



Numerical approximation of fractional derivatives by orthogonal polynomials

Gaston Vergara-Hermosilla, Stefan Berres

► To cite this version:

Gaston Vergara-Hermosilla, Stefan Berres. Numerical approximation of fractional derivatives by orthogonal polynomials. 2021. hal-03259215

HAL Id: hal-03259215

<https://hal.science/hal-03259215>

Preprint submitted on 13 Jun 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE DERIVADAS FRACCIONARIAS POR POLINOMIOS ORTOGONALES

G. VERGARA-HERMOSILLA¹ AND S. BERRES²

RESUMEN. Las derivadas fraccionarias son un tema emergente con docenas de definiciones distintas, que a la vez provocan un debate en marcha sobre cuáles son las definiciones correctas y cuáles no, implicando que eventualmente la mayoría de trabajos con definiciones imprecisas resultarán obsoletos. Así mismo, no hay un consenso establecido sobre métodos numéricos robustos de propósito general para calcular derivadas fraccionarias, como típicamente los métodos son tejidos a mano para una ecuación y una definición particular; un enfoque prometedor utiliza polinomios ortogonales, dado su aplicabilidad versátil a distintos campos de procesamiento de datos. En esta contribución la derivada fraccionaria de Caputo de funciones reales integrables son aproximadas numéricamente por una descomposición de la función considerada por una serie de momentos ortogonales, que son establecidos por una clase de polinomios ortogonales. La metodología consiste en primero aproximar la función por una serie de momentos ortogonales, para luego asociar las ponderaciones calculadas de la función aproximada en el espacio de frecuencias con las derivadas fraccionarias de las derivadas analíticas de los momentos ortogonales calculados anteriormente. Documentamos la implementación numérica del método discreto y reportamos los errores relativos de las aproximaciones.

ÍNDICE

1. Introducción	1
2. Preliminares matemáticos	2
2.1. Aproximación de derivadas de orden arbitrario mediante polinomios ortogonales.	4
3. Aproximación numérica de derivadas fraccionarias por momentos ortogonales.	6
4. Resultados	7
Agradecimientos	8
Acknowledgments	8
Referencias	8

1. INTRODUCCIÓN

En una carta a L'Hopital, Leibniz se asombro sobre el significado de una derivada de orden $1/2$ [3]; Una primera aplicación de una media derivada (derivada de orden $1/2$) era

la solución de la ecuación integral del problema de Tautóchróna (Abel 1823, ver [3, 4]). Para mayores detalles ver las revisiones históricas [5] y más temporáneas [2, 4, 6].

Modelos de derivadas fraccionarias describen el fenómeno de difusión anómala, como por ejemplo la estructura interna de células vivientes [10], la descripción del movimiento de agua en pozos de petróleo altamente heterogéneos [8] o estrategias de diferentes especies de animales de encontrar comida [9]; en estos contextos, la llamada super-difusión es capaz de describir desplazamientos de larga distancia que interrumpen permanencias largas en un área local. La difusión anómala es una descripción en escala macro, que podrá ser formulada en micro-escala como movimiento estocástico de una partícula en términos de un vuelo de Levy. Con este concepto se podrán describir fenómenos de transporte por ejemplo en un plasma reñando [11] o en la física de fluidos [12], contaminantes en acuíferos [1] o partículas cargadas en sólidos amorfos [13, 14].

Según [18] un operador de derivadas fraccionarias debería cumplir con los siguientes criterios: el operador debe ser (1) lineal, (2) consistente con derivadas enteras no-negativas (incluyendo la derivada cero), (3) cumplir con la regla de Leibniz generalizada, es decir la regla de productos para una derivada de orden arbitraria, eventualmente no-entera. Hay una abundancia de definiciones diferentes [7], pero esencialmente las definiciones clásicas lo cumplen y muchas de los demás no las cumplen.

Se podrán identificar dos rutas para el cálculo fraccionario, lo que sigue con definiciones continuas y discretas, respetivamente [5]. La definición de integro-diferencial de Riemann-Liouville y diferencio-integral de Caputo, ambas reflejan la fórmula integral de Cauchy [4], que contemplan integrales impropias, mientras la definición de Grünwald-Letnikov es una representación algebraica con una sumatoria infinita [2].

Aún no hay un estándar definido como se debería calcular numéricamente derivadas fraccionarias de manera robusta. Las definiciones clásicas incluyen integrales singulares o sumas infinitas, que obstaculizan aproximaciones precisas y robustas a partir de ellos. Definiciones modernas típicamente no cumplen con los criterios mencionados. Dado que la mayoría de definiciones están diseñadas para funcionar bien con argumentos analíticos, ellos no dan una pista inmediata de cómo se podrán formular aproximaciones numéricas consistentes, eficientes y robustas. En esta contribución seguimos a la sugerencia de [15, 16] para un cálculo numérico de derivadas fraccionarias, donde la idea básica consiste en combinar aproximaciones de funciones polinomios ortogonales, como por ejemplo polinomios de Chebyshev de primer orden, con la derivada clásica de Caputo.

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

En esta sección, presentamos los preliminares de cálculo fraccional y algunas propiedades de polinomios desplazados de Jacobi. Sea m el menor entero que es mayor que v , entonces el operador de la derivada fraccionaria de Caputo de orden $v > 0$ es definido como:

$$(1) \quad D^v f(x) = \begin{cases} J^{m-v} D^m f(x) & \text{si } m-1 < v < m \in \mathbb{N}, \\ D^m f(x) & \text{si } \alpha = m \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

donde

$$J^v g(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-y)^{v-1} g(y) dy, \quad v > 0, x > 0.$$

La diferenciación fraccional de Caputo es una operación lineal,

$$D^v (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^v f(x) + \mu D^v g(x).$$

La derivada fraccional de Caputo de polinomios se basa en la siguiente fórmula

(2)

$$D^v x^c = \begin{cases} 0 & \text{para } c \in \mathbb{N} \wedge c < \lceil v \rceil, \\ \frac{\Gamma(c+1)}{c+1-v} x^{c-v} & \text{para } (c \in \mathbb{N} \wedge c \geq \lceil v \rceil) \vee (c \notin \mathbb{N} \wedge c > \lceil v \rceil). \end{cases}$$

Los polinomios de Jacobi son una sucesión de polinomios $\{P_i^{(\alpha, \beta)}(z)\}_{i \in \mathbb{N}}$, cada uno de grado i respectivamente definidos en el intervalo $[-1, 1]$, y asociados a los $\alpha, \beta > -1$. Para usar estos polinomios ortogonales en un intervalo acotado $(0, L)$, se introduce el cambio de variable $z = 2x/L - 1$. Estos polinomios son conocidos como polinomios de Jacobi desplazados y son denotados por $P_{L,i}^{(\alpha, \beta)}$. Además, estos satisfacen la relación de ortogonalidad

$$(3) \quad \int_0^L P_{L,k}^{(\alpha, \beta)} P_{L,k}^{(\alpha, \beta)} w_L^{(\alpha, \beta)} dx = h_k := \begin{cases} \frac{L^{\alpha+\beta+1} \Gamma(k+\alpha+1) \Gamma(k+\beta+1)}{(2k+\alpha+\beta+1) k! \Gamma(k+\alpha+\beta+1)} & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

donde $w_L^{(\alpha, \beta)}(x) = x^\beta (L-x)^\alpha$. Los polinomios de Jacobi desplazados con parámetros $\alpha, \beta > -1$ pueden ser generados mediante la relación de recurrencia

(4)

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + \beta + 2n - 1)(\alpha^2 - \beta^2 + x(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n - 2))}{2n(\alpha + \beta + n)(\alpha + \beta + 2n - 2)} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) - \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)(\alpha + \beta + 2n)}{n(\alpha + \beta + n)(\alpha + \beta + 2n - 2)} P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(x),$$

donde $P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1$ y $P_1^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\alpha + \beta + 2}{2}x + \frac{\alpha - \beta}{2}$.

En lo que sigue centraremos nuestro interés en distintos polinomios ortogonales desplazados, los cuales han sido usados por distintos autores para aproximar y obtener soluciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias [15, 16, 17]. Las familias de polinomios con los cuales trabajaremos son los polinomios desplazados de Chebyshev de primer tipo $T_{L,i}(x)$ y los polinomios desplazados de Jacobi $P_{L,i}^{(\alpha, \beta)}(x)$. A continuación presentaremos relaciones de dependencia entre ambos polinomios desplazados:

(5)

$$T_{L,i}(x) = \frac{i! \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(i + \frac{1}{2})} P_{L,i}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x).$$

Es bien conocido que es posible aproximar funciones $f(x)$ cuadrado integrable¹ mediante polinomios ortogonales, en efecto, si consideramos un conjunto finito de polinomios ortogonales $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_N(x)\}$ (arbitrarios) definidos en el intervalo $[a, b]$, contamos con el siguiente teorema:

Teorema 1. *Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Entonces existen coeficientes $c_0, c_1, \dots, c_N$ tales que la función*

$$E = \int_a^b w(x) \left(\sum_{n=0}^N c_n P_n(x) - f(x) \right)^2 dx$$

es mínima con respecto a dichos coeficientes.

Para demostrar este hecho se debe calcular el mínimo de E al derivar con respecto a cada c_i . Usando las relaciones de ortogonalidad de dichos polinomios se obtiene

$$(6) \quad c_k = \frac{1}{C_k} \int_a^b w(x) P_k(x) f(x) dx, \quad \forall k = 0, \dots, N,$$

donde $C_k = \int_a^b w(x) P_k^2(x) dx$. Esto nos permite proponer

$$(7) \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^N c_n P_n(x),$$

donde los coeficientes c_n , podrían ser calculados de antemano mediante (6).

Así, dada una función $f(x)$ cuadrado integrable en $(0, L)$, esta puede aproximarse en términos de polinomios de Jacobi desplazados como [17]

$$(8) \quad f(x) \approx \sum_{j=0}^N a_j P_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

donde los coeficientes a_j , de manera análoga a (6), están dados por

$$(9) \quad a_j = \frac{1}{h_j} \int_0^L w_L^{(\alpha,\beta)}(x) u(x) P_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x) dx, \quad j = 0, 1, \dots$$

2.1. Aproximación de derivadas de orden arbitrario mediante polinomios ortogonales. En lo que sigue se propone una forma de aproximación de derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo para funciones $f(x)$ cuadrado integrables en el intervalo $[a, b]$. Para esto $\mathcal{A}$ denotará el conjunto formado por todas las familias de polinomios ortogonales sobre el intervalo $[a, b]$ y $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es una familia de polinomios ortogonales arbitraria.

¹Una función real $f(x)$ es cuadrado integrable en $[a, b]$, si $\int_{(0,L)} |f(x)|^2 dx < \infty$.

Dada la linealidad del operador diferencial fraccionario de Caputo D^v con $v > 0$, es natural pensar que si tenemos una aproximación de la función $f(x)$ en $[a, b]$ por polinomios ortogonales, digamos

$$(10) \quad f(x) \approx \sum_{n=0}^m c_n P_n(x), \quad \text{entonces} \quad D^v f(x) \approx \sum_{n=0}^m c_n D^v P_n(x).$$

En (10) identificamos que un paso clave para aproximar $D^v f(x)$ es conocer explícitamente la derivada fraccionaria de Caputo de cada $P_n(x)$ en la familia de polinomios ortogonales en cuestión, lo que a su vez nos lleva de manera natural a lo siguiente: Si el polinomio es representado por una serie de potencia

$$(11) \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad \text{entonces} \quad D^v P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i D^v x^i,$$

y como manejamos de manera explícita $D^v x^i$, tenemos

$$(12) \quad D^v P_n(x) = \sum_{i=\lceil v \rceil}^n a_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1-v)} x^{i-v}.$$

Sean $v > 0$ y $p(x) \in \mathcal{A}$ un polinomio de grado menor que $\lceil v \rceil$. Entonces

$$(13) \quad D^v p(x) = 0.$$

Esto es una consecuencia directa de aplicar el operador fraccionario de Caputo a la expresión x^β con $\beta < \lceil v \rceil$.

Observación 1. La derivada fraccionaria de orden $v > 0$ en el sentido de Caputo para $P_n(x) \in \{P_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ está dada por

$$(14) \quad D^v P_n(x) = \sum_{i=\lceil v \rceil}^n A_{i,v} x^{i-v}.$$

donde $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, y $A_{i,v} = a_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1-v)}$. Así, la derivada fraccionaria de orden $v > 0$ en el sentido de Caputo para $P_n(x)$ puede aproximarse por

$$(15) \quad D^v P_n(x) \approx \sum_{j=0}^m B_{n,j} P_j(x), \quad \text{donde} \quad B_{n,j} = \sum_{i=\lceil v \rceil}^n A_{i,v} b_j.$$

La observación sigue al considerar la ecuación (14) y la aproximación

$$(16) \quad x^{i-v} \approx \sum_{j=0}^m b_j P_j(x).$$

Al aplicar las observaciones anteriores al caso de polinomios desplazados de Jacobi, se recupera el resultado de Doha et. al. en [17], el cual presentamos a continuación.

Theorem 2.1. *La derivada fraccionaria en el sentido de Caputo de orden v del polinomio de Jacobi desplazado de grado i esta dada por*

$$(17) \quad D^v P_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} S_v(i, j, \alpha, \beta) P_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad i = \lceil v \rceil, \lceil v \rceil + 1, \dots$$

donde

$$S_v(i, j, \alpha, \beta) = \sum_{k=\lceil v \rceil}^i \frac{(-1)^{i-k} L^{\gamma-v} \Gamma(j + \beta + 1) \Gamma(i + \beta + 1) \Gamma(i + k + \gamma)}{h_j \Gamma(j + \gamma) \Gamma(k + \beta + 1) \Gamma(i + \gamma) \Gamma(k - v + 1) (i - k)!} \\ \times \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{j-l} \Gamma(j + l + \gamma) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(l + k + \beta - v + 1)}{\Gamma(l + \beta + 1) \Gamma(l + k + \gamma - v + 1) (j - l)!}, \quad \gamma = \alpha + \beta + 1.$$

3. APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE DERIVADAS FRACCIONARIAS POR MOMENTOS ORTOGONALES.

En esta sección se presenta un algoritmo que permite hacer implementaciones numéricas de aproximaciones de derivadas fraccionarias de diversas funciones, basándonos en nuestras observaciones y en las familias de polinomios ortogonales vistas en las secciones anteriores.

Algoritmo 1. *Dada una función $f(x) \in L^2[a, b]$, obtendremos una aproximación de su derivada fraccionaria en el sentido de Caputo de orden v , siguiendo estos pasos:*

1. *Seleccione una familia de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ y un subconjunto de nodos $X = \{x_i\}_{i \in I} \subset [a, b]$.*
2. *Dada la aproximación*

$$f(x_i) \approx \sum_{n=0}^N c_n P_n(x_i), \quad \text{en cada } x_i \in X$$

escriba $F_i = f(x_i)$ y forme la matriz $F = [F_0 | F_1 | \dots | F_N]^T$, por otro lado considere

$$C = [c_0 | c_1 | \dots | c_N]^T, \quad P_i = [P_0(x_i), P_1(x_i), \dots, P_N(x_i)]^T, \quad P = [P_0 | P_1 | \dots | P_N],$$

y forme el sistema matricial

$$(18) \quad P \cdot C = F \quad \text{y obtenga} \quad C = P^{-1} \cdot F.$$

3. *Calcule $D^v P_i = [D^v P_0(x_i), D^v P_1(x_i), \dots, D^v P_N(x_i)]^T$ y obtenga*

$$(19) \quad D^v P = [D^v P_0 | D^v P_1 | \dots | D^v P_N].$$

4. *Calcule*

$$(20) \quad D^v F = (D^v P) \cdot C,$$

la cual corresponderá a la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo de orden v de la función $f(x)$ en $X = \{x_i\}_{i \in I} \subset [a, b]$.

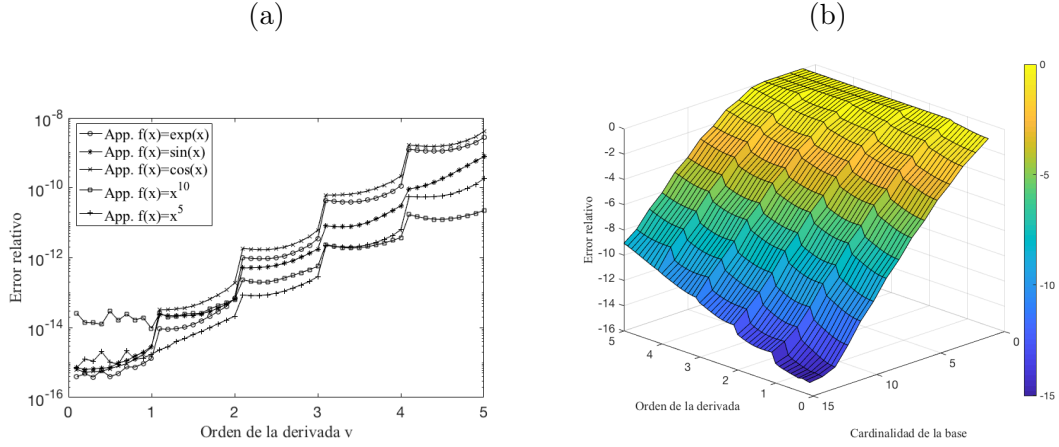


FIGURA 1. (a) Errores relativos de aproximaciones de derivadas fraccionarias de Caputo de orden $v \in [0, 5]$; y cardinalidad $N = 15$ de polinomios de Chebyshev de tipo 2, con funciones de ejemplo $\exp(x)$ ($\circ$), $\sin(x)$ ($*$), $\cos(x)$ ($\times$), x^{10} ($\square$) x^5 ($+$). (b) Logaritmo del error relativo para la base ($\mathcal{B}_7$) en función del orden de la derivada y de la cardinalidad de la base.

4. RESULTADOS

En esta sección ilustramos el rendimiento del algoritmo. Como ejemplos consideramos derivadas de Caputo de orden $v > 0$ con transformaciones del polinomio de Jacobi para una serie de funciones de ejemplo, donde las funciones y su derivada analítica de Caputo de orden $v > 0$ son mostradas en Tabla 1, (ver Gorenflo y Mainardi, [5]) donde $m = \lceil v \rceil$

i	$f_i(x)$	$D^v f(x)$
1	$\exp(x)$	$x^{m-v} E_{1,m-v+1}(x)$
2	$\cos(x)$	$\frac{1}{2} i^m x^m (E_{1,m-v+1}(ix) + (-1^m) E_{1,m-v+1}(-ix))$
3	$\sin(x)$	$-\frac{1}{2} i^{m+1} x^m (E_{1,m-v+1}(ix) - (-1^m) E_{1,m-v+1}(-ix))$
4	x^{10}	$x^{10-v} (\Gamma(11)) / (\Gamma(11-v))$
5	x^5	$x^{5-v} (\Gamma(6)) (\Gamma(6-v))$

CUADRO 1. Funciones de ejemplo con expresiones analíticas de derivada fraccionaria de Caputo.

y $E_{i,j}(x)$ es la función de Mittag-Leffler de 2 parámetros, que es una generalización de la función exponencial definida por una serie (Podlubny [2]).

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Consideramos vectores $V_e \in \mathbb{R}^n$, con $n = 500$ nodos equidistantes en el intervalo $[a, b]$, que representan una expresión analítica de las derivadas fraccionarias de la función ejemplo y los vectores $V_{app} \in \mathbb{R}^n$ de valores numéricos de expresiones analíticas aproximadas.

En Figura 1 (a), los errores relativos son calculado en la norma ℓ^2 por

$$\varepsilon_r = \frac{\|V_e - V_{app}\|_2}{\|V_e\|_2}, \quad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}, \quad \text{para cada } v \in \mathbb{R}^n.$$

de la aproximación de la derivada fraccionaria con distintos ordenes $v \in [0, 5]$ son comparados para los funciones de ejemplo en el intervalo $[0, 2]$; para aproximaciones de polinomios de Chebyshev de tipo 2 con cardinalidades $\{5, 10, 15\}$. Se puede apreciar un error relativo que crece como el orden de la derivada $v \in [0, 5]$ crece.

En Figura 1 (b) se visualiza la dependencia de error relativo (tomando el logaritmo con base 10) de derivadas fraccionarias de Caputo en dependencia del orden de la derivada y de la cardinalidad. Se puede apreciar que los errores relativos más pequeños ocurren cuando la cardinalidad de la base polinomial es más grande ($N = 15$).

AGRADECIMIENTOS

GVH es parcialmente financiado por la European Union's Horizon 2020 research y el proyecto de innovación Marie Skłodowska-Curie N° 765579. SB agradece al proyecto VIP-UCT Biomatemática: Análisis de Angiogénesis.

ACKNOWLEDGMENTS

The first author has been partially supported by the European Unions Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No.765579-ConFlex. The second author is supported by project VIP-UCT Biomatemática: Análisis de Angiogénesis.

REFERENCIAS

- [1] Gradshteyn I, Ryzhshik I., *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, New york, 1980.
- [2] Podlubny, I., *Fractional differential equations*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [3] Miller, K., Ross, B., *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1993.
- [4] Oldham K., Spanier J. *The fractional calculus*. Academic Press, New york-London, 1974.
- [5] Gorenflo, R., Mainardi F. *Essentials of fractional calculus*. Preprint submitted to MaPhySto Center, January, 2000.
- [6] Samko, S., Kilbas, A., Marichev, O., *Fractional integrals and derivatives*. Gordon and Breach Publishers, Amsterdam, 1993.
- [7] Oliveira, E., Tenreiro J. A., *A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral*. Mathematical Problems in Engineering Volume 2014, Article ID 238459, 6 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/238459>
- [8] D. Hernandez, M. Nunez-Lopez y J. X. Velasco-Hernandez, *Telegraphic double porosity models for head transient behaviour in naturally fractured aquifers*. *Pre-publicación*. (2006).
- [9] M. F. Shlesinger. *Search research*, Nature , Vol. 443 (2006).

- [10] M. Weiss, M. Elsner, F. Kartberg y T. Nilsson, *Anomalous subdiffusion is a measure for cytoplasmic crowding in living cells*, Biophysical Journal, Vol. 87 (2004), 7277-7289.
- [11] D. del Castillo-Negrete, *Non-difusive, non-local transport in uids and plasmas*, Nonlinear Processes Geophys , Vol. 17 (2010) 1-9.
- [12] T.H.Solomon, E. R. Weeks y H. L. Swinney, *Observation of anomalous dffusion and levy flights in a two-dimensional rotating flow*, Phys. Rev. Lett., Vol. 71 (1993) 3975-3978.
- [13] H. Sher, E. Montroll, *Anomalous transit time dispersion in amorphous solids*, Phys. rev. B, Vol. 7 (1975) 2455-2477.
- [14] H. Sher, M. F. Slesinger, J. T. Bendler, *Time-scale invariance in transport and relaxation*, Physics Today, Vol. 44 (1991) 26-34.
- [15] Doha, E. H., Bhrawy, A. H., Ezz-Eldien, S. S. (2011). *A Chebyshev spectral method based on operational matrix for initial and boundary value problems of fractional order*. Computers and Mathematics with Applications, 62(5), 2364-2373. doi:10.1016/j.camwa.2011.07.024
- [16] Doha, E.H.- Bhrawy, A.H., Ezz-Eldien, S.S. (2011). *Efficient Chebyshev spectral methods for solving multi-term fractional orders differential equations*. Applied Mathematical Modelling, 35(12), 5662-5672. doi:10.1016/j.apm.2011.05.011
- [17] Doha, E. H., Bhrawy, A. H., Baleanu, D., Ezz-Eldien, S. S. (2013). *On shifted jacobi spectral approximations for solving fractional differential equations*. Applied Mathematics and Computation, 219(15), 8042-8056. doi:10.1016/j.amc.2013.01.051
- [18] Trujillo, J., Tenreiro Machado J., *What is a fractional derivative?* Journal of Computational Physics 293 (2015) 4–13.

(G. Vergara-Hermosilla) INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BORDEAUX, UNIVERSITÉ DE BORDEAUX, 351, COURS DE LA LIBÉRATION 33405 TALENCE, FRANCE.

Email address: `gaston.vergara@u-bordeaux.fr`

(S. Berres) DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS Y FÍSICAS, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD CATÓLICA DE TEMUCO, CHILE.

Email address, S. Berres: `s.berres@uct.cl`