



**HAL**  
open science

## Outils logiques pour analyser les formulations des preuves dans des manuels de lycée

Christophe Hache, Zoé Mesnil

### ► To cite this version:

Christophe Hache, Zoé Mesnil. Outils logiques pour analyser les formulations des preuves dans des manuels de lycée. Séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM, Nov 2019, Paris, France. hal-03257750

**HAL Id: hal-03257750**

**<https://hal.science/hal-03257750>**

Submitted on 11 Jun 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# OUTILS LOGIQUES POUR ANALYSER LES FORMULATIONS DES PREUVES DANS DES MANUELS DE LYCEE

Christophe **HACHE**

LDAR Université Paris Diderot, IREM de Paris

[christophe.hache@u-paris.fr](mailto:christophe.hache@u-paris.fr)

Zoé **MESNIL**

LDAR Université Paris Diderot, IREM de Paris

[zoe.mesnil@u-paris.fr](mailto:zoe.mesnil@u-paris.fr)

## Résumé

Notre recherche en cours se place dans une réflexion plus globale concernant l'enseignement et l'apprentissage de la démonstration en mathématiques. Nous abordons ici ces questions à partir des problématiques langagières. La rédaction d'une preuve relève de choix personnels de l'auteur·e, celui-ci ou celle-ci étant influencé·e par des pratiques usuelles dans la communauté, tant dans les arguments choisis, la sélection des inférences mises en avant, que dans les formulations de ces arguments et de ces inférences. Nous présenterons l'usage d'un référent formel construit à partir de la déduction naturelle de Gentzen pour étudier les pratiques langagières des mathématiciens dans le cadre de la formulation de preuves. Nous montrons à quel point les preuves rédigées ne sont pas des textes formels. Ce constat nous paraît intéressant à l'heure où l'importance de la preuve est à nouveau soulignée dans les instructions officielles. Pour les élèves, l'apprentissage de la démonstration consiste entre autres à apprendre à rédiger. Dans cet apprentissage, les preuves écrites auxquelles sont confronté·e·s les élèves (par exemple celles de leur manuel) ont une place importante. Nous présenterons des analyses de preuves présentes dans des manuels de lycée.

## Mots clés

Didactique des mathématiques, pratiques langagières, logique, manuels scolaires, preuves

La recherche en didactique des mathématiques sur l'enseignement et l'apprentissage de la preuve est riche de nombreuses entrées pour traiter de ces questions, comme en témoigne par exemple les recensements bibliographiques de *La lettre de la preuve*<sup>1</sup>. Au sein de cette communauté de recherche, différentes positions existent quant au rôle de la logique mathématique pour cet enseignement / apprentissage de la preuve (voir par exemple dans Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp et Tanguay, 2012). En ce qui nous concerne, la logique mathématique, à laquelle nous avons été formé·e·s lors de nos études de mathématiques, est un outil d'analyse, de formation, et un objet d'étude. Influencé·e·s par l'approche de Daniel Lacombe, suite à la ré-introduction de notions de logique dans les programmes de lycée, étudiée dans la thèse de Zoé Mesnil (Mesnil, 2014), nous proposons dès 2009, avec le groupe Logique de l'IREM de Paris, des formations à la logique à partir d'une étude naïve du langage mathématique (Hache et Mesnil, 2012). Nous nous inspirons pour cela de la notion de *langage* en logique mathématique : un langage (par exemple le langage des prédicats) est un ensemble de symboles à partir duquel sont construites des expressions (des termes, c'est-à-dire des noms d'objets, des formules, c'est-à-dire des propositions). Ce langage formel de la logique

1 <http://lettredelapreuve.org/>

mathématique nous sert à interpréter et commenter les formulations courantes utilisées dans notre activité mathématique. Nous distinguons alors *discours mathématique* et *langage mathématique* :

J'appelle discours mathématique l'ensemble des phrases (...) [prononcées] (...) dans un contexte où une ou des personnes font des mathématiques. Parmi elles, certaines sont des phrases qui disent des faits sur les objets mathématiques. Ce sont ces phrases, et certains de leurs éléments, qui constituent le langage mathématique. (Mesnil, 2014, p.110)

Dans cette définition, le langage, ou le discours, est regardé essentiellement comme un produit fini, indépendamment de la personne qui le produit, et indépendamment du contexte dans lequel il est produit. D'autres influences, notamment les conférences de Jean-Paul Bronckart et de Maryse Rebière lors de l'école d'été de 2011 (Bronckart 2013, Rebière 2013), ou encore les travaux du groupe LEMME<sup>2</sup> qui débutent cette même année, nous permettent d'enrichir cette vision, en considérant le langage comme résultant d'une activité, à la fois individuelle et sociale. De l'étude du langage mathématique, nous passons alors à l'étude des pratiques langagières des mathématicien·e·s, et nous revenons à l'étude de l'enseignement et de l'apprentissage de la preuve en prenant comme hypothèse de travail qu'une partie de cet enseignement / apprentissage passe par l'acculturation à ces pratiques langagières.

Dans un premier temps, nous précisons notre entrée langagière, puis nous présenterons notre utilisation de la déduction naturelle de Gentzen comme outil d'analyse des pratiques langagières des mathématicien·e·s en matière de formulation de preuve. Nous présenterons ensuite un travail en cours sur l'utilisation de cet outil pour l'analyse des preuves présentes dans des manuels de seconde.

## **I. LANGAGE, PRATIQUES LANGAGIERES, FORMULATIONS**

### **1. Langage et pratiques langagières en mathématiques**

Précisons donc notre approche du langage (développée dans Hache 2019). Nous commençons, comme le fait Maryse Rebière (Rebière 2013), par distinguer langue et langage. La langue est un réservoir de signes, de mots et de règles d'usage, y compris une grammaire par exemple. La langue est stable, en lente évolution. Le langage est la capacité humaine de s'exprimer à l'aide d'une langue. Nous soulignons deux dimensions du langage : une dimension individuelle subjective, et une dimension sociale.

Le langage n'est pas un simple média d'une pensée qui serait constituée par ailleurs, un simple tuyau, de simples bruits que l'on fait avec sa bouche. Le langage est constitutif de la pensée et de l'activité. Le langage est un outil de construction et de modification des représentations individuelles, et sociales. Le langage est ainsi un objet central comme levier dans l'enseignement et l'apprentissage.

Tout groupe social développe des pratiques qui lui sont propres. Par exemple, quand nous commençons par remercier les organisatrices de nous avoir invité, le public attend que la conférence débute, quand Faïza Chellougui (conférence précédente) remercie le public de son attention, le public applaudit la conférencière, et quand nous faisons un hommage au travail de Laetitia Gourmand en début de conférence, le public applaudit Laetitia. C'est ainsi que cela fonctionne, si une personne applaudissait quand nous remercions Julia Pilet et Céline Vendeira tout le monde la regarderait, étonné·e. Ce sont des pratiques que l'on acquiert sans enseignement (on peut imaginer un ou une étudiant·e qui assiste à une première conférence et qui constate que les personnes présentant les conférences sont applaudi·e·s). Les groupes

2 <https://www.ldar.website/lemme>

sociaux développent des pratiques de ce type, y compris des pratiques langagières. On parlera ainsi des pratiques langagières des mathématicien·ne·s.

Rapidement, dans les recherches qui ont analysé et décrit ces pratiques langagières des mathématicien·ne·s, on dépasse l'idée d'une rigueur formelle dans l'usage des mots, pour aller vers la description de la complexité des pratiques. Colette Laborde (Laborde, 1982) étudie l'articulation entre l'usage de la langue naturelle et l'usage des symboles mathématiques dans l'écriture des mathématiques, et montre que l'usage simultané de ces deux codes, très courant, amène à des adaptations de la syntaxe de l'un ou de l'autre. Par exemple, nous écririons sans réserve «  $n^2 = k^2$  est un nombre pair », au lieu de «  $n^2$ , qui est égal à  $4k^2$ , est un nombre pair », sans être gêné·e·s par le fait que cette contraction rend difficile l'identification du sujet de « est ». Nous jouons en fait avec ces adaptations, car dans notre exemple, c'est bien à la fois  $n^2$  et  $4k^2$  qui sont pairs. Et même plus précisément, c'est parce que  $4k^2$  est pair (comme multiple de 4), et parce que  $n^2$  est égal à  $4k^2$ , que  $n^2$  est pair. Il y a donc un raisonnement implicite qui est porté par cet usage de la langue, familier à qui maîtrise les pratiques langagières de la communauté, sans doute moins à qui les découvre. D'autres travaux ont étudié les implicites dans les expressions utilisées en mathématiques (Adda, 1975, Durand Guerrier, 1999, Hache & Forgeux, 2018). Par exemple quand on dit « Si un nombre est premier, alors il est impair », de même que pour les usages des applaudissements évoqués ci-dessus, chacun·e va se dire dans la salle « Mais c'est faux ! », car il ou elle perçoit que cette phrase est implicitement quantifiée universellement (on parle de tous les nombres... y compris 2 donc).

## 2. Premier exemple d'analyse : formulation de proposition mathématique

Notre première unité d'analyse de ces pratiques langagières est la proposition mathématique. Voici quelques exemples de propositions et la façon dont nous les analysons.

«  $n$  est un nombre qui s'écrit sous la forme  $2k$  avec  $k$  entier »

C'est une formulation dans laquelle il n'y a pas un quantificateur explicite. La présence du quantificateur, existentiel, est marquée par le « avec ». Dans la formulation suivante la quantification est plus claire :

« Il existe un nombre  $k$  tel que  $n = 2k$  »

Voici un exemple extrait de la thèse de Rakatovoavy (1983) qui avait travaillé avec Daniel Lacombe. Elle donne comme exemple

« Il existe un plan contenant un point donné et parallèle à un plan donné »

Elle travaille sur la présence des mots tels que « donné ». La formalisation logique de cette proposition est la suivante :  $\forall P \forall M \exists Q (P // Q) \wedge (M \in Q)$ . Les quantifications universelles sur le plan  $P$  et le point  $M$  viennent avant la quantification existentielle sur le plan  $Q$  (d'un point de vue logique la quantification de  $Q$  est incluse dans le champ des quantifications universelles), alors que, dans l'énoncé, la quantification existentielle vient d'abord. Le mot « donné » sert à préciser des indications de lecture, de façon à rapprocher la formulation « en mots » à la structure logique de la proposition qui est sous-jacente. Il n'y a bien sûr aucune raison que cette fonction soit claire pour quelqu'un qui découvre cet usage.

Notre exemple suivant concerne une ambiguïté, il est emprunté à l'équipe du CREM<sup>3</sup> de Nivelles. Considérons ces deux propositions :

« Les multiples de 3 et de 4 sont des multiples de 12 »

« Les multiples de 6 et de 9 sont des multiples de 3 »

Les deux propositions sont vraies. Elles ont la même structure syntaxique, elles sont identiques (aux valeurs numériques près). On ne les lit pourtant pas de la même façon. La formalisation logique nous sert à mettre en lumière, à souligner ces différences :

$$\forall n \in \mathbb{N} [(3|n \text{ ET } 4|n) \Rightarrow 12|n]$$

$$\forall n \in \mathbb{N} [(6|n \Rightarrow 3|n) \text{ ET } (9|n \Rightarrow 3|n)]$$

Ce sont les connaissances mathématiques du lecteur ou de la lectrice qui lui permettent de comprendre d'une façon ou d'une autre chacune de ces phrases.

Nous terminons cette partie par deux derniers exemples montrant un autre type de complexité. Dans les textes mathématiques il n'y a pas seulement des propositions énoncées simplement, de façon isolée comme ci-dessus. Souvent leur formulation est mêlée avec des mots qui ne relèvent pas de la proposition mathématique elle-même, mais qui témoignent d'une intention de l'auteur·e qui l'a énoncée. Par exemple :

« 2 est premier, mais pair »

Cette phrase pourrait être prononcée par une personne qui voudrait montrer que l'implication « Si un nombre est premier, alors il est impair » est fausse. Le « mais » porte une intention. La personne ne dit pas simplement « 2 est premier et pair », il énonce cette propriété et veut souligner le fait qu'elle invalide la proposition « Si un nombre est premier, alors il est impair ». Dans cet autre exemple :

**Remarque :** Deux nombres impairs consécutifs peuvent s'écrire aussi  $2k+1$  et  $2k+3$  avec  $k$  entier et  $k \geq 0$ .

Le mot « aussi » n'a pas de rôle logique, il place la proposition dans un discours plus large. L'auteur·e fait le lien avec une autre proposition.

Après ce type de travail sur les propositions deux élargissements ont été envisagés : tout d'abord un élargissement de la formulation de proposition à la formulation de preuves, mais également un élargissement du contexte pour passer des discours de mathématicien·ne·s aux formulations auxquelles sont confrontées les élèves en classe.

## II. ANALYSES DE FORMULATIONS DE PREUVES ECRITES PAR DES MATHEMATICIEN·NE·S, DEDUCTION NATURELLE

Nous présentons tout d'abord nos outils d'analyse de formulation de preuves. Nous allons procéder à partir d'exemples de textes de preuves issus d'une expérimentation menée auprès de collègues mathématiciens auxquels nous avons demandé de rédiger une preuve de

« Un nombre et son carré ont toujours même parité »

Il leur était demandé d'imaginer écrire une preuve pour une personne ayant le niveau d'un étudiant de première année d'Université. Nous avons obtenu une vingtaine de réponses.

### 1. Méthodologie d'analyse, adaptation de la déduction naturelle de Gentzen

L'objectif est donc d'analyser des formulations de preuves de mathématicien·ne·s, sur le même principe de l'utilisation du calcul des prédicats pour l'analyse des propositions : en ayant une preuve formelle de référence pour pouvoir analyser les formulations en mots au regard de cette référence. Pour ce faire nous utilisons la déduction naturelle de Gentzen (Hache & Mesnil, 2015). C'est un outil logique proche de la déduction naturelle de Copi<sup>4</sup>. D'autres outils sont utilisés en didactique des mathématiques, signalons notamment les travaux de Thomas Barrier autour de la logique dialogique (Barrier, 2016).

La déduction naturelle de Gentzen nous permet : de distinguer clairement ce qui est dit en mots et la preuve formelle (de même que la déduction naturelle de Copi), de différencier chaque pas de déduction, et de présenter la preuve sous forme d'un arbre (à la différence de la présentation de Copi). Dans le cadre de ces analyses de formulations nous avons adapté les notations de Gentzen, nous le précisons le cas échéant.

4 Utilisée par Faïza Chellougui, voir Chellougui 2020 dans ces actes.

Nous présentons le principe de notation sur deux pas de déduction très simples. Chaque pas de déduction est un nœud de l'arbre. Le pas suivant

$$\frac{P, Q}{P \wedge Q} / \wedge$$

exprime le fait que si je sais démontrer  $P$  et  $Q$ , alors je sais démontrer la propriété  $P \wedge Q$ . Pour avoir une preuve de  $P \wedge Q$ , il suffit d'avoir une preuve de  $P$  et une preuve de  $Q$ . Ce pas de déduction s'appelle l'introduction du connecteur  $\wedge$  (connecteur ET). On utilise également un pas de déduction élémentaire pour l'élimination du connecteur  $\wedge$  (l'utilisation dans une preuve d'une propriété de la forme  $P \wedge Q$ ) :

$$\frac{P \wedge Q}{P} \wedge /$$

Ce pas traduit le fait que si je sais prouver la conjonction  $P \wedge Q$  alors je sais prouver  $P$ <sup>5</sup>. Il y a ainsi deux (ou trois) pas de déduction pour chaque connecteur ( $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\neg$ ) ou quantificateur ( $\forall$ ,  $\exists$ ). Le nombre de pas de déduction élémentaires est ainsi relativement réduit (une dizaine). Avant de poursuivre, soulignons ici la polysémie du mot *preuve* dans nos propos. Il désigne à la fois

- Une formulation particulière, un texte de preuve, mais aussi l'idée générale. On pourrait par exemple dire « la preuve de untel est très courte ».
- L'idée générale, la structure de la preuve. On pourrait dire par exemple « c'est la preuve par disjonction des cas de la propriété ».
- L'objet formel formulé ici à l'aide de la déduction naturelle.

## 2. Présentation sur un exemple

Pour préciser ces différents pas, nous allons nous appuyer sur le texte de preuve suivant :

—Auteur 2—

On va établir successivement les propriétés suivantes :

- (1) Si un nombre entier est pair, son carré l'est aussi.
- (2) Si un nombre entier est impair, son carré l'est aussi.

Preuve de (1). Soit  $n$  un entier pair. Alors il existe un entier  $p$  tel que  $n = 2p$ . Il vient alors  $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$ . Ainsi  $n^2$  est pair.

Preuve de (2). Soit  $n$  un entier impair. Alors il existe un entier  $p$  tel que  $n = 2p+1$ .

Il vient alors  $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ . Ainsi  $n^2$  est impair.

Cette preuve est basée sur une interprétation de «  $a$  et  $b$  ont même parité » comme «  $a$  pair  $\Leftrightarrow b$  pair », et l'équivalence est démontrée par la démonstration de deux implications. Pour analyser différentes formulations de cette preuve, nous avons construit effectivement l'arbre de la preuve formelle. Pour analyser un texte isolé nous ne le faisons qu'en cas de soucis, localement (sur un pas de déduction par exemple).

Nous allons tout d'abord nous intéresser à ce que l'auteur·e appelle « Preuve de (1) ». Nous représentons cette preuve de la façon suivante :

$\mathcal{A}$  (preuve du fait que pour tout entier  $n$ , si  $n$  pair, alors  $n^2$  pair) :

$$\begin{array}{c} \textcircled{n} \\ \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \textcircled{p} \\ \frac{n = 2p}{n^2 = 2(2p^2)} \quad \frac{[2p^2/q]}{\exists q n^2 = 2q} / \exists \end{array} \right] \\ \frac{\exists k n = 2k}{\exists q n^2 = 2q} \quad \textcircled{\exists} / \end{array} \right] \\ \frac{(\exists k n = 2k) \Rightarrow (\exists q n^2 = 2q)}{\forall x [(\exists k x = 2k) \Rightarrow (\exists q x^2 = 2q)]} / \forall \end{array} \right] / \Rightarrow \end{array}$$

5 Il existe en fait deux éliminations de  $\wedge$  : ce pas-ci, et celui qui permet de déduire  $Q$  de  $P \wedge Q$ .

L'arbre se lit de haut en bas et de l'extérieur vers l'intérieur. C'est en tout cas de cette façon que nous allons le présenter.

### Introduction d'un quantificateur universel

La dernière étape (non explicite) est une introduction d'un quantificateur universel. L'auteur·e a prouvé pour un certain  $n$  que  $(\exists k n = 2k) \Rightarrow (\exists q n^2 = 2q)$ , il ou elle en déduit  $\forall x [(\exists k x = 2k) \Rightarrow (\exists q x^2 = 2q)]$ . Ceci correspond à la dernière étape de l'arbre. Cette étape est préparée par l'introduction d'une variable « fraîche » ou « propre » (non utilisée jusque-là) à un moment opportun.

Dans le texte, la seule trace de ce pas de déduction est l'introduction de la variable  $n$  en début de preuve. On peut souligner que, très classiquement, l'auteur·e n'explique pas la conclusion de son raisonnement (le fait que (1) a été prouvé). C'est à la charge du lecteur ou de la lectrice de compléter.

—Auteur 2—  
On va établir successivement les propriétés suivantes :  
(1) Si un nombre entier est pair, son carré l'est aussi.  
(2) Si un nombre entier est impair, son carré l'est aussi.

Preuve de (1). Soit  $n$  un entier pair. Alors il existe un entier  $p$  tel que  $n = 2p$ . Il vient alors  $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$ . Ainsi  $n^2$  est pair.  
Preuve de (2). Soit  $n$  un entier impair. Alors il existe un entier  $p$  tel que  $n = 2p+1$ . Il vient alors  $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ . Ainsi  $n^2$  est impair.

A (preuve du fait que pour tout entier  $n$ , si  $n$  pair, alors  $n^2$  pair) :

L'introduction d'un quantificateur universel se structure en effet ainsi :

Introduction du quantificateur  $\forall$  :

$$\frac{\begin{array}{c} \textcircled{b} \\ \vdots \\ P(b) \end{array}}{\forall x P(x)} \forall$$

$\textcircled{b}$  symbolise l'introduction d'une variable « propre » (ici  $b$ ) en vue de l'introduction d'un quantificateur universel. Dans une preuve rédigée cela correspond à une présentation de variable. Pendant toute la durée du pointillé la variable  $b$  est libre.

### Introduction d'une implication

Si on entre davantage dans la preuve, il a donc fallu prouver l'implication  $(\exists k n = 2k) \Rightarrow (\exists q n^2 = 2q)$ . Pour prouver une implication  $P \Rightarrow Q$ , on suppose  $P$  et on prouve  $Q$ . En faisant cela on ne dit pas que  $P$  est vraie, on le suppose temporairement.

Introduction du connecteur  $\Rightarrow$  :

$$\frac{\left[ \begin{array}{c} P \\ \vdots \\ Q \end{array} \right]}{P \Rightarrow Q} \Rightarrow$$

Les crochets symbolisent le même type de double niveau de condition : si [si j'ai une démonstration de  $P$  alors j'ai une démonstration de  $Q$ ], alors j'ai une démonstration de  $P \Rightarrow Q$ .

NB : je n'ai pas nécessairement de démonstration de  $P$ , ni de  $Q$ .

Ici on retrouve les traces suivantes de ce pas de déduction. La proposition  $P$  est «  $n$  est pair », la proposition  $Q$  est «  $n^2$  est pair ».

—Auteur 2—  
On va établir successivement les propriétés suivantes :  
(1) Si un nombre entier est pair, son carré l'est aussi.  
(2) Si un nombre entier est impair, son carré l'est aussi.

Preuve de (1). Soit  $n$  un entier pair. Alors il existe un entier  $p$  tel que  $n = 2p$ . Il vient alors  $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$ . Ainsi  $n^2$  est pair.  $\textcircled{Q}$   
Preuve de (2). Soit  $n$  un entier impair. Alors il existe un entier  $p$  tel que  $n = 2p+1$ . Il vient alors  $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ . Ainsi  $n^2$  est impair.

A (preuve du fait que pour tout entier  $n$ , si  $n$  pair, alors  $n^2$  pair) :

On peut souligner ici que l'auteur·e écrit « Soit  $n$  un entier pair » : il ou elle fait en même temps l'introduction de la variable  $n$  (début du pas de déduction correspondant à l'introduction de la proposition universellement quantifiée) et l'introduction de l'hypothèse temporaire  $P$  (pour la preuve de l'implication). L'auteur·e aurait pu formuler en séparant les deux étapes (« Soit  $n$  un entier, supposons que  $n$  est pair »), la formulation est moins rapide, mais pourrait être utilisée, par exemple dans une situation où on veut être sûr·e que le lecteur ou la lectrice saisit bien les étapes du raisonnement. C'est ce type d'usage que l'on essaye de décrire.

Comme pour le pas précédent, l'auteur·e n'explique pas la conclusion du pas : il ou elle ne conclut pas « J'ai prouvé  $P \Rightarrow Q$  », il ou elle dit juste qu'il ou elle a prouvé  $Q$  (en supposant  $P$ ). Là aussi c'est au lecteur ou à la lectrice de compléter.

### Élimination du quantificateur existentiel

Utiliser la propriété «  $n$  est pair » ( $\exists k \ n = 2k$ ) dans une preuve, c'est éliminer un quantificateur universel. Le pas de déduction correspondant est le suivant :

Élimination du quantificateur  $\exists$  :

$$\frac{\exists x P(x) \quad \left[ \begin{array}{c} \odot a \quad P(a) \\ \vdots \\ M \end{array} \right]}{M} \text{ } \exists /$$

$\odot$  symbolise l'introduction d'une variable « propre » (ici  $a$ ) en vue d'éliminer un quantificateur existentiel. Dans une preuve rédigée cela correspond à une présentation de variable. Pendant toute la durée du pointillé la variable  $a$  est libre.

Les crochets ont la même signification que ci-dessus (à l'intérieur du crochet les déductions peuvent utiliser le fait que la proposition  $P(a)$  est vraie).

Je sais ici que  $\exists x P(x)$  est vraie. J'introduis une variable fraîche  $a$  et je suppose temporairement que  $P(a)$  est vraie. Sous cette hypothèse je prouve  $M$ . Dans ce contexte j'ai une preuve de  $M$  (à partir de  $\exists x P(x)$ ).

Dans notre preuve :

—Auteur 2—

On va établir successivement les propriétés suivantes :

- (1) Si un nombre entier est pair, son carré l'est aussi.
- (2) Si un nombre entier est impair, son carré l'est aussi.

Preuve de (1). Soit  $n$  un entier pair. Alors il existe un entier  $p$  tel que  $n = 2p$ . Il vient alors  $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$ . Ainsi  $n^2$  est pair. **M**

Preuve de (2). Soit  $n$  un entier impair. Alors il existe un entier  $p$  tel que  $n = 2p+1$ . Il vient alors  $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ . Ainsi  $n^2$  est impair.

$\mathcal{A}$  (preuve du fait que pour tout entier  $n$ , si  $n$  pair, alors  $n^2$  pair) :

$$\frac{\left[ \begin{array}{c} \odot n \\ \left[ \begin{array}{c} n = 2p \\ n^2 = 2(2p^2) \quad [2p^2/q] \\ \exists q \ n^2 = 2q \quad \mathbf{M} \end{array} \right] \\ \exists k \ n = 2k \end{array} \right]}{\left[ \begin{array}{c} \exists q \ n^2 = 2q \quad \mathbf{M} \\ (\exists k \ n = 2k) \Rightarrow (\exists q \ n^2 = 2q) \end{array} \right]} \text{ } \Rightarrow /$$

$$\frac{}{\forall x [(\exists k \ x = 2k) \Rightarrow (\exists q \ x^2 = 2q)]} \text{ } \forall /$$

À cette étape de la preuve l'auteur·e sait que  $n$  est pair (il ou elle l'a supposé temporairement à l'étape précédente), il ou elle introduit une variable fraîche  $p$ , et va supposer que  $n = 2p$ . Il ou elle prouve ensuite  $M$  : «  $n^2$  est pair ». Lorsque l'auteur·e écrit « alors il existe un entier  $p$  tel que  $n = 2p$  », d'une part il ou elle reformule le fait que  $n$  est pair, et, d'autre part, il ou elle introduit une variable  $p$  et il ou elle affirme que  $n = 2p$ . L'affirmation de l'existence d'un entier  $p$  tel que  $n = 2p$  sert également à introduire une variable. Condenser ces deux actions au sein d'une même formulation peut poser problème au moins dans un cas : si nous avons par exemple deux entiers pairs  $a$  et  $b$  et que nous voulions éliminer les quantifications existentielles correspondantes, il faut introduire deux variables fraîches différentes, soit en les nommant différemment dès l'affirmation de leur existence ( $\exists k \ a = 2k$  et  $\exists k' \ b = 2k'$ ), ce qui est la pratique la plus courante, à laquelle les mathématicien·ne·s sont habitué·e·s, mais pas forcément les étudiant·e·s (Chellougui, 2006), soit en séparant le rappel de la formulation sous forme de propriété quantifiée existentiellement ( $\exists k \ a = 2k$  et  $\exists k \ b = 2k$ ) de l'introduction des variables (considérons alors  $k$  tel que  $a = 2k$ , et  $k'$  tel que  $b = 2k'$ ).

## Introduction du quantificateur existentiel

La proposition  $M$  qu'il faut prouver dans le pas précédent est, elle-même, une propriété quantifiée existentiellement. La preuve d'une telle propriété est simple à présenter.

Introduction du quantificateur  $\exists$  :

$$\frac{P(t) \text{ [t/x]}}{\exists x P(x)} / \exists$$

$t$  est un terme ou une variable libre quelconque dans le contexte (la variable  $x$  est ici muette).

La notation  $[t/x]$  explicite la substitution en jeu. Il n'est en effet pas toujours

évident de « voir » le terme  $t$ . Un exemple simple :  $\frac{n = 2 \cdot (2h^2) \text{ [2h^2/x]}}{\exists x n = 2x} / \exists$ .

Pour prouver qu'il existe  $x$  tel que  $P(x)$  il suffit de prouver  $P(t)$ , pour  $t$  un terme quelconque (ici par exemple  $2h^2$ ).

—Auteur 2—

On va établir successivement les propriétés suivantes :

(1) Si un nombre entier est pair, son carré l'est aussi.

(2) Si un nombre entier est impair, son carré l'est aussi.

Preuve de (1). Soit  $n$  un entier pair. Alors il existe un entier  $p$  tel que  $n = 2p$ . Il vient alors  $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$ . Ainsi  $n^2$  est pair.

Preuve de (2). Soit  $n$  un entier impair. Alors il existe un entier  $p$  tel que  $n = 2p+1$ . Il vient alors  $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ . Ainsi  $n^2$  est impair.

$\mathcal{A}$  (preuve du fait que pour tout entier  $n$ , si  $n$  pair, alors  $n^2$  pair) :

$$\frac{\left[ \frac{\left[ \frac{n = 2p}{n^2 = 2(2p^2) \text{ [2p^2/q]}}{\exists q n^2 = 2q} / \exists \right]}{\exists k n = 2k} / \exists \right]}{(\exists k n = 2k) \Rightarrow (\exists q n^2 = 2q)} / \Rightarrow$$

$$\forall x [(\exists k x = 2k) \Rightarrow (\exists q x^2 = 2q)] / \forall$$

Dans le texte le pas de déduction est peu visible. L'auteur écrit simplement «  $n = 2 \times 2p^2$ , ainsi  $n^2$  est pair » (la formulation avec la quantification existentielle n'est pas donnée, l'auteur pourrait également préciser la substitution «  $n = 2 \times 2p^2$ , on a donc prouvé que  $n^2$  s'écrit sous la forme  $2n'$  avec  $n' = 2p^2$ , ainsi  $n^2$  est pair »).

### Preuve de (2)

La structure de la « preuve de (2) » est identique à la « preuve de (1) » :

$\mathcal{B}$  (preuve du fait que pour tout entier  $n$ , si  $n$  impair, alors  $n^2$  impair) :

$$\frac{\left[ \frac{\left[ \frac{n = 2p + 1}{n^2 = 2(2p^2 + 2) + 1 \text{ [2p^2+2/q]}}{\exists q n^2 = 2q + 1} / \exists \right]}{\exists k n = 2k + 1} / \exists \right]}{(\exists k n = 2k + 1) \Rightarrow (\exists q n^2 = 2q + 1)} / \Rightarrow$$

$$\forall x [(\exists k x = 2k + 1) \Rightarrow (\exists q x^2 = 2q + 1)] / \forall$$

Nous soulignons la forme exactement identique du texte pour les deux preuves. Cela peut être un choix de l'auteur·e pour souligner cette proximité, ou un effet d'un copié-collé utilisé pour une rédaction plus rapide...

### Remarques

Nous ne détaillons pas ici l'utilisation des marqueurs d'inférence : l'auteur utilise « alors » (utilisation de la définition d'un nombre pair, utilisation de règles de calculs algébrique) et « ainsi » (pour introduire sa conclusion).

Nous n'avons pas non plus détaillé la justification des calculs algébriques (qui correspondent aussi à l'utilisation de théorèmes universellement quantifiés).

La fin de la démonstration (une fois les propriétés (1) et (2) prouvées) se modéliserait de la façon suivante. Toute cette partie de la preuve (utilisation d'une contraposée notamment) n'apparaît pas dans le texte, si ce n'est sous la forme de « on va établir successivement les propriétés suivantes » (qui devrait guider le lecteur ou la lectrice vers le fait qu'établir ces deux propriétés permet de conclure la propriété voulue, que ce n'est pas un oubli de l'auteur·e).

Les variables prennent leurs valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

$$\frac{\begin{array}{c} \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \\ \hline (\forall x (x \text{ pair} \Rightarrow x^2 \text{ pair})) \wedge (\forall x (x \text{ impair} \Rightarrow x^2 \text{ impair})) \\ \forall x [(x \text{ pair} \Rightarrow x^2 \text{ pair}) \wedge (x \text{ impair} \Rightarrow x^2 \text{ impair})] \quad (*) \\ \forall x [(x \text{ pair} \Rightarrow x^2 \text{ pair}) \wedge (x^2 \text{ pair} \Rightarrow x \text{ pair})] \quad (**) \\ \forall x [x \text{ pair} \Leftrightarrow x^2 \text{ pair}] \quad (*) \end{array}}{\quad} \wedge/\wedge$$

Les quatre lignes correspondent à des équivalences logiques ou des réécritures.

(\*) : utilisation de règles de transformation des formules logiques (calcul des prédicats).

(\*\*) idem (contraposée) + utilisation de « pair  $\Leftrightarrow$  non impair ».

Soulignons qu'il n'est pas spécifique à cet auteur·e de ne pas indiquer les conclusions de ses pas de déductions. Il est assez remarquable ici que dans la structure globale de la preuve, une partie importante n'est pas dite (partie encadrée dans l'arbre ci-dessous) :

### Comparaison avec un autre texte

Regardons maintenant cet autre texte, et comparons avec le texte précédent :

—Auteur 8—

Soit  $n$  un nombre entier. Il s'agit de démontrer l'équivalence suivante :

$$n \text{ est pair} \iff n^2 \text{ est pair.}$$

Démontrons ces deux implications.

$\Rightarrow$  Si  $n$  est pair, il existe un nombre entier  $k$  tel que  $n = 2k$ . Alors

$$n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$$

est un nombre pair.

$\Leftarrow$  Montrons cette implication par contraposée. Supposons  $n$  impair, il existe alors un nombre entier  $k$  tel que  $n = 2k + 1$ . Alors

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

est un nombre impair.

On a donc montré que  $n$  est pair si et seulement si  $n^2$  l'est, et donc aussi que  $n$  est impair si et seulement si  $n^2$  est impair.

La structure de la preuve est la même : preuve de deux implications. Mais les deux auteur·e·s ont fait des choix différents. L'auteur·e 8 est plus explicite sur certains points passés sous silence par l'auteur·e 2 (explicitation de l'équivalence, explicitation du fait qu'une des deux implications est montrée par contraposée). On peut noter également que l'auteur·e 8 n'a pas choisi de garder la même syntaxe pour les deux parties (pair / impair), ce qu'avait fait l'auteur·e 2.

### 3. Conclusion

La rédaction d'une preuve relève de choix personnels de la personne qui la rédige, qui a ainsi un rôle d'auteur·e, influencé·e par des pratiques classiques dans la communauté. Ces choix concernent les arguments mathématiques, la structure de la preuve, la sélection des inférences mises en avant, mais également les formulations de ces arguments et de ces inférences, dans l'ordre d'apparition des arguments dans le texte, etc.

Avec une habitude des pratiques langagières des mathématicien·ne·s, chacun·e comprend ces preuves (l'explicitation de la preuve formelle n'est pas nécessaire). Et au-delà des différences, nous savons en général reconnaître la structure commune de la preuve. Le recours à une preuve formelle, ici dans le cadre de la déduction naturelle de Gentzen, nous permet de donner à voir ces choix en ayant un vocabulaire précis pour les décrire : nous dirons par exemple « ici, X et Y utilisent des formulations différentes pour introduire une variable fraîche en vue de l'introduction d'un quantificateur universel ».

### III. ANALYSES DE FORMULATIONS DE PREUVES DANS DES MANUELS

#### 1. Pratiques langagières et apprentissages

Nous avons présenté notre utilisation de la déduction naturelle de Gentzen pour décrire les pratiques langagières des mathématicien·e·s quand ils et elles rédigent une preuve. Nous allons maintenant revenir sur notre hypothèse de travail quand nous nous intéressons non plus à la communauté des mathématiciens et mathématiciennes, mais aux classes, c'est-à-dire aux enseignant·e·s et aux élèves : apprendre les mathématiques, apprendre à prouver, c'est notamment s'approprier ces pratiques langagières. Cette position rejoint celle des didacticien·ne·s de Bordeaux qui s'attachent à décrire les processus de secondarisation, c'est-à-dire les évolutions du langage qui accompagnent l'évolution cognitive :

La question [est de savoir] si, dans les ébauches d'appropriation des outils culturels et sémiotiques, un nouveau comportement cognitif et langagier s'élabore, avec recours à des formes sémiotiques plus conventionnelles et peu à peu stabilisées, propres au champ disciplinaire et aux principes qui régissent sa fonction énonciative. (Rebière, 2013, p.230)

Nous ne regardons pas seulement le langage comme témoin des connaissances, mais comme élément constitutif des connaissances. Les élèves s'acculturent aux pratiques langagières de mathématicien·ne·s, ou du moins à leur transposition dans le cadre de la communauté discursive que constitue la classe, entre autres « formes culturelles d'action et de réflexion » (nous retrouvons là les termes de Luis Radford, et de la théorie de l'objectivation, voir Radford, 2013). Les preuves que nous avons recueillies et qui nous ont servi dans la partie précédente étaient produites par des collègues enseignant à l'université. Les pratiques langagières décrites sont celles de la communauté des mathématiciens et mathématiciennes, mises en œuvre notamment dans leurs productions à destination de leurs collègues. Nous retrouvons ces pratiques quasiment à l'identique dans les productions à destination des étudiant·e·s de l'enseignement supérieur (affirmation qui s'appuie sur notre fréquentation de ces documents et non pas sur une analyse méthodologiquement cadrée qui reste à mener). Les enseignant·e·s de mathématiques du secondaire ont baigné dans ces pratiques pendant leurs études au moins. Ils et elles ont également été évalué·e·s sur des productions écrites ou orales pour lesquelles ils devaient se conformer, dans une certaine mesure, aux usages langagiers attendus par la communauté. Qu'en est-il alors dans les documents ou discours à destination de leurs élèves ? Les objets mathématiques étudiés sont soumis à un processus de transposition didactique, qu'en est-il des pratiques langagières ?

Nous avons donc poursuivi nos analyses à partir des questions suivantes : quelles sont les pratiques langagières caractéristiques des textes de preuve que lisent les élèves du secondaire ? Retrouve-t-on les pratiques langagières de la communauté des mathématicien·ne·s ?

Les textes de preuves fréquentés par les élèves les plus faciles d'accès pour nous sont ceux des manuels, nous avons donc dans un premier temps cherché à les analyser de la même façon que les précédents. Nous testons ainsi également la robustesse de notre méthodologie d'analyse.

## 2. Exemples d'analyses de formulations de preuves dans les manuels

### Une même preuve dans différents manuels

Regardons d'abord une même preuve dans différents manuels de Seconde. Le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 2019 réaffirme l'importance de la démonstration dans l'activité mathématique et liste treize démonstrations désignées comme « exemplaires » :

Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc. (BOEN 2019, p. 5)

Parmi elles, nous trouvons « variations des fonctions carré, inverse, racine carrée ». Nous allons regarder plus précisément les démonstrations concernant les variations de la fonction carré. Signalons tout d'abord que la tâche « démontrer que la fonction carré est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et décroissante sur  $\mathbb{R}_-$  » n'est pas exactement la même que « étudier les variations de la fonction carré ». Dans le premier cas, il s'agit explicitement de produire une démonstration d'une propriété qui est donnée, dans le deuxième cas, il s'agit aussi de déterminer la propriété à démontrer, et le fait qu'il soit attendu une preuve de cette propriété relève d'un contrat qui n'est pas forcément clair pour les élèves.

Dans les différents manuels de 2019 que nous avons consultés<sup>6</sup> (les sept manuels disponibles à la bibliothèque de l'IREM de Paris), un encadré intitulé « propriété » ou « théorème » donne les variations de la fonction carré, et la démonstration est disposée juste après l'encadré dans quatre des manuels, et est renvoyée à un exercice dans les trois autres manuels. Regardons plus précisément les quatre textes de preuve ci-après.

**Propriété**

La fonction carré est **strictement décroissante** sur  $]-\infty ; 0]$   
et **strictement croissante** sur  $[0 ; +\infty[$ .

**Démonstration**  
À connaître

- **Sur  $]-\infty ; 0]$ .**  $u$  et  $v$  sont deux réels quelconques de  $]-\infty ; 0]$  avec  $u < v \leq 0$ .  
On étudie le signe de  $v^2 - u^2 = (v - u)(v + u)$ . Or,  $u < v \leq 0$ , d'où  $v - u > 0$  et  $v + u < 0$ .  
Donc  $v^2 - u^2 < 0$ , soit  $v^2 < u^2$ . D'où  $f(u) > f(v)$ .  
La fonction carré est donc strictement décroissante sur  $]-\infty ; 0]$ .
- **Sur  $[0 ; +\infty[$ .**  $u$  et  $v$  sont deux réels quelconques de  $[0 ; +\infty[$  avec  $0 \leq u < v$ .  
On étudie le signe de  $v^2 - u^2 = (v - u)(v + u)$ . Or,  $0 \leq u < v$ , d'où  $v - u > 0$  et  $v + u > 0$ .  
Donc  $v^2 - u^2 > 0$ , soit  $v^2 > u^2$ . D'où  $f(u) < f(v)$ .  
La fonction carré est donc strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

voir Exemple 2

Extrait 1 : preuve des variations de la fonction carré dans le manuel *Métamaths*<sup>7</sup>

- 6 Lors de la préparation de notre intervention au Séminaire National, les nouveaux manuels n'étaient pas encore sortis, et nous avons donc utilisé pour la présentation des anciens manuels. Nous avons actualisé l'analyse pour le présent texte.
- 7 Nous appelons ainsi par le nom de la collection les quatre manuels utilisés. Ils sont référencés à la fin du texte dans la rubrique « Manuels scolaires cités ».

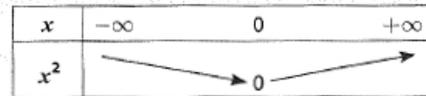
## A Sens de variation de la fonction carré

### Propriété

La fonction carré  $f : x \mapsto x^2$  est :

(1) **décroissante** sur l'intervalle  $]-\infty ; 0]$  ;

(2) **croissante** sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .



### Démonstration

Pour tous nombres réels  $u$  et  $v$ ,  $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ .

(1) **Cas où  $u \leq v \leq 0$**

De  $u \leq v$ , on déduit que  $u - v \leq 0$ .

De  $u \leq 0$  et  $v \leq 0$ , on déduit que  $u + v \leq 0$ .

Donc  $(u - v)(u + v) \geq 0$ , c'est-à-dire  $u^2 - v^2 \geq 0$ , soit  $u^2 \geq v^2$ .

Donc  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $]-\infty ; 0]$ .

(2) **Cas où  $0 \leq u \leq v$**

De  $u \leq v$ , on déduit que  $u - v \leq 0$ .

De  $u \geq 0$  et  $v \geq 0$ , on déduit que  $u + v \geq 0$ .

Donc  $(u - v)(u + v) \leq 0$ , c'est-à-dire  $u^2 - v^2 \leq 0$ , soit  $u^2 \leq v^2$ .

Donc  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

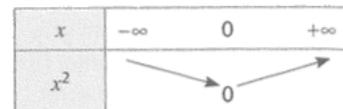
*Extrait 2 : preuve des variations de la fonction carré dans le manuel Hyperbole*

### a Fonction carré

#### Propriété

La fonction carré est strictement décroissante sur l'intervalle  $]-\infty ; 0]$  et strictement croissante sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

Elle admet 0 comme minimum, atteint en 0.



#### Démonstration

Soient deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ . On doit comparer  $a^2$  et  $b^2$ .

On a  $b^2 - a^2 = (b - a)(a + b)$ .

On sait que  $a < b$  donc le facteur  $(b - a)$  est strictement positif.

• Si  $a$  et  $b$  appartiennent à  $]-\infty ; 0]$ , alors le facteur  $(a + b)$ , somme de deux réels négatifs, est négatif et non nul. Par la règle des signes d'un produit, on obtient que  $b^2 - a^2 < 0$ , c'est-à-dire que  $a^2 > b^2$ .

• Si  $a$  et  $b$  appartiennent à  $[0 ; +\infty[$ , alors le facteur  $(a + b)$ , somme de deux réels positifs, est positif et non nul. Par la règle des signes d'un produit, on obtient que  $b^2 - a^2 > 0$ , c'est-à-dire que  $a^2 < b^2$ .

#### Conséquences

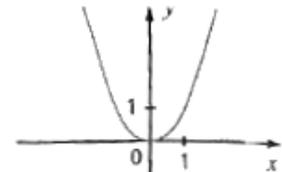
- Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
- Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire.

Voir Je m'exerce à démontrer  
Voir exercice Démo n° 40

*Extrait 3 : preuve des variations de la fonction carré dans le manuel Déclic*

#### Propriété

La fonction carré, définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ , est décroissante sur  $]-\infty ; 0]$  et croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .



**DEMONSTRATION AU PROGRAMME** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ .

Pour comparer  $f(a)$  et  $f(b)$ , c'est-à-dire  $a^2$  et  $b^2$ , on étudie le signe de  $a^2 - b^2$ .

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ . Comme  $a \leq b$ ,  $a - b \leq 0$ . On distingue deux cas :

• Si  $a \leq 0$  et  $b \leq 0$ , alors  $a + b \leq 0$  (comme somme de deux nombres négatifs).

Donc le produit  $(a - b)(a + b)$  est positif. Par conséquent,  $a^2 - b^2 \geq 0$  et par suite  $a^2 \geq b^2$ .

Ainsi sur  $]-\infty ; 0]$ , si  $a \leq b$ , alors  $f(a) \geq f(b)$  : la fonction carré est décroissante sur  $]-\infty ; 0]$ .

• Si  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ , alors  $a + b \geq 0$  (comme somme de deux nombres positifs).

Donc le produit  $(a - b)(a + b)$  est négatif. Par conséquent,  $a^2 - b^2 \leq 0$  et par suite  $a^2 \leq b^2$ .

Ainsi sur  $[0 ; +\infty[$ , si  $a \leq b$ , alors  $f(a) \leq f(b)$  : la fonction carré est croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

*Extrait 4 : preuve des variations de la fonction carré dans le manuel Indice*

Il n'est pas utile ici de construire l'arbre de la preuve en déduction naturelle. Notons juste que la propriété caractéristique définissant une fonction croissante ou décroissante est une implication universellement quantifiée, et regardons comment sont présentées les variables en vue de l'introduction d'une quantification universelle (voir page 125), et comment est présentée l'hypothèse temporaire en vue de l'introduction d'une implication (voir page 125).

Dans les textes des manuels *Indice* et *Déclic*, variables et hypothèse sont introduites de façon très classique : « soit... tel que... ». Les variables  $a$  et  $b$  désignent des réels, la restriction à  $\mathbb{R}_+$

ou à  $\mathbf{R}$ . vient après la présentation de l'hypothèse  $a \leq b$ . Formellement, la proposition qui est donc démontrée est

$$\forall a \forall b \left( \text{si } a \leq b \text{ alors } \left[ \left( \text{si } (0 \leq a \leq b) \text{ alors } a^2 \leq b^2 \right) \text{ et } \left( \text{si } (a \leq b \leq 0) \text{ alors } a^2 \geq b^2 \right) \right] \right)$$

Nous nous convaincrions facilement que cette proposition est bien équivalente à

$$\left[ \forall a \geq 0 \forall b \geq 0 \left( \text{si } a \leq b \text{ alors } a^2 \leq b^2 \right) \right] \text{ et } \left[ \forall a \leq 0 \forall b \leq 0 \left( \text{si } a \leq b \text{ alors } a^2 \geq b^2 \right) \right]$$

qui est la reformulation stricte de « la fonction carré est croissante sur  $\mathbf{R}_+$  et décroissante sur  $\mathbf{R}$  ». Il est d'ailleurs possible de le démontrer par du « calcul des prédicats » (par exemple en utilisant l'équivalence entre  $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$  et  $B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ , ou encore entre «  $\forall x P[x]$  et  $\forall x Q[x]$  » et «  $\forall x (P[x] \text{ et } Q[x])$  »).

Dans les textes des manuels *Métamaths* et *Hyperbole*, nous retrouvons bien d'une part la démonstration de la croissance sur  $\mathbf{R}_+$  avec introduction de deux variables désignant des réels positifs, d'autre part la démonstration de la décroissance sur  $\mathbf{R}$  avec introduction de deux variables désignant des réels négatifs. Dans le manuel *Métamaths*, la formulation utilisée pour présenter les variables et l'hypothèse temporaire est inhabituelle : elle consiste en une simple utilisation du présent et du qualificatif « quelconques » (plus habituel) pour présenter les variables, et du mot « avec » pour présenter l'hypothèse temporaire (mot également utilisé pour marquer une quantification, voir Hache 2015). Dans le manuel *Hyperbole*, les variables ne sont pas introduites, et l'hypothèse temporaire est introduite par « cas où », ce qui là aussi une formulation inhabituelle.

De façon classique, la quantification universelle n'est pas introduite en fin de démonstration, on passe directement de l'inégalité  $a^2 \leq b^2$  à « la fonction carré est donc croissante sur  $\mathbf{R}_+$  » dans les manuels *Métamaths* et *Hyperbole*, le texte s'arrête sur l'inégalité dans le manuel *Déclic*. Seul le manuel *Indice* introduit l'implication, et de façon implicite la quantification universelle (c'est le sens que nous donnons à l'expression « sur  $[0, +\infty[$  »), avant de conclure de la même façon. Regardons maintenant les textes d'un point de vue plus global :

- On y retrouve les mots classiquement utilisés pour marquer les inférences (donc, par conséquent, de... on déduit que...)
- On y trouve des commentaires méta, « on étudie le signe de  $a^2 - b^2$  », « on doit comparer  $a^2$  et  $b^2$  »
- Dans les quatre manuels, la démonstration est rédigée en deux parties dont les mots autour du travail mathématique sont rigoureusement les mêmes.

Finalement, ces textes, qui s'appellent « démonstration », ressemblent aux textes précédemment étudiés, même si nous pouvons noter l'usage de formulations qui ne font pas partie des pratiques langagières des mathématicien·ne·s. Nous avons pu les décrire grâce à notre référence à la déduction naturelle, sans qu'il soit nécessaire ici de construire tout l'arbre de la preuve. Nous retrouvons également, d'un texte à l'autre, le même type de différences dans les choix de formulations. La recherche pourrait se poursuivre en interrogeant des enseignant·e·s pour comprendre ce qui guide ces choix de formulation et de structuration de la preuve.

L'expression « démonstration exemplaire » utilisée dans le programme peut s'entendre de deux façons : d'une part simplement comme une démonstration que les élèves doivent avoir vue, d'une façon ou d'une autre, d'autre part comme une démonstration qui peut jouer un rôle de modèle. Dans ce deuxième cas, le modèle peut se situer à un premier niveau de généralité, un modèle de démonstration du sens de variation d'une fonction, ou à un deuxième niveau, une démonstration d'une implication universellement quantifiée. Les commentaires méta des textes étudiés concernent une technique pour étudier une inégalité, et non pas une technique pour démontrer, ce qui nous amène à penser que l'objectif pour les auteur·e·s est plutôt de faire de cette démonstration un modèle de démonstration de variation d'une fonction, tâche qui est d'ailleurs proposée dans d'autres exercices du même chapitre. Là encore, des observations et des entretiens avec des enseignant·e·s nous renseigneraient sur la façon dont ils investissent ce caractère d'exemplarité.

## D'autres textes de preuve ?

Nous l'avons déjà dit précédemment (voir page 130), la tâche proposée aux élèves peut être formulée explicitement sous la forme « prouver/démontrer que... », ou elle peut sous-entendre la production d'une preuve sans que cela soit explicitement demandé.

Par exemple, regardons une tâche courante au collège : «  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  tel que  $AB = 3$  cm et  $AC = 4$  cm. Déterminer  $BC$  ». Elle n'est jamais formulée de la façon suivante : « Soit  $ABC$  un triangle rectangle tel que  $AB = 3$  cm et  $AC = 4$  cm. Démontrer que  $BC = 5$  cm. » La façon de résoudre l'une ou l'autre tâche ne serait pas très différente, si ce n'est qu'il y a assurance du résultat dans le deuxième cas.

Ainsi, il y a dans les manuels, notamment dans les encarts avec des exercices résolus qui accompagnent les pages de cours, des textes qui ne sont pas identifiés « démonstration », mais qui y ressemblent. Nous avons alors regardé l'ensemble des exercices résolus du manuel *Math 'x*. Nous y avons cherché systématiquement les pas de déduction exprimés ou implicites, et les usages de marqueurs classiques de pas de déduction. Les choses semblent plus relâchées. Nous prenons ici deux exemples d'usage d'un « donc » qui semble plus souligner une utilisation implicite d'une palette d'outils, de savoir-faire, qu'un pas de déduction au sens vu précédemment.

### 2 Lire images et antécédents sur un tableau de valeurs

#### Énoncé

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  admet le tableau de valeurs ci-contre.

Donner : a. l'image de 4 par  $f$     b.  $f(-2)$     c. des antécédents de 3

$x$	4	1	-2	-4
$f(x)$	3	-2	3	13

#### Solution

- a. L'image de 4 par  $f$  est 3.    b.  $f(-2)$  est l'image de -2 par  $f$ , donc  $f(-2) = 3$ .  
c. 4 et -2 sont des antécédents de 3 (il peut y en avoir d'autres ne figurant pas dans le tableau !).

*Extrait 5 : exercice résolu p.33 dans le manuel Math 'x*

Le raisonnement sous-entendu ici peut être décrit de la façon suivante : «  $f(-2)$  est une écriture qui signifie l'image de -2 par  $f$ . Le tableau en haut à droite donne les images par  $f$  de différents entiers en associant à un entier donné dans la première ligne, son image donnée dans la même colonne de la deuxième ligne. Le nombre en dessous de -2 est 3. Cela signifie que l'image de -2 est 3 ». Ce raisonnement n'est pas de la même nature que ceux décrits précédemment avec la déduction naturelle, et nous serions bien en peine de le faire, car il ne s'agit pas d'une démonstration, quand bien même un « donc » est utilisé.

Regardons un autre exemple :

### 5 Déterminer la nature d'un quadrilatère avec des coordonnées

#### Énoncé

Soit  $A(-5; -1)$ ,  $B(1; -3)$ ,  $C(3; 3)$  et  $D(-3; 5)$  dans un repère orthonormé.

Démontrer que  $ABCD$  est un carré.

#### Solution

- On commence par faire une figure :  $ABCD$  semble être un carré.
- On démontre que  **$ABCD$  est un parallélogramme** en montrant que ses diagonales ont même milieu  $K(-1; 1)$  (comme dans l'exercice résolu 2 page 247).
- $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (1+5)^2 + (-3+1)^2 = 40$   
 $BC^2 = (3-1)^2 + (3+3)^2 = 40$ . On constate que  $AB = BC = \sqrt{40}$ .
- Par suite le parallélogramme  **$ABCD$  est un losange**.
- $AC^2 = (3+5)^2 + (3+1)^2 = 80$ . Or  $AB^2 + BC^2 = 40 + 40 = 80$ .
- On constate donc que  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ .
- On en déduit que  $ABC$  est rectangle en  $B$  (réciproque du théorème de Pythagore).
- Le parallélogramme  $ABCD$  a donc un angle droit, **c'est un rectangle**.
- $ABCD$  est à la fois losange et rectangle donc  **$ABCD$  est un carré**.

#### Méthode

- Un parallélogramme qui a 2 côtés consécutifs de même longueur est un losange.
- Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.
- Un quadrilatère qui est à la fois un losange et un rectangle est un carré.

➤ Voir exercices 74 à 77

*Extrait 6 : exercice résolu p. 248 dans le manuel Math 'x*

Il s'agit d'un exercice résolu dans lequel la tâche est explicitement une demande de démonstration, pourtant le texte produit comporte des éléments potentiellement perturbateurs :

- Quel est le statut de la première phrase, « on commence par faire une figure :  $ABCD$  semble être un carré » ? Elle est mise au même niveau que la suite : une puce, et pourtant, il n'est pas attendu qu'elle figure dans le texte accompagnant la résolution de la tâche.
- Ensuite, le texte est un texte de preuve, mais les théorèmes servant à justifier certains pas de déduction sont donnés hors du texte, dans un encart. De tels encarts sont fréquents, sans doute pour pallier l'absence de discours oral d'accompagnement, peut-être pour alléger, pour ne pas inquiéter le lecteur ou la lectrice, ou peut-être est-ce une contrainte éditoriale, la nécessité de gagner de la place. Ici, l'encart sert à dégager de cette tâche particulière une méthode (nous dirions également une technique, même si sa formulation ne comporte pas d'indication d'actions) qui pourra être réinvestie dans la résolution d'autres tâches, Cela signifie-t-il qu'il n'est pas attendu des élèves que ces théorèmes figurent dans le texte accompagnant la résolution de la tâche ?

#### IV. CONCLUSION

Nous avons présenté un outil d'analyse des pratiques langagières des mathématicien·ne·s dans le cadre de la rédaction de preuves : en les comparant à un référent formel élaboré à partir de la déduction naturelle de Gentzen, nous donnons à voir les différences entre les textes produits, différences qui sont interprétées comme autant de choix non seulement d'arguments mathématiques mais également de mise en forme. Ces choix sont influencés à la fois par les pratiques de la communauté, et à la fois par des prises de position personnelles (conscientes ou non) sur ce qui est le plus favorable à la clarté de la preuve exposée, voire à son élégance.

Nous avons ensuite testé cet outil d'analyse sur des textes de preuves dans des manuels de Seconde : nos premières explorations montrent que l'on retrouve à la fois les formulations usuelles dans la communauté mathématique, mais également des formulations spécifiques. Il faudrait une étude plus systématique et plus large pour voir s'il s'agit de formulations spécifiques à telle ou telle équipe d'auteur·e·s de manuel, ou plus largement aux enseignant·e·s de lycée. Par ailleurs, nous avons vu que les textes de preuves auxquels sont confronté·e·s les élèves ne sont pas seulement les démonstrations des propriétés du cours, mais aussi des bouts de preuves par exemple dans le cadre de corrections d'exercices résolus. Mais dans ces cas-là particulièrement, ce qui relève strictement de la preuve est mêlé à d'autres éléments que nous pourrions, dans une première approche à gros grain qui mérite d'être affinée, qualifier de commentaires méta sur la preuve (commentaires sur le caractère général de cette preuve-là, sur la façon de penser à tel ou tel argument ou étape de raisonnement, sur des liens avec d'autres contextes déjà étudiés, sur l'importance de certaines notations ou formulations, etc.).

Les textes des manuels ne sont qu'une entrée (facilement accessible !) dans l'étude des pratiques langagières des enseignant·e·s. Pour une étude plus complète de celles-ci, plusieurs pistes méthodologiques sont à explorer : analyser la production de preuves « en situation d'enseignement », c'est-à-dire non pas un texte écrit produit par un·e enseignant·e, mais bien toute l'activité de production / présentation de cette preuve en classe (travail de master de Chrystel Noléo, Noléo, 2019), intégrant le discours oral, les différents ostensifs graphiques, voire les gestes ; interroger les enseignant·e·s sur ce qui motive leurs choix de telle ou telle formulation, de telle ou telle organisation d'une preuve.

Une autre perspective de recherche est centrée sur les élèves et étudiant·e·s. Rappelons notre hypothèse de travail : apprendre à prouver c'est notamment apprendre à formuler des preuves, apprentissage qui se fait par acculturation aux pratiques langagières usuelles. Peut-on évaluer cette acculturation ? Partager des critères d'évaluation avec les élèves ? Quelles activités, quel

discours, peuvent la favoriser ou au contraire faire obstacle à cette acculturation ? Pour répondre à ces questions, il est nécessaire de pouvoir analyser les productions des élèves : quels outils d'analyse sont alors pertinents ? L'utilisation de la déduction naturelle permet-elle d'analyser des preuves qui ne sont pas forcément complètes, ou même valides ? Là encore, nous commençons à explorer ces questions, notamment dans des travaux de master (travail de master de Caroline Dequierez-Lamour, Dequierez-Lamour, 2019, travail de master de Simon Gentil, Gentil, à paraître).

## REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUES

- ADDA J. (1975). L'incompréhension en mathématiques et les malentendus. *Educational Studies in Mathematics*, 6 (3), 311-326.
- BARRIER, T. (2016). Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique. *Recherches en éducation*, 27, 94-117. <http://www.recherches-en-education.net/IMG/pdf/REE-No27.pdf>
- BOEN (2019). Arrêtés du 17 janvier 2019 publiés au *Bulletin officiel du ministère de l'éducation nationale* spécial n°1 du 22 janvier 2019. [https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/95/7/spe631\\_annexe\\_1062957.pdf](https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/95/7/spe631_annexe_1062957.pdf)
- BRONCKART, JP. (2013). Des interactions complexes entre langage verbal, opérations et raisonnements. In A. Bronner et al. *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (pp.181-195). La Pensée sauvage. <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:81365>
- CHELLOUGUI, F. (2006). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite. In G. Geudet et Y. Matheron (éds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp.101-122). Paris : IREM de Paris <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR07001.pdf>
- CHELLOUGUI, F. (2020). Pertinence de la prise en compte du formalisme logique pour une étude didactique de l'activité mathématique. In J. Pilet et C. Vendeira-Maréchal, *Actes 2019 du séminaire de l'ARDM*, (pp.101-119). IREM de Paris.
- DEQUIREZ-LAMOUR, C. (2019). *Formulation de preuve au cycle 4. Analyses de travaux d'élèves et de pratiques enseignantes autour de la formulation de preuves. Étude d'un cas : formulation d'un raisonnement par l'absurde*. Mémoire du master « Didactique » de l'Université Paris Diderot.
- DURAND-GUERRIER, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe, *Petit x*, 50, 57-79. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/>
- DURAND-GUERRIER, V., BOERO, P., DOUEK, N., EPP, S. & TANGUAY, D. (2012). *Examining the Role of Logic in Teaching Proof*. In G. Hanna et M. de Villiers (éds), *ICMI Study 19 Book: Proof and Proving in Mathematics Education*, chap. 16, (pp. 369-389). Springer, New-York.
- GENTIL, S. (à paraître). *Analyse de formulation de preuves par des élèves en terminale*. Mémoire du master « Didactique » de l'Université de Paris.
- HACHE, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens. Une étude de cas avec « avec », *Petit x*, 97, 27-43. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01397401>
- HACHE, C. (2019). *Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques*, Note de synthèse HDR, Université Paris Diderot. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02420979/document>
- HACHE C. & FORGEUX, E. (2018). Vrai ou faux ? Parlons-en ! *Au fil des mathématiques*, APMEP, 528, 49-54. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02292639>
- HACHE, C. & MESNIL, Z. (2012). Élaboration d'une formation à la logique pour les professeurs de mathématiques. In M. Gandit et B. Grugeon-Allys (éds), *Actes des XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> colloques de la CORFEM* (pp. 201-224). Besançon : Université et IUFM de Franche-Comté. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00874279/document>
- HACHE, C. & MESNIL, Z. (2015). Pratiques langagières et preuves. *Actes du XXII<sup>e</sup> colloque de la CORFEM*. Nîmes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01285116/document>
- LABORDE, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse, Université de Grenoble.
- MESNIL, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01114281/file/TheseMesnilVersionPubliee.pdf>
- NOLEO, C. (2019). *Pratiques et problématiques langagières au lycée : formuler une démonstration*. Mémoire du master « Didactique » de l'Université Paris Diderot.
- RADFORD, L. (2013). On Semiotics and Education. *Éducation et didactique*, 7(1), 185-204. <https://journals.openedition.org/educationdidactique/1668>
- RAKATOVAVY, F. (1983). *Les difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi dans les textes mathématiques de certains adjectifs marqueurs de variance (exemples principalement empruntés dans des manuels du second degré)*, Thèse Université Paris 7, IREM de Paris, Paris. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02193780>
- REBIERE, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? In A. Bronner et al. *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (pp. 119-232). La Pensée Sauvage éditions.

## MANUELS SCOLAIRES CITES

DECLIC. Édition 2019 du manuel *Déclic 2<sup>de</sup> Maths*, Hachette Éducation

HYPERBOLE. Édition 2019 du manuel *2<sup>de</sup> Mathématiques Hyperbole*, Nathan.  
INDICE. Édition 2019 du manuel *Collection Indice Maths 2de*, Bordas  
MATH'X. Édition 2010 du manuel *Collection Math'x 2<sup>de</sup>*, Didier  
METAMATHS. Édition 2019 du manuel *2<sup>de</sup> maths, collection Métamaths*, Belin Éducation.



# Actes du séminaire de didactique des mathématiques

Année 2019

Édités par

Julia Pilet & Céline Vendeira



IREM de Paris - Université Paris Diderot  
Directeur de publication Christophe Hache  
[www.irem.univ-paris-diderot.fr](http://www.irem.univ-paris-diderot.fr)  
Dépôt légal : 2020 - ISBN : 978-2-86612-398-7