



HAL
open science

Simulation des limites à la croissance : World 2 & 3

Alexandre Gondran

► **To cite this version:**

Alexandre Gondran. Simulation des limites à la croissance : World 2 & 3. École d'ingénieur. France. 2020. hal-03243555

HAL Id: hal-03243555

<https://hal.science/hal-03243555>

Submitted on 31 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Simulation des limites à la croissance : World2&3

Développement d'une interface pour les Systèmes Dynamiques

encadrant Alexandre Gondran

Connaissez vous le rapport Meadows ? D'après Wikipédia :

Les Limites à la croissance (dans un monde fini) (The Limits to Growth) - connu sous le nom de « Rapport Meadows » est un rapport appuyé par le Club de Rome et publié en 1972 qui est une des références des débats et critiques qui portent sur les liens entre conséquences écologiques de la croissance économique, limitation des ressources et évolution démographique.

L'objectif de ce projet informatique est de reproduire les simulations numériques du travail des chercheuses et chercheurs du MIT qui ont réalisés cette étude. Ces travaux sont fondés sur les modèles World2 [Forrester(1971)] et World3 [Meadows et al.(1972)Meadows, Meadows, Randers, and Behrens]. World2 puis World3 sont des modélisations (gros grain) du fonctionnement de l'humanité de 1900 à 2100 : ils définissent l'évolution de variables macroscopiques comme la population mondiale, le niveau de l'activité économique, de la production agricole, ainsi que la quantité de pollution générée, ou encore l'évolution de la consommation des ressources naturelles non renouvelables. La figure 1 présente la simulation de leur modèle et l'évolution des variables de 1900 à 2100 pour le scénario "business as usual": on observe un effondrement de l'activité économique puis de la population suite à la chute des ressources naturelles.

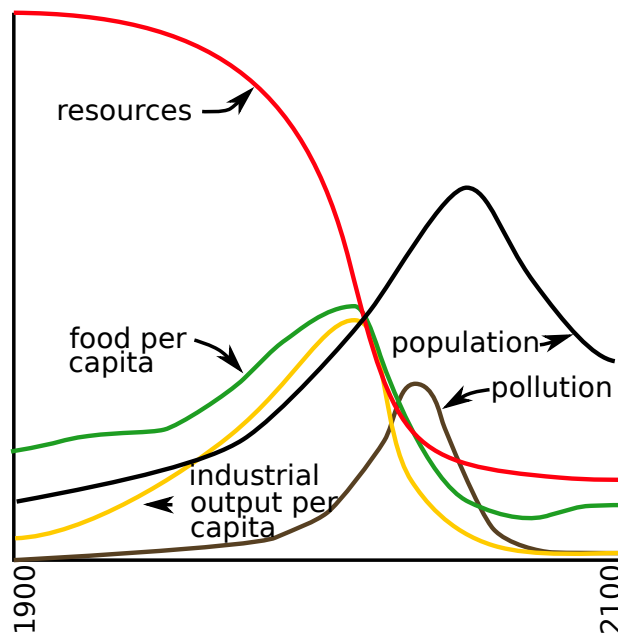


Figure 1: Scénario "business as usual" du rapport Meadows de 1972 [source CC YaguraStation].

Pour simuler numériquement ce type de modèles que l'on appelle **systèmes dynamiques**, on résout itérativement (pour chaque année ou demi-année) l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(y, t).$$

Les y représentent les variables (population, pollution...), t le temps et f une fonction qui définit le modèle. La figure 2 permet le définition de la fonction f sous forme de graphe orienté (ou plutôt

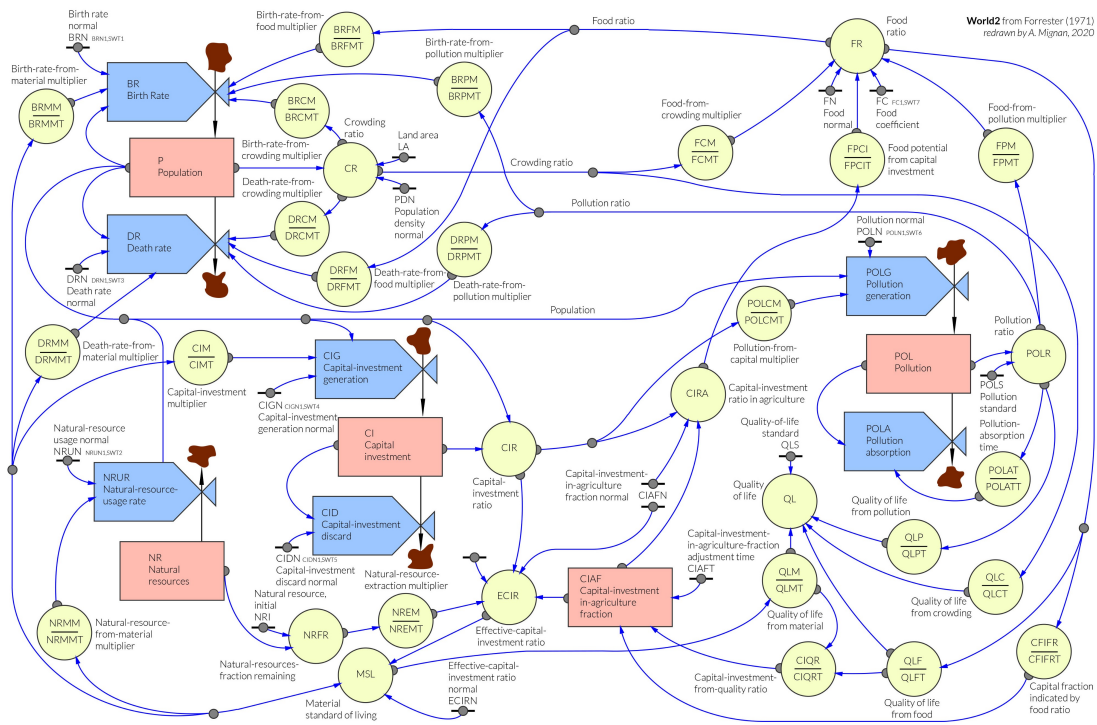


Figure 2: Modèle des interactions des différentes variables de World2. Les variables y sont représentées par les rectangles roses, les autres boîtes définissent la fonction f . [source image]

d'hypergraphe orienté). Les variables y sont représentées par les rectangles roses, les autres boîtes définissent les variables intermédiaires permettant le calcul de f .

Une simulation de World3 est disponible à l'adresse suivante :

<http://bit-player.org/extras/limits/ltg.html>

Les systèmes dynamiques sont très utilisés pour simuler des systèmes complexes d'interactions dans de très nombreux domaines, notamment pour simuler la dynamique des populations, le climat, la propagation d'une épidémie...

L'intérêt de la simulation de systèmes dynamiques est que l'on peut "jouer" avec le modèle, voir comment il réagit à différents scénarii. Le rapport Meadows en définit 12, par exemple, des scénarii où les ressources naturelles sont quasi-illimitée ou renouvelable, où des solutions techniques pour réduire la pollution sont inventées dans le futur, ou encore, où la productivité agricole est grandement accrue au fil des années. On peut ainsi, grâce à ces simulations, évaluer une politique de changement, ect...

Pour avoir une vue rapide du rapport Meadows, Jean-Marc Jancovici livre un commentaire pertinent sur le sujet. L'article de Brian Hayes dans l'American Scientist mets en perspective le rapport Meadows trente ans après sa parution.

Le projet informatique a pour but de reproduire les simulations du modèle World2, mais, si le temps le permet, on pourra construire une interface graphique pour faciliter la construction de nouveaux systèmes dynamiques utilisable par des non informaticien-ne-s.

1 Le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

Avant d'aborder le modèle World2, on s'intéresse à un modèle très simple, le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra qui décrit la dynamique de deux populations qui interagissent; une population de prédateurs (lynx) et une population de proie (lièvre). Les équations du modèle sont les suivantes

(voir page de Wikipédia) :

$$(LV1) \begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = x(t) (a - b \times y(t)) \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} = y(t) (-c + d \times x(t)) \end{cases} \quad (1)$$

où
 $x(t)$ est la population des proies au temps t ,
 $y(t)$ est la population des prédateurs au temps t ,
 a , b , c et d sont des constantes positives qui caractérisent la relation entre les deux espèces. Par exemple, a est le taux de reproduction intrinsèque des proies, constant et indépendant du nombre de prédateurs; b est le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés; d est le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées; c est le taux de mortalité intrinsèque des prédateurs, constant et indépendant du nombre de proies.

Le graphe du modèle

On peut représenter ce modèle par le graphe de la figure 3. Les boîtes carrés roses représentent les variables dites terminales du système (nœuds terminaux du graphe), c'est-à-dire intervenant directement dans les équations différentielles. Les constantes a , b , c et d sont les nœuds constants et il n'y a pas de variables intermédiaires, comme dans le modèle Word2.

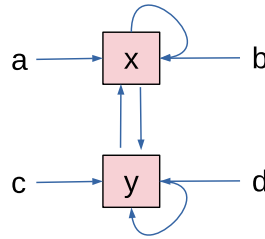


Figure 3: Graphe des interactions entre les variables terminales x et y et les constantes a , b , c et d .

On réécrit le modèle pour faire explicitement apparaître des variables intermédiaires. Si on pose :

$$a = a_1 - a_2$$

$$b = b_1 - b_2$$

$$c = c_1 - c_2$$

$$d = d_1 - d_2$$

avec a_i , b_i , c_i et d_i des réels positifs, on obtient :

$$(LV2) \begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = [a_1x(t) + b_2x(t)y(t)] - [a_2x(t) + b_1x(t)y(t)] = br_x(t) - dr_x(t) \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} = [c_2y(t) + d_1x(t)y(t)] - [c_1y(t) + d_2x(t)y(t)] = br_y(t) - dr_y(t) \end{cases} \quad (2)$$

avec :

$rr(t) = x(t)y(t)$, le taux de rencontre des proies et de prédateurs au temps t ;

$br_x(t) = a_1x(t) + b_2rr(t)$, taux de naissance de proies au temps t ;

$dr_x(t) = a_2x(t) + b_1rr(t)$, taux de mortalité de proies au temps t ;

$br_y(t) = c_2y(t) + d_1rr(t)$, taux de naissance de prédateurs au temps t ;

$dr_y(t) = c_1y(t) + d_2rr(t)$, taux de mortalité de prédateurs au temps t ;

On note $G = (V, E)$, le graphe orienté de la figure 4 avec V l'ensemble des nœuds (ou sommets) et $E \subset V \times V$ l'ensemble des arcs. De plus, on note :

$$V = T \cup I \cup C$$

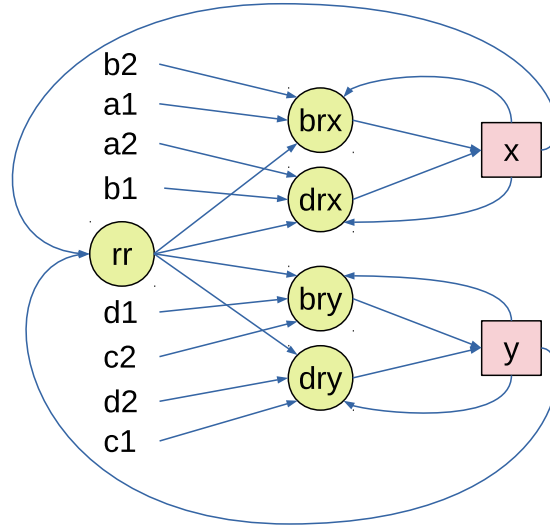


Figure 4: Graphe des interactions entre les variables terminales x et y (boites rectangulaires roses), les cinq variables intermédiaires (cercles jaune très pale) et les 8 constantes.

avec :

$T = \{x, y\}$ l'ensemble des **nœuds terminaux**;

$I = \{rr, br_x, dr_x, br_y, dr_y\}$ l'ensemble des cinq **nœuds intermédiaires** correspondant au taux de rencontre et aux taux de natalité/mortalité des proies/prédateurs ($[b/d]r[x/y]$);

$C = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2\}$ l'ensemble des **nœuds constants**.

Pour tous $v \in V$, on note :

$\Gamma^-[v]$, l'ensemble de nœuds entrant du nœud v , $\Gamma^-[v] = \{u \in V | (u, v) \in E\}$, et

$\Gamma^+[v]$, l'ensemble de nœuds sortant du nœud v , $\Gamma^+[v] = \{u \in V | (v, u) \in E\}$.

On note que $\Gamma^-[v] = \emptyset$, $\forall v \in C$.

Pondération temporelle des nœuds du graphe

Les nœuds du graphe G sont temporellement pondérés, c'est à dire que chaque nœuds v prend une valeur à l'instant courant t , noté $val[v(t)]$. Évidement, $\forall v \in C, val[v(t)] = cste$. On discrétise le temps par un pas de temps dt tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_n = t_0 + n \times dt \quad (3)$$

avec t_0 le instant initiale. On note donc $val[v, n] = val[v(t_n)]$.

Pour déterminer la valeur du nœud, chaque nœud intermédiaires ou terminaux v est caractérisée par une fonction : $f_v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $u = \Gamma^-[v]$ l'ensemble des nœuds intervenant dans le calcul de v et $n = |\Gamma^-[v]|$.

Pour définir la **valeur d'un nœud intermédiaires** $v \in I$ au temps t_n , il faut connaître la valeur des nœuds entrant $u = \Gamma^-[v]$ au temps t_n et sa fonction d'évaluation f_v :

$$\forall v \in I, \quad v(t) = f_v(u, t) \text{ avec } u = \Gamma^-[v] \quad (4)$$

$$val[v, n] = f_v(val[\Gamma^-[v], n], n) \quad (5)$$

Par exemple pour le nœud dr_x où $\Gamma^-[dr_x] = \{a_2, b_1, rr, x\}$

$$val[dr_x, n] = f_{dr_x}(val[a_2, b_1, rr, x], n) = a_2 \times val[x, n] + b_1 \times val[rr, n]$$

Le calcul de la **valeur des nœuds terminaux** $v \in T$ se fait en deux étapes. En effet, contrairement aux variables intermédiaires, pour les variables terminales, la fonction $f_v()$ ne retourne pas la nouvelle valeur de v à l'instant t , mais son accroissement temporel, c'est-à-dire, la valeur de la différentiel $v' = \frac{\partial v}{\partial t}$ (dérivée par rapport au temps) à l'instant t :

$$\forall v \in T, \frac{\partial v}{\partial t}(t) = f_v(u, t) \text{ avec } u = \Gamma^-[v] \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}[n] = f_v(\text{val}[\Gamma^-[v], n], n). \quad (7)$$

On peut intégrer la valeur avec la méthode d'Euler ou avec moins d'erreur numérique avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

$$\text{val}[v, n + 1] = \text{integrate}(f_v, v, n, dt) \quad (8)$$

Pour la méthode d'Euler, on a :

$$\frac{\partial v(t)}{\partial t} \simeq \frac{v(t_{n+1}) - v(t_n)}{dt} \quad (9)$$

$$\text{val}_{Euler}[v, n + 1] = \text{val}_{Euler}[v, n] + \frac{\partial v}{\partial t}[n] \times dt \quad (10)$$

Pour résoudre l'équation : $y' = f(y, t)$, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, procède à chaque itération :

$$y_{n+1} \simeq y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} dt \quad (11)$$

$$k_1 = f(y_n, t_n) \quad (12)$$

$$k_2 = f\left(y_n + k_1 \frac{dt}{2}, t_n + \frac{dt}{2}\right) \quad (13)$$

$$k_3 = f\left(y_n + k_2 \frac{dt}{2}, t_n + \frac{dt}{2}\right) \quad (14)$$

$$k_4 = f(y_n + k_3 dt, t_n + dt) \quad (15)$$

2 Ordre topologique d'un graphe orienté acyclique

Les variables intermédiaires doivent être calculées dans un certain ordre car il y a des règles de précedence à respecter. Par exemple, il faut calculer la variable rr avant la variable dr_x .

Soit $G_I = (I, E_I)$ le sous-graphe de G induit par les nœuds intermédiaires I , c'est-à-dire tel que $E_I = \{e = (u, v) \in E | u \in I, v \in I\}$. Ce sous-graphe orienté est **acyclique** (DAG, en anglais directed acyclic graph) c'est-à-dire qu'il ne contient pas de cycle. En effet, s'il contenait un cycle, le problème serait incorrectement modélisé; il y aurait une impossibilité de calculer la valeur d'un nœud intermédiaire à chaque instant.

Pour les DAG, on peut déterminer un ordre topologique des nœuds, c'est-à-dire un rang ou un niveau pour chaque nœud, de tel sorte qu'un nœud v de rang i a tous ces nœuds entrant de rang strictement inférieur à i :

$$\forall v \in I, r[v] > \max(r[u], u \in \Gamma^-[v]) \quad (16)$$

La figure 5 donne un exemple de l'ordre topologique sur un DAG. Il faudra calculer la valeur des nœuds intermédiaires selon l'ordre croissant des rangs des nœuds.

Les nœuds sans antécédent sont appelés les racines du DAG. Les nœuds sans successeur sont appelés les puits du DAG. L'algorithme qui permet de déterminer le rang de chaque nœud est donné

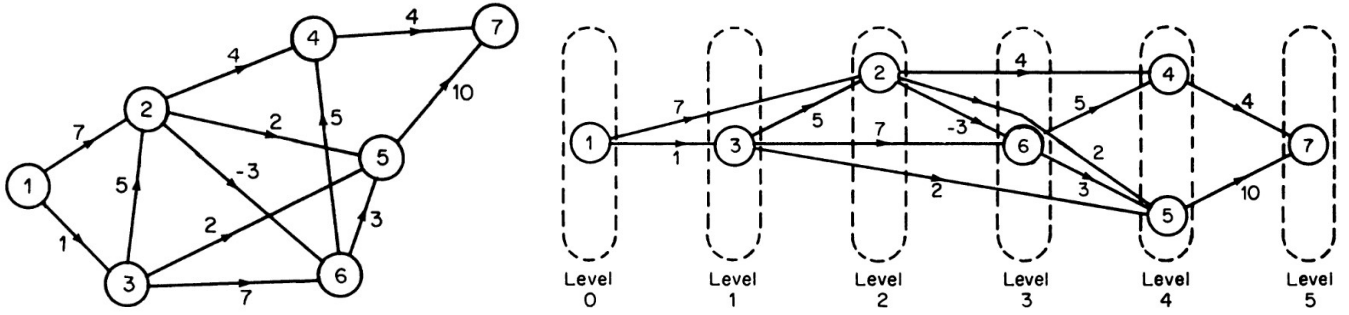


Figure 5: Le graphe de gauche est un DAG. Le graphe de droite est le même graphe pour lequel les nœuds ont été ordonné par ordre topologique (rang ou niveau croissant). [source images [Gondran and Minoux(1978)]]

ci-dessous [Gondran and Minoux(1978)]. Il faut donner en paramètre la liste des nœuds intermédiaires I et les listes d'adjacence entrantes et sortantes Γ^- et Γ^+ de chaque nœud du DAG.

Données : I, Γ^-, Γ^+

Procédure *rang_topologique*(I, Γ^-, Γ^+):

```

   $\forall i \in I, d^-[i] \leftarrow |\Gamma^-[i]|$ 
   $k \leftarrow 0$ 
   $S_k \leftarrow \{i \in I, d^-[i] = 0\}$ 
  tant que  $S_k \neq \emptyset$  faire
     $S_{k+1} \leftarrow \emptyset$ 
    pour chaque nœud  $i \in S_k$  faire
       $r[i] \leftarrow k$ 
      pour chaque nœud  $j \in \Gamma^+[i]$  faire
         $d^-[j] \leftarrow d^-[j] - 1$ 
        si  $d^-[j] = 0$  alors
           $S_{k+1} \leftarrow S_{k+1} \cup \{j\}$ 
        fin
      fin
     $k \leftarrow k + 1$ 
  retourner  $r$ 

```

References

- [Forrester(1971)] J. W. Forrester. *World dynamics*. Wright-Allen Press Cambridge, Mass, 1971.
- [Gondran and Minoux(1978)] M. Gondran and M. Minoux. *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, 1978.
- [Jochaud du Plessix(2019)] M. Jochaud du Plessix. Analyse du modèle World3 : sensibilité, dynamique, et pistes d'évolution. Master's thesis, INSA Lyon, Sept. 2019. URL <https://hal.inria.fr/hal-02434683>.
- [Meadows et al.(1972)Meadows, Meadows, Randers, and Behrens] D. H. Meadows, D. L. Meadows, J. Randers, and W. W. Behrens. *The limits to growth: a report for the Club of Rome's Project on the Predicament of Mankind*. Universe Books, 1972. URL <https://www.clubofrome.org/report/the-limits-to-growth/>.

A Les équations du modèle World2

Les constantes sont notées en lettres majuscules et les variables en lettre minuscules. Le système World2 est dit de degré 5 car il y a cinq équations différentielles, correspondant aux 5 variables terminales : la population, les ressources naturelles, le niveau d'investissement, la pollution et la fraction de l'investissement consacré à l'agriculture.

Pour alléger la lecture du modèle Word2, on a regroupé arbitrairement les variables intermédiaires et terminales en six groupes, comme le montre la figure 6.

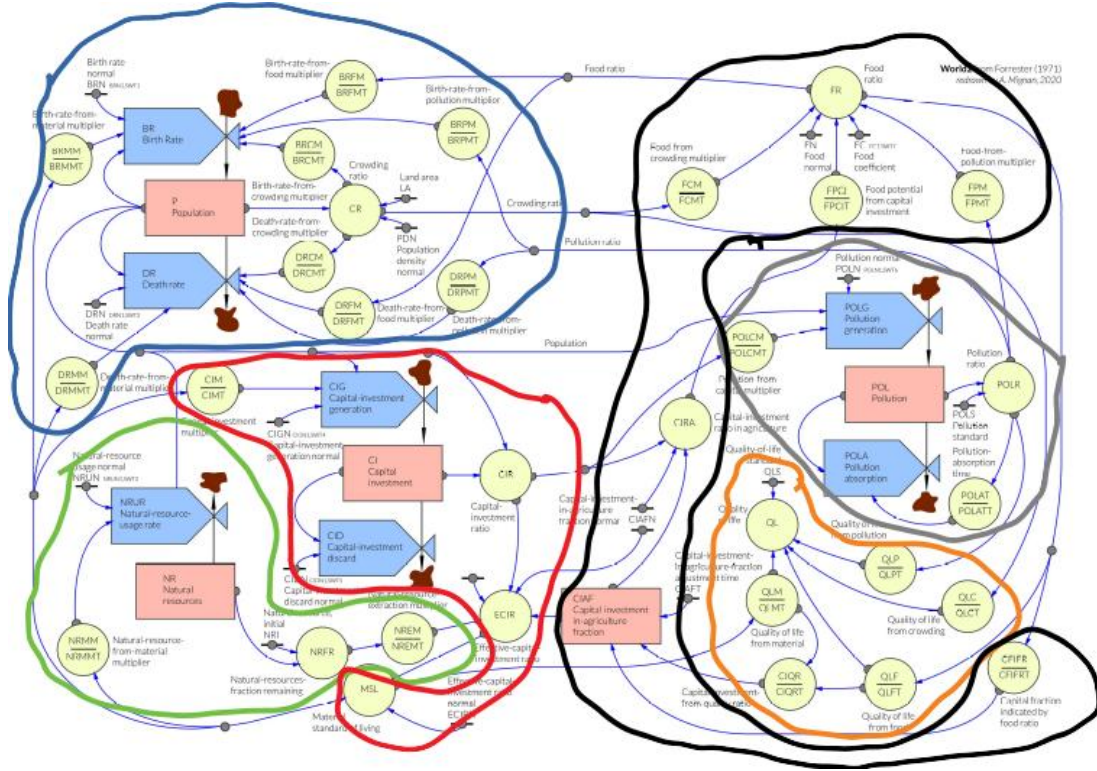


Figure 6: Regroupement arbitraire des variables du modèle World2 en six groupes autour de variables : population, investissement en capital, ressources naturelles, agriculture, qualité de vie et pollution.

A.1 Variables autour de la population

A.1.1 La population (p , population)

C'est une variable terminale, elle est exprimée en nombre de personnes.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = br(t) - dr(t) \quad (17)$$

$$p(t_0) = p_0 = 1,65 \times 10^9 \quad (18)$$

en nombre de personnes, avec : $p_0 = p(t_0)$, la population initiale au temps initial $t_0 = 1900$, br , le taux de natalité, en personnes / an, dr , le taux de mortalité, en personnes / an.

A.1.2 Le taux de natalité (*br*, birth rate) et de mortalité (*dr*, death rate):

$$br(t) = p(t) \times clip(BRN_0, BRN_1, SWT_1, t) \times brfm(t) \times brmm(t) \times brcm(t) \times brpm(t) \quad (19)$$

$$BRN_0 = 0.04 \quad (20)$$

$$BRN_1 = 0.04 \quad (21)$$

$$SWT_1 = 1970 \quad (22)$$

$$dr(t) = p(t) \times clip(DRN_0, DRN_1, SWT_3, t) \times drfm(t) \times drmm(t) \times drcm(t) \times drpm(t) \quad (23)$$

$$DRN_0 = 0.028 \quad (24)$$

$$DRN_1 = 0.028 \quad (25)$$

$$SWT_3 = 1970 \quad (26)$$

avec :

$$clip(c_1, c_2, t_{switch}, t) = \begin{cases} c_1 & \text{si } t < t_{switch} \\ c_2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (27)$$

BRN_0, BRN_1 , les taux de natalité normaux, en fraction / an;

SWT_1 , l'année de basculement du taux de natalité BRN_0 vers BRN_1 ;

$brfm$, le multiplicateur du taux de natalité lié au niveau de nourriture, sans dimension;

$brmm$, le multiplicateur du taux de natalité lié au confort matériel, sans dimension;

$brcm$, le multiplicateur du taux de natalité lié à la surpopulation, sans dimension;

$brpm$, le multiplicateur du taux de natalité lié au niveau de pollution, sans dimension;

DRN_0, DRN_1 , les taux de mortalité normaux, en fraction / an;

SWT_3 , l'année de basculement du taux de mortalité DRN_0 vers DRN_1 ;

$drfm$, le multiplicateur du taux de mortalité lié au niveau de nourriture, sans dimension;

$drmm$, le multiplicateur du taux de mortalité lié au confort matériel, sans dimension;

$drcm$, le multiplicateur du taux de mortalité lié à la surpopulation, sans dimension;

$drpm$, le multiplicateur du taux de mortalité lié au niveau de pollution, sans dimension.

A.1.3 Les multiplicateurs du taux de natalité lié au niveau de vie matériel ($brmm$, birth rate from material multiplicatier), au niveau de nourriture ($brfm$, birth rate from food multiplicatier), au niveau de surpopulation ($brcm$, birth rate from crowding multiplicatier), au niveau de pollution ($brpm$, birth rate from pollution multiplicatier)

$$brmm(t) = tabhl(BRMMT, msl(t), 0, 5, 1) \quad (28)$$

$$BRMMT = [1.2, 1, 0.85, 0.75, 0.7, 0.7] \quad (29)$$

sans unité, avec :

$BRMMT$, le table des multiplicateurs du taux de natalité lié au confort matériel;

msl , le niveau de vie matériel, sans dimension;

$tabhl(y, x, x_{min}, x_{max}, pas)$, la fonction dépendente de la variable x . y, x_{min}, x_{max} et pas sont des constantes. La fonction passe par les n points $(x_i, y_i)_{i \in 0 \dots n-1}$ et est linéaire par morceaux entre les points. Les points x_i sont construit à partir de x_{min} et pas : $x_i = x_{min} + i \times pas$, il y a $n = \frac{x_{max} - x_{min}}{pas}$ points; y est un tableau contenant les n valeurs y_i .

$$tabhl(y, x, x_{min}, x_{max}, pas) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{pas}(x - x_i) \quad (30)$$

avec $i = \lfloor \frac{x - x_{min}}{pas} \rfloor$ tel que $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $x_0 = x_{min}$, $x_n = x_{max}$ et $n = |BRMMT|$.

La figure 31 représente la fonction pour la variable $brmm$ en fonction de $x = msl$; Le tableau y est

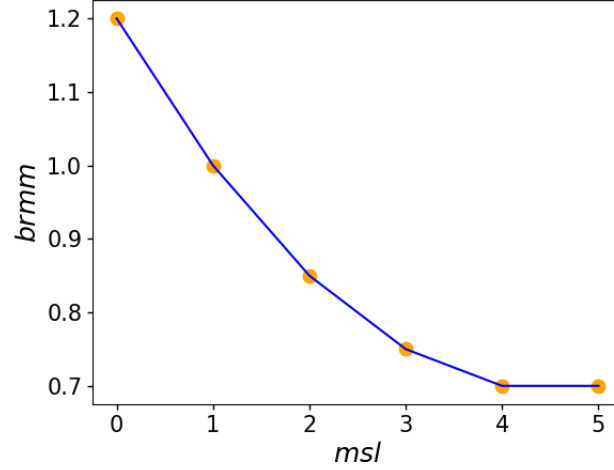


Figure 7: Multiplicateur du taux de natalité lié au confort matériel ($brmm$) en fonction du niveau de vie matériel (msl). Fonction linéaire par morceau. on pourrait également approximer le nuage de points par une fonction quadratique par la méthode des moindres carrés.

$BRMMT$. La liste des 6 points par lesquels passent $brmm(t) = tabhl(BRMMT, msl(t), 0, 5, 1)$ sont $\{(0, 1.2); (1, 1); (2, 0.85); (3, 0.75); (4, 0.7); (5, 0.7)\}$.

$$brfm(t) = tabhl(BRFMT, fr(t), 0, 4, 1) \quad (31)$$

$$BRFMT = [0, 1, 1.6, 1.9, 2] \quad (32)$$

sans unité, avec :

$BRFMT$, la table des multiplicateurs du taux de natalité lié au niveau de nourriture;

fr , le ratio de nourriture, sans dimension;

$tabhl$, la fonction déjà vu.

$$brcm(t) = tabhl(BRCMT, cr(t), 0, 5, 1) \quad (33)$$

$$BRCMT = [1.05, 1, 0.9, 0.7, 0.6, 0.55] \quad (34)$$

sans unité, avec :

$BRCMT$, la table des multiplicateurs du taux de natalité lié à la surpopulation;

cr , le ratio de surpopulation, sans dimension.

$$brpm(t) = tabhl(BRPMT, polr(t), 0, 60, 10) \quad (35)$$

$$BRPMT = [1.02, 0.9, 0.7, 0.4, 0.25, 0.15, 0.1] \quad (36)$$

sans unité, avec :

$BRPMT$, la table des multiplicateurs du taux de natalité lié au niveau de pollution;

$polr$, le ratio de pollution, sans dimension

A.1.4 Les multiplicateurs du taux de mortalité liés au niveau de vie matériel (*drmm*, death rate from material multiplicatier), de nourriture (*drfm*, death rate from food multiplicatier), de surpopulation (*drcm*, death rate from crowding multiplicatier) et de pollution (*drpm*, death rate from pollution multiplicatier)

De façon analogue aux multiplicateurs du taux de natalité, on définit les multiplicateurs du taux de mortalité lié au niveau de vie matériel (*drmm*), lié au niveau de nourriture (*drfm*), au niveau de surpopulation (*drcm*) et au niveau de pollution : *drpm*.

$$drmm(t) = tabhl(DRMMT, msl(t), 0, 5, 0.5) \quad (37)$$

$$DRMMT = [3, 1.8, 1, 0.8, 0.7, 0.6, 0.53, 0.5, 0.5, 0.5] \quad (38)$$

$$drfm(t) = tabhl(DRFMT, fr(t), 0, 2, 0.25) \quad (39)$$

$$DRFMT = [30, 3, 2, 1.4, 1, 0.7, 0.6, 0.5, 0.5] \quad (40)$$

$$drcm(t) = tabhl(DRCMT, cr(t), 0, 5, 1) \quad (41)$$

$$DRCMT = [0.9, 1, 1.2, 1.5, 1.9, 3] \quad (42)$$

$$drpm(t) = tabhl(DRPMT, polr(t), 0, 60, 10) \quad (43)$$

$$DRPMT = [0.92, 1.23, 2, 3.2, 4.8, 6.8, 9.2] \quad (44)$$

avec :

$DR[M/F/C/P]MT$, les tables des multiplicateurs du taux de natalité lié au niveau de vie materiel/de nourriture/de surpopulation/de polution.

A.1.5 Le ratio de surpopulation (*cr*, crowding ratio)

$$cr(t) = \frac{p(t)}{LA \times PDN} \quad (45)$$

$$LA = 135 \times 10^6 \quad (46)$$

$$PDN = 26.5 \quad (47)$$

sans dimension, avec :

LA, la zone terrestre en km²;

PDN, la densité de population normale, en personne / km²;

p, la population, en personne.

A.2 Variables autour de l'investissement en capital

A.2.1 Le niveau de vie (*msl*, materiel standard of living)

$$msl(t) = \frac{ecir(t)}{ECIRN} \quad (48)$$

$$ECIRN = 1 \quad (49)$$

sans unité, avec :

ecir, l'investissement effectif en capital par personne, en unité de capital / personne

ECIRN, l'ECIR normale, en unité de capital / personne

A.2.2 L'investissement effectif en capital par personne (*ecir*, effective capital investment ration)

$$ecir(t) = cir(t) \times nrem(t) \times \frac{1 - ciaf(t)}{1 - CIAFN} \quad (50)$$

$$CIAFN = 0.3 \quad (51)$$

en unité de capital / personne, avec :

cir, le ratio investissement en capital, en unité de capital / personne;

nrem, le multiplicateur de l'extraction des ressources naturelles, sans dimension;

ciaf, la fraction d'investissement en capital dans l'agriculture, sans dimension;

CIAFN, la CIAF normale, sans dimension

A.2.3 L'investissement en capital par personne (*cir*, capital investment ratio)

$$cir(t) = \frac{ci(t)}{p(t)} \quad (52)$$

en unité de capital / personne, avec :

ci, l'investissement en capital, en unité de capital;

p, la population, en personne.

A.2.4 L'investissement en capital (*ci*, capital investment)

Variable terminale

$$\frac{\partial ci(t)}{\partial t} = cig(t) - cid(t) \quad (53)$$

$$ci(t_0) = ci_0 = CI_1 = 0.4 \times 10^9 \quad (54)$$

en unité par capital, avec :

cig, la production de l'investissement en capital, en unité de capital / an;

cid, le retrait de l'investissement en capital, en unité de capital / an;

$ci(t = 0) = ci_0 = CI_1 = 0.4 \times 10^9$, l'investissement en capital initial en 1900.

A.2.5 La production / le retrait de l'investissement en capital (*cig*, capital investment generation et *cid*, capital investment discard)

$$cig(t) = p(t) \times cim(t) \times clip(CIGN_0, CIGN_1, SWT_4, t) \quad (55)$$

$$CIGN_0 = 0.05 \quad (56)$$

$$CIGN_1 = 0.05 \quad (57)$$

$$SWT_4 = 1970 \quad (58)$$

avec :

cim, le multiplicateur de l'investissement en capital; sans dimension;

$CIGN_0, CIGN_1$, les niveau de *CIG* normaux, en unité de capital / an / personne;

SWT_4 , l'année de basculement du *CIG* de $CIGN_0$ à $CIGN_1$.

$$cid(t) = ci(t) \times clip(CIDN_0, CIDN_1, SWT_5, t) \quad (59)$$

$$CIDN_0 = 0.025 \quad (60)$$

$$CIDN_1 = 0.025 \quad (61)$$

$$SWT_5 = 1970 \quad (62)$$

avec :

$CIDN_0, CIDN_1$: CID normale; unité : unité de capital / an / personne
 SWT_5 , l'année de basculement du CIG de $CIDN_0$ à $CIDN_1$.

A.2.6 Le multiplicateur de l'investissement en capital (cim)

$$cim(t) = tabhl(CIMT, msl, 0, 5, 1) \quad (63)$$

$$CIMT = [0.1, 1, 1.8, 2.4, 2.8, 3] \quad (64)$$

avec :

$CIMT$, la table du multiplicateur de l'investissement en capital;
 msl , le niveau de vie matériel, sans dimension.

A.3 Variables autour des ressources naturelles

A.3.1 Le multiplicateur de l'extraction des ressources naturelles ($nrem$, natural resource extraction multiplier)

$$nrem(t) = tabhl(NREMT, nrfr, 0, 1, 0.25) \quad (65)$$

$$NREMT = [0, 0.15, 0.5, 0.85, 1] \quad (66)$$

sans dimension, avec :

$NREMT$, la table de $NREM$

$nrfr$, la fraction de ressources naturelles restante, sans dimension.

A.3.2 La fraction de ressources naturelles restante ($nrfr$, natural resource fraction remaining)

$$nrfr(t) = \frac{nr(t)}{NR_I} \quad (67)$$

sans dimension, avec :

nr , la quantité de ressources naturelles, en unité de ressource naturelle;

NR_I , la quantité de ressources naturelles initiale, en unité de ressource naturelle.

A.3.3 La quantité de ressources naturelles (nr , natural resource)

Variable terminale

$$\frac{\partial nr}{\partial t}(t) = -nrur(t) \quad (68)$$

$$nr(t_0) = nr_0 = NR_I = 900 \times 10^9 \quad (69)$$

en unité de ressource naturelle, avec :

$nrur$, le taux d'utilisation des ressources naturelles (non renouvelables).

A.3.4 Le taux d'utilisation des ressources naturelles (*nrur*, natural resource user rate)

$$nrur(t) = p(t) \times clip(NRUR_0, NRUR_1, SWT_2, t) \times nrmm(t) \quad (70)$$

$$NRUR_0 = 1 \quad (71)$$

$$NRUR_1 = 1 \quad (72)$$

$$SWT_2 = 1970 \quad (73)$$

en unité de ressource naturelle / an, avec :

p , la population, personnes;

$NRUR_0$, $NRUR_1$, les taux d'utilisation des ressources naturelles normale, en unité de ressource naturelle / personne / an.

SWT_2 , l'année de transition du taux de d'utilisation des ressources naturelles normale $NRUR_0$ vers $NRUR_1$;

$nrmm$, le multiplicateur de ressources naturelles dû aux biens matériels.

A.3.5 Le multiplicateur de ressources naturelles dûes aux biens matériels (*nrmm*, natural resource from material multiplicatier)

$$nrmm(t) = tabhl(NRMMT, msl, 0, 10, 1) \quad (74)$$

$$NRMMT = [0, 1, 1.8, 2.4, 2.9, 3.3, 3.6, 3.8, 3.9, 3.95, 4] \quad (75)$$

sans dimension, avec :

$NRMMT$, la table du multiplicateur de ressources naturelles dûes aux biens matériels;

msl , le niveau de vie materiel.

A.4 Variables autour de l'agriculture

A.4.1 La fraction d'investissement en capital dans l'agriculture (*ciaf*, capital investment in argriculture fraction)

Variable terminale

$$\frac{\partial ciaf}{\partial t} = \frac{cfifr(t) \times ciqr(t) - ciaf(t)}{CIAFT} \quad (76)$$

$$ciaf(t_0) = CIAF_I = 0.2 \quad (77)$$

$$CIAFT = 15 \quad (78)$$

sans dimension, avec :

$CIAFT$, le temps d'ajustement de la *ciaf*, en année;

$cfifr$, la fraction du capital indiquée par le ratio alimentaire, sans dimention;

$ciqr$, le ratio de l'investissement en capital de la qualité de vie.

A.4.2 La fraction du capital indiquée par le ratio alimentaire (*cfifr*, capital fraction indicated by food ratio)

$$cfifr(t) = tabhl(CFIFRT, fr(t), 0, 2, 0.5) \quad (79)$$

$$CFIFRT = [1, 0.6, 0.3, 0.15, 0.1] \quad (80)$$

sans dimension, avec :

$CFIFRT$, la table de la fraction du capital indiquée par le ratio alimentaire normale;

fr , le ratio de nourriture, sans dimension.

A.4.3 Le ratio de nourriture (*fr*, food ratio)

$$fr(t) = fpci(t) \times fcm(t) \times fpm(t) \times \frac{clip(FC_0, FC_1, SWT_7, t)}{FN} \quad (81)$$

$$FC_0 = FC_1 = FN = 1 \quad (82)$$

$$SWT_7 = 1970 \quad (83)$$

sans dimension, avec :

fpci, la production de nourriture lié à l'investissement en capital, en unité de nourriture / personne / an,

fcm, le multiplicateur de nourriture lié à la surpopulation, sans dimension,

fpm, le multiplicateur de nourriture lié à la pollution, sans dimension,

FC_0, FC_1, SWT_7 , les coefficients de nourriture et l'année de basculement de FC_0 vers FC_1

FN , niveau de nourriture normale, en unité de nourriture / personne / an.

A.4.4 La production de nourriture lié à l'investissement en capital (*fpci*, food potential from capital investment) et les multiplicateurs de nourriture lié à la surpopulation (*fcm*, food crowding multiplier) et lié à la pollution (*fpm*, food pollution multiplicatier)

$$fpci(t) = tabhl(FPCIT, cira(t), 0, 6, 1) \quad (84)$$

$$FPCIT = [0.5, 1, 1.4, 1.7, 1.9, 2.05, 2.2] \quad (85)$$

en unité de nourriture / personne / an, avec :

$FPCIT$ la table de production de nourriture lié à l'investissement en capital

cira, l'investissement en capital par personne dans l'agriculture, en unités de capital / personne.

$$fcm(t) = tabhl(FCMT, cr(t), 0, 5, 1) \quad (86)$$

$$FCMT = [2.4, 1, 0.6, 0.4, 0.3, 0.2] \quad (87)$$

sans dimension, avec :

$FCMT$ la table du multiplicateur de nourriture lié à la surpopulation.

$$fpm(t) = tabhl(FPMT, polr(t), 0, 60, 10) \quad (88)$$

$$FPMT = [1.02, 0.9, 0.65, 0.35, 0.2, 0.1, 0.05] \quad (89)$$

sans dimension, avec :

$FPMT$ la table du multiplicateur de nourriture lié à la pollution, sans dimension, *polr*, le ratio du niveau de pollution, sans dimension.

A.4.5 L'investissement en capital par personne dans l'agriculture (*cira*, capital investment ratio in agriculture)

$$cira(t) = cir(t) \times \frac{ciaf(t)}{CIAFN} \quad (90)$$

$$CIAFN = 0.3 \quad (91)$$

en unité de capital / personne, avec :

cir, l'investissement en capital par personnel, en unité de capital / personne,

ciaf, la fraction de l'investissement en capital par personnel consacrée à l'agriculture, sans dimension,

$CIAFN$, la fraction normale de l'investissement en capital par personnel consacrée à l'agriculture.

A.5 Variables autour de la qualité de vie

A.5.1 Le ratio de l'investissement en capital de la qualité de vie (*ciqr*, capital investment from quality ratio)

$$ciqr(t) = tabhl(CIQRT, \frac{qlm(t)}{qlf(t)}, 0, 2, 0.5) \quad (92)$$

$$CIQRT = [0.7, 0.8, 1, 1.5, 2] \quad (93)$$

sans dimension, avec :

CIQRT, la table des fractions du capital indicées par le ratio alimentaire;

qlm, la qualité de vie liée au confort matériel;

qlf, la qualité de vie liée à la nourriture.

A.5.2 La qualité de vie liée au confort (*qlm*, quality of live from material), liée à la nourriture (*qlf*, quality of live from food), liée à la pollution (*qlp*, quality of live from pollution), , liée à la surpopulation (*qlc*, quality of live from crowding)

$$qlm(t) = tabhl(QLMT, msl(t), 0, 5, 1) \quad (94)$$

$$QLMT = [0.2, 1, 1.7, 2.3, 2.7, 2.9] \quad (95)$$

sans dimension, avec :

QLMT, la table de la qualité de vie liée au confort;

msl, le niveau de vie materiel, sans dimension.

$$qlf(t) = tabhl(QLFT, fr(t), 0, 4, 1) \quad (96)$$

$$QLFT = [0, 1, 1.8, 2.4, 2.7] \quad (97)$$

sans dimension, avec :

QLFT, la table de la qualité de vie liée à la nourriture;

fr, le ratio de nourriture, sans dimension.

$$qlp(t) = tabhl(QLPT, polr(t), 0, 60, 10) \quad (98)$$

$$QLPT = [1.04, 0.85, 0.6, 0.3, 0.15, 0.05, 0.02] \quad (99)$$

sans dimension, avec :

QLPT, la table de la qualité de vie liée à la pollution,

polr, la ratio de population, sans dimension.

$$qlc(t) = tabhl(QLCT, cr(t), 0, 5, 0.5) \quad (100)$$

$$QLCT = [2, 1.3, 1, 0.75, 0.55, 0.45, 0.38, 0.3, 0.25, 0.22, 0.2] \quad (101)$$

sans dimension, avec :

QLCT, la table de la qualité de vie liée à la surpopulation;

cr, le ratio de surpopulation.

A.5.3 La qualité de vie (*ql*, quality of live)

$$ql(t) = QLS \times qlm(t) \times qlc(t) \times qlf(t) \times qlp(t) \quad (102)$$

$$QLS = 1 \quad (103)$$

en unité de satisfaction, avec :

QLS , la qualité de vie standard, en unité de satisfaction

qlm , la qualité de vie liée au confort, sans dimension,

qlc , la qualité de vie liée à la surpopulation, sans dimension,

qlf , la qualité de vie liée à la nourriture, sans dimension,

qlp , la qualité de vie liée à la pollution, sans dimension.

A.6 Variables autour de la pollution

A.6.1 Le ratio du niveau de pollution ($polr$, pollution ratio)

$$polr(t) = \frac{pol(t)}{POLS} \quad (104)$$

$$POLS = 3.6 \times 10^9 \quad (105)$$

sans dimension, avec :

pol , le niveau de pollution, en unité de pollution,

$POLS$, le niveau de pollution standard, en unité de pollution.

A.6.2 Le niveau de pollution (pol , pollution)

Variable terminale

$$\frac{\partial pol(t)}{\partial t} = polg(t) - pola(t) \quad (106)$$

$$pol(t_0) = POL_I = 0.2 \times 10^9 \quad (107)$$

en unité de pollution, avec :

$polg$, la création de pollution par an, en unité de pollution / an,

$pola$, l'absorption de pollution par an, en unité de pollution / an,

POL_I , le niveau de pollution initial en 1900, en unité de pollution.

A.6.3 La création de pollution ($polg$, pollution generation) et l'absorption de pollution ($pola$, pollution absorption)

$$polg(t) = p(t) \times clip(POLN_0, POLN_1, SWT_6, t) \times polcm(t) \quad (108)$$

$$POLN_0 = POLN_1 = 1 \quad (109)$$

$$SWT_6 = 1970 \quad (110)$$

en unité de pollution / an.

$$pola(t) = \frac{pol(t)}{polat(t)} \quad (111)$$

en unité de pollution / an, avec :

p , la population, en personne;

$POLN_0, POLN_1$, les niveaux de pollution "normaux", en unité de pollution / personne / an;

SWT_6 , l'année de basculement du niveau de pollution $POLN_0$ vers $POLN_1$;

$polcm$, le multiplicateur du niveau de pollution par personne lié l'investissement en capital par personne, sans unité);

pol , le niveau de pollution, en unité de pollution;

$polat$, la durée de désintégration d'une unité de pollution (en année).

A.6.4 La durée de désintégration d'une unité de pollution (*polat*, pollution absorption time)

$$polat(t) = tabhl(POLATT, polr(t), 0, 60, 10) \quad (112)$$

$$POLATT = [0.6, 2.5, 5, 8, 11.5, 15.5, 20] \quad (113)$$

sans année, avec :

POLATT, la table de la durée de désintégration d'une unité de pollution,
polr, le ratio du niveau de pollution, sans dimension.

A.6.5 Le multiplicateur du niveau de pollution par personne lié l'investissement en capital par personne (*polcm*, pollution from capital multiplicatif)

$$polcm(t) = tabhl(POLCMT, cir(t), 0, 5, 1) \quad (114)$$

$$POLCMT = [0.05, 1, 3, 5.4, 7.4, 8] \quad (115)$$

sans année, avec :

POLCMT, la table du multiplicateur du niveau de pollution par personne lié l'investissement en capital par personne,
cir, l'investissement en capital par personne, en unité de capital / personne.

B Le modèle World3

Le modèle World3 [Meadows et al.(1972)Meadows, Meadows, Randers, and Behrens] est un peu plus fin que le modèle Worl2 et introduit plus de variables intermédiaires, le graphe des interactions est représenté à la figure 8. Pour récupérer les équations du modèle, on peut consulter le rapport de stage [Jochaud du Plessix(2019)] ou me consulter.

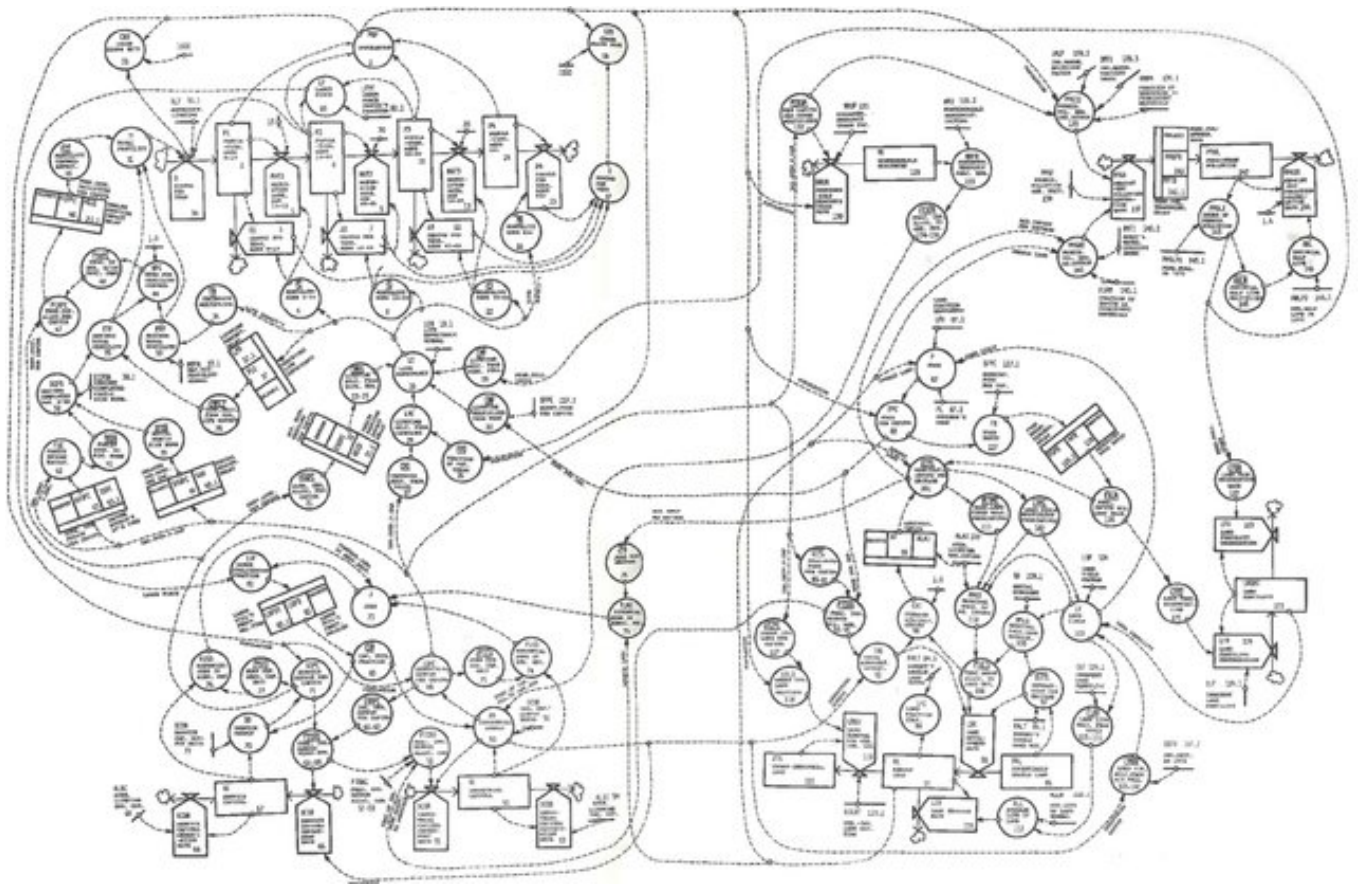


Figure 8: . Schéma des interactions du modèle World3 [Meadows et al.(1972)Meadows, Meadows, Randers, and Behrens] [image issue du rapport]