éliminent 75% du poison présent dans le corps. Pour que le pouvoir toxique du poison ne soit pas fatal, il faut que le corps humain ne contienne pas plus que 35 mg de belladone, pendant une période trop longue.

1. Proposez un modèle mathématique de type système dynamique discret pour décrire la quantité de belladone dans votre corps, si vous en prenez 30 mg par jour. Trouvez l'équation de récurrence et sa solution explicite. De quel type de modèle s'agit-il?
2. Est-ce qu'il est sage de prendre 30 mg par jour de belladone à long terme, pour soigner le mal de gorge?

Exercice 2.

1. L'évolution dans le temps de l'effectif d'une population de souris est modélisée par un système dynamique continu, selon une certaine fonction réelle f .
La variable x mesure le temps (en jours) et $f(x)$ mesure l'effectif de la population (en dizaines d'individus).

Aujourd'hui correspond à $x = 0$.

Répondez aux questions suivantes (attention : les réponses doivent être des nombres entiers!) :

- (a) Quel est l'effectif de la population aujourd'hui?
- (b) Quel était l'effectif de la population hier?
- (c) Quel sera l'effectif de la population dans 48 heures?
- (d) Quel sera l'effectif de la population *dans très longtemps*?
- (e) Quel était l'effectif de la population *il y a très longtemps*?

2. Répondez aux questions de la première partie de l'exercice pour une population qui évolue selon la fonction

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2} + 3^x + 1$$

et donnez une interprétation des résultats obtenus.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES POUR S'ENTRAÎNER.

Exercice 3. La république du Gondwana est un pays d'Afrique où le braconnage des éléphants est important. Une étude a été lancée pour mieux comprendre ce phénomène.

Au début de l'étude, la population d'éléphants était de 1800 animaux. Chaque année, la population d'éléphants a été mesurée et il a été observé que 100 éléphants disparaissent à cause du braconnage.

1. En supposant que le nombre de naissances compense le nombre de morts naturelles dans la population d'éléphants, modélisez l'évolution de la population d'éléphants en utilisant un modèle discret. Donnez l'équation de récurrence et sa solution explicite.
2. Combien d'éléphants reste-t-il à la fin de la 11e année ?
3. Sachant que l'étude a débuté en 1993, en quelle année la population d'éléphants devient strictement inférieure à la moitié de la population initiale ?
4. Quelle était la population d'éléphants en 2016 au Gondwana ?

Exercice 4. Puissance ou logarithme ?

1. Si $4 + 2^a = \frac{3}{2}$, alors combien vaut a ?
2. Si $3a^{2e} = 2a^{-e}$, alors combien vaut a ?
3. Si $2^{2a} - 4^a = 1$, alors combien vaut a ?

TD 04

semaine n° 42

L'utilisation de la calculatrice pendant le TD est interdite !

DEVOIR MAISON.

Vous souhaitez refaire le plancher de votre cuisine (qui mesure $12,3 \times 4,9$ mètres) et de votre salle de bains (qui mesure $3,4 \times 4,8$ mètres). Vous allez au magasin de bricolage pour acheter du revêtement en PVC, qui se vend par lots de 20 m^2 . En ayant oublié d'amener une calculatrice, vous devez décider au magasin combien de mètres carrés il faut acheter. Vous ne souhaitez pas faire un calcul approximé, de peur de manquer de revêtement et de devoir faire un deuxième voyage au magasin. Montrez que, en faisant très peu de calculs et en trouvant un encadrement, vous pouvez choisir avec certitude le nombre de lots qu'il faut acheter.

EXERCICES DE TD.

Exercice 1. Au cours des premiers jours de la vie, les cellules embryonnaires se divisent en deux à peu près tous les jours.

1. En supposant que le nombre de cellules embryonnaires double chaque jour, modélisez la situation avec un système dynamique discret : écrivez une équation de récurrence qui relie le nombre de cellules embryonnaires entre deux jours consécutifs.
2. Juste après la fécondation, l'embryon n'est constitué que d'une cellule unique. Écrivez la solution explicite de l'équation de récurrence trouvée dans la première partie de l'exercice, afin d'exprimer le nombre de cellules embryonnaires en fonction du nombre de jours après la fécondation.
3. Si la grossesse dure 40 semaines et que les cellules embryonnaires continuent de se diviser au même rythme, en sachant qu'une cellule humaine est composée en moyenne de 10^{14} atomes, combien d'atomes aurait un bébé à la naissance ?
4. Comparez la valeur obtenue dans la question précédente au nombre d'atomes dans l'univers (de l'ordre de 10^{80}). Proposez une explication.

Exercice 2. On observe l'évolution de l'effectif d'une population de lions dans le temps. Les données expérimentales sont les suivantes :

temps après le début de l'expérience (en années)	0	1	2	3	4
effectif	15	32	47	68	86

Sur la base de ces données, vous souhaitez modéliser ce phénomène à l'aide d'un système dynamique continu. Vos trois assistants proposent trois théories différentes :

- a) L'effectif (en dizaines d'individus) évolue dans le temps selon un modèle de la forme $2t + 1$
- b) L'effectif (en dizaines d'individus) évolue dans le temps selon un modèle de la forme $\frac{3}{2}t + \frac{3}{2}$
- c) L'effectif (en dizaines d'individus) évolue dans le temps selon un modèle de la forme $\frac{3}{2}t + 2$

1. Est-ce que l'un de ces modèles est cohérent avec les données expérimentales, à une erreur absolue près de ± 5 individus ?
 2. Si oui, alors selon ce modèle, combien d'individus y aura-t-il 10 ans après le début de l'expérience ?
-

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES POUR S'ENTRAÎNER.

Exercice 3. On souhaite trouver l'ordre de grandeur de la quantité

$$x = \frac{1460001200 \times 0,07542}{0,035 \times 7600,245}$$

sans utiliser la calculatrice et en faisant le moins de calculs possibles.

Procédez de la façon suivante :

1. Écrivez chaque terme de la fraction en notation scientifique et regroupez les puissances de 10.
2. Trouvez un encadrement de x de la forme

$$A < x < B,$$

où A et B sont des entiers. Ensuite écrivez A et B en notation scientifique.

3. Est-ce que l'encadrement trouvé dans la question 2 vous permet d'établir l'ordre de grandeur de x ? Si la réponse est négative, alors cherchez un autre encadrement plus précis

$$A' < x < B'$$

qui vous permette de trouver l'ordre de grandeur de x .

Exercice 4.

1. Comparer les nombres $(\ln 5)^{-1}$ et $\frac{1}{\ln 7}$
2. Écrire les nombres suivants par ordre croissant, du plus petit au plus grand :

$$\ln 2, \ln 3, 1, \ln(\sqrt{2}), (\sqrt{\ln 2} - 1), -\ln 3$$

3. Démontrer que

$$\ln 2 > 1 - \ln 3.$$

Plus précisément, trouver un encadrement de chaque quantité (à gauche et à droite du signe “>”) et l'utiliser pour démontrer l'inégalité.

4. Démontrer que

$$3e + \ln 18 > e^2 - 2.$$

Plus précisément, trouver un encadrement de chaque quantité (à gauche et à droite du signe “>”) et l'utiliser pour démontrer l'inégalité.

Indication : $2 < e < 3$.

TD 05

semaine n° 43

L'utilisation de la calculatrice pendant le TD est interdite !

DEVOIR MAISON.

On considère une fonction sinusoïdale

$$f(x) = a + b \sin(c(x + d)),$$

avec des paramètres $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $b, c > 0$.

On souhaite déterminer les valeurs des paramètres en sachant que :

- la période de f est $T = 12$
- f atteint son maximum en $x_{\max} = 4$
- les valeurs maximale et minimale atteintes par f sont 6 et 2, respectivement.

Procédez comme nous l'avons fait en cours :

1. Utilisez les transformations élémentaires

$$f_0(x) \rightsquigarrow f_1(x) = f_0(cx) \rightsquigarrow f_2(x) = f_1(x + d) \rightsquigarrow f_3(x) = bf_2(x) \rightsquigarrow f_4(x) = a + f_3(x)$$

pour comprendre comment on passe de la fonction $f_0(x) = \sin(x)$ à la fonction $f_4(x) = f(x)$. Observez l'effet de chaque transformation élémentaire sur la période, sur les points de maximum et de minimum, sur l'amplitude (la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale) et sur l'image de la fonction.

2. Utilisez les étapes précédentes et les données du problème pour trouver a, b, c, d .
-

EXERCICES DE TD.

Exercice 1. Vous étudiez une population d'opossums de l'Oregon. Une étude théorique vous mène à formuler le modèle suivant :

- La population évolue de façon cyclique, avec un cycle d'un an.
- La taille de la population est maximale à fin avril.
- Au cours d'une année, la taille de la population varie entre 200 et 600 exemplaires.

1. Représentez le modèle théorique à l'aide d'une fonction sinusoïdale

$$f(x) = a + b \sin(c(x + d)),$$

où la variable x indique le temps (mesuré en mois, avec $x = 0$ correspondant au début de l'année en cours) et $f(x)$ indique la taille de la population au temps x (mesurée en centaines d'exemplaires). Utilisez les informations données dans l'énoncé pour trouver les valeurs des paramètres a, b, c, d (en choisissant $b, c > 0$) et tracez soigneusement le graphe de f .

Indication : utilisez le devoir maison !

2. Selon le modèle théorique, combien d'exemplaires y avait-il à la fin de février ? Et au début d'août ?
3. Vous êtes allé en Oregon pour compter vous même les opossums. À la fin de janvier vous avez compté 396 exemplaires, au début de mars vous avez compté 504 exemplaires et à la fin d'octobre vous comptez 198 exemplaires. Est-ce que le modèle théorique est compatible avec vos observations expérimentales, à une erreur absolue près de 5 exemplaires ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2. On considère les fonctions réelles

$$f(x) = -\frac{x^2}{3} + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = 2^{x-2} - 2.$$

1. Soient

$$\begin{aligned} f_0(x) = x^2, \quad f_1(x) = -x^2, \quad f_2(x) = -\frac{x^2}{3} \\ \text{et} \\ g_0(x) = e^x, \quad g_1(x) = 2^x, \quad g_2(x) = 2^{x-2}. \end{aligned}$$

Montrez que :

$$\begin{aligned} f_1(x) = -f_0(x), \quad f_2(x) = \frac{1}{3}f_1(x), \quad f(x) = f_2(x) + 3 \\ \text{et} \\ g_1(x) = g_0(\ln 2 \cdot x), \quad g_2(x) = \frac{1}{4}g_1(x), \quad g(x) = g_2(x) - 2. \end{aligned}$$

2. Dans la partie 1 de l'exercice, chaque fonction est obtenue à partir de la fonction précédente à travers une transformation élémentaire. Chaque transformation élémentaire correspond à une opération géométrique sur le graphe (translation verticale/horizontale, contraction/dilatation verticale/horizontale, symétrie...). Utilisez cette observation pour tracer les graphes approximatifs des deux fonctions f et g dans le même dessin.
3. La température à Frankfurt et à Gdansk évolue selon les lois f et g ci-dessus. La variable x mesure le temps en heures ($x = 0$ correspond à l'instant actuel), $f(x)$ et $g(x)$ mesurent la température (en Celsius) dans les deux villes, respectivement, à l'instant x . Décrire la ou les périodes de temps pendant la/lesquelles la température à Frankfurt est inférieure ou égale à la température à Gdansk. Autrement dit, résolvez graphiquement l'inéquation

$$f(x) \leq g(x)$$

et interprétez les résultats obtenus.

Indications :

- identifiez l'ensemble des solutions sur le dessin
- décrivez l'ensemble des solutions avec une formule mathématique avec des paramètres a et b
- calculez ou estimez les valeurs des paramètres

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES POUR S'ENTRAÎNER.

Exercice 3.

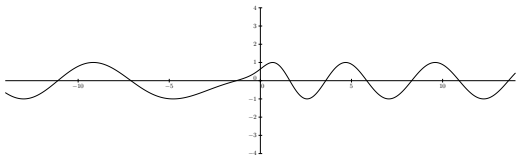
1. Résoudre graphiquement l'inéquation

$$f(x) = 2^{x-3} + 2 \geq -2(x+2)^2 + 8 = g(x).$$

Indications : tracez les graphes approximatifs des deux fonctions

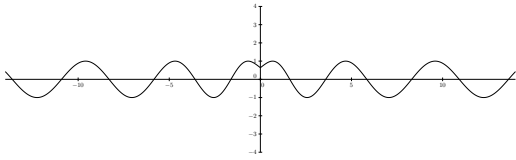
- (a) identifiez graphiquement l'ensemble des solutions
- (b) essayez de décrire l'ensemble des solutions avec une formule mathématique
2. La température dans deux laboratoires F et G évolue selon les lois f et g ci-dessus. La variable x mesure le temps en heures ($x = 0$ correspond à l'instant actuel), $f(x)$ et $g(x)$ mesurent la température (en Fahrenheit) dans les laboratoires F et G , respectivement, à l'instant x . Décrire la ou les périodes de temps pendant la/lesquelles la température dans le laboratoire F est égale ou supérieure à la température dans le laboratoire G .

Exercice 4. On considère le graphe de la fonction f :

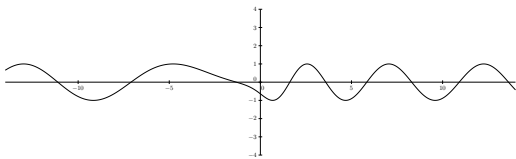


et les graphes suivants :

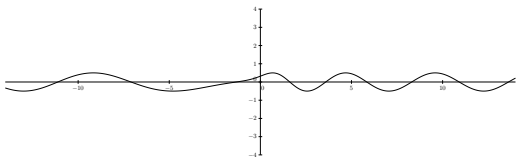
1)



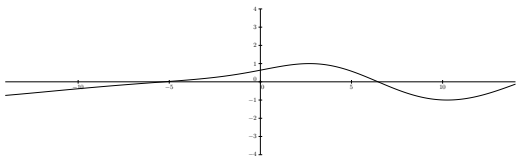
2)



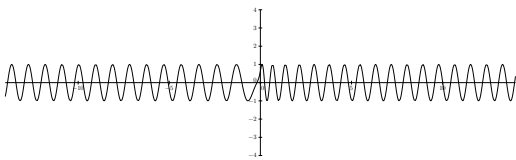
3)



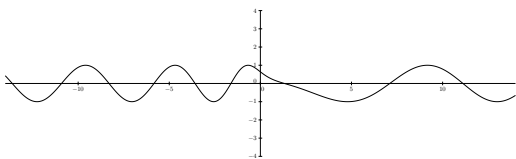
4)



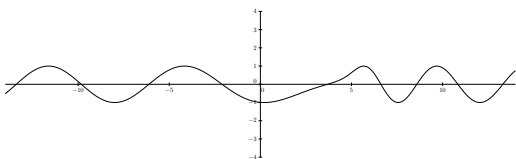
5)



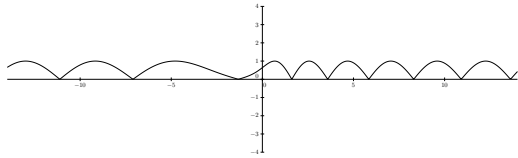
6)



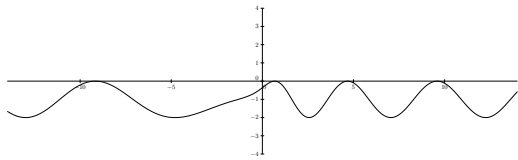
7)



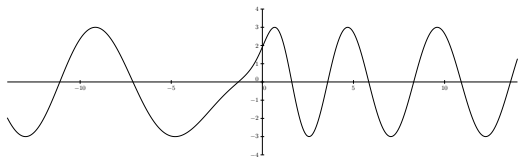
8)



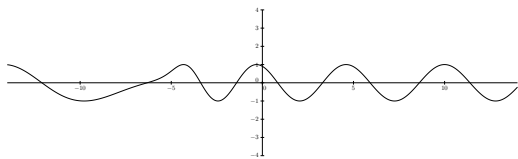
9)



10)



11)



12)

Associez à chaque graphe son équation :

- | | |
|--------------------------|-------------------------------------|
| a) $y = \frac{1}{2}f(x)$ | g) $y = f(-x)$ |
| b) $y = f(x + 5)$ | h) $y = f(x)$ |
| c) $y = f(7x)$ | i) $y = f(x) + 3$ |
| d) $y = f(x) $ | j) $y = f(x - 5)$ |
| e) $y = -f(x)$ | k) $y = f\left(\frac{1}{4}x\right)$ |
| f) $y = f(x) - 1$ | l) $y = 3f(x)$ |

TD 06

semaine n° 44

L'utilisation de la calculatrice pendant le TD est interdite !

DEVOIR MAISON.

On considère les fonctions

$$f(x) = 30x^2 + 20xe^{-x}$$

$$g(x) = 20x^2 + 10e^x$$

$$h(x) = \frac{10x^3 + 30x}{x + 1}$$

1. Trouvez le terme dominant de chaque fonction, lorsque $x \rightarrow +\infty$.
 2. Déterminez le type de croissance de chaque fonction, lorsque $x \rightarrow +\infty$.
 3. Pour chaque fonction, déterminez si la croissance est équivalente à, comparable à ou négligeable devant la croissance des deux autres fonctions), lorsque $x \rightarrow +\infty$.
-

EXERCICES DE TD.

Exercice 1. Trois populations F, G et H de lapins évoluent dans le temps selon les lois

$$f(x) = 100e^{-x} + 50x^{-1}$$

$$g(x) = 2 \ln(x) + x^{-2},$$

$$h(x) = \frac{\ln(x^2) + 10}{x^{-2} + 1}$$

respectivement, où x mesure le temps et $f(x), g(x), h(x)$ mesurent les effectifs des trois populations au temps x .

Comparez la croissance des trois populations sur des temps longs :

1. déterminez le type de croissance de chaque population ;
2. pour chaque population, déterminez si la croissance est qualitativement et quantitativement égale à ou différente de la croissance des deux autres populations. Justifiez vos réponses.

Indication : procédez comme dans le DM.

Exercice 2. Une étude des chèvres du Tibet révèle que l'effectif des chèvres au temps t (mesuré en années) est donné par la fonction

$$f(t) = \frac{1000 + 300t^2}{1 + t^2}.$$

1. Quand est-ce que l'effectif de la population est maximal et combien de chèvres y a-t-il à ce moment là ?
2. Que peut-on dire de l'effectif des chèvres dans un passé et dans un futur lointains ?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES POUR S'ENTRAÎNER.

Exercice 3. Deux populations F et G de bactéries évoluent, respectivement, selon les lois

$$\begin{aligned} f(x) &= 10x + 100e^{-x} \\ g(x) &= 2x^2 + e^x \end{aligned} ,$$

où x mesure le temps et $f(x), g(x)$ mesurent les effectifs des deux populations au temps x .

On souhaite comparer la croissance des deux populations sur des temps longs. Pour cela :

1. Trouvez les termes dominants des deux fonctions lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Déterminez le type de croissance de chaque population de bactéries, pour un temps très grand.
3. Déterminez si chaque fonction est équivalente à, comparable à ou négligeable devant l'autre fonction, lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Comparez qualitativement et quantitativement la croissance des deux populations de bactéries pour un temps très grand.

Exercice 4. Étudier la fonction

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2}.$$

Déterminer le domaine, les limites aux bornes, les asymptotes, la dérivée première, les extrema locaux et globaux, la croissance/décroissance. Dessiner le graphe approximatif de la fonction.

TD 07

semaine n° 46

L'utilisation de la calculatrice pendant le TD est interdite !

DEVOIR MAISON.

Une population de larves évolue selon la loi

$$f(x) = 2^x + 5,$$

où x mesure le temps (en semaines) et $f(x)$ mesure l'effectif de la population (en milliers d'individus) au temps x . Le début de l'expérience correspond à $x = 0$.

1. Quel est l'effectif deux semaines après le début de l'expérience ?
 2. Quelle est la variation absolue de l'effectif au cours de la première semaine ?
 3. Quelle est la variation relative de l'effectif au cours des quatre premières semaines ?
 4. Quelle est la vitesse de variation de l'effectif une semaine après le début de l'expérience ? Utilisez l'approximation $\ln 2 \approx 0,7$.
 5. Est-ce qu'après un an la population aura dépassé les dix millions de milliards d'individus ?
-

EXERCICES DE TD.

Exercice 1. Une population d'oiseaux évolue en fonction de la disponibilité de la nourriture, selon la loi

$$E = \ln(N) + N,$$

où E mesure l'effectif de la population (en centaines d'individus) et N mesure la quantité de nourriture disponible (en tonnes).

L'effectif de la population et la quantité de nourriture disponible varient dans le temps, selon des lois

$$N(t)$$

$$E(t) = \ln(N(t)) + N(t),$$

où t mesure le temps en semestres.

En comptant les cadavres et les oeufs éclos, on évalue la vitesse de croissance de la population dans le temps. Les données expérimentales sont les suivantes :

temps après le début de l'expérience (en semestres)	1	2	3	4
vitesse de croissance (en individus par semestre)	402	491	664	853

Sur la base de ces données, vous souhaitez comprendre comment la quantité de nourriture disponible évolue dans le temps. Vos trois assistants ont trois théories différentes :

- a) N est directement proportionnelle à t , avec constante de proportionnalité égale à 2
 - b) N est directement proportionnelle à t^2 , avec constante de proportionnalité égale à 1
 - c) N est directement proportionnelle à t^3 , avec constante de proportionnalité égale à 1
1. Lequel de ces modèles théoriques est cohérent avec les données expérimentales, à une erreur près de ± 10 individus par semestre ?
 2. Selon ce modèle, combien d'oiseaux y avait-il 6 mois après le début de l'expérience ?

Exercice 2. Une boule sphérique de naphthaline se défait à une vitesse de $-2 \text{ mm}^3/\text{jour}$. Soit $r(t)$ le rayon de la boule au temps t (mesuré en jours). Quelle est la vitesse de diminution de la surface de la boule, quand le rayon mesure 1 cm ?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES POUR S'ENTRAÎNER.

Exercice 3. Deux populations F et G de bactéries croissent selon les lois

$$f(x) = xe^{2x-1} - x^2e^{x-1} + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 4x + 6 \quad \text{respectivement,}$$

où la variable x mesure le temps en jours et $x = 0$ correspond à l'instant actuel. Les bactéries sont comptés en milliers d'individus.

Comparer la *taille* des deux populations aux moments suivants :

1. Il y a un jour et demi.
2. Dans un jour.
3. Dans deux jours.

Comparer la *vitesse de croissance* des deux populations aux moments suivants :

1. Il y a 24 heures.
2. Dans 36 heures.
3. Dans une semaine.

(On rappelle que $2 < e < 3$). Interprétez les résultats obtenus.

Exercice 4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $\sqrt{\cos x + 2}$
2. $\frac{3x^2}{-2x^2 - x}$
3. $\ln\left(\frac{2x-1}{3x}\right)$

TD 08

semaine n° 47

L'utilisation de la calculatrice pendant le TD est interdite !

DEVOIR MAISON.

1. On considère la fonction quadratique $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Trouver des nombres réels a et b tels que

$$f(x) = (x + a)^2 + b.$$

2. On considère la fonction $g(x) = 2^{-f(x)} + 1$. Soit $g_0(x) = e^{-x^2}$ la fonction Gaussienne et soient

$$g_1(x) = 2^{-x^2}, \quad g_2(x) = 2^{-(x+a)^2}, \quad g_3(x) = 2^{-b} \cdot 2^{-(x+a)^2}.$$

Montrer qu'on peut obtenir $g(x)$ à partir de g_0 en enchaînant quatre transformations élémentaires et utiliser cette observation pour tracer le graphe de g .

3. On considère la fonction de deux variables $H(x, y) = \frac{(y - 10)^2 + 12}{g(x)}$. Trouver la valeur minimale atteinte par la fonction H .
-

EXERCICES DE TD.

Exercice 1. L'effectif H d'une population de cerfs dans une forêt dépend de l'effectif x des prédateurs dans la région et de la quantité de nourriture disponible y , selon la loi

$$H(x, y) = \frac{y^2 - 20y + 112}{2^{-(x^2 - 4x + 3)} + 1}.$$

Les tailles des populations de cerfs et de prédateurs sont mesurées en dizaines d'individus, la quantité de nourriture disponible est mesurée en tonnes.

- Déterminez le nombre de prédateurs et la quantité de nourriture disponible quand la population de cerfs est à son minimum.
- Quelle est la taille minimale de la population de cerfs dans ce modèle ?
- Dans une expérience, on maintiens le nombre de prédateurs constant, et égal à 10 individus, alors que la quantité de nourriture disponible évolue dans le temps t (mesuré en mois), selon une loi $y(t)$, qui ne fait pas partie des données du problème. Au début de l'expérience ($t = 0$), il y a 15 tonnes de nourriture disponible et la quantité de nourriture diminue à une vitesse de -200 kg par mois. Calculez la vitesse de croissance de la population de cerfs au début de l'expérience.

Indication : utilisez le devoir maison !

Exercice 2. Dans le cadre d'une étude sur l'écosystème de Cap Kerauden, dans l'ouest de l'Australie, on recense une population de lapins toutes les 3 semaines.

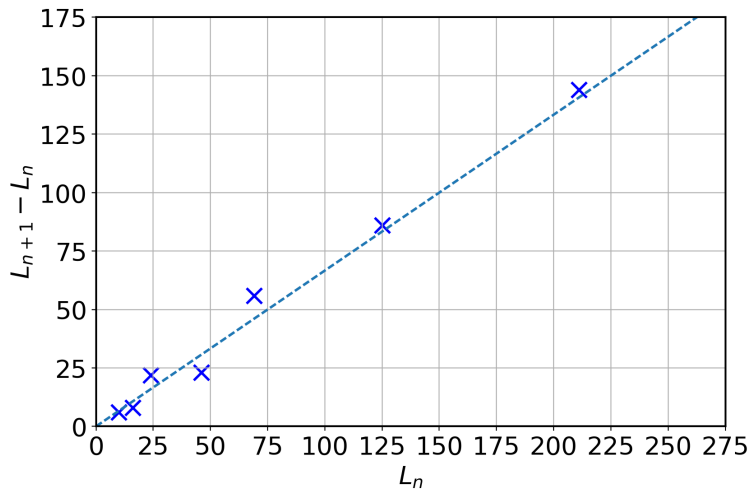
Les valeurs mesurées sur le terrain sont les suivantes :

temps (semaines)	effectif de lapins
0	10
3	16
6	24
9	46
12	69
15	125
18	211
21	355

1. Complétez le tableau suivant :

temps (semaines)	comptage n	effectif de lapins	variation de l'effectif entre le comptage n et le comptage $n + 1$
0	0	10	
3		16	
6		24	
9		46	
12		69	
15		125	
18		211	
21		355	

2. On souhaite modéliser l'évolution de cette population de lapins par un système dynamique discret, en utilisant une suite numérique (L_n) , où L_n représente le nombre de lapins observés lors du comptage n . Arbitrairement, nous déciderons que le premier comptage correspond à $n = 0$. On représente graphiquement la variation des effectifs en fonction des effectifs. En analysant le tableau précédent (où la droite approxime l'ensemble des données expérimentales trouvée dans le tableau ci-dessus), quel type de suite L_n pourrait modéliser l'évolution de la population de lapins ?



3. Déterminez l'équation de récurrence de la suite (L_n) et sa solution explicite.

4. En supposant que la population de lapins continue de croître au même rythme, montrez que la population de lapins après 18 mois est supérieure à 10^5 lapins.

On supposera qu'un mois est constitué de 4 semaines.

Correction

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES POUR S'ENTRAÎNER.

Exercice 3. L'effectif H d'une population de souris dépend de l'effectif x des prédateurs dans la région et de la quantité de nourriture disponible y , selon la loi

$$H(x, y) = \frac{(y - 3)^3 + 3}{e^{-(x-5)^2}}.$$

Les tailles des populations de souris et de prédateurs sont mesurées en dizaines d'individus, la quantité de nourriture disponible est mesurée en dizaines de kg.

1. Déterminez le nombre de prédateurs et la quantité de nourriture disponible quand la population de souris est à son minimum.
2. Quelle est la taille minimale de la population de souris dans ce modèle ?
3. On suppose que le nombre de prédateurs et la quantité de nourriture changent dans le temps t (mesuré en semestre), selon des lois $x(t)$ et $y(t)$, qui ne font pas partie des données du problème.
 - (a) Exprimez la vitesse de croissance de la population de souris à l'instant t en fonction de la quantité et de la vitesse de changement de la quantité de nourriture et de prédateurs à l'instant t .
 - (b) Calculez approximativement la vitesse de croissance de la population à l'instant t_0 , en sachant qu'à cet instant il y a 40 prédateurs et 20 kg de nourriture, et qu'à cet instant la population de prédateurs diminue à une vitesse de -10 individus par semestre, alors que la nourriture augmente à une vitesse de 5 kg par semestre.

Exercice 4. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = \frac{y^2 + 1}{e^x}$
2. $g(x, y) = x \ln(y^2 + 1)$
3. $h(x, y) = \frac{x^2 y}{e^y}$

TD 09

semaine n° 48

L'utilisation de la calculatrice pendant le TD est interdite !

DEVOIR MAISON.

Le joueur de tennis Roger Federer a remporté le tournoi de Wimbledon en 2005, 2006, 2007, 2009, 2012 et 2017.

1. Montrez que l'intervalle entre deux victoires consécutives peut-être modélisé par une suite de Fibonacci.
 2. Si on suit ce raisonnement, quand sera sa prochaine victoire à Wimbledon ? Sachant qu'il est né en 1981, quel âge aura-t-il ? Commentez vos résultats.
-

EXERCICES DE TD.

Exercice 1. Une population de 2500 grenouilles est introduite dans un lac qui ne contient aucune autre espèce de grenouilles. On estime que la capacité biotique du lac est de 10^4 grenouilles. On a également observé que la population de grenouilles a triplé au cours des premières 4 années de l'expérience.

La population évolue selon la loi

$$P(t),$$

où t mesure le temps en années (avec $t = 0$ correspondant au début de l'expérience) et $P(t)$ mesure l'effectif de la population au temps t .

1. On suppose que l'évolution de la population de grenouilles suit le modèle de Verhulst. Déterminez les valeurs des paramètres du modèle.
2. Déterminez le temps nécessaire pour que la population de grenouilles atteigne la moitié de la capacité biotique du lac.

Exercice 2. Une population de moustiques évolue selon la loi

$$P(t),$$

où la variable t indique le temps mesuré en mois (avec $t = 0$ correspondant au début de la journée d'aujourd'hui) et $P(t)$ mesure l'effectif de la population au temps t .

Vous savez que pendant les deux derniers mois la population a décuplé et que, il y a un mois, il y avait mille moustiques.

1. On suppose que l'évolution de l'effectif suit le modèle exponentiel de Malthus. Déterminez les paramètres du modèle.
 2. Déterminez à quel moment la population de moustiques va atteindre le milliard d'individus.
-

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES POUR S'ENTRAÎNER.

Exercice 3. La croissance d'une population de cafards est modélisée par la fonction

$$P(t),$$

où la variable t mesure le temps en mois (avec $t = 0$ correspondant à l'instant actuel) et $P(t)$ mesure l'effectif de la population au temps t .

Vous savez que :

- pendant les deux derniers mois la population a triplé,
- il y a 4 mois il y avait 3 cafards.

1. On suppose que l'évolution de l'effectif suit le modèle exponentiel de Malthus. Déterminez les paramètres du modèle.

2. Déterminez combien il y aura de cafards dans le milieu dans 2 mois.

3. Déterminez à quel moment la population de cafards est composée de 9 individus.

Exercice 4. Soient

$$f(x) = \frac{x^4 + 3xe^{-x} - 6}{x^3 + 2}; \quad g(x) = x - 3; \quad h(x) = \frac{x^7 e^{-2x} + 3x^2 - 9}{3(x+1)}; \quad k(x) = \frac{x^{-2} + x^2}{x + \ln x}.$$

Vrai ou faux :

- a) $f \sim_{+\infty} g \sim_{+\infty} h \sim_{+\infty} k$
- b) $f \sim_0 g \sim_0 h \sim_0 k$
- c) $f = o_{-\infty}(h)$