



HAL
open science

Alex Bavelas, 1948, A Mathematical Model for Group Structures. Version bilingue et commentée

Bavelas, Alex, Laurent Beauguitte, Marion Maisonobe

► To cite this version:

Bavelas, Alex, Laurent Beauguitte, Marion Maisonobe. Alex Bavelas, 1948, A Mathematical Model for Group Structures. Version bilingue et commentée. 2021. hal-03254040

HAL Id: hal-03254040

<https://hal.science/hal-03254040v1>

Submitted on 8 Jun 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Alex Bavelas, 1948, A Mathematical Model for
Group Structures, *Applied Anthropology*,
vol.7, n° 3, p. 16-30.

Version bilingue et commentée

groupe f.m.r.



Mai 2021

Version adaptée et commentée par Laurent Beauguitte et Marion Maisonobe (CNRS, UMR Géographie-cités).

Présentation

Alex Bavelas (1920-1993) est un psychosociologue américain. Après des études à l'université de l'Iowa, il soutient en 1948 sa thèse, *Mathematical Properties of Psychological Space*, dirigée par Dorwin Cartwright, au Massachusetts Institute of Technology. Il travaille en étroite collaboration avec Kurt Lewin sur les travaux relatifs à la dynamique des groupes et fonde en 1948 le *Group Networks Laboratory*, groupe auquel collaboreront notamment le mathématicien R. Duncan Luce et le psychologue Leon Festinger. Si l'on en croit Heims (1975), Bavelas se désintéresse de la topologie de Lewin pour s'intéresser à la cybernétique suite à une série de conférences entre 1946 et 1953.

Malgré un vocabulaire qui semble familier (*chain*, *distance*, *length of a chain*, *path* et *shortest path*), cet article de 1948 ne fait jamais référence ni à la théorie des graphes ni à la sociométrie ; inspiré uniquement des travaux de Kurt Lewin et de ses élèves, il propose différentes mesures dérivées de la topologie et permettant de caractériser des « régions » au sein d'un système de « cellules » en relation les unes avec les autres.

Malgré le vocabulaire utilisé (région centrale et périphérique par exemple), ses travaux ont peu été cités par les géographes. Les principaux ouvrages d'analyse spatiale et d'analyse de réseaux publiés dans les années 1960 ne citent pas les travaux de Bavelas et peu ceux de Lewin¹ alors que ce dernier a eu une forte influence sur les travaux d'Hägerstrand.

Steve Heims, 1975, "Encounter of behavioral sciences with new machine-organism analogies in the 1940's." *Journal of the History of the Behavioral Sciences* 11(4) : 368-373.

Les numéros entre crochets dans la version anglaise correspondent à la pagination de l'article paru en 1956. Toutes les notes en bleu dans la traduction française sont du traducteur.

1. Lewin est cité une fois dans le *Spatial Analysis* de Berry et Marble (1968), une fois également dans le *Network Analysis in Geography* de Haggett et Chorley (1969) ; Bavelas est absent des deux ; ni Lewin ni Bavelas ne sont présents dans le *Locational Analysis in Human Geography* de Haggett (1965). Ce corpus réduit gagnerait bien entendu à être élargi.

A Mathematical Model for Group Structures

by Alex Bavelas

Massachusetts Institute of Technology

INTRODUCTION

Many kinds of theories have been developed to explain human behavior. They may be classified in many ways - in terms of outstanding men, of schools of psychology, in terms of the emphasis placed upon certain concepts or areas of study. A way of classifying which is useful for the purpose of this paper is one which differentiates between a) theories which explain human behavior as a function of factors which may be coexistent but independent of each other, and b) theories which explain human behavior as a function of groups of factors constituting a continuously interacting field.

At the time of the first world war psychologists in Germany were splitting roughly into these two camps : One group followed the path of breaking down the person and the situation into elements and attempting to explain behavior in terms of simple causal relationships. The other group attempted to explain behavior as a function of groups of factors constituting a dynamic whole - the psychological field. This field consisted essentially of the person himself and his environment as he saw it. In these terms, the problem was no longer conceived as one of relationships between isolated elements, but one of dynamic interplay of all the factors of the situation.

At this time Kurt Lewin began to formulate a method of analysis of psychological situations which rested upon their restatement in mathematical terms : geometry for the expression of the positional relationships between parts of the life space, and vectors for the expression of strength, direction, and point of application of psychological forces. The use of geometry was natural in a psychological approach which insisted upon a world "as the person himself sees it", since human beings tend to picture the contextual field as existing in a "space" around them. Also, the geometric approach offered a convenient means for diagrammatic representation of many psychological situations.¹ The most important and, in a sense, the only reason for the use of geometry lay in the fact that the assumption of groups of inter-related factors implied the existence of a mathematical space and some means of handling it was necessary. The task of representing the relationships between groups of psychological data laid certain requirements upon the type of geometry that could be used. It had, in the first place, to be a geometry that did not rest

1. Actually, Lewin never intended to use geometry as a means for producing diagrams or illustrations. His geometrical representations were not analogies to be dismissed whenever their implications became inconvenient. They were intended to be mathematical statements of relationships : not statements of "what the situation is like", but statements of "what the situation is".

upon a groundwork of assumptions impossible to satisfy. Also, in order to be immediately useful, it had to be a geometry that pre-supposed no greater possibilities of measurement and definition than were present in psychology at the time.

A sufficiently generalized and non-metric geometry was found in topology. Certain fundamental notions from topology - “connectedness”, “region”, “boundary”, - showed promise in handling spatial relationships in psychology. These ideas were borrowed and put to use although, for the most part, the assumptions underlying them could not be related to psychology. That these concepts from topology proved useful is beyond question if one may judge from the experimental settings which they stimulated and made possible to formulate. Lewin and his students pioneered in fields previously considered too difficult to approach experimentally.²

[17] Concepts borrowed out of their context, however, useful though they may be in specific instances of application, rarely yield full value until they are related to each other in some systematic way. The coordination of the formal body of topological geometry with psychological concepts seemed hopeless. What seemed possible was the definition of a geometry which retained the demonstrated advantages of the concepts borrowed from topology, and which seemed suitable as a system to the uses of psychological analysis. Lewin attempted this task by introducing a geometry which he called “hodology.” In hodology, primarily designed to treat problems of distance and direction, a basic assumption is that between any two parts of a whole there can be distinguished a “shortest path.”

“In Euclidian space, both distance and direction refer to a connection between two points. From the point of view of topology, this connection is to be considered a ‘path’ from a to b. There are of course many paths possible between a and b. One of these possible paths is distinguished as the shortest path between a and b. . . Since topology does not know differences of size, one cannot use shortness as a general principle for such a selection. It might be possible to substitute for the concept ‘shortest

2. Barker, R., Dembo, T., and Lewin, K., Frustration and regression : An experiment with young children, *Univ. Ia. Stud. Child Welf.*, 1941, 18.

Dembo, T., Der Arger als dynamisches Problem, *Psychol. Forsch.*, 1931, 15, 1-44.

Kounin, Jacob S. Experimental Studies in Rigidity, *Character and Personality*, 1941, 9, 273-282.

Lewin, K., A Dynamic Theory of Personality, New York, McGraw-Hill, 1935.

Lewin, K., Principles of Topological Psychology, New York McGraw-Hill, 1936.

Lippitt, R., An analysis of group reaction to three types of experimentally created social climate, Iowa City, Univ. of Iowa, Ph.D. Thesis, 1940.

Mackinnon, Donald W., A Topological Analysis of Anxiety, *Character and Personality*, 1944, 12, 163-176.

Mahler, V., Ersatzhandlungen verschiedenen Reallitätsgrades, *Psychol. Forsch.*, 1933, 18, 26-89.

path' the idea of the minimum number of regions which might be crossed by a path from a to b. However, we shall not confine ourselves to this one method of selecting a distinguished path from the possible ones."³

From this idea of "shortest path" Lewin develops an analytical approach to the properties of wholes. In this paper, he points to the importance of the specific pattern that cells in a whole may take, and he introduces certain concepts regarding regions of special properties in such patterns. Assuming "natural wholes where all boundaries have the same strength" he distinguishes regions in the structure from which a change would spread most quickly to all other parts, and regions from which such spreading would take longest to cover the entire structure. Also, he distinguishes areas in the structure most and least susceptible to changes "on the outside." Lewin points out, also, that these concepts are relevant to both problems of cognitive structure - the organization of mental materials - and problems of group structure - the organization of individuals in social groups.

To go back to the definition of "shortest path", upon which all of the preceding discussion is based, we find that Lewin indicates several possible definitions :

"The property which makes one path between two regions of the life space outstanding (the 'shortest path') seems to vary considerably with the situation. Sometimes the fastest connection is outstanding; at other times it is the cheapest connection, or the most pleasant, or the least dangerous. So, all that we would like to assume is that there should be, in the given case, one outstanding path from a to b."⁴

The criteria "most pleasant" or "least dangerous" introduce dynamic factors in the problem of defining a shortest path. The criterion "minimal regions to be crossed by a path from a to b", however, is a purely positional one. It seems that only upon the latter type of criterion can one develop mathematical statements of distance and direction : as functions of the number and position of the parts in the whole, In this paper, the "minimal regions" criterion for the distinguishing of shortest paths is accepted and an attempt is made to explore in a limited way the consequences of such an assumption. Also, an attempt is made to make changes in or additions to accepted definitions which might permit a more flexible use of concepts developed therefrom. Such changes are not "arbitrary" but are made with an eye to problems in psychology which might thus be handled more easily. In some cases changes which would make certain problems more amenable to mathe-
matization have been avoided because of the complications they introduce

3. Lewin, Kurt, The Conceptual Representation and the Measurement of Psychological Forces, *Contributions to Psychological Theory*, I, Duke University Press, 1938, p. 25.

4. *Ibid*, p. 25.

in the initial formulation of concepts. A case in point is that of the transitivity of the “touching” relationship between regions or cells. One of the assumptions made below is that if cell A_1 is said to be touching cell A_2 , then cell A_2 may be said to be touching cell A_1 . This assumption was made in order to secure certain advantages which will be apparent in the material that follows. But other advantages were foregone. Under the condition of the assumption as stated, a chain of cells may be regarded as a path along which a change of state might spread stepwise from cell to cell - from any cell to any neighboring cell. If one thinks of the chain of cells as representing a sequence of stages through which a person might pass, then one must conclude that the sequence of stages is reversible at any point - a fact not always or often true in human experience. [18] If the assumption of transitivity were not made, or explicitly rejected, then it would be mathematically possible to describe chains of cells or paths with very different properties of connectedness. Our hypothetical person might in such a case pass from cell A to B to C but not be able to retrace his steps. The path might be irreversible entirely or in part.

These concepts of pattern and communication are the heart of this paper. They are developed with the deliberate purpose of application to psychological situations. Although no rigid coordination of these ideas with psychological or social situations is attempted, general areas within which application might be fruitful are suggested. For instance, in the realm of social groups, there would seem to be two outstanding aspects of communication deserving attention : that of communication between individuals (or between groups), and that of communication between ideas and attitudes. The spread of rumor is a good example of the close relationship between these aspects. While the rapidity, direction, and extent of the spread depends partly upon the patterns of connection between individuals and groups, they also depend - especially with respect to the growth and bias of the rumor, and the readiness to hear and transmit - upon the connection of the content of the rumor with other ideas and attitudes.

BASIC ASSUMPTION

1. The space being dealt with consists of collections of cells.
2. A cell is equivalent to a point or position in the space.
3. A given cell may or may not be touching another cell.
4. If a cell A_1 is touching another cell A_2 , then cell A_2 is said to be touching cell A_1 .
5. A cell cannot touch itself.

DEFINITIONS

1. Boundary of a cell : the boundary of a cell A consists of all cells touching A .

2. Region : a region is any class or collection of cells.

3. Open cell : cell A is open relative to region \underline{g} if the boundary of A is not contained in \underline{g} .

4. Closed cell : cell A is closed relative to region \underline{g} if the boundary of A is contained in \underline{g} .

5. Boundary of a region : the boundary of the region \underline{g} is the class of all cells not in \underline{g} and touching at least one cell in \underline{g} .

6. Chain : cells A_1, A_2, \dots, A_n are said to form a chain if A_1 is touching A_2 , A_2 is touching A_3 , \dots , A_{n-1} is touching A_n . A_n may or may not be equivalent to A_1 .

a) Simple chain : cells A_1, A_2, \dots, A_n are said to form a simple chain if A_1 touches cell A_2 and no other cell, if A_2 touches A_1 and A_3 and no other cell, if A_3 touches A_2 and A_4 and no other cell, etc., \dots and cell A_n touches cell A_{n-1} and either does or does not touch cell A_1 .

7. Length of a chain : the length of a chain is equal to the number of cells contained in the chain less one.

8. Structure : a region \underline{g} is said to be a structure if for any pair of cell A_1, A_2 contained in \underline{g} , there exists a chain contained in \underline{g} and connecting A_1 and A_2 .

9. Distance between two cells : the distance between any two cells A_1, A_2 ($\overline{A_1A_2}$) in a structure \underline{w} is the minimum length chain contained in \underline{w} and connecting A_1 and A_2 .

10. Distance between a cell and a region : when cell A and region \underline{g} are both included in \underline{w} , and when A is not in \underline{g} two distances are distinguished.

a) Maximum distance : the longest distance of all distances from A to every cell in \underline{g} .

b) Minimum distance : the shortest of all distances from cell A to any cell in \underline{g} .

11. The outermost region of a structure : the outermost region of a structure is the class of all cells which are open relative to the structure.

12. The innermost region of a structure : the innermost region of a structure is the class of all cells with the largest minimum distance from the outermost region of the structure.

13. The largest of the maximum distances between the outermost and innermost regions of a structure is denoted by the letter \underline{r} .

14. The largest of all distances between a cell A_1 and any other cell in the structure is denoted by \underline{p} .

15. The diameter of a structure : the diameter of a structure (\underline{d}) is equal to the largest \underline{p} that can be found in the structure.

16. The central region of a structure : the central region of a structure is the class of all cells with the smallest \underline{p} to be found in the structure.

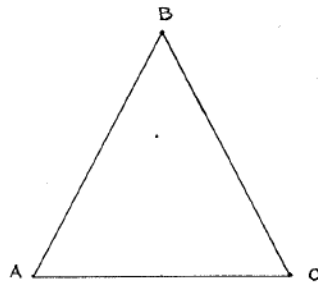
17. The peripheral region of a structure : the peripheral region of a structure is the class of all cells having the greatest maximum distance from the central region. This distance will be denoted as \underline{c} .

[19] A DISCUSSION OF THE DISTANCES \underline{d} , \underline{c} and \underline{r} .

A Method of Illustration.

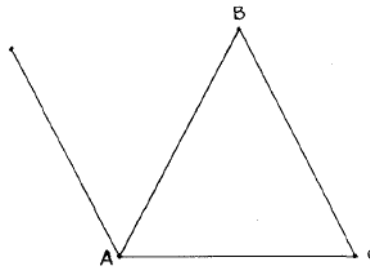
In a discussion of patterns of communication within a structure, three structural distances are distinguished : \underline{d} , \underline{c} , and \underline{r} (see Definitions 12, 14, & 17). Although not strictly necessary, and often undesirable, some kind of picture of a structure is helpful in illustrating certain relationships between these distances. The pictures will be constructed in the following way : a structure of three cells all of which touch each other would be shown as in Figure 1.

Figure 1



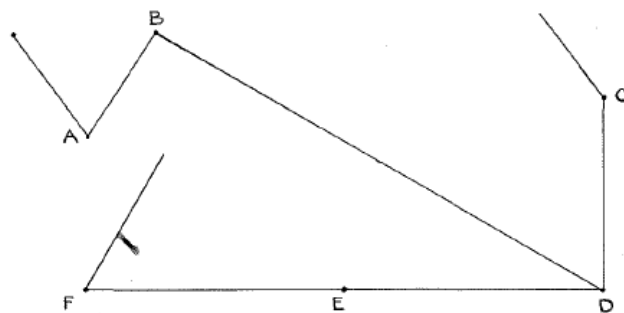
If in this structure cell A was an open cell (see Definition 3), the structure would be shown as in Figure 2.

Figure 2



The picture shown in Figure 3 would mean

Figure 3

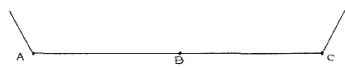


1) That A, C, F were open cells and that B, D, E were closed cells; 2) That A (with respect to this structure) touched only B, and F touched only E; that B touched A and D, D touched B, C, and E, and E touched D and F.

The reason for this change from the kind of pictures used by Lewin is that certain types of structures are very difficult or impossible to draw in that manner. For instance, it is impossible to represent, Lewin-wise, a structure in which A touches B, B touches C, and A and C are open cells and B is closed. (see Figure 4)

The distance \underline{d} (Definition 14 : The largest of all distances between a cell A_1 and any other cell in the structure is denoted by \underline{p} ; Definition 15 : The diameter of a structure (\underline{d}) is equal to the largest \underline{p} that can be found in the

Figure 4



structure.)

The way in which the distance \underline{d} may vary in a structure with a constant number of cells can be shown by the use of several pictures.

Figures 5abc

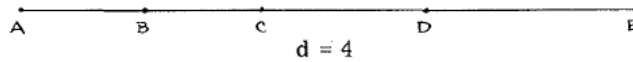
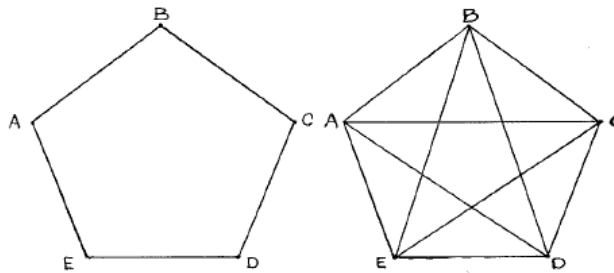


Figure 5a



$\underline{d} = 2$

Figure 5b

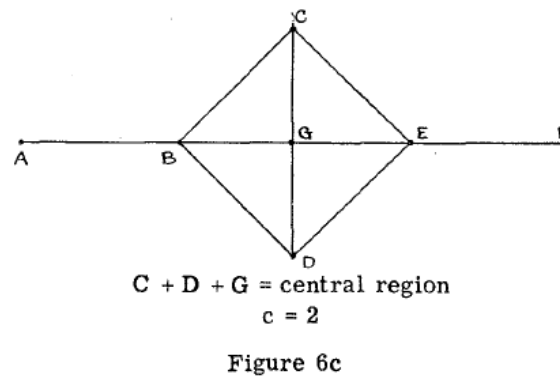
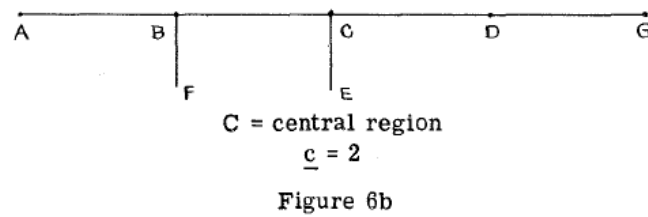
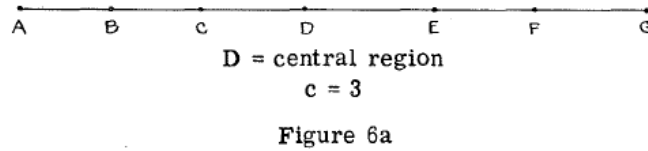
$\underline{d} = 1$

Figure 5c

It may be seen from the foregoing illustrations that the limits of the distance \underline{d} may be expressed in terms of \underline{n} (the number of cells in the structure). The value of \underline{d} will be at its minimum when the longest distance which may be found between any two cells is equal to $n - (n - 1)$ or simply 1, [20] as in Figure 5c. The value of \underline{d} will be at a maximum when the longest distance to be found between any two cells is equal to $n - 1$ - which means that the structure will take the form of a simple chain in which the first cell does not touch the last one. The distance \underline{c} (Definition 17 : The peripheral region of a structure is the class of all cells having the greatest maximum distance from the central region. This distance will be denoted as \underline{c} .)

The way in which the distance \underline{c} may vary in a structure with a constant number of cells is shown in the following pictures. :

Figure 6abc



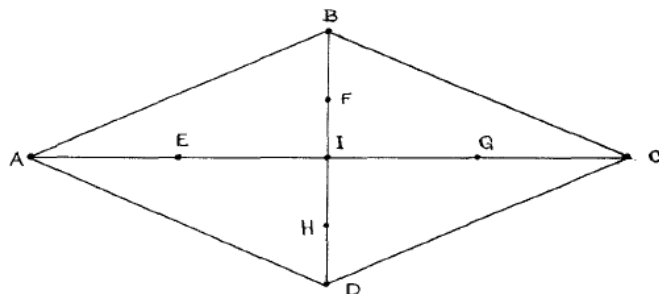
In Figure 6c the peripheral region (see Definition 16) would consist of cells A and F. Lewin defines the peripheral region of a structure as all cells A for which a cell B may be found so that the shortest distance from A to B is equal to \underline{d} . In some cases, such as that shown in Figure 6c, both definitions distinguish the same region. In other cases, such as that shown in Figure 6d, the regions distinguished are different.

According to Lewin's definition the peripheral region consists of cells A,B,C,D,E,F,G,H. According to the definition in this paper the peripheral region consists of cells A,B,C,D.

The distance \underline{r} (Definition 13 : The largest of the maximum distances between the outermost and innermost regions of a structure is denoted by the letter \underline{r} .)

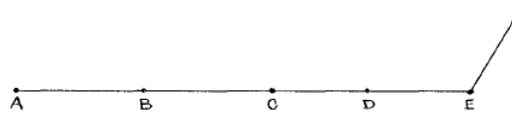
The way in which the distance \underline{r} may vary in a structure with a constant

Figure 6d



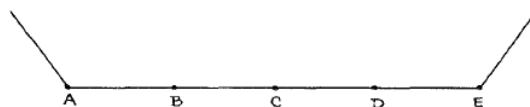
number of cells is shown in the following pictures.

Figures 7 abc



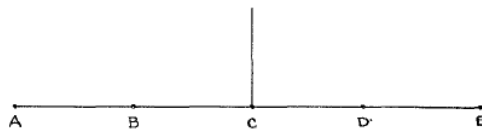
A = innermost region
 $\underline{r} = 4$

Figure 7a



C = innermost region
 $\underline{r} = 2$

Figure 7b



A + E = innermost region
 $\underline{r} = 2$

Figure 7c

[21] In addition to showing how the distance \underline{c} may vary, Figures 7a, 7b,

7c illustrate some of the properties of a region as they have been defined (see Definition 2). In Figure 7c, for instance, the region distinguished as innermost consists of two non-connected cells as far apart as it is possible for them to be.

The Limits of the Values That \underline{c} and \underline{r} may Assume.

The limits of the values that \underline{c} and \underline{r} may assume can be expressed in terms of \underline{d} in the following way.

$$\underline{d} = \underline{c} = \underline{d}/2^5 \qquad \underline{d} = \underline{r} = \underline{d}/2$$

In other words, the limits of the values that \underline{c} and \underline{r} may assume are \underline{d} at one extreme and $1/2 \underline{d}$ at the other.

In order to give a proof of these two statements, it is necessary to state a general principle with respect to distances within structures. The principle is that given three cells, A, B, and C in a structure, \overline{AB} (the distance A to B, see Definitions 6, 6a, 8) will be equal to or less than \overline{BC} plus \overline{CA} . Proof of this general principle may be developed from the assumptions and definitions :

- 1) If cell C is contained in the chain \overline{AB} , then $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$.
- 2) If the cell C is not contained in the chain \overline{AB} , then the chain \overline{ACB} is by definition equal to or longer than the chain \overline{AB} .
- 3) Therefore, $\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{CB}$

Returning to the question of the limits of \underline{c} and \underline{r} in terms of \underline{d} .

- 1) Let A be a cell in the central region.
- 2) Let $\overline{CB} = \underline{d}$.
- 3) $\overline{AB} + \overline{AC} \leq 2\underline{c}$.
- 4) $\overline{AB} + \overline{AC} \geq \underline{d}$.
- 5) Therefore, $2\underline{c} \geq \underline{d}$ or $\underline{d} \geq \underline{c} \geq \underline{d}/2$.

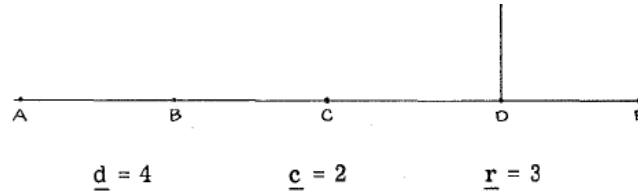
And in the same way with respect to \underline{r} .

- 1) Let A be a cell in the innermost region.
- 2) Let $\overline{CB} = \underline{d}$.
- 3) $\overline{CA} + \overline{AB} \leq \underline{d}$.
- 4) $\overline{CA} + \overline{AB} \geq \underline{d}$.
- 5) Therefore, $2\underline{r} \geq \underline{d}$ or $\underline{d} \geq \underline{r} \geq \underline{d}/2$.

Although \underline{c} and \underline{r} have the same limits, they do not vary in the same way. Although formal proof of this has not been worked out, structures may be drawn in which \underline{c} and \underline{r} do not have the same values. (Figure 8).

5. In reading the value of $\underline{d}/2$, read fractions as the next higher integer. The quantity $\underline{d}/2$ refers to a distance in a structure and distances are so defined that a fractional distance has no meaning.

Figure 8



A glance at Figures 5a,b,c, and 6a,b,c, is sufficient to show that in a structure of \underline{n} cells the way that \underline{d} and \underline{c} will vary within their limits depends upon the number and pattern of interconnections between the cells. This problem was approached in two ways, and although the objective of finding the function along which \underline{d} and \underline{c} vary was not attained, the results are interesting enough to be stated.

The Limits of si_x ⁶ for a Structure of \underline{n} Cells.

1) In a structure in which every cell touches every other cell $i_x = n-1$ and $si_x = n(n-1)$.

2) In a structure in which each cell has the fewest possible cells touching it, the structure will take the form of a simple chain in which cell A_1 does not touch cell A_n .

3) Therefore $i_{A1} = 1, i_{A2} = 2, i_{A3} = 2, \dots, i_{A_{n-1}} = 2, i_{A_n} = 1$.

4) Therefore $si_x = 2(n-1)$.

5) Therefore, we may say that for a structure of \underline{n} cells the value of si_x will vary from $n(n-1)$ to $2(n-1)$, the range of variation being $n(n-1)-2(n-1)=(n-1)(n-2)$.

The Limits of Σse_{xy} ⁷ for a Structure of \underline{n} Cells.

1) In a structure in which every cell touches every other cell, $se_{A1x} = n-1$ and $\Sigma se_{xy} = n(n-1)$.

2) In a structure in which each cell touches as few other cells as possible, the structure will take the form of a simple chain in which cell A_1 does not touch A_n .

3) Therefore,

$$se_{A1x} = 1+2+3+\dots+n-1 \text{ and } [22]$$

$$se_{A2x} = 1 + 1 + 2 + \dots + n-2, \text{ etc. to}$$

6. i_A = the number of cells touching cell A. si_x = the sum of i for every cell in the structure - that is, $i_{A1} + i_{A2} + i_{A3} + \dots + i_{A_n}$.

7. $e_{A1A2} = A_1A_2$; se_{A1x} = the sum of all distances between cell A_1 , and every other cell in the structure; Σse_{xy} = the sums of all distances between all pairs of cells in the structure.

$$\cdot$$

$$se_{A1x} = n-1 + \dots + 2 + 1.$$

$$4) se_{A1x} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$se_{A2x} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n-(n-2)n-(n-1)}{2}$$

$$se_{A3x} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} + \frac{n-(n-3)n-(n-2)}{2}$$

\cdot

$$\cdot$$

$$se_{A_{n-2}x} = \frac{n-(n-3)n-(n-2)}{2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$se_{A_{n-1}x} = \frac{n-(n-2)n-(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$se_{A_nx} = \frac{n(n-1)}{2}$$

5) Therefore Σse_{xy} may be expressed as $n(n-1) + (n-1)(n-2) + (n-2)(n-3) + \dots + n-(n-1) (n-n)$ or simply $\frac{n(n^2-1)}{3}$ 8

6) Therefore, the range of values for Σse_{xy} in a structure of n cells will be

$$\frac{n(n^2-1)}{3} - n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$
 9

Distances $d_{c,r}$, and the Spread of Change in a Structure.

One way of studying the communication pattern of a structure is to assume a change of state as occurring in some cell and spreading by contact throughout the structure. Let us assume that at t^0 a change of state occurs in cell X_0 , and that at t^1 the change has spread¹⁰ to all cells X_1 which touch cell X_0 , and that at t^2 the change has spread to all cells X_2 each of which touches at least one cell of the class of cells designated as X_1 . If we assume further that the time intervals t^1-t^0 , t^2-t^1 , t^3-t^2 , etc., are constant, we may describe some aspects of the communication pattern of a structure in terms of the time it takes a change to spread from place to place.

If we consider a simple chain in which cell A touches B, B touches C, C touches D, etc., and assume a change of state as originating in cell A, it is clear that the change will spread at the rate of one cell per time unit "t". If the change of state is assumed to be in cell A at time t^0 , then at time t^1 the changed state will be in both cells A and B; in time t^2 it will be in the three

8. Let $\phi = n(n-1) + (n-1)(n-2) + \dots + n-(n-1)(n-n)$.

$$\text{Then } \phi = \sum_{J=1}^{J=n} J(J-1) = \sum_{J=1}^{J=n} J^2 - \sum_{J=1}^{J=n} J$$

$$\sum_{J=1}^{J=n} J^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{J=1}^{J=n} J = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\phi = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

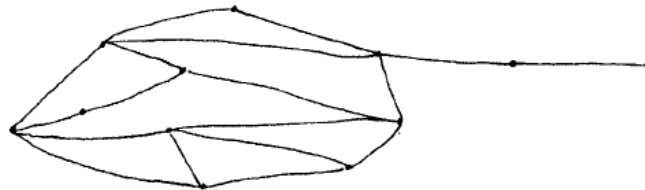
$$\phi = \frac{4n^3 - 4n}{12} = \frac{n}{3}(n^2 - 1) = \frac{n(n^2 - 1)}{3}$$

9. Notice that the range of Σse_{xy} is $\frac{n}{3}$ times the range of si_x .

10. We will assume in this discussion that the change of state may spread indefinitely without diminution or increase.

cells A, B, and C ; and at time t^n the change will have spread to the n^{th} cell. If, instead of a simple chain, we consider a structure such as that shown in Figure 8a with a change originating in cell A, the pattern of spread will be different.

Figure 8a



Although the pattern of spread in a particular structure will be specific to that structure, it is possible to make certain general statements with respect to spread through time on the basis of some of the definitions and derivations made above :

1) A change of state not originating within a structure will start its spread within the structure from one or more of the cells comprising the outer region. Since the largest of the maximum distances between the outermost and innermost regions is equal to \underline{r} (Definition 12), the t^n required for a change originating outside the structure to spread to the innermost region of the structure will be equal to $t^{\underline{r}}$. The value \underline{r} , however, was shown to vary with respect to \underline{d} : $\underline{d} = \underline{r} = \underline{d}/2$. Therefore, the t values necessary for a change to spread from the outermost to the innermost region under the conditions stated above will range from $t^{\underline{d}}$ to $t^{\underline{d}/2}$.

2) A change originating in the innermost region of a structure, by the same reasoning as in 1) above, will require from $t^{\underline{d}}$ to $t^{\underline{d}/2}$ to spread to the outermost region of the structure.

3) A change originating in the most central region, will by definition require $t^{\underline{c}}$ to cover the entire structure. As in the case of $t^{\underline{r}}$, the limits of $t^{\underline{c}}$ are also $t^{\underline{d}}$ to $t^{\underline{d}/2}$. Since, however, \underline{c} is defined in terms of the smallest \underline{p} (Definition 14), $t^{\underline{c}}$ will be equal to or less than $t^{\underline{r}}$.

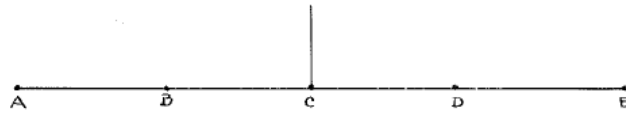
In summation, one may say that whatever the structure a) a change may not spread throughout a structure in less than $t^{\underline{d}/2}$, b) the smallest possible t for complete spread throughout a structure will be obtained if the spread starts in the central region.

Possible Applications of Some of the Concepts Above to Social Groups.

A study recently completed of a national minority organization indicated that the sub-group to which the organization as a whole was most responsive was also the sub-group in closest touch with the non-minority and anti-that-

minority environment. Is this an example of a region of a social group which is at the same time the most central and the most outer region? What difference would it make to the life of this organization if its most central sub-group were also its most inner region? The pictures that follow show some of the variations that are theoretically possible.

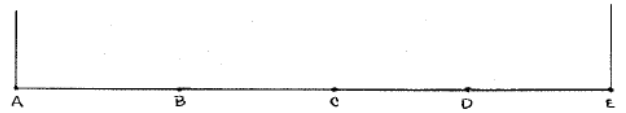
Figure 9



A + E = innermost and peripheral region
 $\overline{AE} = \underline{d}$ C = outer and central region

In Figure 9 we see a situation similar in some respects to the one mentioned above. The central region is also the outer region, and the innermost region is also the peripheral region. The innermost region is in two parts as widely separated as is possible.

Figure 10



C = innermost and central region
A + E = outermost and peripheral region
 $\overline{AE} = \underline{d}$

In Figure 10 we see a structure which appears in a sense to be “opposite” that shown in Figure 9. The central region is now furthest from the outside. The region in contact with the “outside” is now an unconnected region.

An interesting industrial situation about which the writer was told serves to illustrate a possible meaning of the kind of analysis of structures shown in Figures 9,10,11,12. A group of women employed by a garment factory in a large city and working alongside each other constituted an informal work group. In addition to the fact that they were paid on the basis of their combined production, another circumstance tended to make this group a close social structure : all spoke Italian and only one of the women could

Figure 11

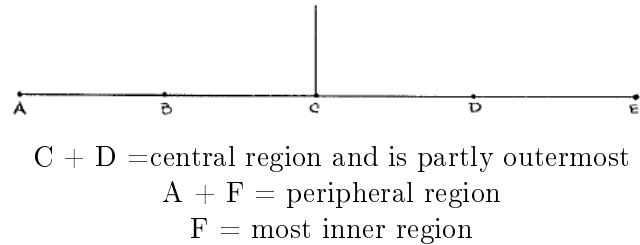
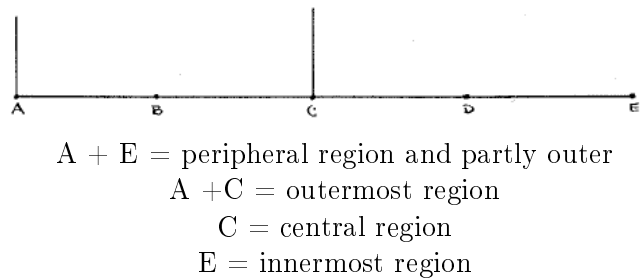


Figure 12



speak English at all. Relations between this group and the management of the company regarding hours, wages, working conditions took place through the single English speaking member (this in [24] spite of the fact that the plant was unionized). Clearly, this woman, with respect to communication with management, was the “outermost” member of the group. The inner structure of the group is not known, but one may speculate as to the effect upon communication within the group of the position she occupied within it.

If, as well as being the outermost member, she were also the most central, the group might be represented as in Figure 9. It is difficult to imagine that the English speaking member would be other than central with respect to communication which had of necessity to pass through her, although under certain conditions such a pattern might well exist. In Figure 12a the English speaking member (E) is shown in a noncentral position.

It is interesting in passing to point out the importance of the position of the English speaking member with respect to the group’s perception of the “outside.” Even though the outermost region of a structure may be barred from policy formulation, it may still exercise a great effect upon policy decisions. To the extent that policy decisions are based upon information,

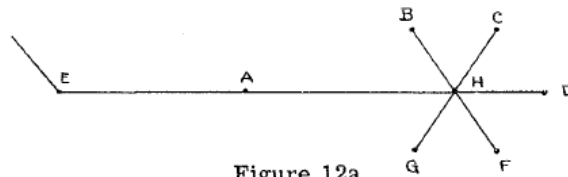


Figure 12a

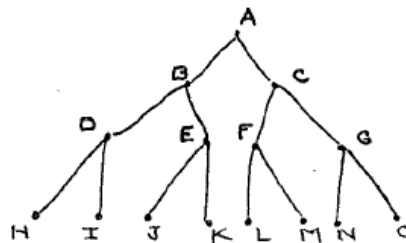
as to the state of affairs “outside,” withholding information, coloring or distorting it in transmission, or in other ways misrepresenting the state of the outside will fundamentally affect these decisions. In a sense, the “perceptual adequacy,” loyalty, and morale of the outermost region of a group structures is crucial in maintaining optimum relations with the “outside.”

While it is true that the structures under discussion are defined under assumptions which make their strict coordination with industrial or other hierarchical organizations impossible, they do provide a basis for the comparison of structural properties per se of certain types of organizations. There are some questions that can be answered quite specifically. For instance, in an organization of a given type, what is the maximum distance that there will be between any two individuals in it? Will this distance depend upon the number of people in the organization? the number of subordinates under each superior? the number of levels in the organization? the communication possibilities between subordinates? One might ask a different type of question: in a given organization where will the region of greatest centrality lie? Who will be in it? who will be most peripheral?

Some of the answers to these questions can be given. One may begin by specifying three types of structures for comparison.

1) an organization in which a subordinate communicates only with his superior and with his subordinates (Figure 13)

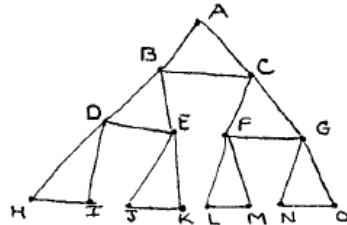
Figure 13



2) an organization in which a subordinate communicates with his superior, the other subordinates of his superior, and his own subordinates (Figure

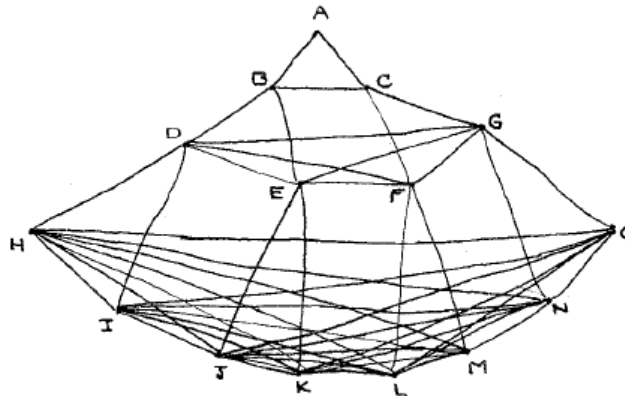
14)

Figure 14



3) an organization in which a subordinate communicates with his superior, all subordinates on his own level, and with his own subordinates (Figure 15)

Figure 15



[25] In these structures, as they are defined, the significant variable with respect to the values \underline{d} and \underline{c} is the number of levels rather than the number of cells. In Figure 13, for example, it is apparent on inspection that it doesn't matter how many subordinates each superior has connected to him; the \underline{d} and \underline{c} values will remain constant as long as the number of levels remains constant. The same thing is true of the structures shown in Figure 14 and Figure 15.

It would seem desirable, therefore, to express the \underline{d} and \underline{c} values in terms of the number of levels (L). The numerical values for \underline{d} and \underline{c} are shown in the tables that follow (Figure 16 and 16a)

Looking at the structure shown in Figure 13, it is plain that the longest

Figure 16

Structure type	No.of cells	No. of levels	\underline{d}	\underline{c}
1 (Figure 13)	15	4	6	3
2 (Figure 14)	15	4	5	3
3 (Figure 15)	15	4	3	2

Figure 16a

Structure Type	\underline{d} in terms of L
1 (Figure 13)	$2(L-1)$
2 (Figure 14)	$2(L-3/2)$
3 (Figure 15)	$L-1$

chain is that containing the cells H D B A C G O. It is also evident that the longest chain in any structure of this type will be the one going from the cells occupying the positions that cells H and O, or I and N, or J and M, etc., occupy relative to the entire structure. The length of the longest chain will always equal $2(L-1)$.

In the structure shown in Figure 14, the situation is the same except that in the chain H D B A C G O cell A may be omitted, due to the connection between cells B and C. Therefore, in structures of this type the longest chain will be equal to $2L-3$.

In the structure shown in Figure 15, by the same process of reasoning, the longest chain will be $L-1$.

It appears, therefore, that the difference in \underline{d} between the first two structures becomes insignificant as the number of levels increases, but that the difference between the \underline{d} of the third type and the other two becomes increasingly great. For example, in a structure of ten levels the structures would show these \underline{d} distances (Figure 17).

Figure 17

Structure Type	No. of levels	\underline{d}
1 (Figure 13)	10	18
2 (Figure 14)	10	17
3 (Figure 15)	10	9

If we compare these structures with respect to the distance \underline{c} , it is helpful

again to express \underline{c} in terms of the number of levels (Figure 18).

Figure 18

Structure Type	\underline{c} in Terms of L
1 (Figure 13)	L-1
2 (Figure 14)	L-1
3 (Figure 15)	L/2 ¹¹

In a structure of ten levels the \underline{c} values would be as follows (Figure 19).

Figure 19

Structure Type	No. of Levels	\underline{c}
1 (Figure 13)	10	9
2 (Figure 14)	10	9
3 (Figure 15)	10	5

Another way to compare these structures is that of the location of the central region. In the structure of the first type (Figure 13), the central region consists of the cell A. In the structure of the second type (Figure 14), the central region consists of the top two levels cells A, B, and C. In a structure of the third type (Figure 15) the central region is the second level up from the bottom - cells D, E, F, G. As the number of levels increases, the central regions of the first two types of structures will remain located at the first and the first and second levels. The central region of the third type of structure behaves somewhat differently. If the number of levels is an even number, the central region is the L/2+1 level from the top. If the number of levels in the structure is an odd number, the central region consists of two adjacent levels - the one L+1/2+1 from the top.

Therefore, in a structure of ten levels the central regions would be located in the following levels (Figure 20).

[26]

Another comparison of these structures might be made in terms of the total pattern characteristics si_x and Σse_{xy} . It was shown above that for a structure of \underline{n} cells both of these values have definite limits. The structures under discussion consist of 15 cells. The ranges of si_x and Σse_{xy} (see pages 23 and 25) for $n=15$ are shown below (Figure 21).

The relative positions of the three structures in these ranges are shown below (Figure 22).

In interpreting these figures it may be helpful to think in averages. In

Figure 20

Structure Type	No. of Levels	Location of Central Region in Levels from the Top
1 (Figure 13)	10	1st level
2 (Figure 14)	10	1st + 2nd levels
3 (Figure 15)	10	6th level

Figure 21

When $n = 15$		
Lower Limit	$\sum_{se^{xy}}^{si_x}$	Upper Limit
28		210
210		1120

Figure 22

Structure Type	si_x	se_{xy}
1 (Figure 13)	28	736
2 (Figure 14)	42	594
3 (Figure 15)	98	374

such terms $si_x/15$ would be the average number of neighbors per cell, and $se_{xy}/15$ would be the average distance between cells (Figure 23).

Figure 23

Structure Type	Average No of neighbors	Average Distance between cells
1 (Figure 13)	1.9	49.1
2 (Figure 14)	2.8	39.6
3 (Figure 15)	6.5	24.9

Up to this point the distance \underline{r} has not entered the discussion because the structures under consideration have consisted of closed cells only. If a structure has no open cells, \underline{r} has no value. What would happen if an open cell were added? For instance, assuming that some person is to be given the function of introducing from the “outside” changes which should spread as

quickly as possible throughout the organization, in the structure shown in Figure 13 it is evident that he should be attached to the organizational head - cell A, the most central region. In the structure shown in Figure 15 such an attachment would be one of the poorest to be made, since in that structure the organizational head is in the peripheral rather than in the central region.

The three types of structures discussed above are simple models which one would hardly expect to find duplicated in an existing social organization. Nevertheless, the kind of analysis that has been attempted is useful. It suggests, for instance, experimental group structures for the study of communication, and affords concepts for their structural evaluation and comparison. Recently, several trial runs of such an experimental setting were made by the writer. A group was given a task to perform which necessitated a relatively high order of communication between individuals. The pattern of communication was experimentally controlled by limiting it to a previously structured telephone system. The results of the few trials that were made suggested rather strongly that a) perception of a co-worker's ability and personality, b) degree of confidence in the successful accomplishment of the task, and c) the pace at which work could be done comfortably were all greatly affected by the structural properties of the communications pattern under which the group operated.

Another value of the kind of analysis attempted above is that it raises clearly the problems of coordination. For instance, in a typical industrial organization what may be defined as the outermost region? Would the sales force be in the outermost region? The advertising department? The employment office? The receiving room? The receptionist? Obviously, answering these questions will depend partly on what kind of communicative material is being considered. The communication pattern in a group structure will be different for a funny story than for news of a new stock issue. In the same way, the nature of "outside" will be different if one thinks of communication from the outside to the structure of baseball news as against stock market trends.

It is helpful, also, to consider the definition of "outer region". The outermost region of a structure is composed of all the cells which are "open" relative to the structure (Definition 11). An open cell of a structure is any cell whose "boundary" is not contained in the structure (Definition 3). The boundary of a cell consists of all other cells touching that cell (Definition 1). In the case of the receiving-shipping department of a company, if materials were received from and shipped to branches of the parent company only, one might conclude from the definitions given above that the department was not part of the outer region. The psychological meaning of "shipping and receiving" would probably change if this department were to become an outer region. This difference might express itself in terms of department discipline, standards of performance, work organization, and attitude toward the "customer".

DIRECTION WITHIN STRUCTURES

Just as in the case of distance, psychological direction is impossible to define in terms of Euclidian concepts except in very special circumstances; when psychological and physical movement toward a goal coincide. In many instances where the psychological goal is the reaching of a physical object, the direction of observable bodily movement may be quite different from the psychological direction to the goal. A person traversing a familiar maze may be moving directly away, physically, from the goal, although moving psychologically closer. Other types of changes of position which have a clear psychological direction - such as becoming a member of a social group - may have no physical correlate whatsoever.

In his hodological geometry, Lewin approached the problem of direction from the same basis as that of distance,

“ The distance a,b refers to the length of (the) distinguished path from a to b. . . The concept of direction in hodological space follows the same pattern. It also refers to a path between two regions A and B. Generally there are many such paths possible between two such regions and it is necessary to select one path which will determine the direction (of the path A to B).”¹²

The problem of selecting the distinguished (shortest) path has been discussed above. As in the treatment of distance, this thesis attempts the development of a concept of direction on the basis of a “minimal regions” definition of shortest path. The following ideas are developed below :

- a) Steps toward or away, or neither toward or away from specified cell A_0 .
- b) A straight line path toward A_0 .
- c) A straight line path from one cell A_0 to another cell B_0 .
- d) Direction of movement along a straight line path from A_0 to B_0 .
- e) A general statement of the definition of “straight line path”.

Steps Toward or Away from a Specified Cell

A cell A is selected as a point of reference, and all other cells in the structure are referred to in terms of their distance from A. This relationship may be conveniently indicated by the use of subscripts. Let the cell which is selected as the point of reference be designated as A_0 , and all cells which are a distance of 1 away from A_0 , be designated as A_1 , etc. Thus a structure is stratified into “layers” in terms of distance from A_0 . A step from any cell in the structure to an adjoining cell may be said to be toward A_0 if the step is from a higher to a lower subscript. Thus, the step A_n, A_{n-1} is a step toward A_0 . The step A_n, A_{n+1} is a step away from A_0 . The step A_n, A_n is a step neither toward nor away from A_0 (see Figure 24).

12. *Op. cit.*, p. 6

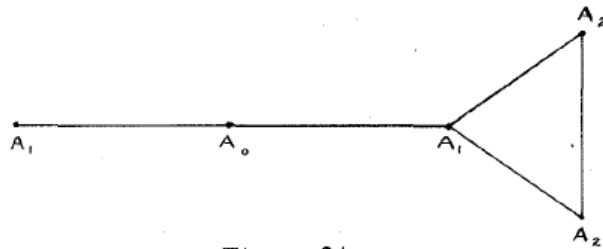


Figure 24

Step $A_1 A_2$ is away from A_0
 Step $A_2 A_1$ is toward A_0
 Step $A_2 A_2$ is neither toward nor away from A_0

A Straight Line Path Toward A_0 .

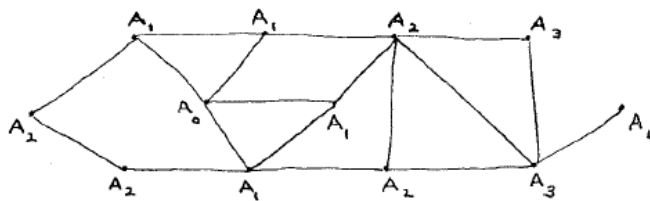
Any chain of cells so arranged that successive steps along it show a decreasing subscript is considered to be a straight line path toward A_0 . All such chains may be expressed in the form

$$A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_2, A_1, A_0$$

In a given structure there will be at least one straight line path from every cell not A_0 to A_0 (see Figure 25). This follows simply from the method used to assign subscripts. If a cell not A_0 bears the subscript A_x , it must by definition be touching at least one cell with a subscript of A_{x-1} . The cell A_{x-1} must, in turn, be touching a cell with the subscript A_{x-2} , etc.

[28]

Figure 25

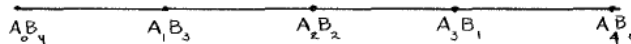


From A_4 there are three different straight line paths to A_0 .

A Straight Line Path from A_0 to B_0 .

If a structure is stratified with respect to both a cell A and a cell B , each cell in the structure will have an "A" subscript and a "B" subscript written in the form $A_x B_y$. In a simple chain structure of five cells the subscript would be shown in Figure 26.

Figure 26



A straight line path from cell A_0 to cell B_0 is defined as a chain that may be written $A_0 B_n, A_1 B_{n-1}, A_2 B_{n-2}, \dots, A_{n-2} B_2, A_{n-1} B_1, A_n B_0$.

Direction of Movement Along A Straight Line Path from A to B.

The direction of movement along a straight line path from A to B may be indicated by assuming all A subscripts to be positive and all B subscripts to be negative. An algebraic summation of subscripts for each cell may then be made. A summation of each step of the sequence $A_0 B_n, A_1 B_{n-1}, A_2 B_{n-2}, \dots, A_{n-2} B_2, A_{n-1} B_1, A_n B_0$ yields the following result : $-n, -n+2, -n+4, \dots, n-4, n-2, n$. In terms of the above sequence, it may be said that in a straight line path from A to B the absolute difference between algebraically summated subscripts is equal to 2. A step along this path toward B gives a subscript differential of $+2$ or $(-n+4)-(-n+2)$; a step along this path toward A gives a subscript differential of -2 or $(-n+2) - (-n+4)$.

It was stated above that there is at least one straight line path from any cell not A_0 to A_0 . Since the cell B_0 is one cell of the class of cells not A_0 , it follows that there is at least one straight line path from B_0 to A_0 . By similar reasoning there is at least one straight line path from A_0 to B_0 . It may be shown, also, that there is a path which is both a straight line path from A_0 to B_0 , and a straight line path from B_0 to A_0 . The demonstration is as follows : take any straight line path from A_0 to B_0 . The cell B_0 will have an A subscript of some value x . By definition, there must be some cell touching this cell $A_x B_0$ which has the subscript of A_{x-1} . The B subscript of the cell A_{x-1} will necessarily be B_1 . There must be some cell touching the cell $A_{x-1} B_1$, which has the A subscript of A_{x-2} . The B subscript of such a cell cannot be B_0 since B_0 is a unique cell in the structure. It cannot be B_1 because :

- a) Any cell B_1 touches cell B_0 .
- b) Cell B_0 has an A subscript of x .
- c) But the subscript of adjoining cells may vary only by 1.
- d) Therefore, the cell $A_x B_0$ may not touch the cell $A_{x-2} B_1$ since the A subscripts differ by more than one.
- e) Therefore, the cell A_{x-2} must bear the subscript B_2 .¹³

In the same way, it may be shown that in a chain from B_0 to A_0 in which the A subscripts decrease at each step (a straight line path from B_0 to A_0),

13. It is possible, of course, for the cell $A_{x-2} B_1$, to exist in the structure, but it may not touch the cell $A_x B_0$.

the B subscripts will increase at each step from B_0 to A_0 (a straight line path from A_0 to B_0).

Constant Differential Paths Other than Path A_0B_0 .

If a straight line path between A_0 and B_0 is defined in terms of a constant subscript differential at 2, what about paths with constant differentials at some other value, if any such paths exist? ¹⁴ The problem may be stated in this way : in a structure in which no restrictions are placed upon the number of cells or their pattern of connection, how many, if any, paths with different constant subscript differentials may there be ? The following analysis appears to answer this question.

In a structure that has been stratified with respect to some cell A and some cell B let the cell A_xB_y (contained in the chain A_0B_0) be selected. Since the A and B subscripts in any adjoining cell may vary only by one (or remain constant), the subscripts for all cells touching A_xB_y may be written (Figure 27).

Figure 27

A_xB_y	A_xB_{y+1}	A_xB_{y-1}
$A_{x+1}B_y$	$A_{x+1}B_{y+1}$	$A_{x+1}B_{y-1}$
$A_{x-1}B_y$	$A_{x-1}B_{y+1}$	$A_{x-1}B_{y-1}$

Subscripts of all cells touching cell A_xB_y

[29] Assuming that the A subscripts are positive and the B subscripts are negative, the summation of the subscripts is shown in Figure 28.

Figure 28

$x-y$	$x-y-1$	$x-y+1$
$x-y+1$	$x-y$	$x-y+2$
$x-y-1$	$x-y-2$	$x-y$

Summation of subscripts shown in Figure 27.

The difference between the subscripts of each of these cells and $A_{yx}B_y$ may now be calculated (Figure 29).

It may be said, therefore, that in a structure stratified with respect to two cells and with no restriction placed upon the number of cells or the

14. Except where stated otherwise, in the discussion that follows it is assumed that the structures dealt with are stratified with respect to only two points of reference - A_0 and B_0 .

Figure 29

0	-1	+1
+1	0	+2
-1	-2	0

Subscript differential for every possible step from $A_x B_y$

pattern of connection, paths may be distinguished with constant subscript differentials of 0,-1,+1,-2,+2. It is helpful at this point to draw a structure showing the subscript differentials derived above (Figure 30a, 30b).

Figure 30a

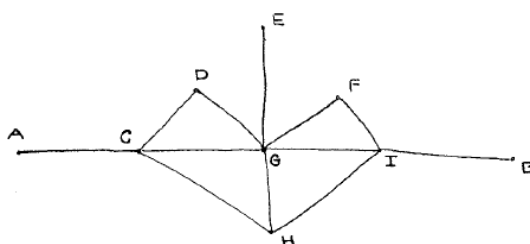
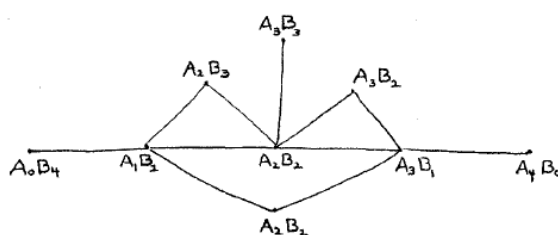


Figure 30b*



*The structures shown in figures 30a and 30b are identical. Two figures are used for convenience in indicating path differentials. For instance, the step C,D is translatable into A_1B_3, A_2B_3 which is equal to summated subscripts -2, -1. Transposing these quantities in order to get the subscript differential of the step : $-1(-2) = -1+2 = +1$.

The table below (Figure 31) gives some of the steps and their subscript differentials.

Figure 31

Step	Subscript Differential
GE	0
GH	0
GD	-1
GF	+1
GC	-2
GI	+2

A General Definition of Straight Line Path.

Any chain is considered to be a straight line path if it has a constant subscript differential at each step. In a given structure the subscript differential of a given step may change if the location of A_o and/or B_o is changed. It should be understood, therefore, that a chain is a straight line path relative to the A_oB_o matrix that is being used.

CONCLUSION

The mathematical model presented here is admittedly in an early state of development, and the problem of coordinating the mathematical concepts to psychological data is still to be met. The main objective of this paper is to define a possible geometry for dealing with psychological space, and to explore in a limited way the consequences of a particular set of assumptions and definitions.

[30]The fruitfulness of a model such as the one presented above may be judged not only by the questions it answers, but also by the questions it prompts one to ask. In a logical system as undeveloped as this one, the choice of “next steps” is sure to be greatly colored by personal interest however “logical” the choices are claimed to be. But the setting down of the questions that would, to the writer, be next steps is one way of indicating possible continuations.

The questions divide themselves naturally into two main groups : questions with respect to the mathematical development of the model, and questions with respect to the problem of coordination.

- 1) Mathematical development problems.

a) Although the distances \underline{c} and \underline{r} have the same limits in terms of \underline{d} , it has been shown that they do not vary within those limits in the same way. Why? What is the precise relationship between \underline{c} , \underline{r} , and \underline{d} ?

b) A structure of \underline{n} cells and with a constant i_x may take more than one form. Some of these forms have different Σse_{xy} values. Likewise, a structure of \underline{n} cells and with a constant Σse_{xy} may take more than one form, and some of these forms have different s_{ix} values. What precisely is the relationship between s_{ix} and Σse_{xy} ?

c) There appear to be many evidences that the length of the straight line path A_o to B_o in a structure limits the length of straight line paths other than paths with a zero differential. Is this true, and, if so, how does the limitation operate?

2) Coordination problems.

a) it has been shown that a path within a structure may have a direction. A psychological force is also assumed to have a directional value. Can the direction of a psychological force on a person at a cell B_x toward the cell A_y be coordinated to the direction of the straight line path from B_x to A_y ?

b) To what psychological entity should a cell be coordinated? If cells are coordinated to activities, goals, social position, etc., to what should regions be coordinated?

c) In order to assign directional values to paths, certain cells (A_o and B_o) were designated as reference points. To what should these reference points be coordinated in a life space? It would appear that the coordination should be made to some part in the life space sufficiently outstanding so that all other parts are seen in relation to it. Goal regions seem an obvious choice, but many other useful coordinations seem possible.

Obviously, these are only a few of the questions that could be set down, and it is impossible to predict what course further work will actually take. For the psychologist there is an understandable urge to proceed with the business of coordination. It may be, however, that the possibility and fruitfulness of coordination are very different at different stages of development of a model, and that further mathematical development of the model is the quickest way to a useful coordination with psychological fact.

Un modèle mathématique pour les structures de groupe

par Alex Bavelas

Massachusetts Institute of Technology

INTRODUCTION

De nombreux types de théories ont été développés pour expliquer le comportement humain. Elles peuvent être classées de plusieurs façons - en fonction des grands auteurs, des écoles de psychologie, de l'accent mis sur certains concepts ou domaines d'étude. Une façon utile de les classer aux fins du présent article est celle qui fait la différence entre a) les théories qui expliquent le comportement humain en fonction de facteurs qui peuvent être coexistants mais indépendants les uns des autres et b) les théories qui expliquent le comportement humain en fonction de groupes de facteurs constituant un domaine en interaction continue.

À l'époque de la première guerre mondiale, les psychologues allemands se divisaient *grosso modo* entre ces deux camps : un groupe suivait la voie de la désagrégation de la personne et de la situation en éléments et tentait d'expliquer le comportement en termes de simples relations causales. L'autre groupe tentait d'expliquer le comportement en fonction de groupes de facteurs constituant un ensemble dynamique - le champ psychologique. Ce champ était essentiellement constitué de la personne elle-même et de son environnement tel qu'elle le percevait. Ainsi, le problème n'était plus conçu comme une relation entre des éléments isolés, mais comme une interaction dynamique entre tous les facteurs de la situation.

À cette époque, Kurt Lewin a commencé à formuler une méthode d'analyse des situations psychologiques qui reposait sur leur reformulation en termes mathématiques : la géométrie pour l'expression des relations positionnelles entre les parties de l'espace vital, et les vecteurs pour l'expression de la force, de la direction et du point d'application des forces psychologiques. L'utilisation de la géométrie était naturelle dans une approche psychologique qui insistait sur un monde « tel que la personne elle-même le voit », puisque les êtres humains ont tendance à se représenter le champ contextuel comme existant dans un « espace » autour d'eux. En outre, l'approche géométrique offrait un moyen pratique de représentation graphique de nombreuses situations psychologiques.¹ La raison la plus importante et, en un sens, la seule raison de l'utilisation de la géométrie résidait dans le fait que l'hypothèse de

1. En fait, Lewin n'a jamais eu l'intention d'utiliser la géométrie comme moyen de produire des diagrammes ou des illustrations. Ses représentations géométriques n'étaient pas des analogies à écarter lorsque leurs implications devenaient gênantes. Elles étaient destinées à être des énoncés mathématiques de relations : non pas des énoncés de type « ce à quoi ressemble la situation », mais des énoncés correspondant à « ce qu'est la situation ».

groupes de facteurs interdépendants impliquait l'existence d'un espace mathématique et qu'il était nécessaire d'avoir des moyens pour le manipuler. Représenter les relations entre des groupes de données psychologiques imposait certaines exigences quant au type de géométrie pouvant être utilisé. Il devait, en premier lieu, s'agir d'une géométrie ne reposant pas sur des hypothèses impossibles à satisfaire. En outre, pour être immédiatement utile, elle devait être une géométrie qui ne présupposait pas de possibilités de mesure et de définition supérieures à celles existant à l'époque en psychologie.

Une géométrie suffisamment généralisée et non-métrique a été trouvée dans la topologie. Certaines notions fondamentales de la topologie - « connectivité », « région », « frontière », - se sont révélées prometteuses dans le traitement des relations spatiales en psychologie. Ces idées ont été empruntées et utilisées bien que, pour la plupart, les hypothèses qui les sous-tendent ne puissent pas être reliées à la psychologie. Il ne fait aucun doute que ces concepts issus de la topologie se sont révélés utiles, si l'on en juge par les cadres expérimentaux qu'ils ont stimulés et qu'ils ont permis de formuler. Lewin et ses étudiants ont fait œuvre de pionniers dans des domaines auparavant considérés comme trop difficiles à aborder expérimentalement.²

Pendant, des concepts sortis de leur contexte, s'ils peuvent être utiles dans des cas d'application spécifiques, donnent rarement leur pleine valeur tant qu'ils ne sont pas mis en relation les uns avec les autres de manière systématique. La transposition³ du corpus formel de la géométrie topologique vers les concepts psychologiques semblait sans espoir. Ce qui semblait possible était la définition d'une géométrie conservant les avantages des concepts empruntés à la topologie, et qui semblait convenir comme système aux utilisations de l'analyse psychologique. Lewin a tenté cette tâche en introduisant une géométrie qu'il a appelée « hodologie »⁴. En hodologie, principalement conçue pour traiter les problèmes de distance et de direction, une hypothèse

2. Barker, R., Dembo, T., et Lewin, K., Frustration and regression : An experiment with young children, *Univ. Ia. Stud. Child Welf.*, 1941, 18.

Dembo, T., Der Arger als dynamisches Problem, *Psychol. Forsch.*, 1931, 15, 1-44.

Kounin, Jacob S. Experimental Studies in Rigidity, *Character and Personality*, 1941, 9, 273-282.

Lewin, K., A Dynamic Theory of Personality, New York, McGraw-Hill, 1935.

Lewin, K., Principles of Topological Psychology, New York McGraw-Hill, 1936.

Lippitt, R., An analysis of group reaction to three types of experimentally created social climate, Iowa City, Univ. of Iowa, Ph.D. Thesis, 1940.

Mackinnon, Donald W., A Topological Analysis of Anxiety, *Character and Personality*, 1944, 12, 163-176.

Mahler, V., Ersatzhandlungen verschiedenen Reallitätsgrades, *Psychol. Forsch.*, 1933, 18, 26-89.

3. Le terme anglais *coordination* a le plus souvent été traduit par *transposition* dans la mesure où l'enjeu pour l'auteur est de transposer des méthodes mathématiques vers des problèmes psychologiques.

4. Le terme est peu employé mais peut désigner, outre l'approche de Lewin en psychologie, l'étude de l'interconnexion des cellules nerveuses (neuroscience), l'étude des interconnexions entre idées (philosophie) ou l'étude des chemins (géographie - source wikipédia).

de base est qu'entre deux parties quelconques d'un ensemble, on peut distinguer un « chemin le plus court ».

« Dans l'espace euclidien, la distance et la direction se réfèrent à une connexion entre deux points. Du point de vue de la topologie, cette connexion doit être considérée comme un 'chemin' de a à b. Il y a bien sûr de nombreux chemins possibles entre a et b. L'un de ces chemins possibles se distingue comme étant le chemin le plus court entre a et b. Comme la topologie ne connaît pas de différences de taille⁵, on ne peut pas utiliser la brièveté comme principe général pour une telle sélection. Il serait possible de substituer au concept de 'chemin le plus court' l'idée du nombre minimum de régions traversées par un chemin de a à b. Cependant, nous ne nous limiterons pas à cette seule méthode de sélection d'un seul chemin parmi tous les chemins possibles. »⁶

À partir de cette idée de « chemin le plus court », Lewin développe une approche analytique des propriétés des ensembles. Dans l'article cité, il souligne l'importance du motif spécifique que peuvent prendre les cellules d'un ensemble, et il introduit certains concepts concernant les régions de ces motifs ayant des propriétés spéciales. En partant de l'hypothèse d'« ensembles naturels où toutes les frontières ont la même force », il distingue les régions de la structure à partir desquelles un changement se propagerait le plus rapidement à toutes les autres parties, et les régions à partir desquelles une telle propagation prendrait le plus de temps pour couvrir la structure entière. Il distingue également les régions de la structure les plus et les moins susceptibles de subir des changements « de l'extérieur ». Lewin souligne également que ces concepts sont pertinents à la fois pour les problèmes de structure cognitive - l'organisation du matériel mental - et les problèmes de structure de groupe - l'organisation des individus en groupes sociaux.

Pour revenir à la définition du « chemin le plus court », sur laquelle repose toute la discussion précédente, nous constatons que Lewin indique plusieurs définitions possibles :

« La propriété qui rend exceptionnel un chemin entre deux régions de l'espace de vie (le 'chemin le plus court') semble varier considérablement selon la situation. Parfois, la liaison la plus rapide est remarquable ; d'autres fois, c'est la liaison la moins chère, ou la plus agréable, ou la moins dangereuse. Ainsi, tout ce que nous voudrions supposer, c'est qu'il devrait y avoir, dans le cas donné, un chemin exceptionnel de a à b. »⁷

5. [Comprendre distance métrique.](#)

6. Lewin, Kurt, *The Conceptual Representation and the Measurement of Psychological Forces*, *Contributions to Psychological Theory*, I, Duke University Press, 1938, p. 25.

7. *Ibid*, p. 25.

Les critères « le plus agréable » ou « le moins dangereux » introduisent des facteurs dynamiques dans le problème de la définition du chemin le plus court. Le critère « régions minimales à traverser par un chemin de a à b », en revanche, est purement positionnel. Il semble que ce n'est que sur la base de ce dernier critère que l'on puisse développer des énoncés mathématiques de distance et de direction : en fonction du nombre et de la position des parties dans l'ensemble, on peut dire que le critère des « régions minimales » pour la distinction des chemins les plus courts est accepté et l'on tente d'explorer de manière limitée les conséquences d'une telle hypothèse. Nous essayons également d'apporter des modifications ou des ajouts à ces définitions afin de permettre une utilisation plus souple des concepts qui en découlent. Ces modifications ne sont pas « arbitraires » mais tiennent compte des problèmes psychologiques qui pourraient ainsi être traités plus facilement. Dans certains cas, des modifications qui rendraient certains problèmes plus faciles à mathématiser ont été ignorées en raison des complications qu'elles introduisent dans la formulation initiale des concepts. C'est le cas de la transitivité de la relation de « contact » entre régions ou cellules. L'une des hypothèses formulées ci-dessous est que si la cellule A_1 touche la cellule A_2 , alors la cellule A_2 touche la cellule A_1 . Cette supposition a été faite afin de s'assurer de certains avantages qui apparaîtront par la suite. Mais on a renoncé à d'autres avantages. Dans les conditions de l'hypothèse énoncée, une chaîne de cellules peut être considérée comme un chemin le long duquel un changement d'état peut se propager progressivement de cellule en cellule - de n'importe quelle cellule à n'importe quelle cellule voisine. Si l'on considère que la chaîne de cellules représente une séquence d'étapes par laquelle une personne pourrait passer, il faut en conclure que la séquence d'étapes est réversible à tout moment - un fait qui n'est pas toujours ou souvent vrai dans l'expérience humaine. Si l'hypothèse de transitivité n'était pas faite, ou explicitement rejetée, il serait alors mathématiquement possible de décrire des chaînes de cellules ou des chemins ayant des propriétés de connectivité très différentes. Notre hypothétique personne pourrait dans un tel cas passer de la cellule A à la cellule B à la cellule C, mais sans pouvoir revenir sur ses pas. Le chemin pourrait être totalement ou partiellement irréversible.

Les concepts de motif et de communication sont au cœur de cet article. Ils sont développés dans le but assumé de les appliquer à des situations psychologiques. Bien qu'aucune transposition rigide de ces idées à des situations psychologiques ou sociales ne soit tentée, des domaines généraux dans lesquels une application pourrait être fructueuse sont suggérés. Par exemple, dans le domaine des groupes sociaux, il semblerait que deux aspects remarquables de la communication méritent l'attention : celui de la communication entre individus (ou entre groupes) et celui de la communication entre idées et attitudes. La propagation d'une rumeur est un bon exemple de la relation étroite qui existe entre ces deux aspects. Si la rapidité, l'orientation et l'étendue de la diffusion dépendent en partie des modes de connexion entre

les individus et les groupes, elles dépendent également - notamment en ce qui concerne le développement et la partialité de la rumeur, ainsi que la propension à l'entendre et à la transmettre - de la connexion du contenu de la rumeur avec d'autres idées et attitudes.

HYPOTHÈSE DE BASE

1. L'espace considéré est constitué de collections de cellules.
2. Une cellule équivaut à un point ou à une position dans l'espace.
3. Une cellule donnée peut ou non toucher une autre cellule.
4. Si une cellule A_1 touche une autre cellule A_2 , alors on dit que la cellule A_2 touche la cellule A_1 .
5. Une cellule ne peut pas se toucher elle-même ⁸.

DÉFINITIONS

1. Limite d'une cellule : la limite d'une cellule A est constituée de toutes les cellules qui touchent A .
2. Région : une région est toute classe ou collection de cellules.
3. Cellule ouverte : la cellule A est ouverte par rapport à la région \underline{g} si la limite de A n'est pas contenue dans \underline{g} .
4. Cellule fermée : la cellule A est fermée par rapport à la région \underline{g} si la limite de A est contenue dans \underline{g} .
5. Limite d'une région : la limite de la région \underline{g} est la classe de toutes les cellules qui ne sont pas contenues dans \underline{g} et qui touchent au moins une cellule dans \underline{g} .
6. Chaîne : les cellules A_1, A_2, \dots, A_n forment une chaîne si A_1 touche A_2 , A_2 touche A_3 , \dots , A_{n-1} touche A_n . A_n peut ou non être équivalent à A_1 .
 - a) Chaîne simple : Les cellules A_1, A_2, \dots, A_n forment une chaîne simple si A_1 touche la cellule A_2 et aucune autre cellule, si A_2 touche A_1 et A_3 et aucune autre cellule, si A_3 touche A_2 et A_4 et aucune autre cellule, etc. , \dots et la cellule A_n touche la cellule A_{n-1} et touche ou non la cellule A_1 .
7. Longueur d'une chaîne : la longueur d'une chaîne est égale au nombre de cellules contenues dans la chaîne moins un.
8. Structure : une région \underline{g} est dite structure si pour toute paire de cellules A_1, A_2 contenues dans \underline{g} , il existe une chaîne contenue dans \underline{g} et reliant A_1 et A_2 ⁹.

8. En théorie des graphes, une formulation équivalente aux hypothèses 4 et 5 serait de considérer que le graphe est non orienté et ne comprend pas de boucle.

9. Adapté en langage de la théorie des graphes, cela donnerait : un graphe g est dit connexe s'il existe un chemin entre toute paire de sommets A_1, A_2 .

9. Distance entre deux cellules : la distance entre deux cellules quelconques A_1, A_2 ($\overline{A_1A_2}$) dans une structure \underline{w} est la chaîne de longueur minimale contenue dans \underline{w} et reliant A_1 et A_2 .

10. Distance entre une cellule et une région : lorsque la cellule A et la région \underline{g} sont toutes deux incluses dans \underline{w} , et lorsque A n'est pas dans \underline{g} , on distingue deux distances.

a) Distance maximale : la plus grande distance de toutes les distances entre A et chaque cellule de \underline{g} .

b) Distance minimale : la plus courte de toutes les distances entre la cellule A et toute cellule de \underline{g} .

11. Région ultra-périphérique d'une structure : la région ultra-périphérique d'une structure est la classe de toutes les cellules qui sont ouvertes par rapport à la structure.

12. La région la plus intérieure¹⁰ d'une structure : la région la plus intérieure d'une structure est la classe de toutes les cellules dont la distance minimale par rapport à la région la plus extérieure de la structure est la plus grande.

13. La plus grande des distances maximales entre les régions ultra-périphériques et les régions les plus intérieures d'une structure est indiquée par la lettre \underline{r} .

14. La plus grande des distances entre une cellule A_1 et toute autre cellule de la structure est désignée par la lettre \underline{p} .

15. Le diamètre d'une structure : le diamètre d'une structure (\underline{d}) est égal au plus grand \underline{p} que l'on peut trouver dans la structure.

16. La région centrale d'une structure : la région centrale d'une structure est la classe de toutes les cellules ayant le plus petit \underline{p} qui se trouve dans la structure.

17. La région périphérique d'une structure : la région périphérique d'une structure est la classe de toutes les cellules ayant la distance maximale la plus grande par rapport à la région centrale. Cette distance sera désignée par le symbole \underline{c} .

UNE DISCUSSION SUR LES DISTANCES \underline{d} , \underline{c} et \underline{r} .

Une méthode d'illustration.

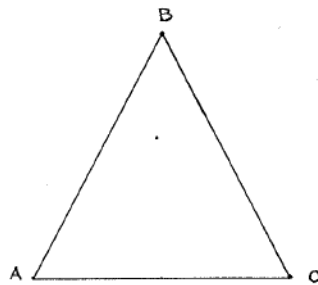
Dans une discussion sur les modes de communication au sein d'une structure, on distingue trois distances structurelles : \underline{d} , \underline{c} , et \underline{r} (voir définitions 12, 14 & 17). Bien qu'elle ne soit pas strictement nécessaire, et souvent indésirable¹¹, une sorte d'image d'une structure est utile pour illustrer certaines

10. Il serait tentant pour un géographe de parler de la région la plus centrale mais ici Bavelas utilise l'adjectif « innermost » alors que le terme central est utilisé ailleurs dans le texte. L'auteur distingue nettement extérieur/intérieur et centre/périphérie.

11. Cette réserve peut surprendre, l'auteur utilisant abondamment, comme le fait Lewin, des modèles graphiques pour illustrer son propos.

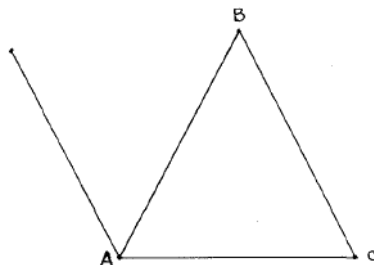
relations entre ces distances. Les images seront construites de la manière suivante : une structure de trois cellules qui se touchent toutes ressemblerait à la figure 1.

Figure 1



Si, dans cette structure, la cellule A était une cellule ouverte (voir définition 3), la structure ressemblerait à la figure 2.

Figure 2



L'image de la figure 3 signifierait :

- 1) que A, C, F sont des cellules ouvertes et B, D, E des cellules fermées ;
- 2) que A (par rapport à cette structure) ne touche que B et F ne touche que E ; que B touche A et D, D touche B, C et E, et E touche D et F.

La raison de ce changement par rapport au type d'images utilisées par Lewin est que certains types de structures sont très difficiles ou impossibles à dessiner de cette manière. Par exemple, il est impossible de représenter, selon Lewin, une structure où A touche B, B touche C, A et C sont des cellules ouvertes et B une cellule fermée (voir figure 4).

La distance \underline{d} (définition 14 : la plus grande de toutes les distances entre une cellule A_1 et toute autre cellule de la structure est notée \underline{p} ; définition

Figure 3

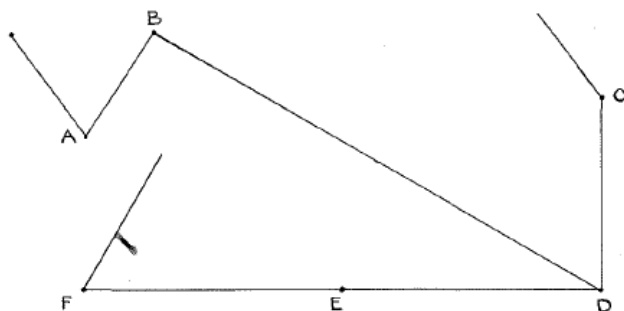


Figure 4



15 : le diamètre d'une structure (\underline{d}) est égal à la plus grande distance \underline{p} que l'on peut trouver dans la structure).

La manière dont la distance \underline{d} peut varier dans une structure avec un nombre constant de cellules peut être montrée par l'utilisation de plusieurs images.

Il ressort des illustrations ci-dessus que les limites de la distance \underline{d} peuvent être exprimées en termes de \underline{n} (le nombre de cellules dans la structure). La valeur de \underline{d} est minimale lorsque la plus grande distance entre deux cellules est égale à $n-(n-1)$ ou simplement 1, comme dans la figure 5c. La valeur de \underline{d} est maximale lorsque la plus grande distance entre deux cellules quelconques est égale à $n - 1$ - ce qui signifie que la structure prend la forme d'une chaîne simple dans laquelle la première cellule ne touche pas la dernière. La distance \underline{c} (définition 17 : la région périphérique d'une structure est la classe de toutes les cellules ayant la plus grande distance maximale de la région centrale. Cette distance sera dénommée \underline{c})¹².

La manière dont la distance \underline{c} peut varier dans une structure avec un nombre constant de cellules est montrée dans les images suivantes :

Dans la figure 6c, la région périphérique (voir définition 16) est constituée des cellules A et F. Lewin définit la région périphérique d'une structure comme l'ensemble des cellules A pour lesquelles une cellule B peut être trou-

12. La construction de certaines parties de l'article peut surprendre.

Figures 5abc

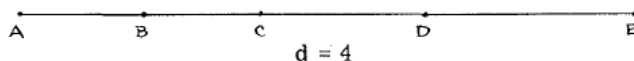
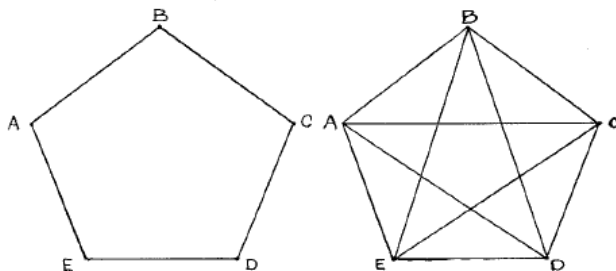


Figure 5a



$d = 2$

Figure 5b

$d = 1$

Figure 5c

vée de sorte que la plus courte distance de A à B soit égale à \underline{d} . Dans certains cas, comme celui illustré à la figure 6c, les deux définitions définissent la même région. Dans d'autres cas, comme celui de la figure 6d, les régions définies sont différentes.

Selon la définition de Lewin, la région périphérique est constituée des cellules A, B, C, D, E, F, G, H. Selon la définition de cet article, la région périphérique est constituée des cellules A, B, C, D.

La distance \underline{r} (définition 13 : la plus grande des distances maximales entre les régions ultra-périphériques et les régions les plus intérieures d'une structure est désignée par la lettre \underline{r}).

La manière dont la distance \underline{r} peut varier dans une structure avec un nombre constant de cellules est illustrée dans les images suivantes.

En plus de montrer comment la distance \underline{c} peut varier, les figures 7a, 7b, 7c illustrent certaines des propriétés d'une région telles qu'elles ont été définies (voir définition 2). Dans la figure 7c, par exemple, la région distinguée comme étant la plus intérieure est constituée de deux cellules non connectées aussi éloignées qu'il est possible de l'être.

Limites des valeurs \underline{c} et \underline{r} .

Les limites des valeurs \underline{c} et \underline{r} idem peuvent être exprimées en fonction de \underline{d} de la manière suivante :

$$\underline{d} = \underline{c} = \underline{d}/2^{13} \qquad \underline{d} = \underline{r} = \underline{d}/2$$

13. En lisant la valeur de $\underline{d}/2$, lire les fractions comme le nombre entier immédiatement

Figure 6abc

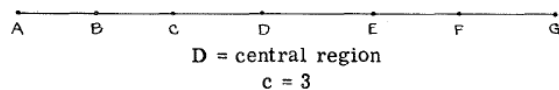


Figure 6a

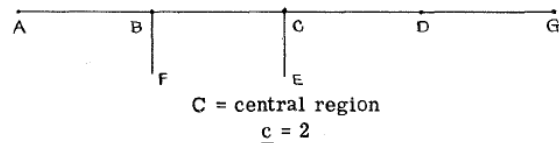


Figure 6b

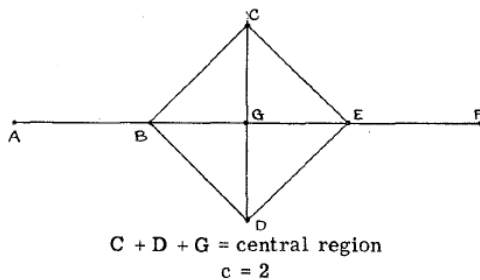
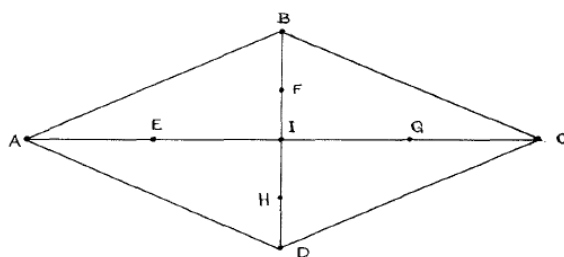


Figure 6c

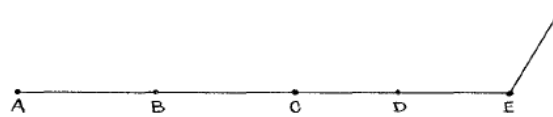
Figure 6d



En d'autres termes, les limites des valeurs que \underline{c} et \underline{r} peuvent prendre sont \underline{d} à une extrémité et $1/2 \underline{d}$ à l'autre.

Afin de prouver ces deux affirmations, il est nécessaire d'énoncer un principe supérieur. La quantité $\underline{d}/2$ se réfère à une distance dans une structure et les distances sont définies de telle sorte qu'une distance fractionnaire n'a pas de sens.

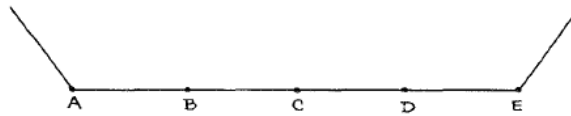
Figures 7 abc



A = innermost region

$$\underline{r} = 4$$

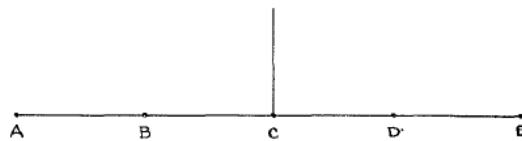
Figure 7a



C = innermost region

$$\underline{r} = 2$$

Figure 7b



A + E = innermost region

$$\underline{r} = 2$$

Figure 7c

cipe général concernant les distances à l'intérieur des structures. Le principe est que, soit trois cellules A, B et C dans une structure, \overline{AB} (la distance A à B, voir définitions 6, 6a, 8) sera inférieure ou égale à \overline{BC} plus \overline{CA} . La preuve de ce principe général peut être apportée à partir des hypothèses et des définitions :

- 1) Si la cellule C est contenue dans la chaîne \overline{AB} , alors $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$.
- 2) Si la cellule C n'est pas contenue dans la chaîne \overline{AB} , alors la chaîne \overline{ACB} est par définition égale ou plus longue que la chaîne \overline{AB} .
- 3) Par conséquent, $\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{CB}$

Revenons à la question des limites de \underline{c} et \underline{r} en fonction de \underline{d} .

- 1) Soit A une cellule dans la région centrale.
- 2) Soit $\overline{CB} = \underline{d}$.

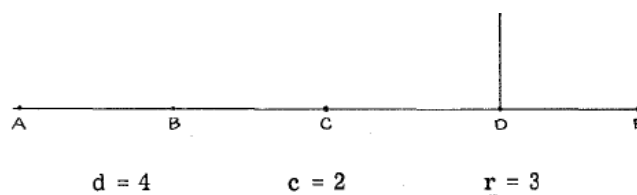
- 3) $\overline{AB} + \overline{AC} \leq 2c$.
- 4) $\overline{AB} + \overline{AC} \geq d$.
- 5) Par conséquent, $2c \geq d$ ou $d \geq c \geq d/2$.

Et de la même manière en ce qui concerne \underline{r} .

- 1) Soit A une cellule dans la région la plus intérieure.
- 2) Soit $\overline{CB} = d$.
- 3) $\overline{CA} + \overline{AB} \leq d$.
- 4) $\overline{CA} + \overline{AB} \geq d$.
- 5) Par conséquent, $2r \geq d$ ou $d \geq r \geq d/2$.

Bien que \underline{c} and \underline{r} aient les mêmes limites, celles-ci ne varient pas de la même manière. Bien que la preuve formelle de ce fait n'ait pas été établie, il est possible de dessiner des structures dans lesquelles \underline{c} et \underline{r} n'ont pas les mêmes valeurs (figure 8).

Figure 8



Un coup d'œil aux figures 5a, b, c et 6a, b, c suffit pour montrer que dans une structure de \underline{n} cellules, la façon dont \underline{d} et \underline{c} varient dépend du nombre et du schéma d'interconnexions entre les cellules. Ce problème a été abordé de deux manières, et bien que l'objectif consistant à trouver le domaine de variation de \underline{d} et \underline{c} n'ait pas été atteint, les résultats sont suffisamment intéressants pour être énoncés.

Les limites de si_x ¹⁴ pour une structure de \underline{n} cellules.

- 1) Dans une structure dans laquelle toute cellule touche toutes les autres cellules, $i_x = n - 1$ et $si_x = n(n - 1)$.
- 2) Dans une structure dans laquelle chaque cellule a le moins de cellules possibles qui la touchent, la structure prend la forme d'une simple chaîne dans laquelle la cellule A_1 ne touche pas la cellule A_n .
- 3) Par conséquent, $i_{A1} = 1, i_{A2} = 2, i_{A3} = 2, \dots, i_{A_{n-1}} = 2, i_{An} = 1$.
- 4) Donc $si_x = 2(n-1)$.

14. i_A = le nombre de cellules touchant la cellule A. si_x = la somme de i pour chaque cellule de la structure - c'est-à-dire $i_{A1} + i_{A2} + i_{A3} + \dots + i_{An}$.

5) On peut donc dire que pour une structure de cellules \underline{n} , la valeur de si_x varie de $n(n-1)$ à $2(n-1)$, la plage de variation étant $n(n-1)-2(n-1)=(n-1)(n-2)$.

Les limites de Σse_{xy} ¹⁵ pour une structure de \underline{n} cellules.

1) Dans une structure où toute cellule touche toutes les autres cellules, $se_{A1x} = n-1$ et $\Sigma se_{xy} = n(n-1)$.

2) Dans une structure dans laquelle chaque cellule touche le moins possible les autres cellules, la structure prend la forme d'une simple chaîne dans laquelle la cellule A_1 ne touche pas A_n .

3) Donc,

$$se_{A1x} = 1+2+3+\dots+n-1 \text{ et}$$

$$se_{A2x} = 1 + 1 + 2 + \dots + n-2, \text{ etc. jusqu'à}$$

.

.

$$se_{A1x} = n-1 + \dots + 2 + 1.$$

$$4) se_{A1x} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$se_{A2x} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n-(n-2)n-(n-1)}{2}$$

$$se_{A3x} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} + \frac{n-(n-3)n-(n-2)}{2}$$

.

.

$$se_{A_{n-2}x} = \frac{n-(n-3)n-(n-2)}{2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$se_{A_{n-1}x} = \frac{n-(n-2)n-(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$se_{A_nx} = \frac{n(n-1)}{2}$$

5) Par conséquent, Σse_{xy} peut être exprimé comme suit : $n(n-1) + (n-1)(n-2) + (n-2)(n-3) + \dots + n-(n-1) (n- n)$ ou simplement $\frac{n(n^2 - 1)}{3}$ ¹⁶

6) La plage de valeurs pour Σse_{xy} dans une structure de \underline{n} cellules est donc

$$\frac{n(n^2-1)}{3} - n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \text{ }^{17}$$

Les distances $\underline{d,c,r}$, et la propagation du changement dans une structure.

15. $e_{A1A2} = \overline{A_1A_2}$; se_{A1x} = la somme de toutes les distances entre la cellule A_1 , et toutes les autres cellules de la structure; Σse_{xy} = la somme de toutes les distances entre toutes les paires de cellules de la structure.

16. Soit $\phi = n(n-1) + (n-1)(n-2) + \dots + n-(n-1)(n-n)$.

$$\text{Alors } \phi = \sum_{J=1}^{J=n} J(J-1) = \sum_{J=1}^{J=n} J^2 - \sum_{J=1}^{J=n} J$$

$$\sum_{J=1}^{J=n} J^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{J=1}^{J=n} J = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\phi = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

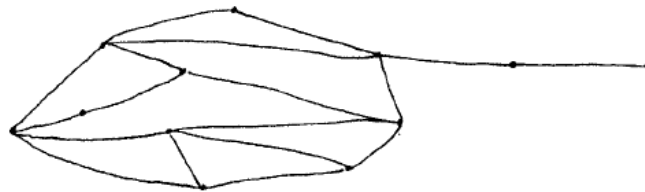
$$\phi = \frac{4n^3 - 4n}{12} = \frac{n}{3}(n^2 - 1) = \frac{n(n^2 - 1)}{3}$$

17. La plage de variation de Σse_{xy} est $\frac{n}{3}$ fois plus importante que celle de si_x .

Une façon d'étudier le schéma de communication d'une structure est de supposer qu'un changement d'état se produit dans une cellule et se propage par contact dans toute la structure. Supposons qu'un changement d'état se produise à t^0 dans la cellule X_0 , le changement à t^1 s'est propagé¹⁸ à toutes les cellules X_1 qui touchent la cellule X_0 , à t^2 le changement s'est propagé à toutes les cellules X_2 dont chacune touche au moins une cellule de la classe de cellules désignée comme X_1 . Si nous supposons en outre que les intervalles de temps t^1-t^0 , t^2-t^1 , t^3-t^2 , etc. sont constants, nous pouvons décrire certains aspects du schéma de communication d'une structure en termes de temps nécessaire à un changement pour se propager d'un endroit à un autre.

Considérons une simple chaîne dans laquelle la cellule A touche B, B touche C, C touche D, etc., et supposons un changement d'état ayant pour origine la cellule A, il est clair que le changement se propagera à raison d'une cellule par unité de temps « t ». Si l'on suppose que le changement d'état se trouve dans la cellule A au moment t^0 , alors au moment t^1 l'état modifié se trouvera dans les deux cellules A et B; au moment t^2 il se trouvera dans les trois cellules A, B et C; et au moment t^n le changement se sera propagé à la n^{th} cellule. Si, au lieu d'une simple chaîne, nous considérons une structure telle que celle de la figure 8a avec un changement ayant son origine dans la cellule A, le schéma de propagation sera différent.

Figure 8a



Bien que le schéma de propagation dans une structure particulière soit spécifique à cette structure, il est possible de faire certaines déclarations générales concernant la propagation dans le temps sur la base de certaines des définitions faites précédemment :

1) un changement d'état ne provenant pas d'une structure commence sa propagation dans la structure à partir d'une ou plusieurs des cellules composant la région extérieure. Puisque la plus grande des distances maximales entre les régions ultra-périphériques et les régions intérieures est égale à \underline{r} (définition 12), le t^n requis pour qu'un changement provenant de l'extérieur de la structure s'étende à la région la plus intérieure de la structure est égal à $t^{\underline{r}}$. Il a toutefois été démontré que la valeur \underline{r} varie par rapport à \underline{d} : $\underline{d} = \underline{r}$

18. Nous supposons dans cette discussion que le changement d'état peut se propager indéfiniment sans diminution ni augmentation.

= $\underline{d}/2$. Par conséquent, les valeurs de t nécessaires pour qu'un changement s'étende de la région la plus éloignée à la région la plus intérieure dans les conditions indiquées ci-dessus varient de $t^{\underline{d}}$ à $t^{\underline{d}/2}$.

2) un changement ayant pour origine la région la plus intérieure d'une structure, selon le même raisonnement qu'au point 1) ci-dessus, nécessite de $t^{\underline{d}}$ à $t^{\underline{d}/2}$ étapes pour s'étendre à la région la plus extérieure de la structure.

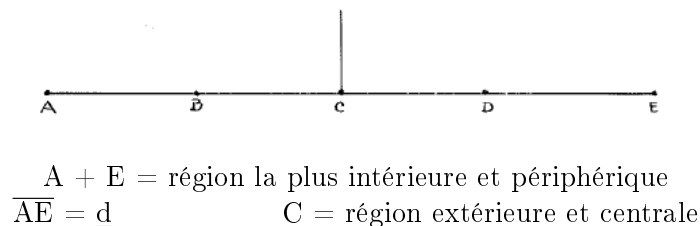
3) un changement ayant son origine dans la région la plus centrale nécessite par définition $t^{\underline{c}}$ étapes pour couvrir la totalité de la structure. Comme dans le cas de $t^{\underline{c}}$, les limites de $t^{\underline{c}}$ varient également entre $t^{\underline{d}}$ et $t^{\underline{d}/2}$. Toutefois, étant donné que \underline{c} est défini en termes de plus petit \underline{p} (définition 14), $t^{\underline{c}}$ est inférieur ou égal à $t^{\underline{c}}$.

En résumé, on peut dire que, quelle que soit la structure, a) un changement ne peut pas se propager dans toute une structure en moins de $t^{\underline{d}/2}$ étapes, b) le plus petit t possible pour une propagation complète dans une structure est obtenu si la propagation commence dans la région centrale.

Applications possibles de certains des concepts ci-dessus aux groupes sociaux.

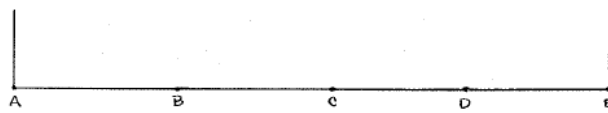
Une étude récemment réalisée sur une organisation nationale de défense des minorités a indiqué que le sous-groupe auquel l'organisation dans son ensemble était le plus sensible était également le sous-groupe le plus en contact avec l'environnement non minoritaire et anti-minoritaire. S'agit-il d'un exemple de région d'un groupe social qui est à la fois la région la plus centrale et la plus extérieure ? Quelle différence cela ferait-il pour la vie de cette organisation si son sous-groupe le plus central était aussi sa région la plus intérieure ? Les images qui suivent montrent certaines variations théoriquement possibles.

Figure 9



Dans la figure 9, nous voyons une situation similaire à certains égards à celle mentionnée ci-dessus. La région centrale est également la région extérieure, et la région la plus intérieure est également la région périphérique. La région la plus intérieure est composée de deux parties aussi éloignées que possible l'une de l'autre.

Figure 10



C = région la plus intérieure et centrale
 A + E = région ultra-périphérique et périphérique
 $\overline{AE} = \underline{d}$

Dans la figure 10, nous voyons une structure qui semble en quelque sorte l'« opposée » de la figure 9. La région centrale est maintenant la plus éloignée de l'extérieur. La région en contact avec l'« extérieur » est maintenant une région non connectée.

Figure 11



C + D = région centrale et en partie ultra-périphérique
 A + E¹⁹ = région périphérique
 E = région la plus intérieure

Figure 12



A + E = région périphérique et partiellement extérieure
 A + C = région ultra-périphérique
 C = région centrale
 E = région la plus intérieure

Une situation intéressante relative à l'industrie permet d'illustrer un emploi possible du type d'analyse des structures présentées dans les figures 9, 10,

11 et 12. Un groupe de femmes employées par une usine de confection dans une grande ville et travaillant côte à côte constituait un groupe de travail informel. Outre le fait qu'elles étaient rémunérées sur la base de leur production cumulée, une autre circonstance tendait à faire de ce groupe une structure sociale de proximité : toutes parlaient italien et une seule des femmes parlait anglais. Les relations entre ce groupe et la direction de l'entreprise concernant les heures de travail, les salaires et les conditions de travail se faisaient par l'intermédiaire de la seule membre anglophone (et ce bien que l'usine ait été syndiquée). Il est clair que cette femme, en ce qui concerne la communication avec la direction, était la membre « la plus éloignée » du groupe. La structure interne du groupe n'est pas connue, mais on peut spéculer sur l'effet de la position qu'elle occupait au sein du groupe sur la communication au sein de celui-ci.

Si, en plus d'être la membre la plus éloignée, elle était aussi la plus centrale, le groupe pourrait être représenté comme dans la figure 9. Il est difficile d'imaginer que la membre anglophone ne soit pas centrale en ce qui concerne la communication qui doit nécessairement passer par elle, bien que dans certaines conditions, un tel schéma puisse exister. Dans la figure 12a, la membre anglophone (E) est représentée dans une position non centrale.

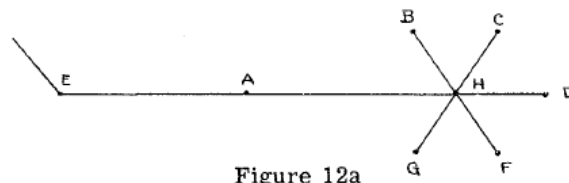


Figure 12a

Il est intéressant de souligner au passage l'importance de la position de la membre anglophone par rapport à la perception du groupe de l'« extérieur ». Même si la région ultra-périphérique d'une structure peut être exclue de la formulation des revendications, elle peut néanmoins exercer une grande influence sur les décisions. Dans la mesure où les décisions sont basées sur des informations quant à l'état des affaires « extérieures », le fait de retenir des informations, de les enjoliver ou de les déformer lors de leur transmission, ou de déformer d'une autre manière l'état de l'extérieur, affectera fondamentalement ces décisions. D'une certaine manière, l'« adéquation perceptives », la loyauté et le moral de la région ultra-périphérique des structures d'un groupe sont essentiels pour maintenir des relations optimales avec l'« extérieur ».

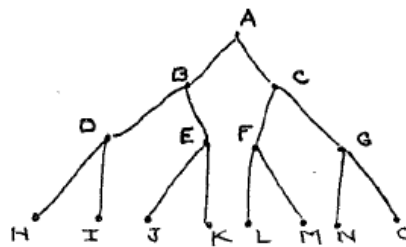
S'il est vrai que les structures en question sont définies selon des hypothèses qui rendent impossible leur stricte transposition à des organisations industrielles ou autres organisations hiérarchiques, elles fournissent néanmoins une base de comparaison des propriétés structurelles propres à certains types d'organisations. Il est possible de répondre à certaines questions de manière

très précise. Par exemple, dans une organisation d'un type donné, quelle est la distance maximale entre deux individus qui la composent ? Cette distance dépend-t-elle du nombre de personnes dans l'organisation ? du nombre de subordonnés de chaque supérieur ? du nombre de niveaux dans l'organisation ? des possibilités de communication entre les subordonnés ? On pourrait se poser un autre type de question : dans une organisation donnée, où se situe la région ayant la plus grande centralité ? Qui en fera partie ? Qui sera le plus périphérique ?

Il est possible de répondre à certaines de ces questions. On peut commencer par préciser trois types de structures à des fins de comparaison.

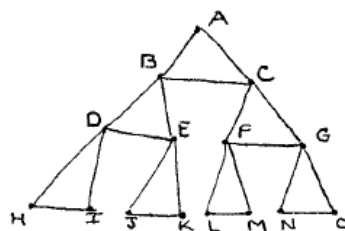
1) une organisation dans laquelle un subordonné ne communique qu'avec son supérieur et ses propres subordonnés (figure 13) ;

Figure 13



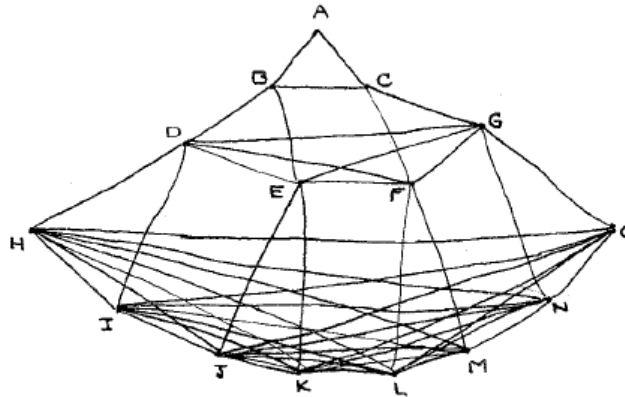
2) une organisation dans laquelle un subordonné communique avec son supérieur, les subordonnés de son supérieur et ses propres subordonnés (figure 14) ;

Figure 14



3) une organisation dans laquelle un subordonné communique avec son supérieur, tous ses subordonnés à son propre niveau, et avec ses propres subordonnés (figure 15).

Figure 15



Dans ces structures définies, la variable significative concernant les valeurs \underline{d} et \underline{c} est le nombre de niveaux plutôt que le nombre de cellules. Dans la figure 13 par exemple, il est visible que le nombre de subordonnés liés à chaque supérieur importe peu; les valeurs \underline{d} et \underline{c} restent constantes tant que le nombre de niveaux reste constant. Il en va de même pour les structures illustrées dans les figures 14 et 15.

Il semble donc souhaitable d'exprimer les valeurs \underline{d} et \underline{c} selon le nombre de niveaux (L). Les valeurs numériques de \underline{d} et \underline{c} sont indiquées dans les tableaux suivants (figures 16 et 16a).

Figure 16

Type de structure	Nb de cellules	Nb de niveaux	\underline{d}	\underline{c}
1 (Figure 13)	15	4	6	3
2 (Figure 14)	15	4	5	3
3 (Figure 15)	15	4	3	2

Figure 16a

Type de structure	\underline{d} selon L
1 (Figure 13)	$2(L-1)$
2 (Figure 14)	$2(L-3/2)$
3 (Figure 15)	$L-1$

Si l'on examine la structure présentée à la figure 13, il est évident que la chaîne la plus longue est celle qui contient les cellules HDBACGO. Il est également évident que la chaîne la plus longue dans toute structure de ce type est celle qui part des cellules occupant les positions que les cellules H et O, ou I et N, ou J et M, etc. occupent par rapport à l'ensemble de la structure. La longueur de la chaîne la plus longue sera toujours égale à $2(L-1)$.

Dans la structure illustrée par la figure 14, la situation est la même, sauf que dans la chaîne HDBACGO, la cellule A peut être omise, en raison de la connexion entre les cellules B et C. Par conséquent, dans les structures de ce type, la chaîne la plus longue est égale à $2L-3$.

Dans la structure illustrée à la figure 15, par le même raisonnement, la chaîne la plus longue est $L-1$.

Il apparaît donc que la différence de \underline{d} entre les deux premières structures devient insignifiante à mesure que le nombre de niveaux augmente, mais que la différence entre le \underline{d} du troisième type et les deux autres devient de plus en plus grande. Par exemple, dans une structure de dix niveaux, les structures montreraient les distances \underline{d} suivantes (figure 17).

Figure 17

Type de structure	Nb. de niveaux	\underline{d}
1 (Figure 13)	10	18
2 (Figure 14)	10	17
3 (Figure 15)	10	9

Si nous comparons ces structures par rapport à la distance \underline{c} , il est utile d'exprimer à nouveau \underline{c} en fonction de nombre de niveaux (figure 18²⁰).

Figure 18

Type de structure	\underline{c} selon L
1 (Figure 13)	$L-1$
2 (Figure 14)	$L-1$
3 (Figure 15)	$L/2$

Dans une structure de dix niveaux, les valeurs de \underline{c} sont les suivantes (figure 19).

Une autre façon de comparer ces structures est celle de la localisation de la région centrale. Dans la structure du premier type (figure 13), la région

20. En lisant la valeur de $L/2$, lire les fractions jusqu'à l'entier suivant.

Figure 19

Type de structure	Nb de niveaux	\underline{c}
1 (Figure 13)	10	9
2 (Figure 14)	10	9
3 (Figure 15)	10	5

centrale est constituée de la cellule A. Dans la structure du deuxième type (figure 14), la région centrale est constituée des deux niveaux supérieurs - les cellules A, B et C. Dans une structure du troisième type (figure 15), la région centrale est le deuxième niveau en partant du bas - les cellules D, E, F, G. Au fur et à mesure que le nombre de niveaux augmente, les régions centrales des deux premiers types de structures restent situées au premier et aux premier et deuxième niveaux. La région centrale du troisième type de structure se comporte quelque peu différemment. Si le nombre de niveaux est un nombre pair, la région centrale est le niveau $L/2+1$ en partant du haut. Si le nombre de niveaux dans la structure est un nombre impair, la région centrale est constituée de deux niveaux adjacents - celui de $L+1/2+1$ en partant du haut.

Par conséquent, dans une structure de dix niveaux, les régions centrales sont situées dans les niveaux suivants (figure 20).

Figure 20

Type de structure	Nb de Niveaux	Localisation de la région centrale en niveaux depuis le sommet
1 (Figure 13)	10	1 ^r niveau
2 (Figure 14)	10	1 ^r + 2 ^e niveaux
3 (Figure 15)	10	6 ^e niveau

Une autre comparaison de ces structures peut être faite en fonction des caractéristiques de s_{i_x} et Σse_{xy} . Il a été montré ci-dessus que pour une structure de cellules \underline{n} , ces deux valeurs ont des limites définies. Les structures en question sont constituées de 15 cellules. Les plages de s_{i_x} et Σse_{xy} (voir pages 23 et 25) pour $n=15$ sont présentés ci-dessous (figure 21).

Les positions relatives des trois structures dans ces fourchettes sont indiquées ci-dessous (figure 22).

Pour interpréter ces chiffres, il peut être utile de penser en termes de moyennes : $s_{i_x}/15$ est le nombre moyen de voisins par cellule, $se_{xy}/15$ est la distance moyenne entre les cellules (figure 23).

Jusqu'à présent, la distance \underline{r} n'a pas été prise en compte dans la dis-

Figure 21

Quand $n = 15$		
Limite inférieure	$\sum_{se^{xy}} si_x$	Limite supérieure
28		210
210		1120

Figure 22

Type de structure	si_x	se_{xy}
1 (Figure 13)	28	736
2 (Figure 14)	42	594
3 (Figure 15)	98	374

Figure 23

Type de structure	Nb moyen de voisins	Distance moyenne entre cellules
1 (Figure 13)	1.9	49.1
2 (Figure 14)	2.8	39.6
3 (Figure 15)	6.5	24.9

cussion, les structures considérées étant constituées uniquement de cellules fermées. Si une structure ne comporte pas de cellules ouvertes, r est indéfini. Que se passe-t-il si une cellule ouverte est ajoutée ? Par exemple, supposons qu'une personne soit chargée d'introduire depuis l'« extérieur » des changements qui doivent se répandre le plus rapidement possible dans toute l'organisation. Dans la structure de la figure 13, il est évident qu'elle doit être rattachée au chef de l'organisation - la cellule A, la région la plus centrale. Dans la structure de la figure 15, un tel rattachement serait l'un des plus difficiles à réaliser, le chef de l'organisation se trouve dans la région périphérique et non dans la région centrale.

Les trois types de structures évoqués ci-dessus sont des modèles simples que l'on ne s'attend guère à trouver reproduits dans une organisation sociale existante. Néanmoins, le type d'analyse qui a été tenté est utile. Elle suggère, par exemple, des structures de groupe expérimentales pour l'étude de la communication et propose des concepts pour leur évaluation et leur comparaison structurelles. Récemment, l'auteur a réalisé plusieurs essais d'un tel cadre expérimental. Un groupe a été chargé d'une tâche qui nécessitait un ni-

veau de communication relativement élevé entre les individus. Le modèle de communication a été contrôlé expérimentalement en le limitant à un système téléphonique préalablement structuré. Les résultats des quelques essais effectués ont montré que a) la perception des capacités et de la personnalité d'un collègue, b) le degré de confiance dans la réussite de la tâche et c) le rythme auquel le travail pouvait être effectué confortablement étaient tous fortement influencés par les propriétés structurelles du schéma de communication dans lequel le groupe fonctionnait.

Un autre apport du type d'analyse tentée ci-dessus est qu'elle soulève clairement les problèmes de transposition. Par exemple, dans une organisation industrielle typique, que peut-on définir comme étant la région ultra-périphérique? La force de vente se trouve-t-elle dans la région ultra-périphérique? Le service de publicité? Le bureau de placement? La salle de réception? La réceptionniste? Il est évident que la réponse à ces questions dépend en partie du type de matériel de communication envisagé. Le schéma de communication dans une structure de groupe est différent pour une histoire drôle et pour une nouvelle émission d'actions. De même, la nature de l'« extérieur » est différente si l'on pense à la communication de l'extérieur vers la structure des actualités du base-ball par rapport aux tendances de la bourse.

Il est également utile d'examiner la définition de « région extérieure ». La région ultra-périphérique d'une structure est composée de toutes les cellules qui sont « ouvertes » par rapport à la structure (définition 11). Une cellule ouverte d'une structure est toute cellule dont la « frontière » n'est pas contenue dans la structure (définition 3). La limite d'une cellule est constituée de toutes les autres cellules qui touchent cette cellule (définition 1). Dans le cas du service de livraison d'une entreprise, si les envois concernent uniquement des échanges entre les succursales et la société mère, on peut conclure, à partir des définitions données ci-dessus, que le service ne fait pas partie de la région extérieure. La signification psychologique des « livraisons » changerait probablement si ce département devenait une région extérieure. Cette différence pourrait s'exprimer en termes de discipline du service, de normes de performance, d'organisation du travail et d'attitude envers le « client ».

DIRECTION AU SEIN DES STRUCTURES

Tout comme dans le cas de la distance, la direction psychologique est impossible à définir en termes de concepts euclidiens, sauf dans des circonstances très particulières; lorsque le mouvement psychologique et physique vers un but coïncident. Dans de nombreux cas où le but psychologique est l'atteinte d'un objet physique, la direction du mouvement corporel observable peut être très différente de la direction psychologique vers ce but. Une

personne traversant un labyrinthe familier peut s'éloigner directement, physiquement, du but, tout en s'en rapprochant psychologiquement. D'autres types de changements de position qui ont une direction psychologique claire - comme l'appartenance à un groupe social - peuvent n'avoir aucune corrélation physique.

Dans sa géométrie hodologique, Lewin a abordé le problème de la direction sur la même base que celui de la distance,

« La distance a,b se réfère à la longueur du chemin choisi de a à b. . . Le concept de direction dans l'espace hodologique suit le même schéma. Il se réfère également à un chemin entre deux régions A et B. En général, il existe de nombreux chemins possibles entre deux de ces régions et il est nécessaire de sélectionner un chemin qui détermine la direction (du chemin de A vers B). »²¹

Le problème du choix du chemin le plus court a été évoqué plus haut. Comme pour le traitement de la distance, cette thèse tente de développer un concept de direction sur la base d'une définition des « régions minimales » du chemin le plus court. Les idées suivantes sont développées ci-dessous :

- a) Pas dirigé vers, s'éloignant de ou non orienté vers la cellule A_0 .
- b) Un chemin en ligne droite vers A_0 .
- c) Un chemin en ligne droite d'une cellule A_0 à une autre cellule B_0 .
- d) Sens du mouvement le long d'un chemin en ligne droite de A_0 à B_0 .
- e) Une déclaration générale sur la définition du « chemin en ligne droite ».

Pas vers ou depuis une cellule déterminée

Une cellule A est choisie comme point de référence, toutes les autres cellules de la structure sont référencées en fonction de leur distance à A. Cette relation peut être indiquée de manière pratique par l'utilisation d'indices. La cellule sélectionnée comme point de référence est désignée par A_0 , toutes les cellules qui sont à une distance 1 de A_0 sont désignées par A_1 , etc. Ainsi, une structure est stratifiée en « couches » en fonction de la distance à A_0 . Un pas d'une cellule quelconque de la structure vers une cellule adjacente se fait vers A_0 si ce pas va d'un indice supérieur à un indice inférieur. Ainsi, le pas A_n, A_{n-1} est un pas vers A_0 . Le pas A_n, A_{n+1} est un pas s'éloignant de A_0 . Le pas A_n, A_n ne se rapproche ni ne s'éloigne de A_0 . (voir figure 24).

Un chemin en ligne droite vers A_0 .

Toute chaîne de cellules disposée de telle sorte que les pas successifs le long de celle-ci montrent un indice décroissant est considérée comme un chemin en ligne droite vers A_0 . Toutes ces chaînes peuvent être exprimées sous la forme

$$A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_2, A_1, A_0$$

21. *Op. cit.*, p. 6

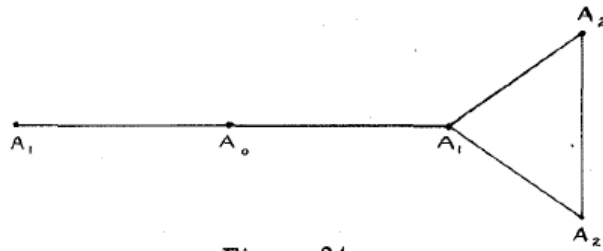
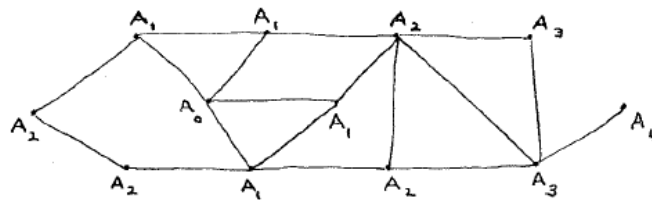


Figure 24

Le pas $A_1 A_2$ éloigne de A_0
 Le pas $A_2 A_1$ rapproche de A_0
 Le pas $A_2 A_2$ n'éloigne ni ne rapproche de A_0

Dans une structure donnée, il y aura au moins un chemin en ligne droite de chaque cellule non A_0 à A_0 (voir figure 25). Cela découle simplement de la méthode utilisée pour attribuer les indices. Si une cellule non A_0 porte l'indice A_x , elle doit par définition toucher au moins une cellule avec un indice de A_{x-1} . La cellule A_{x-1} doit, à son tour, toucher une cellule avec l'indice A_{x-2} , etc.

Figure 25



Il y a trois chemins en ligne droite différents de A_4 à A_0 .

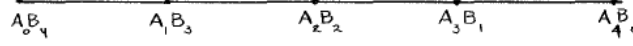
Un chemin en ligne droite de A_0 à B_0 .

Si une structure est référencée par rapport à une cellule A et une cellule B, chaque cellule de la structure a un indice « A » et un indice « B » écrit sous la forme $A_x B_y$. Dans une simple structure en chaîne de cinq cellules, l'indice est indiqué à la figure 26.

Direction du mouvement le long d'un chemin en ligne droite de A à B.

La direction du mouvement le long d'un chemin en ligne droite de A à B peut être indiquée en supposant que tous les indices A sont positifs et tous les indices B négatifs. Une somme algébrique des indices pour chaque cellule peut alors être effectuée. Une somme de chaque étape de la séquence $A_0 B_n$,

Figure 26



Un chemin en ligne droite de la cellule A_0 à la cellule B_0 est une chaîne qui peut être écrite $A_0 B_n, A_1 B_{n-1}, A_2 B_{n-2}, \dots, A_{n-2} B_2, A_{n-1} B_1, A_n B_0$.

$A_1 B_{n-1}, A_2 B_{n-2}, \dots, A_{n-2} B_2, A_{n-1} B_1, A_n B_0$ donne le résultat suivant : $-n, -n+2, -n+4, \dots, n-4, n-2, n$. En ce qui concerne la séquence ci-dessus, on peut dire que dans un chemin en ligne droite de A à B , la différence absolue entre les indices additionnés algébriquement est égale à 2. Un pas sur ce chemin vers B donne un différentiel d'indice de $+2$ ou $(-n+4)-(n+2)$; un pas sur ce chemin vers A donne un différentiel d'indice de -2 ou $(-n+2)-(-n+4)$.

Il a été dit plus haut qu'il y a au moins un chemin en ligne droite de toute cellule non A_0 à A_0 . Comme la cellule B_0 est une cellule de la classe des cellules non A_0 , il s'ensuit qu'il y a au moins un chemin en ligne droite de B_0 à A_0 . Selon un raisonnement similaire, il y a au moins une ligne droite entre A_0 et B_0 . On peut également montrer qu'il existe un chemin qui est à la fois un chemin en ligne droite de A_0 à B_0 , et un chemin en ligne droite de B_0 à A_0 . La démonstration est la suivante : prenez n'importe quel chemin en ligne droite de A_0 à B_0 . La cellule B_0 a un indice A d'une valeur x . Par définition, il doit y avoir une cellule touchant cette cellule $A_x B_0$ qui a l'indice de A_{x-1} . L'indice B de la cellule A_{x-1} est nécessairement B_1 . Il doit y avoir une cellule qui touche la cellule $A_{x-1} B_1$, qui a l'indice A de A_{x-2} . L'indice B d'une telle cellule ne peut pas être B_0 puisque B_0 est une cellule unique dans la structure. Il ne peut pas être B_1 car :

- a) Toute cellule B_1 touche la cellule B_0 .
- b) La cellule B_0 a un indice A égal à x .
- c) Mais l'indice des cellules voisines ne peut varier que de 1.
- d) Donc la cellule $A_x B_0$ ne peut pas toucher la cellule $A_{x-2} B_1$ puisque les indices A diffèrent de plus d'un.
- e) Par conséquent, la cellule A_{x-2} doit porter l'indice B_2 .²²

De la même manière, on peut montrer que dans une chaîne de B_0 à A_0 dans laquelle les indices A diminuent à chaque étape (un chemin en ligne droite de B_0 à A_0), les indices B augmentent à chaque étape de B_0 à A_0 (un chemin en ligne droite de A_0 à B_0).

Chemins différentiels constants autres que le chemin $A_0 B_0$.

Si un chemin en ligne droite entre A_0 et B_0 est défini en termes de

²². Il est possible, bien sûr, que la cellule $A_{x-2} B_1$ existe dans la structure, mais elle ne peut pas toucher la cellule $A_x B_0$.

différentiel d'indice constant égal à 2, qu'en est-il des chemins avec des différentiels constants d'une autre valeur, si de tels chemins existent?²³. Le problème peut être formulé de la manière suivante : soit une structure dans laquelle aucune restriction n'est imposée quant au nombre de cellules ou à leur schéma de connexion, combien de chemins avec différents différentiels d'indices peut-il y avoir ? L'analyse suivante paraît répondre à cette question.

Dans une structure référencée par rapport à deux cellules A et B, sélectionner la cellule $A_x B_y$ (contenue dans la chaîne $A_0 B_0$). Étant donné que les indices A et B de toute cellule adjacente peuvent varier d'une seule unité (ou rester constants), les indices de toutes les cellules touchant $A_x B_y$ peuvent être écrits (figure 27).

Figure 27

$A_x B_y$	$A_x B_{y+1}$	$A_x B_{y-1}$
$A_{x+1} B_y$	$A_{x+1} B_{y+1}$	$A_{x+1} B_{y-1}$
$A_{x-1} B_y$	$A_{x-1} B_{y+1}$	$A_{x-1} B_{y-1}$

Indices de toutes les cellules touchant la cellule $A_x B_y$

En supposant que les indices A sont positifs et les indices B négatifs, la somme des indices est indiquée dans la figure 28.

Figure 28

x-y	x-y-1	x-y+1
x-y+1	x-y	x-y+2
x-y-1	x-y-2	x-y

Somme des indices de la figure 27.

La différence entre les indices de chacune de ces cellules et $A_{yx} B_y$ peut maintenant être calculée (figure 29).

Dans une structure référencée par rapport à deux cellules et sans restriction quant au nombre de cellules ou au schéma de connexion, on peut distinguer des chemins avec des différentiels d'indice constants de 0,-1,+1,-2,+2. Il est utile à ce stade de dessiner une structure montrant les différentiels d'indice dérivés ci-dessus (figure 30a, 30b).

Le tableau ci-dessous (figure 31) présente certains des pas et leurs différences d'indice.

23. Sauf indication contraire, dans la discussion qui suit, on suppose que les structures traitées sont référencées par rapport à deux points seulement - A_0 et B_0 .

Figure 29

0	-1	+1
+1	0	+2
-1	-2	0

Différence d'indice pour chaque pas possible depuis $A_x B_y$

Figure 30a

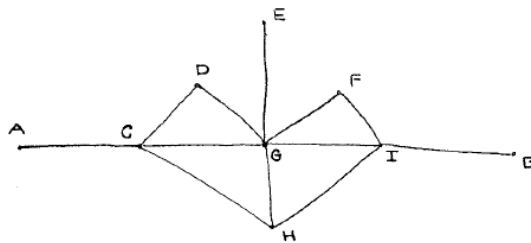
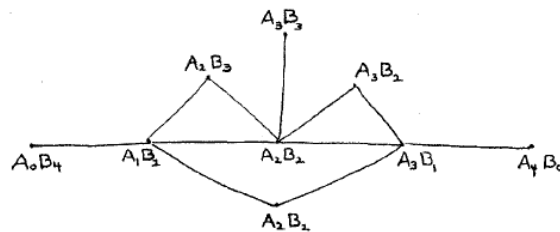


Figure 30b*



*Les structures indiquées dans les figures 30a et 30b sont identiques. Deux figures sont utilisées pour faciliter l'indication des différences de trajectoire. Par exemple, le pas C,D peut être traduite en $A_1 B_3$, $A_2 B_3$ qui est égal à la somme des indices -2, -1. Transposition de ces quantités afin d'obtenir le différentiel d'indice du pas : $-1(-2) = -1+2 = +1$.

Une définition générale du chemin en ligne droite.

Toute chaîne est considérée comme un chemin en ligne droite si elle présente un différentiel d'indice constant à chaque pas. Dans une structure donnée, l'indice différentiel d'un pas donné peut changer si l'emplacement de A_0

Figure 31

Pas	Différences d'indice
GE	0
GH	0
GD	-1
GF	+1
GC	-2
GI	+2

et/ou B_0 est modifié. Il faut donc comprendre qu'une chaîne est un chemin en ligne droite par rapport à la matrice A_0B_0 utilisée.

CONCLUSION

Le modèle mathématique présenté ici est certes à un stade de développement précoce et le problème de transposition des concepts mathématiques aux données psychologiques reste à résoudre. L'objectif principal de cet article est de définir une géométrie possible pour traiter l'espace psychologique et d'explorer de manière limitée les conséquences d'un ensemble particulier d'hypothèses et de définitions.

La fécondité d'un modèle tel que celui présenté ci-dessus peut être jugée non seulement par les questions auxquelles il répond, mais aussi par les questions qu'il incite à poser. Dans un système logique aussi peu développé que celui-ci, le choix des « prochaines étapes » est certainement fortement influencé par l'intérêt personnel, quelle que soit la « logique » des choix. Mais le fait de poser les questions qui, pour l'auteur, seraient les prochaines étapes est une façon d'indiquer les suites possibles.

Les questions se divisent en deux groupes principaux : les questions relatives au développement mathématique du modèle et les questions relatives au problème de transposition.

1) Problèmes de développement mathématique.

a) Bien que les distances \underline{c} et \underline{r} aient les mêmes limites en termes de \underline{d} , il a été démontré qu'elles ne varient pas de la même façon à l'intérieur de ces limites. Pourquoi ? Quelle est la relation précise entre \underline{c} , \underline{r} et \underline{d} ?

b) Une structure de cellules \underline{n} avec une constante si_x peut prendre plus d'une forme. Certaines de ces cellules ont des valeurs différentes de Σse_{xy} . De même, une structure de cellules \underline{n} avec une constante Σse_{xy} peut prendre plus d'une forme et certaines de ces formes ont des valeurs de si_x différentes. Quelle est précisément la relation entre si_x et Σse_{xy} ?

c) Il semble y avoir de nombreuses preuves que la longueur du chemin en ligne droite de A_0 à B_0 dans une structure limite la longueur des chemins en ligne droite autres que les chemins avec un différentiel zéro. Est-ce vrai et, si oui, comment cette limitation fonctionne-t-elle ?

2) Problèmes de transposition.

a) Il a été démontré qu'un chemin au sein d'une structure peut avoir une direction. Une force psychologique est également supposée avoir une valeur directionnelle. La direction d'une force psychologique sur une personne d'une cellule B_x vers la cellule A_y peut-elle être liée à la direction du chemin en ligne droite de B_x à A_y ?

b) À quelle entité psychologique une cellule doit-elle être assimilée ? Si les cellules sont assimilées à des activités, des objectifs, une position sociale, etc., à quelles régions devraient-elles être assimilées ?

c) Afin d'attribuer des valeurs directionnelles aux chemins, certaines cellules (A_0 et B_0) ont été désignées comme points de référence. À quoi ces points de référence doivent-ils être transposés dans un espace de vie ? Il semblerait que la transposition devrait être effectuée sur une partie de l'espace de vie suffisamment remarquable pour que toutes les autres parties soient considérées par rapport à elle. Les régions cibles semblent être un choix évident mais de nombreuses autres transpositions utiles semblent possibles.

Il est évident que ce ne sont là que quelques-unes des questions qui pourraient être posées et il est impossible de prédire la direction que prendront réellement les travaux ultérieurs. Pour le psychologue, il y a une envie compréhensible de poursuivre le travail de transposition. Il se peut toutefois que la possibilité et la fécondité de la transposition soient très différentes selon les stades de développement d'un modèle et qu'un développement mathématique plus poussé du modèle soit la voie la plus rapide pour une transposition utile vers le fait psychologique.

groupe f.m.r.



La collection « [textes](#) » du groupe fmr (flux, matrices, réseaux) propose des rééditions bilingues d'articles consacrés à l'analyse de réseaux.

Parus

- L. Beauguitte, P. Beauguitte et P. Gourdon, 2021, « [William L. Garrison, 1960, Connectivity of the Interstate Highway System](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Joseph B. Kruskal, 1956, On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [E.W. Dijkstra, 1959, A Note on Two Problems in Connexion with Graphs](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1951, Application of Matrix Algebra to Communications Nets](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1953, Structural Parameters of Communication Networks](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Z. Prihar, 1956, Topological Properties of Telecommunication Networks](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Alex Bavelas, 1948, A Mathematical Model for Group Structures](#) ».