



HAL
open science

RÉGULARISATION DES TRACES DIVERGENTES, EXTENSION DE LA NOTION DE TRACE

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. RÉGULARISATION DES TRACES DIVERGENTES, EXTENSION DE LA NOTION DE TRACE. 2021. hal-03246533v4

HAL Id: hal-03246533

<https://hal.science/hal-03246533v4>

Preprint submitted on 4 Sep 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

RÉGULARISATION DES TRACES DIVERGENTES, EXTENSION DE LA NOTION DE TRACE.

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. Dans cet article on s'intéresse à la régularisation des traces divergentes. La notion de trace joue un rôle fondamentale en géométrie non commutative. On peut interpréter la trace comme un "opérateur" qui remplace l'intégration en analyse classique. Le problème posé est de savoir si on peut étendre la trace à des opérateurs non traçables sur un espace d'opérateurs incluant les opérateurs ayant une trace de Dixmier.

1. INTRODUCTION

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{L})$ le triplet, sur un espace de Hilbert séparable H , défini par la donnée d'une C^* sous-algèbre fermée de $\mathcal{B}(H)$ espace des opérateurs bornés de H , d'un opérateur \mathcal{F} de H vérifiant

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^*, \mathcal{F}^2 = \mathbf{1}_H,$$

$$[a, \mathcal{F}] \in \mathcal{K}(H) \text{ pour tout } a \in \mathcal{A}$$

où $\mathcal{K}(H)$ est l'espace des opérateurs compacts de H , et d'une forme linéaire \mathcal{L} de domaine $\text{dom}(\mathcal{L})$ contenant l'idéal bilatère des opérateurs traçables et vérifiant la positivité de \mathcal{L}

$$\mathcal{L}(a) \geq 0 \text{ si } a \in \text{dom}(\mathcal{L})^+ = \{a \in \text{dom}(\mathcal{L}) : \langle ax, x \rangle \geq 0, \forall x \in H\},$$

et la centralité de \mathcal{L} , c'est-à-dire,

$$\mathcal{L}(ab) = \mathcal{L}(ba)$$

si $ab \in \text{dom}(\mathcal{L})$ et $ba \in \text{dom}(\mathcal{L})$ et qui soit une extension des traces de Lidskii, Grothendieck et Dixmier. L'étude des traces a été développée par Grothendieck [4]. La trace de Lidskii est décrite dans [10]. Les traces de Dixmier sont développées dans [3]. Peut-on élargir les classes d'opérateurs compacts dans les espaces de Schatten sur lesquelles les notions de traces de Dixmier, Lidskii et Grothendieck existent?

Remark 1. *On rappelle qu'un module de Fredholm impair sur une C^* -algèbre est la donnée d'une $*$ -représentation de \mathcal{A} dans un espace de Hilbert H , notée \mathfrak{A} , et d'un opérateur auto-adjoint \mathcal{F} de H tel que*

$$a(\mathcal{F}^2 - \mathbf{1}_H) \text{ et } [a, \mathcal{F}] \in \mathcal{K}(H), \forall a \in \mathfrak{A}.$$

Date: 22/04/2021.

2020 Mathematics Subject Classification. 28A05, 28A33, 40A05, 40A10, 42A20, 47L20, 47L60.

Key words and phrases. Trace, mesure spectrale, opérateur compact, autoadjoint, triplet de Fredholm, séries de Dirichlet, séries de Fourier, trace de Dixmier.

Le module de Fredholm est pair si H est \mathbb{Z}_2 -gradué ($\epsilon^2 = \mathbf{1}_H$) et les opérateurs de la représentation de \mathcal{A} dans H commutent avec ϵ

$$[a, \epsilon] = \mathbf{0}_H, \forall a \in \mathfrak{A}$$

et \mathcal{F} anticommute avec ϵ

$$\{\mathcal{F}, \epsilon\} = \mathbf{0}_H.$$

On peut supposer $\mathcal{F}^2 = \mathbf{1}_H$ modulo la relation d'équivalence définie dans la théorie de Kasparov [8]. La paire $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$, dans le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{L})$, définit un module de Fredholm.

2. ESPACES DE SCHATTEN

On reprend les notations de Connes [1] et on rappelle les résultats développés sur les idéaux de Schatten. Les idéaux de Schatten sont les idéaux de $\mathcal{K}(H)$ de la forme

$$L^p(H) = \left\{ T \in \mathcal{K}(H) : \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(|T|)^p < +\infty \right\}$$

où $\{\mu_n(|T|)\}$ est l'ensemble des valeurs singulières de T , indexées par ordre décroissant et comptées avec leur ordre de multiplicité. Les idéaux bilatères

$$L^{p-}(H) = \left\{ T \in \mathcal{K}(H) : \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{1}{p}-1} \mu_n(|T|) < +\infty \right\}, p \in [1, +\infty]$$

munis de la norme

$$\|T\|_{p-} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{1}{p}-1} \mu_n(|T|)$$

est un espace de Banach dont la boule unité est faiblement compact. On a les propriétés suivantes

Proposition 1. $L^{1-}(H) = L^1(H)$ et si $p < q$

$$L^p(H) \subset L^{p-}(H) \subset L^q(H).$$

Les idéaux bilatères $L^{p+}(H)$ sont

$$L^{p+}(H) = \left\{ T \in \mathcal{K}(H) : \sigma_n = O\left(\sum_{k=1}^n k^{-\frac{1}{p}}\right) \right\}$$

où $p \in [1, +\infty[$, $\sigma_n(T) = \sum_{k=1}^n \mu_k(|T|)$ et pour $p = +\infty$,

$$L^{\infty+}(H) = \mathcal{K}(H).$$

On a les propriétés suivantes,

Proposition 2. Si $p < q$

$$L^p(H) \subset L^{p+}(H) \subset L^q(H),$$

$$L^{1+}(H) = \{T \in \mathcal{K}(H) : \sigma_n(T) = O(\log(n))\}$$

et pour $p \in]1, +\infty[$

$$L^{p+}(H) = \left\{ T \in \mathcal{K}(H) : \mu_n(|T|) = O\left(n^{-\frac{1}{p}}\right) \right\}.$$

La norme sur $L^{p+}(H)$ définie par

$$\|T\|_{p_+} = \sup \left\{ \sigma_n(T) \left(\sum_{k=1}^n k^{-\frac{1}{p}} \right)^{-1} : n \geq 1 \right\}$$

fait de $L^{p+}(H)$ un espace de Banach. L'espace $L_0^{p+}(H)$ est l'adhérence de l'idéal des opérateurs de rang fini de $L^{p+}(H)$. On a

$$\begin{aligned} L_0^{p+}(H) &= \left\{ T \in \mathcal{K}(H) : \mu_n(|T|) = o\left(n^{-\frac{1}{p}}\right) \right\} \\ L_0^{1+}(H) &= \{ T \in \mathcal{K}(H) : \mu_n(|T|) = o(\log(n)) \}. \end{aligned}$$

Si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ avec } p, q \in [1, +\infty]$$

$L^{q-}(H)$ s'identifie au dual de $L_0^{p+}(H)$ et $L^{p+}(H)$ au dual de $L^{q-}(H)$. La dualité est définie à partir de la forme bilinéaire

$$(T, S) \longrightarrow \text{Tr}(TS)$$

sur les paires d'espaces où cette forme bilinéaire est définie. Tous les résultats, énoncés précédemment, sont développés dans [1] et [2].

3. ζ -RÉGULARISATION DES TRACES

L'ensemble des valeurs singulières de T , notées

$$\mu_1(|T|) \geq \mu_2(|T|) \geq \cdots \geq \mu_n(|T|) \geq \cdots \geq 0$$

comptées avec leur ordre de multiplicité, s'écrit sans ordre de multiplicité sous la forme

$$\lambda_1(|T|) > \lambda_2(|T|) > \cdots > \lambda_n(|T|) > \cdots > 0$$

avec

$$\{\mu_1(|T|), \mu_2(|T|), \cdots, \mu_n(|T|), \cdots\}^* = \{\lambda_1(|T|), \lambda_2(|T|), \cdots, \lambda_n(|T|), \cdots\},$$

on note a_n l'ordre de multiplicité de $\lambda_n(|T|)$. Soit

$$\lambda \geq \sup \{\lambda_n(|T|)\}$$

la série de Dirichlet d'indice λ associée à l'opérateur compact T est définie par

$$\phi_\lambda(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-z \log(\frac{\lambda}{\lambda_n})} \text{ avec } a_n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lambda_n = \lambda_n(|T|).$$

Si l'abscisse de convergence simple σ_c de ϕ_λ est réel, un théorème de Landau [9] permet d'affirmer que σ_c est un point singulier et que l'abscisse d'holomorphie σ_h vérifie

$$\sigma_h = \sigma_c.$$

Proposition 3. *Si l'abscisse de convergence simple σ_c de ϕ_λ vérifie $\sigma_c < 1$ alors T est un opérateur traçable et*

$$\text{Tr}(|T|) = \lambda \phi_\lambda(1)$$

avec

$$\text{Tr}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(T).$$

On note

$$A(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} a_k, \quad A_\lambda(x) = \sum_{\lambda_k \leq x} a_k$$

et

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \mu_n(|T|).$$

Lemma 1. *On a*

$$\lambda_n A(n) \leq \sigma_{A(n)} \leq \lambda_1 A(n),$$

en particulier, si

$$\sigma_n = O(\log(n))$$

alors

$$\lambda_n = O\left(\frac{\log(A(n))}{A(n)}\right).$$

Proof. On a

$$\sum_{k=1}^n a_k \lambda_k = \sum_{k=1}^{A(n)} \mu_k(|T|) = \sigma_{A(n)}.$$

□

L'idée est d'étendre la notion de trace à des opérateurs compact T non traçable, c'est-à-dire pour lesquels l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet associé est ≥ 1 . Si il existe une extension méromorphe de ϕ , on pourra sous certaines hypothèses définir une trace pour ces opérateurs.

Theorem 1. *Soit*

$$L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(A(n))}{|\log(\lambda_n)|}$$

alors si $L > 0$ on a $\sigma_c = L$ et si $L = 0$ alors $\sigma_c \leq 0$.

Proof. C'est le théorème de Dirichlet appliqué à la série ϕ_λ car $L \geq 0$ si $L \in \mathbb{R}$. □

Definition 1. $\sigma_c = \sigma_c(T)$ est l'abscisse de convergence de l'opérateur de T .

Corollary 1. *Sur l'espace de Schatten $L^{1+}(H)$, l'abscisse de convergence est majorée par 1.*

Proof. Sur $L^{1+}(H)$, $\sigma_n = O(\log(n))$, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\lambda_n \leq K \frac{\log(A(n))}{A(n)}$$

$$\frac{\log(A(n))}{|\log(\lambda_n)|} \leq \frac{\log(A(n))}{\log(A(n)) - \log(\log(A(n))) - \log(K)}, \quad \forall n \geq N$$

où N est le premier entier n pour lequel $K \frac{\log(A(n))}{A(n)} < 1$ et ainsi

$$L = \limsup \frac{\log(A(n))}{|\log(\lambda_n)|} \leq 1.$$

□

Corollary 2. *Si φ vérifie*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0,$$

sur l'espace de Schatten

$$L_\varphi^{1+}(H) = \{T \in \mathcal{K}(H) : \sigma_n = O(\varphi(n))\}$$

l'abscisse de convergence est majorée par

$$L \leq \frac{1}{1-l} \text{ où } l = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\varphi(n))}{\log(n)}.$$

Proof. On a

$$0 < \lambda_n \leq K \frac{\varphi(A(n))}{A(n)}$$

$$\log(\lambda_n) \leq \log(K) - \log(A(n)) + \log(\varphi(A(n)))$$

$$|\log(\lambda_n)| \geq \log(A(n)) - \log(\varphi(A(n))) - \log(K) > 0, \forall n \geq N$$

où N est le premier entier n pour lequel $K \frac{\varphi(A(n))}{A(n)} < 1$ et

$$\begin{aligned} \frac{\log(A(n))}{|\log(\lambda_n)|} &\leq \frac{\log(A(n))}{\log(A(n)) - \log(\varphi(A(n))) - \log(K)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\log(\varphi(A(n)))}{\log(A(n))} - \frac{\log(K)}{\log(A(n))}}, \end{aligned}$$

soit

$$l = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\varphi(n))}{\log(n)}$$

alors

$$L \leq \frac{1}{1-l}.$$

□

Soit T un opérateur compact infinitésimal d'ordre $\alpha > 1$ on va montrer que $\sigma_c(T) < 1$. On vérifie d'abord que $L \leq 1$ car

$$\sigma_n(|T|) = O(\varphi(n))$$

avec

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

La limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 0$$

car pour $\alpha > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = \zeta(\alpha) \text{ et } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\varphi(n))}{\log(n)} = 0,$$

où $\zeta(\alpha)$ est la valeur de la fonction zêta en α , donc $L \leq 1$. Les coefficients de la série de Dirichlet associée à T sont positifs, si $L = 1$, le théorème de Landau nous permet de dire que 1 est une valeur singulière de cette série ce qui est impossible car il existe une constante C telle que $\forall n \geq 1, \mu_n(|T|) \leq C \frac{1}{n^\alpha}$ et

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \phi_T(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(|T|) \leq C \zeta(\alpha) < +\infty$$

et ϕ_T est strictement décroissante pour $t > 1$. On peut donc trouver un $\alpha < 1$ tel que T^α soit un opérateur traçable.

Theorem 2. *L'ordre d'un opérateur infintésimal d'ordre $\alpha > 1$ a une série de Dirichlet d'abscisse de convergence $\sigma_c(T) < 1$.*

Remark 2. *Si $\varphi(x) = x^\alpha$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 0$$

si $\alpha \in]0, 1[$. On a

$$l = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n^\alpha)}{\log(n)} = \alpha$$

l'abscisse de convergence sur l'espace de Schatten

$$L_\alpha^{1+}(H) = \{T \in \mathcal{K}(H) : s_n(|T|) = O(n^\alpha)\}$$

est majorée par $\frac{1}{1-\alpha}$.

4. PROLONGEMENT ANALYTIQUE DE ϕ_λ

Classiquement pour étudier le prolongement analytique d'une série de Dirichlet

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\rho_n z}$$

on introduit la fonction

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\tau_n z}, \quad \tau_n = e^{\rho_n},$$

on est donc amené à étudier la série de Dirichlet

$$\Phi_\lambda(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{\lambda}{\lambda_n} z}, \quad a_n = \dim(E_{\lambda_n}).$$

Si l'abscisse de convergence σ_c de ϕ_λ vérifie $\sigma_c < +\infty$ alors $\Phi_\lambda(z)$ converge sur le demi-plan $\operatorname{Re}(z) > 0$. Pour tout z tel que $\operatorname{Re}(z) > \sup\{\sigma_c, 0\}$ on a

$$\phi_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} \Phi_\lambda(t) t^{z-1} dt$$

et pour tout $\sigma > \sup\{\sigma_c, 0\}$

$$\Phi_\lambda(z) = \text{v.p.} \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(t) \phi_\lambda(t) t^{-z} dt$$

où v.p. désigne la valeur principale de l'intégrale. Si $T \in L^{1+}(H)$ alors l'abscisse de convergence simple σ_c est inférieur ou égal à 1, donc $\Phi_\lambda(z)$ converge pour $\operatorname{Re}(z) > 0$ et 0 est une valeur singulière de Φ_λ .

Theorem 3. *Soit $T \in L^{1+}(H)^+$, si 0 est un pôle de Φ_λ d'ordre p alors ϕ_λ a un prolongement méromorphe, de pôle simple 1. En particulier, 0 est un pôle simple de Φ_λ .*

Proof. Le théorème de Hardy-Fekete [9], permet d'affirmer que sous ces hypothèses ϕ_λ a un prolongement méromorphe sur tout le plan complexe \mathbb{C} avec comme seuls pôles éventuels en $1, 2, \dots, p$, d'ordre 1. Le théorème de Landau nous dit que le seul pôle est 1 car ϕ_λ est holomorphe pour $\operatorname{Re}(z) > c_h = 1$ et 1 est un point singulier de ϕ_λ . Le pôle en 0 est donc un pôle simple de Φ_λ . \square

On peut généraliser ce théorème à l'espace de Schatten $L_\varphi^{1+}(H)$ qui est l'idéal bilatère engendré par les opérateurs compacts $T \in \mathcal{K}(H)$ tels que $\sigma_n(|T|) = O(\varphi(n))$.

Theorem 4. *Si*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$$

alors pour $T \in L_\varphi^{1+}(H)^+$, si 0 est un pôle de Φ_λ d'ordre p alors ϕ_λ a un prolongement méromorphe, de pôles simples appartenant à $\left\{1, 2, \dots, E\left(\frac{1}{1-l}\right)\right\}$ où

$$l = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\varphi(n))}{\log(n)}$$

et $E\left(\frac{1}{1-l}\right)$ est la partie entière de $\frac{1}{1-l}$. En particulier, 0 est un pôle de Φ_λ , d'ordre $\leq E\left(\frac{1}{1-l}\right)$.

Proof. La démonstration se calque sur la démonstration du théorème précédent. \square

Remark 3. *Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur infinitésimal d'ordre > 1 alors ϕ_T admet un prolongement analytique sur \mathbb{C} . Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on définit la trace de T^s par*

$$\operatorname{Tr}(T^s) = \widehat{\phi}_T(s) \quad (4.1)$$

où $\widehat{\phi}_T$ est l'unique prolongement analytique de ϕ_T à \mathbb{C} .

5. TRACE DE DIXMIER

Soit $T \in L^{1+}(H)^+$, où $L^{1+}(H)^+$ est l'ensemble des opérateurs positifs de $L^{1+}(H)$ et $\phi_\lambda, \Phi_\lambda$ les séries de Dirichlet associées alors 0 est une valeur singulière de Φ_λ . Si 0 est un pôle de Φ_λ , il est d'ordre 1 et on a que 1 est un pôle d'ordre 1 ou une valeur régulière de ϕ_λ . Sous cette dernière hypothèse, ϕ_λ se prolonge sur \mathbb{C} en une fonction holomorphe, donc $T \in L^1(H)$. Si 1 est un pôle d'ordre 1, le résidu de ϕ_λ en 1 s'écrit

$$\operatorname{Res}_1(\phi_\lambda) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\phi_\lambda(z).$$

Remark 4. *Avec les hypothèses précédentes, $\lambda \operatorname{Res}_1(\phi_\lambda)$ est indépendant du choix de λ .*

Definition 2. *La trace de $T \in L^{1+}(H)^+$ est définie par, si Φ_1 a un pôle en 0 d'ordre fini,*

$$\operatorname{Tr}_\infty(T) = \operatorname{Res}_1(\phi_1).$$

On dit que $T \in L^{1+}(H)^+$ est un opérateur fini si Φ_λ a un pôle d'ordre fini en 0.

Remark 5. *Cette définition est indépendante du choix de λ .*

Theorem 5. *Si $T \in L^{1+}(H)^+$ est un opérateur fini alors $\text{Tr}_\varpi(T)$ est la trace de Dixmier de T , notée $\text{Tr}_\omega(T)$. En particulier, les opérateurs finis de $L^{1+}(H)^+$ sont des opérateurs mesurables.*

Proof. Pour un opérateur fini $T \in L^{1+}(H)^+$, soit $T_\lambda = \frac{1}{\lambda}T$, $\lambda \geq \sup\{\lambda_n\}$. On pose

$$\mathcal{J}(z) = \text{Tr}(T_\lambda^z), \quad \text{Re}(z) > 1,$$

en utilisant les résultats de [2] ou [5], il y a équivalence entre

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1)\mathcal{J}(s) = L$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n)} \sum_{k=1}^n \mu_k(T) = L,$$

or

$$L = \text{Tr}_\varpi(T_\lambda) = \text{Tr}_\omega(T_\lambda)$$

on a donc l'égalité

$$\text{Tr}_\varpi(T) = \text{Tr}_\omega(T).$$

En particulier, l'opérateur T est un opérateur mesurable. \square

Remark 6. *Pour $\lambda \geq \sup\{\lambda_n(|T|)\}$*

$$\phi_\lambda(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-z \log(\frac{\lambda}{\lambda_n})} = e^{-z \log(\lambda)} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-z \log(\frac{1}{\lambda_n})},$$

$\log\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$ peut être strictement négatif pour un nombre fini d'entiers n . On se ramène à un opérateur compact T dont les valeurs singulières sont ≤ 1 et on note $\phi_T = \phi_1$ et $\Phi_T = \Phi_1$ les séries de Dirichlet associées pour $\lambda = 1$.

Soit $T \in \mathcal{K}(H)^+$, si l'abscisse de convergence $\sigma(T)$ de ϕ_T est finie et 0 est un pôle d'ordre p de Φ_T alors $p \leq E(\sigma(T))$, où $E(\sigma(T))$ est la partie entière de $\sigma(T)$. On note, pour $q \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Res}_q(\phi_T) = \begin{cases} \lim_{z \rightarrow q} (z-q)\phi_T(z) & \text{si } q \text{ est un pôle simple de } \phi_T \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors $\text{Res}_q(\phi_T) = 0$ pour $q > E(\sigma(T))$.

Definition 3. *On pose*

$$\text{Tr}_\varpi(T) = \phi_T(1)$$

si ϕ_T a un prolongement holomorphe dans \mathbb{C} et

$$\text{Tr}_\varpi(T) = \sum_{q \in \mathbb{N}^*} \text{Res}_q(\phi_T) = \sum_{q=1}^{E(\sigma(T))} \text{Res}_q(\phi_T)$$

si ϕ_T n'est pas prolongeable en une fonction holomorphe sur \mathbb{C} .

Remark 7. *Pour $T \in \mathcal{K}(H)^+$, $\text{Tr}_\varpi(T)$ s'identifie à $\text{Tr}(T)$ si l'opérateur T est traçable et à la trace de Dixmier $\text{Tr}_\omega(T)$ si Φ_T a un pôle d'ordre fini en 0 pour $T \in L^{1+}(H)^+$. L'application Tr_ϖ est-elle une extension des traces Tr et Tr_ω sur*

$$\text{dom}(\text{Tr}_\varpi) = \left\{ T \in \mathcal{K}(H)^+ : \Phi_T \text{ a un pôle d'ordre fini en } 0 \right\} ?$$

6. FONCTIONS GÉNÉRATRICES AUXILIAIRES

L'espace des fonctions bornées sur un espace topologique X est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

on rappelle que f a une limite l à l'infini si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini $E \subset X$ tel que

$$|f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \notin E$$

et on note

$$l = \lim_{\infty} f$$

cette limite.

Definition 4. Une limite généralisée sur X est une forme linéaire Λ sur $l^\infty(X)$ telle que si

$$f \geq 0 \text{ alors } \Lambda f \geq 0$$

et si

$$l = \lim_{\infty} f \text{ alors } \Lambda f = l.$$

Λ est une forme linéaire bornée de norme 1, le théorème de Hahn-Banach donne l'existence de telles formes Λ . Si G est un groupe qui opère sur $l^\infty(X)$, on dit que Λ est invariante à gauche sous l'action de G si

$$\Lambda(g.f) = \Lambda(f).$$

Sur l'espace $X = \mathbb{R}^{+*}$, la moyenne de Cesàro est

$$\chi_f(x) = \frac{1}{\log(x)} \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt, f \in l^\infty(\mathbb{R}^{+*}),$$

on définit la forme linéaire Λ sur $l^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ par

$$\Lambda f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_f(x).$$

Lemma 2. Λ est une limite généralisée sur $l^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ invariante par homothétie.

Proof. Il faut vérifier que

$$\Lambda f_k = \Lambda f, \forall k > 0$$

où

$$f_k(x) = f(kx), \forall x > 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \chi_{f_k}(x) &= \frac{1}{\log(x)} \int_1^x \frac{f(kt)}{t} dt \\ &= \frac{1}{\log(x)} \int_k^{kx} \frac{f(s)}{s} ds, s = kt \end{aligned}$$

$$|\chi_{f_k}(x) - \chi_f(x)| = \frac{1}{\log(x)} \left| \int_x^{kx} \frac{f(s)}{s} ds - \int_1^k \frac{f(s)}{s} ds \right|, k \geq 1 \text{ et } x > k$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\chi_{f_k}(x) - \chi_f(x)| = 0$$

car

$$\int_x^{kx} \frac{|f(s)|}{s} ds \leq \|f\|_\infty \log(k),$$

la forme Λ est une limite généralisée invariante par homothétie

$$\Lambda(f_k) = \Lambda(f), \forall k > 0$$

cette remarque permet de vérifier la linéarité de Λ et de définir une trace. \square

Soit $\{A(n)\}$ une suite strictement croissante de réels avec $A(0) = 1$, la moyenne de Cesàro de f peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \chi_f(A(n)) &= \frac{1}{\log(A(n))} \int_1^{A(n)} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \frac{1}{\log(A(n))} \sum_{k=1}^n \int_{A(n-1)}^{A(n)} \frac{f(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

On dit que la série $\sum a_n$, à termes positifs, a pour fonction génératrice f pour la mesure de Haar $\frac{dx}{x}$, si il existe une suite $\{A(n)\}$ strictement croissante telle que $A(0) = 1$ et

$$a_n = \int_{A(n-1)}^{A(n)} \frac{f(t)}{t} dt,$$

on peut définir la convergence généralisée de la série en posant,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \Lambda(f)$$

avec

$$\Lambda(f) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_f(x),$$

cette définition est indépendante du choix de la fonction génératrice f .

Definition 5. La série $\sum a_n$, à termes positifs, est à divergence logarithmique si $\sum_{k=1}^n a_k = O(\log(n))$.

Soit $T \in L^{1+}(H)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n$ où a_n est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_n avec

$$0 < \lambda_{n+1} < \lambda_n$$

et

$$\{\mu_n(T)\}^* = \{\lambda_n\},$$

on pose $A(0) = 0$, $A(n+1) = A(n) + a_n$ et $B(n) = e^{A(n)}$. La fonction

$$f(t) = \lambda_n \text{ si } t \in [B(n-1), B(n)[\text{ et } f(t) = 0 \text{ si } t \in]0, 1[$$

est une fonction génératrice de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n$, car $f \in l^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ et

$$\int_{e^{A(n-1)}}^{e^{A(n)}} \frac{\lambda_n}{t} dt = a_n \lambda_n.$$

Si $T \in L^{1+}(H)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n$ est à divergence logarithmique, on définit la trace de Dixmier de $T \in L^{1+}(H)$ par

$$\text{Tr}_\omega(T) = \Lambda(f).$$

On peut généraliser cette construction à tout intervalle $]a, b[$ de \mathbb{R} . Soit v une mesure positive sur $]a, b[$, telle que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \chi(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^+} \chi(x) = 0$$

où

$$\chi(x) = \int_{a^+}^x dv(t) = \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^x dv(t), \quad a < y < x < b,$$

la moyenne de Cesàro de $f \in l^\infty(]a, b[)$ est la fonction définie par

$$\chi_f(x) = \frac{1}{\chi(x)} \int_{a^+}^x f(t) dv(t), \quad \int_{a^+}^x f(t) dv(t) = \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^x f(t) dv(t),$$

on définit la forme linéaire Λ sur $l^\infty(]a, b[)$ par

$$\Lambda(f) = \lim_{x \rightarrow b^-} \chi_f(x).$$

Lemma 3. *Si la mesure de tout ensemble fini contenu dans $]a, b[$, pour la mesure ν , est nulle alors Λ est une limite généralisée sur $l^\infty(]a, b[)$.*

Proof. Λ est une forme linéaire positive et de norme 1 car ν est positive. Si

$$\lim_{\infty} f = l$$

alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini A_ε de $]a, b[$ tel que

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon, \quad \forall x \notin A_\varepsilon.$$

On a $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall x \in]a, b[$

$$\begin{aligned} |\chi_f(x) - l| &\leq \frac{1}{\chi(x)} \int_{a^+}^x |f(t) - l| dv(t) \\ &= \frac{1}{\chi(x)} \int_a^b |f(t) - l| \mathbf{1}_{A_\varepsilon} dv(t) + \frac{1}{\chi(x)} \int_a^b |f(t) - l| \mathbf{1}_{]a, x[\setminus A_\varepsilon} dv(t) \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

donc

$$\Lambda(f) = \lim_{x \rightarrow b^-} \chi_f(x) = l.$$

□

On peut définir la notion de limite généralisée sur X associée à une mesure positive ν de la façon suivante. La fonction f a une limite l à l'infini pour la mesure ν si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble $E \subset X$ de mesure $\nu(E) = 0$ tel que

$$|f(x) - l| < \varepsilon, \quad \forall x \notin E$$

et on note

$$l = \lim_{\nu} f$$

cette limite.

Definition 6. *Une limite généralisée sur X , pour la mesure ν , est une forme linéaire Λ_ν sur $l^\infty(X)$ telle que*

$$f \geq 0 \text{ alors } \Lambda_\nu f \geq 0$$

et si

$$l = \lim_{\nu} f \text{ alors } \Lambda_\nu f = l.$$

Remark 8. Avec cette définition, une démonstration analogue permet d'affirmer que Λ définie par

$$\Lambda f = \lim_{x \rightarrow b^-} \chi_f(x),$$

avec

$$\chi_f(x) = \frac{1}{\chi(x)} \int_{a^+}^x f(t) dv(t),$$

est une limite généralisée pour la mesure v .

Pour une fonction $f \in l^\infty]a, b[$, on pose

$$\chi_f(b_n) = \frac{1}{\chi(b_n)} \int_{a^+}^{b_n} f(t) dv(t) = \frac{1}{\chi(b_n)} \sum_{k=1}^n \int_{b_{k-1}}^{b_k} f(t) dv(t),$$

pour toute suite strictement croissante $\{b_n\}$ avec $b_0 = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. Si pour une suite $\{u_k\}$, il existe $f \in l^\infty]a, b[$ telle que

$$u_k = \int_{b_{k-1}}^{b_k} f(t) dv(t)$$

pour une suite strictement croissante $\{b_n\}$ vérifiant $b_0 = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, on dit que f est une fonction génératrice de la suite $\{u_k\}$. Pour une suite $\{u_k\}$ telle que

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k = O_\chi(b_n)$$

alors la somme de la série de terme général positif sera définie par

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \Lambda_\nu(\chi)$$

où

$$O_\chi(x) \leq C\chi(x), \forall x \in]a, b[$$

et C est une constante positive.

Theorem 6. La série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ est ν -convergente si $\sum_{k=1}^n u_k = O_\chi(b_n)$ où $\{b_n\}$ est une suite strictement croissante telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b \text{ et } b_0 = a,$$

pour une série ν -convergente $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$, la somme de la série est

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \Lambda_\nu(\chi(f))$$

où f est une fonction génératrice de $\{u_k\}$.

7. SÉRIE DE FOURIER ASSOCIÉE À UNE TRACE

La série de Fourier associée à la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est définie par

$$\phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n e^{2i\pi n t},$$

pour un opérateur compact $T \in \mathcal{K}(T)$, avec les notations précédentes

$$\phi_n(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k e^{2i\pi b_k t}, \quad b_k = \frac{\lambda_k a_k}{|\lambda_k|} \in \mathbb{Z},$$

on pose

$$\phi_T(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(t),$$

le développement en série de ϕ_T est

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(\phi_T) e^{2i\pi m t}$$

c'est la série de Fourier associée à l'opérateur T . Formellement,

$$c_m(\phi_T) = \int_0^1 \phi_T(t) e^{-2i\pi m t} dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(t) e^{-2i\pi m t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_m(\phi_n)$$

si

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k| < +\infty,$$

$$c_m(\phi_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k c_m(e^{2i\pi b_k t}) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 e^{2i\pi(b_k - m)t} dt = \delta_{m, b_k}$$

$$c_m(\phi_T) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \delta_{m, b_k} = \begin{cases} \sum_{k, a_k=m} \lambda_k, & \text{si } m > 0 \\ 0 & \text{si } m = 0 \\ \sum_{k, a_k=-m} \lambda_k, & \text{si } m < 0 \end{cases}.$$

L'égalité de Parseval s'écrit

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{k, a_k=-m} \lambda_k \right)^2 + \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{k, a_k=m} \lambda_k \right)^2 = \int_0^1 |\phi_T(t)|^2 dt,$$

on a les théorèmes suivants.

Theorem 7. Si $\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k| < +\infty$, $\phi_T \in L^2([0, 1])$ et

$$\|\phi_T\|_2^2 = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{k, a_k=-m} \lambda_k \right)^2 + \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{k, a_k=m} \lambda_k \right)^2.$$

Proof. C'est le théorème de Riesz-Fischer. □

On remarque que formellement,

$$\phi_T(0) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k, a_k=m} \lambda_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(T)$$

et

$$\phi_{|T|}(0) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k, a_k=m} |\lambda_k| = \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu_n(T)| \leq +\infty$$

en posant $\sum_{k, a_k=m} \lambda_k = 0$ si $\{k, a_k = m\} = \emptyset$. On peut écrire, en utilisant le théorème de convergence de Dirichlet pour les séries de Fourier que, si ϕ_T est localement intégrable et admet une limite à gauche et à droite en 0, notées $\phi_T(0^+)$ et $\phi_T(0^-)$ pour lesquelles il existe $0 < \epsilon < 1$ tel que les intégrales

$$\int_0^\epsilon \frac{|\phi_T(t) - \phi_T(0^+)|}{t} dt \text{ et } \int_0^\epsilon \frac{|\phi_T(-t) - \phi_T(0^-)|}{t} dt$$

convergent, la trace de l'opérateur T est

$$\text{Tr}(T) = \frac{\phi_T(0^+) + \phi_T(0^-)}{2},$$

car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n c_k(\phi_T) = \frac{\phi_T(0^+) + \phi_T(0^-)}{2}. \quad (7.1)$$

Le théorème de convergence locale de Fejér permet de donner une version plus fine de la trace d'un opérateur compact T . Si $\phi_T \in L^1([0, 1])$ et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi_T(t) + \phi_T(-t)}{2} = l$$

alors les sommes de Fejér

$$\sum_{k=-n}^n c_k(\phi_T) \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{2i\pi kt}$$

vérifie en 0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n c_k(\phi_T) = l, \quad (7.2)$$

on peut prendre encore pour trace de T ,

$$\text{Tr}(T) = l.$$

Remark 9. *Les sommes de Fejér sont les sommes de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier, la convergence de 7.2 implique la convergence de 7.1. La réciproque n'étant pas nécessairement vraie, la trace dans le sens de Fejér est plus fine que la trace dans le sens de Dirichlet.*

8. EXTENSION DES TRACES AUX OPÉRATEURS AUTOADJOINTS

L'ensemble des mesures spectrales sur un espace de Hilbert séparable H est noté \mathfrak{M} . Dans notre contexte, une mesure spectrale est une application P de l'ensemble des boréliens de \mathbb{R} , notée $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ à valeurs dans l'ensemble des projecteurs autoadjoints de H

$$B \xrightarrow{P} P_B, P_B^2 = P_B \text{ et } P_B^* = P_B$$

vérifiant

$$P_\emptyset = \mathbf{0}_H, P_{\mathbb{R}} = \mathbf{1}_H, P_{B_1} P_{B_2} = P_{B_2} P_{B_1} = P_{B_1 \cap B_2}$$

et ayant la propriété d'additivité complète

$$P_{\sum_{i=1}^{+\infty} B_i} = \sum_{i=1}^{+\infty} P_{B_i},$$

on note \mathfrak{M} l'ensemble des mesures spectrales . Le groupe unitaire \mathfrak{U} opère sur \mathfrak{M} par conjugaison

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} \times \mathfrak{M} &\longrightarrow \mathfrak{M}, (U, P) \longrightarrow Q = U.P \\ Q_B &= UP_B U^{-1}, \end{aligned}$$

Lemma 4. *Si P est une mesure spectrale et U est unitaire alors Q est une mesure spectrale.*

Proof. $UP_B U^{-1}$ est un projecteur car

$$(UP_B U^{-1})^2 = UP_B^2 U^{-1} = UP_B U^{-1}$$

et

$$(UP_B U^{-1})^* = (UP_B U^*)^* = UP_B U^{-1},$$

la mesure spectrale Q est définie par

$$B \longrightarrow Q_B = UP_B U^{-1}, U \text{ unitaire.}$$

□

Soit $e = \{e_n\}_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de H , la mesure $v_{P,e}$ associée à cette base est la somme de la série des mesures de probabilité $v_{P,n}$

$$v_{P,e}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{P,n}(B) \leq +\infty, v_{P,n}(B) = \langle P_B e_n, e_n \rangle_H \quad \forall n \geq 1.$$

Lemma 5. *On a*

$$v_{U.P,e} = v_{P,Ue}.$$

Remark 10. *L'orbite de P est formé des projecteurs de la forme*

$$B \longrightarrow UP_B U^{-1}, U \in \mathfrak{U},$$

le stabilisateur de P est formé du sous-groupe du groupe unitaire \mathfrak{U} qui commutent avec tous les projecteurs P_B ,

$$\text{St}_P = \{U \in \mathfrak{U} : [U, P_B] = 0, \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}.$$

On associe à chaque borélien de \mathbb{R} , la série d'Abel

$$v_{P,e}(B)(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{P,n}(B) t^n$$

de rayon de convergence ≥ 1 et on pose

$$v_{P,e}(B)(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{P,n}(B) t^n, \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$$

et

$$\mathfrak{A} = \left\{ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow 1^-} v_{P,e}(B)(x) < +\infty \text{ et } v_{P,n}(B) = O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}.$$

Lemma 6. *Si \mathfrak{A} a la propriété de recouvrement fini alors pour tout borélien B de \mathbb{R} on a*

$$v_{P,e}(B) = \lim_{x \rightarrow 1^-} v_{P,e}(B)(t) < +\infty.$$

Proof. On extrait un recouvrement fini $\{B_1, B_2, \dots, B_N\}$, soit $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ alors

$$B = \cup_{i=1}^N (B \cap B_i),$$

$B \cap B_i \in \mathfrak{A}$ car

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} v_{P,n}(B \cap B_i) t^n \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} v_{P,n}(B_i) t^n < +\infty$$

et

$$v_{P,n}(B) \leq \sum_{i=1}^N v_{P,n}(B \cap B_i) \leq \sum_{i=1}^N v_{P,n}(B_i) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

□

Notation 1. $1_{\mathbb{R}}(x) = x$ et $1_{\mathbb{R}}(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. La fonction $1_{(a,b)}$ est la fonction indicatrice de (a, b) pour un intervalle de la forme $]a, b[$, ou $[a, b]$, ou $[a, b[$, $]a, b]$ ou \mathbb{R} .

Pour toutes les fonctions étagées, avec l'hypothèse de recouvrement fini, on a

$$\varphi(x) = \sum \alpha_i 1_{(a_i, b_i)}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dv_{P,e}(x) \\ &= \sum \alpha_i v_{P,e}((a_i, b_i)) = \sum \alpha_i \lim_{t \rightarrow 1^-} v_{P,e}((a_i, b_i))(t) \\ &= \sum \alpha_i \lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} v_{P,n}((a_i, b_i)) t^n = \lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum \alpha_i v_{P,n}((a_i, b_i)) \right) t^n \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dv_{P,n}(x) \right) t^n. \end{aligned}$$

Theorem 8. *Si \mathfrak{A} a la propriété de recouvrement fini de \mathbb{R} alors pour toute fonction mesurable φ vérifiant*

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dv_{P,n}(x) < +\infty$$

on a

$$\varphi \in L^1(\mathbb{R}, v_{P,e}) \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dv_{P,e}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dv_{P,n}(x).$$

Proof. La propriété est vraie sur les fonctions étagées positives, par le lemme de Fatou, le théorème est encore vrai pour les fonctions mesurables positives. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure. □

On a un théorème de réciprocity, soit

$$\mathfrak{B} = \left\{ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : v_{P,e}(B) < +\infty \text{ et } \sum_{k=1}^n k v_{P,k}(B) = o_{n \rightarrow +\infty}(n) \right\}$$

Theorem 9. Si \mathfrak{V} a la propriété de recouvrement fini de \mathbb{R} si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, v_{P,e})$ alors la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dv_{P,n}(x)$$

converge vers $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dv_{P,e}(x)$.

Remark 11. Si \mathfrak{A} et \mathfrak{V} vérifie la propriété de recouvrement dénombrable $\{B_i\}$ tel que pour \mathfrak{A} on a

$$\sum_{i=1}^{+\infty} v_{P,n}(B_i) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et pour \mathfrak{V} on a

$$\sum_{k=1}^n k \left(\sum_{i=1}^{+\infty} v_{P,k}(B_i) \right) = o_{n \rightarrow +\infty}(n),$$

les théorèmes précédents sont encore vrais.

Definition 7. Les valeurs singulières de la mesure spectrale P , le long de la base hilbertienne sont les réels $|\mu_{P,n}|$ tels que

$$|\mu_{P,n}| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| dv_{P,n}(x) < +\infty$$

et les valeurs propres associées sont

$$\mu_{P,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x dv_{P,n}(x)$$

pour les entiers $n \geq 1$ pour lesquels la fonction

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x) = x \text{ vérifie } \mathbf{1}_{\mathbb{R}} \in L^1(\mathbb{R}, v_{P,n}).$$

Theorem 10. Si

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} t^n |\mu_{P,n}| < +\infty \text{ et } |\mu_{P,n}| = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

alors

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}} \in L^1(\mathbb{R}, v_{P,n}) \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} x dv_{P,e}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \mu_{P,n}. \quad (8.1)$$

Definition 8. Une mesure spectrale P qui vérifie les conditions 8.1 a une trace le long de la base hilbertienne e définie par la formule

$$\mathrm{Tr}_e(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dv_P(x).$$

Proposition 4. Pour les deux traces suivantes, si l'une existe alors l'autre existe et on a l'égalité

$$\mathrm{Tr}_e(U.P) = \mathrm{Tr}_{Ue}(P),$$

si U appartient au stabilisateur St_P de P

$$\mathrm{Tr}_e(P) = \mathrm{Tr}_{Ue}(P).$$

En particulier, si $\mathrm{Tr}_e(P)$ existe, $\mathrm{Tr}_e(P)$ est indépendante de la base hilbertienne e pour les mesures spectrales P vérifiant

$$\mathrm{St}_P = \mathfrak{A}.$$

Remark 12. Une mesure spectrale P pour laquelle

$$\text{St}_P = \mathfrak{U}$$

a une trace notée $\text{Tr}(P)$ qui ne dépend que de P .

Le théorème de Von Neumann donne une correspondance bijective entre les mesures spectrales \mathfrak{M} sur H et les opérateurs autoadjoints de H telle que si $v_{f,g}$ sont les mesures complexes et réelles définies par

$$v_{f,g}(B) = \langle P_B f, g \rangle_H \text{ avec } v_f(B) = \langle P_B f, f \rangle_H$$

où P_B est le projecteur associé au borélien $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, alors l'opérateur T associé à cette mesure spectrale vérifie

$$\text{dom}(T) = \left\{ f \in H : \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x dv_f(x) \right| < +\infty \right\}$$

et

$$\langle Tf, g \rangle_H = \int_{-\infty}^{+\infty} x dv_{f,g}(x).$$

Pour un opérateur T compact et autoadjoint, soit $\{e_n\}_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de vecteurs propres. Avec les notations précédentes on a

$$\mu_n(T) = \langle Te_n, e_n \rangle_H = \int_{-\infty}^{+\infty} x dv_n(x),$$

et $v_n = v_{e_n}$ est la probabilité sur \mathbb{R} définie précédemment. La suite $\mu_n(T)$ est ordonnée de telle façon que $\mu_n(|T|) = |\mu_n(T)|$ est décroissante comptées avec leur ordre de multiplicité et vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(T) = 0.$$

Remark 13. On définit les projecteurs P_n comme suit,

$$P_n = P_{E_n}, P_0 = \mathbf{0}_H$$

où E_n est le sous-espace vectoriel fermé de H engendré par $\{e_k : k \geq n\}$. On peut écrire simplement les opérateurs compacts sous la forme

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(T) (P_n - P_{n-1}).$$

Pour tout e_k ,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(T) (P_n e_k - P_{n-1} e_k) \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \mu_n(T) (P_n e_k - P_{n-1} e_k) = \mu_k(T) e_k = T e_k \end{aligned}$$

car

$$P_n e_k = 0 \text{ si } n < k, P_n e_k = e_k \text{ si } k \geq n.$$

Si la trace $\text{Tr}(T)$ existe, elle peut être représentée par l'intégrale

$$\text{Tr}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dv(x), v = v_P$$

où P est la mesure spectrale associée à T . Le problème posé est de savoir, dans l'hypothèse où l'intégrale diverge, existe-t-il un procédé permettant de régulariser cette intégrale par des procédés de régularisation, décrits par exemple dans [6] et [7]. Pour régulariser cette intégrale, l'idée est de construire des mesures τ par des "procédés de sommation" vérifiant

$$\tau(B) = v(B) \text{ si } v(B) < +\infty$$

comme pour le "procédé de sommation d'Abel" défini plus haut. On se fixe un procédé de sommation \mathfrak{S} et on prend pour mesure τ la mesure $v_{\mathfrak{S}}$ définie par

$$v_{\mathfrak{S}}(B) = \mathfrak{S}(s(B)) \text{ avec } s_n(B) = \sum_{k=1}^n \langle P_B e_k, e_k \rangle_H,$$

le procédé de sommation doit vérifier, la régularité, la linéarité et la stabilité. Si la condition de régularité est vérifiée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dv(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dv_{\mathfrak{S}}(t) \text{ si } f \in L^1(\mathbb{R}, v)$$

car pour tout borélien B de \mathbb{R} tel que $v(B) < +\infty$, on a $v_{\mathfrak{S}}(B) = v(B)$.

Definition 9. *Un opérateur compact T , autoadjoint, est traçable pour un procédé de sommation régulier \mathfrak{S} si $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} \in L^1(\mathbb{R}, v_{\mathfrak{S}})$ et on pose*

$$\text{Tr}_{\mathfrak{S}}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dv_{\mathfrak{S}}(x). \quad (8.2)$$

Sous quelles hypothèses a-t-on

$$\text{Tr}(T) = \text{Tr}_{\mathfrak{S}}(T),$$

cette réciprocité est donnée par des constructions taubériennes. On donne un exemple sur le "procédé de sommation \mathfrak{C} " de Cesàro. Pour le procédé de sommation de Cesàro, les sommes partielles de $\mathfrak{C}(s)$ sont

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k(B) \text{ avec } s_k(B) = \sum_{m=1}^k \langle P_B e_m, e_m \rangle_H \leq k,$$

on pose

$$v_{\mathfrak{C}}(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k(B) \leq +\infty, \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

$v_{\mathfrak{C}}$ est une mesure sur les boréliens de \mathbb{R} et $v(B) = v_{\mathfrak{C}}(B)$ si $v(B) < +\infty$. La trace de Cesàro d'un opérateur compact autoadjoint sera définie, si l'intégrale existe, par

$$\text{Tr}_{\mathfrak{C}}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dv_{\mathfrak{C}}(x),$$

on a un théorème du type taubérien de la forme,

Theorem 11. *Si la famille de boréliens \mathcal{F} de \mathbb{R} qui vérifient*

$$v_{\mathfrak{C}}(B) < +\infty \text{ et } \langle P_B e_n, e_n \rangle_H = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (8.3)$$

a la propriété de recouvrement fini de \mathbb{R} , alors T est un opérateur traçable avec

$$\text{Tr}(T) = \text{Tr}_{\mathfrak{C}}(T)$$

si

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}}(|T|) < +\infty.$$

Proof. C'est une application du théorème taubérien de Hardy-Littlewood car le recouvrement fini par des boréliens de \mathcal{F} permet d'écrire $v(B) = v_{\mathfrak{E}}(B) < +\infty$, $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. \square

Definition 10. Un procédé de sommation est dit régulier si $v_{\mathfrak{E}}(B) < +\infty \implies \mathfrak{S}(s(B)) < +\infty$ et

$$v_{\mathfrak{E}}(B) = \mathfrak{S}(s(B)).$$

Le procédé de sommation est linéaire si il vérifie

$$(av_1 + bv_2)_{\mathfrak{E}}(B) = a(v_1)_{\mathfrak{E}}(B) + b(v_2)_{\mathfrak{E}}(B), \forall a, b \in \mathbb{C} \text{ et } B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

il est dit stable sur la base hilbertienne e si pour

$$v_{\tau}(B) = \sum_{n=\tau+1}^{+\infty} \langle P_B e_n, e_n \rangle_H$$

on a

$$(v_{\tau})_{\mathfrak{E}}(B) = v_{\mathfrak{E}}(B) - \sum_{n=1}^{\tau} \langle P_B e_n, e_n \rangle_H,$$

enfin le procédé de sommation \mathfrak{S}_1 est plus fort que le procédé de sommation \mathfrak{S}_2 si

$$v_{\mathfrak{S}_1}(B) < +\infty \implies v_{\mathfrak{S}_2}(B) < +\infty \text{ et } v_{\mathfrak{S}_1}(B) = v_{\mathfrak{S}_2}(B)$$

et il y a consistance entre les procédés de sommation \mathfrak{S}_1 et \mathfrak{S}_2 si

$$v_{\mathfrak{S}_1}(B) = v_{\mathfrak{S}_2}(B),$$

pour tous les boréliens qui ont une mesure finie pour $v_{\mathfrak{S}_1}$ et $v_{\mathfrak{S}_2}$.

Remark 14. On cherche donc, les processus \mathfrak{S} équivalent au processus \mathfrak{J} qui laisse invariant v .

$$v_{\mathfrak{J}}(B) = v(B)$$

Les premières mesures abéliennes construites sont les mesures spectrales de Nörlund. On se fixe une suite $p = \{p_n\}_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels positifs tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{\sum_{k=1}^n p_k} = 0, \quad (8.4)$$

la mesure spectrale de Nörlund-Cesàro est définie par

$$v_{\mathfrak{N}}(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k \left(\sum_{l=1}^k \langle P_B e_l, e_l \rangle_H \right)}{\sum_{k=1}^n p_k},$$

les méthodes de sommation sont régulières, linéaires, stables et consistantes entre elles.

Les mesures spectrales d'Abel-Dirichlet sont définies comme suit. Si $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ est une suite de nombres réels positifs strictement croissante, on pose

$$v_{\mathfrak{A}}(B) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \langle P_B e_n, e_n \rangle_H e^{-\lambda_n x}, \quad (8.5)$$

les méthodes de sommation sont régulières, linéaires, stables mais pas consistante entre elles en général.

Remark 15. Si $\lambda_n = n \log(n)$ la mesure spectrale obtenue est la mesure spectrale de Lindelöf.

Soit $\{e_n\}_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de vecteurs propres et v la mesure définie sur les boréliens de \mathbb{R} par

$$v(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle P_B e_n, e_n \rangle_H,$$

on se fixe un procédé de sommation dans une famille \mathfrak{F} de procédés de sommation réguliers, linéaires, stables et consistants. Si l'application identique

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}, v_{\mathfrak{S}})$ pour au moins un procédé de sommation de \mathfrak{S} , on régularise la trace de T en posant

$$\mathrm{Tr}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dv_{\mathfrak{S}}(x),$$

cette trace ne dépend pas du choix du procédé \mathfrak{S} de \mathfrak{F} . La trace de Nörlund-Cesàro est définie par

$$\mathrm{Tr}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dv_{\mathfrak{N}}(x)$$

où la suite p définissant $v_{\mathfrak{N}}$ varie dans l'ensemble des suites strictement positives vérifiant 8.4.

Remark 16. La non consistance des mesures spectrales d'Abel permet pas de donner un critère de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(T)$ pour un opérateur compact autoadjoint T indépendamment du choix de la mesure abélienne choisie. Pour régulariser une trace par un processus de sommation d'Abel, on régularise cas par cas.

La mesure définie en 8.5 est notée simplement

$$v_{\lambda}(B) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \langle P_B e_n, e_n \rangle_H e^{-\lambda n x}, \lambda = \{\lambda_n\}_{n \geq 1}$$

la série de Dirichlet associée

$$v_{\lambda}(B)(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle P_B e_n, e_n \rangle_H e^{-\lambda n z}$$

est une série de Dirichlet à terme positifs $\langle P_B e_n, e_n \rangle_H$, le théorème de Landau dit que l'abscisse de convergence σ_c est égale à l'abscisse d'holomorphic σ_h et que σ_c est un point singulier de $v_{\lambda}(B)(z)$. On a

$$|v_{\lambda}(B)(z)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \langle P_B e_n, e_n \rangle_H e^{-\lambda n x} < +\infty \text{ si } x = \mathrm{Re}(z) > \sigma_c,$$

pour chaque borélien B , on pose

$$A_B(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} \langle P_B e_k, e_k \rangle_H \text{ et } A_{B,\lambda}(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} \langle P_B e_n, e_n \rangle_H,$$

soit

$$L_B = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log A_B(n)}{\lambda_n}$$

si $L_B > 0$ alors $\sigma_c(B) = L_B$ et L_B est une valeur singulière de $v_\lambda(B)$ et si $L_B \leq 0$ alors $\sigma_c(B) \leq 0$. Si la série

$$\mathcal{V}_\lambda(B)(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle P_B e_n, e_n \rangle_H e^{-\mu_n z}, \mu_n = e^{\lambda_n}$$

se prolonge en une fonction méromorphe en 0 avec pour ordre q , alors $v_\lambda(B)$ se prolonge en une fonction méromorphe dont les pôles éventuels se situent aux points $1, 2, \dots, q$. On a donc le théorème suivant,

Lemma 7. *Si $\sigma_c(B) < +\infty$ et $\mathcal{V}_\lambda(B)(z)$ se prolonge en une fonction méromorphe en 0 alors, si $\widehat{v}_\lambda(B)(z)$ est le prolongement méromorphe de $v_\lambda(B)(z)$ sur \mathbb{C} , $v_\lambda(B)$ existe et est égale à*

$$v_\lambda(B) = \widehat{v}_\lambda(B)(0).$$

Definition 11. *Une famille de boréliens \mathfrak{F} est λ -abélienne si $\forall B \in \mathfrak{F}$, $\sigma_c(B) < +\infty$ et $\mathcal{V}_\lambda(B)$ se prolonge en une fonction méromorphe en 0 d'ordre fini.*

Theorem 12. *S'il existe une famille \mathfrak{F} , λ -abélienne, ayant la propriété de recouvrement fini, alors la mesure obtenue par le processus de sommation d'Abel \mathfrak{S} est définie par*

$$(v_\lambda)_\mathfrak{S}(B) = \widehat{v}_\lambda(B)(0) < +\infty.$$

Pour un opérateur compact autoadjoint, on a donné un critère de convergence en 4.1, on propose de définir une autre approche de la définition de la trace. Avec les procédés de sommation d'Abel, on pose

$$\text{Tr}_{T,\lambda}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(T) e^{-\lambda_n z}, \lambda = \{\lambda_n\}_{n \geq 1}$$

où λ est une suite de nombres positifs qui joue le rôle de paramètre. On s'intéresse à la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Tr}_{T,\lambda}(x).$$

Theorem 13. *Soit $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels positifs strictement croissante telle que*

$$L_\lambda = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(|\sum_{k=1}^n \mu_k(T)|)}{\lambda_n} < +\infty. \quad (8.6)$$

Si la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(T) e^{-\tau_n z}, \tau_n = e^{\lambda_n}$$

se prolonge en une fonction méromorphe en 0, d'ordre fini q , alors la série de Dirichlet

$$\text{Tr}_{T,\lambda}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(T) e^{-\lambda_n z}$$

a un prolongement méromorphe $\widehat{\text{Tr}}_{T,\lambda}$ sur \mathbb{C} , dont les seuls pôles éventuels sont des pôles simples situés en $1, 2, \dots, q$. La trace de T est régularisée en posant

$$\text{Tr}_\lambda(T) = \widehat{\text{Tr}}_{T,\lambda}(0).$$

Remark 17. *On a des propriétés simples sur ces traces,*

$$\mathrm{Tr}_\lambda(T) + \mathrm{Tr}_\rho(T) = \mathrm{Tr}_{\lambda \times \rho}(T)$$

où $\lambda \times \rho$ est le produit d'Abel des deux suites $(\lambda \times \rho)_n = \lambda_n \times \rho_n$. Il y a invariance par homothétie $\mathrm{Tr}_{a\lambda}(T) = \mathrm{Tr}_\lambda(T)$, $\forall a > 0$.

9. CONCLUSION

Dans ce document, on a présenté plusieurs méthodes pour élargir la notion de trace à des opérateurs non traçables. J'engage le lecteur, à revisiter ces constructions et à les approfondir. Certains résultats vous paraîtront surprenants. La technique de ζ -régularisation donne une large classe d'opérateurs sur laquelle on peut régulariser la trace. L'introduction des séries de Fourier et les mesures spectrales sur lesquelles on fait intervenir des procédés abéliens de sommation permettent de définir les traces de Cesàro, de Norlünd et d'Abel. Les réciprocités de ces résultats sont obtenues par les méthodes taubériennes classiques. Il y a beaucoup de procédés de régularisation de la notion de trace sur une mesure spectrale par des méthodes de régularisation d'intégrales divergentes, je laisse au lecteur le soin de développer et d'approfondir cette approche de la régularisation en s'aidant des résultats donnés dans [6] et [7].

REFERENCES

- [1] Connes, A., "Analyse et géométrie", <https://www.college-de-france.fr>
- [2] Connes, A., "Non commutative geometry", Academic Press (1994).
- [3] Dixmier, J. "Existence de traces non normales".C.R.A.S.Paris,262,sérieA(1966),1107-1108
- [4] Grothendieck, A., "Produits tensoriels topologiques", A.M.S, 1955. résumé: séminaire N. Bourbaki, 1951–1954, exp. No69, p. 193–200.
- [5] Hardy,G.H., Littlewood, J.E., "Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive", Proc. London Math. Soc. Série 2, Vol. 13 (1913), p. 174-191.
- [6] Jonot, J.L., "Sur quelques méthodes de régularisation des intégrales divergentes, application à la renormalisation", [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2016. hal-01281271.
- [7] Jonot, J.L., "Indépendance dimensionnelle et désintégration dans la régularisation des intégrales divergentes. 2016. hal-01408159.
- [8] Kasparov G. G., "The operator K-functor and extensions of C*-algebras", Math. USSR Izv. 1981.
- [9] Petkov V. et Yger A., "Singularités analytiques des séries de Dirichlet", Université Bordeaux I, 2001.
- [10] Robert,D."Sur les traces d'opérateurs(de Grothendieck à Lidskii)", SMF Gazette 2014.
Email address: j.jonot@gmail.com