HAL open science

Lois limites dans le problème des réseaux. I. Le cas des boîtes

Julien Trevisan

▶ To cite this version:

Julien Trevisan. Lois limites dans le problème des réseaux. I. Le cas des boîtes. 2021. hal-03221749

HAL Id: hal-03221749
https://hal.science/hal-03221749v1

Preprint submitted on 9 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Lois limites dans le problème des réseaux.
I. Le cas des boîtes.

Julien Trevisan

9 mai 2021

Résumé

We study the error of the number of unimodular lattice points that fall into a dilated and translated parallelogram. By using an article from Skriganov, we see that this error can be compared to an ergodic sum that involves the discrete geodesic flow over the space of unimodular lattices. With the right normalization, we show, by using tools from a previous work of Fayad and Dolgopyat, that a certain point process converges in law towards a Poisson process and deduce that the ergodic sum converges towards a Cauchy centered law when the unimodular lattice is distributed according to the normalized Haar measure. Strong from this experience, we apply the same kind of approach, with more difficulties, to the study of the asymptotic behaviour of the error and show that this error, normalized by $\log(t)$ with t the factor of dilatation of the parallelogram, also converges in law towards a Cauchy centered law when the dilatation parameter tends to infinity and when the lattice and the vector of translation are random. In a next article, we will show that, in the case of a ball in dimension superior or equal to 2, the error, normalized by $t^{\frac{d-1}{2}}$ with t the factor of dilatation of the ball, converges in law and the limit law admits a moment of order 1.

Résumé

On étudie l'erreur commise lorsque l'on estime le nombre de points d'un réseau unimodulaire qui se trouvent dans un parallélogramme dilaté et translaté par son aire. À l'aide d'un des travaux de Skriganov, on voit que cette erreur peut être vue comme une somme ergodique portant sur le flot géodésique discret sur l'espace des réseaux unimodulaires. En normalisant correctement et en utilisant des outils d'un travail de Fayad et Dolgopyat, on montre qu'un certain processus converge en loi vers un processus de Poisson. On en déduit que la somme ergodique converge en loi vers une loi de Cauchy centrée lorsque le réseau est distribué selon la mesure de Haar normalisée. Fort de cette expérience, on applique le même type d'approche, avec plus de difficultés, pour étudier le comportement asymptotique de l'erreur et on montre que l'erreur, normalisée par $\log(t)$ avec t le paramètre de dilatation du parallélogramme, converge en loi vers une loi de Cauchy centrée quand le paramètre de dilatation tend vers l'infini et lorsque le réseau est distribué selon la mesure de Haar normalisée et lorsque le vecteur de translation est aléatoire. Dans un prochain article, nous démontrerons que, dans le cas d'une boule de dimension supérieure ou égale à 2, l'erreur, normalisée par $t^{\frac{d-1}{2}}$ avec t le facteur de dilatation de la boule, converge en loi et la loi limite admet un moment d'ordre 1.

1 Introduction

On va s'intéresser dans ce papier à un cas particulier de l'estimation du nombre de points d'un réseau qui tombent dans un ensemble donné. Ce problème a une origine ancienne dans la mesure où le fameux problème du cercle de Gauss s'y rapporte.
Soit $d \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Soient $X \in \mathbb{R}^d$ et L un réseau de $\mathbb{R}^d$ et P un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$ de mesure strictement positive et finie. On aimerait évaluer le cardinal suivant quand $t \to \infty$:

$$N(tP + X, L) = |(tP + X) \cap L|.$$

Sous certaine condition de régularité de l'ensemble P, on peut montrer que :

$$N(tP + X, L) = t^d \frac{\mathrm{Vol}(P)}{\mathrm{Covol}(L)} + o(t^d).$$

Il est donc naturel de s'intéresser à l'erreur commise :

$$\mathcal{R}(tP + X, L) = N(tP + X, L) - t^d \frac{\mathrm{Vol}(P)}{\mathrm{Covol}(L)}.$$

Dans le cas où P est le disque unité $\mathbb{D}^2$, la conjecture de Hardy donnée dans [3] stipule qu'on devrait avoir, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathcal{R}(tD^2, \mathbb{Z}^2) = O(t^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

Le meilleur résultat dans cette direction a été établi par Iwaniec et Mozzchi dans [4]. Ils ont prouvé que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathcal{R}(tD^2, \mathbb{Z}^2) = O(t^{\frac{7}{11}+\epsilon}).$$

Dans le cas où P est un polytope convexe et où $L \in \mathscr{S}_d$ (l'espace des réseaux unimodulaires de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire l'espace des réseaux de covolume 1) est typique, Skriganov a réussi à relier $\mathcal{R}$ à une somme ergodique qui a donné, en particulier, l'estimation suivante :

Théorème ([9])**.** *Pour presque tout $L \in \mathscr{S}_d$, pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\max_{X \in \mathbb{R}^d} |\mathcal{R}(tP + X, L)| = O(\log(t)^{d-1+\epsilon})$$

où $\mathscr{S}_d$ est munie de l'unique mesure de probabilité μ_d qui soit de Haar.

Notons que ce théorème n'est pas valable pour tout réseau $L \in \mathscr{S}_d$. Il suffit de considérer le réseau $L = \mathbb{Z}^d$ et pour P un hypercube centré en 0 dont les côtés sont parallèles aux axes. L'erreur maximale est dans ce cas de l'ordre de t^{d-1}.
En suivant l'approche de Kesten dans [5] et dans [6], nous nous intéressons au comportement asymptotique de $\mathcal{R}$ quand $L \in \mathscr{S}_2$ et $X \in \nvDash^d/L$ sont aléatoires.
Plus formellement, on se $\tilde{\mu}_2$ une mesure de probabilité absolument continue par rapport à μ_2, de densité régulière et bornée sur $\mathscr{S}_2$ et où μ_2 désigne la mesure de Haar normalisée sur $\mathscr{S}_2$, en appelant λ_2 la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{R}^2/L$, on se donne aussi $\tilde{\lambda}_2$ une mesure de probabilité absolument continue par rapport à λ_2, de densité régulière sur $\mathbb{R}^2/L$.
Nous allons alors montrer le résultat suivant en supposant que P est un parallélogramme :

Théorème 1. *Lorsque $L \in \mathscr{S}_2$ est distribué selon la mesure $\tilde{\mu}_2$ et X est distribué selon $\tilde{\lambda}_2$ alors on a :*

$$\frac{\mathcal{R}(t, P, X, L)}{\log(t)} \underset{t\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{C}_c$$

où $\overset{\mathcal{L}}{\to}$ signifie que la convergence a lieu en loi et où $\mathcal{C}_c$ désigne une loi de Cauchy centrée.

Suivant Skriganov, il nous a semblé judicieux pour étudier cette erreur $\frac{\mathcal{R}}{\log(t)}$, et cela a été fructueux, de s'intéresser à l'étude de la distribution des quantités : $(\|\delta_t L\|^{-2})_{t\in[0,T-1]}$ quand $T \to \infty$, où on a posé $\delta_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ et où $\|L\|$, pour tout réseau L, est défini par :

$$\|L\| = \inf\{\|l\| | l \in L - \{0\}\}$$

avec $\|X\|$ qui désigne la norme euclidienne habituelle de $X \in \mathbb{R}^2$.
Plus précisément, lorsque l'on commence à étudier la convergence asymptotique de $\frac{\mathcal{R}}{\log(t)}$, on voit que l'on est ramené à l'étude d'une somme finie sur $l \in L$ dont les termes sont des fractions. Heuristiquement d'ailleurs le numérateur se comporte comme une fonction qui oscille de plus en plus vite dans un segment centré en 0 tandis que le dénominateur comporte un terme de la forme $Num(l)\log(t) = l_1 l_2 \log(t)$. Les termes ne vont donc pas être négligeables seulement lorsque $Num(l)$ sera petit. Or, dans ce cas-là, $Num(l)$ peut être vu comme un $\|\delta_t L\|^2$.
Ainsi, un bon indicateur pour savoir si $\frac{\mathcal{R}}{\log(t)}$ converge en loi est de savoir si :

$$S(\omega, L, T) = \frac{1}{T} \sum_{t\in[0,T-1]} \frac{\theta_t(\omega)}{\|\delta_t L\|^2}$$

converge en loi quand $T \to \infty$ (T joue ici le rôle de $\log(t)$) avec $(\omega, L) \in \Omega \times \mathscr{S}_2$ où $(\Omega, \mathbb{P}_1)$ est un espace probabilisé et les θ_t sont des variables aléatoires réelles à support compact, symétriques, identiquement distribuées, indépendantes entre elles.
On va ainsi montrer d'abord le théorème suivant avant de montrer le théorème 1 :

Théorème 2. *Lorsque L est distribué selon la loi de probabilités μ_2 et ω selon $\mathbb{P}_1$,*

$$S(\omega, L, T)$$

converge, quand $T \to \infty$, vers une loi de Cauchy centrée.

Dans la suite, nous présenterons seulement la démonstration du théorème 1 et du théorème 7 pour $d = 2$, la preuve étant plus simple. Pour ce faire, dans la prochaine section, nous exposerons quelques préliminaires de probabilités. Ensuite, nous rappellerons quelques résultats sur l'espace des réseaux. On démontrera ensuite le théorème 7 qui est pertinent au vu de ce que nous avons énoncé précédemment et qui nous donnera d'ailleurs une idée de la démarche qu'il faudra suivre pour démontrer le théorème 1. Puis nous traiterons un cas simplifié issu de l'étude de $\mathcal{R}$ (mais qui sera toutefois plus compliqué que l'étude de $S(\omega, L, T)$ comme nous le verrons). Nous terminerons enfin l'étude de $\mathcal{R}$ et conclurons en ouvrant sur un autre problème connexe.

2 Préliminaires de probabilités

Les nuages de points qui sont des processus de Poisson joueront un rôle essentiel dans nos études de convergence. Nous allons donc faire quelques rappels de base à ce sujet. Nous allons essentiellement suivre l'exposition faite dans [1].
Une variable aléatoire N a une distribution de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si pour tout entier $k \geqslant 0$, $P(N = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Cette loi sera noté $\mathcal{P}(\lambda)$. On dispose alors des résultats suivants :

— Si $N_1, \ldots, N_m$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent des distributions de Poisson de paramètres respectifs λ_j alors $N = \sum_{j=1}^m N_j$ admet une distribution de Poisson de paramètre $\sum_{j=1}^m \lambda_j$.

— Inversement, si on se donne N points distribués selon une distribution de Poisson de paramètre λ, que l'on colore chaque point indépendamment avec une couleur $j \in \{1, \cdots, m\}$ choisie avec un probabilité p_j (et donc $\sum_{j=1}^m p_j = 1$) et que l'on appelle N_j le nombre de points de la couleur j obtenus alors les N_j sont indépendants et suivent des distributions de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_j = p_j\lambda$.

Soit $(\mathbf{X}, \mathbf{m})$ un espace mesuré. On appelle processus de Poisson sur cet espace un nuage de points aléatoire sur $\mathbf{X}$ tel que si $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_m$ sont des ensembles (mesurables) disjoints et si N_j est le nombre de poins qui tombent dans $\mathbf{X}_j$ alors les N_j sont des variables aléatoires qui admettent pour lois respectives $\mathcal{P}(\mathbf{m}(\mathbf{X}_j))$. Cette définition est cohérente grâce au premier fait énoncé. Nous noterons $\{x_j\} \sim \mathfrak{P}(\mathbf{X}, \mathbf{m})$ pour indiquer que $\{x_j\}$ est un processus de Poisson de paramètre $(\mathbf{X}, \mathbf{m})$. Si $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^d$ et si $\mathbf{m} \ll \lambda_d$ (la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$) alors $\mathbf{m}$ admet une densité par rapport à λ_d et cette densité sera désignée comme étant l'intensité du processus de Poisson.

On dispose ainsi du lemme suivant, qui nous sera utile par la suite :

Lemme 1. *(a) Si $\{\theta_j\} \sim \mathfrak{P}(\mathfrak{X}, \mathbf{m})$ et $\{\theta'_j\} \sim \mathfrak{P}(\mathfrak{X}, \mathbf{m}')$ sont indépendants alors*

$$\{\theta_j\} \cup \{\theta'_j\} \sim \mathfrak{P}(\mathfrak{X}, \mathbf{m} + \mathbf{m}').$$

(b) Si $\{\theta_j\} \sim \mathfrak{P}(\mathfrak{X}, \mathbf{m})$ et $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ est une application mesurable alors

$$\{f(\theta_j)\} \sim \mathfrak{P}(\mathfrak{Y}, f^{-1}\mathbf{m}).$$

(c) Soient $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} \times Z$, $\mathbf{m} = \nu \times \lambda$ où λ est une mesure de probabilité sur Z. Alors $\{(\theta_j, \Gamma_j)\} \sim \mathfrak{P}(\mathfrak{X}, \mathbf{m})$ si et seulement si $\{\theta_j\} \sim \mathfrak{P}(\mathfrak{Y}, \nu)$ et Γ_j sont des variables aléatoires indépendantes de $\{\theta_j\}$ et entre elles et toutes sont distribuées selon λ.

(d) Si en (c) $\mathfrak{Y} = Z = \mathbb{R}$ alors $\tilde{\theta} = \{\Gamma_j\theta_j\}$ est un processus de Poisson. Si $\{\theta_j\}$ admet comme mesure $f(\theta)d\theta$ alors $\tilde{\theta}$ admet comme mesure $\tilde{f}(\theta)d\theta$ où

$$\tilde{f}(\theta) = \mathbb{E}_\Gamma(f(\frac{\theta}{\Gamma})\frac{1}{|\Gamma|}).$$

Un autre lemme qui nous sera utile est le suivant :

Lemme 2. *Si $\{\Xi_i\}$ suit un processus de Poisson sur $\mathbb{R}^+$ d'intensité constante $C > 0$ et si $\{\Gamma_i\}$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes (entre elles et avec les Ξ_i) identiquement distribuées, de lois de probabilité symétriques à support compact alors*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\rho} \sum_{\Xi_i < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\Gamma_i}{\Xi_i}$$

est distribuée selon la loi de Cauchy standard $\mathcal{C}(0, 1)$ où $\rho = \frac{C}{2}\mathbb{E}(|\Gamma|)\pi$.

Une variante de celui-ci, qui nous sera aussi utile est la suivante :

Lemme 3. *Si $\{\Xi_i\}$ suit un processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ d'intensité constante $C > 0$ et si $\{\Gamma_i\}$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes (entre elles et avec les Ξ_i) identiquement distribuées, de lois de probabilité symétriques à support compact alors*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\rho} \sum_{|\Xi_i| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\Gamma_i}{\Xi_i}$$

est distribuée selon la loi de Cauchy standard $\mathcal{C}(0, 1)$ où $\rho = C\mathbb{E}(|\Gamma|)\pi$.

Une preuve de ces deux derniers lemmes peut être trouvée dans [2]. On déduit de la définition de la convergence en loi les deux lemmes suivants :

Lemme 4. *Si $\{\Xi_i^T\}$ tend, quand $T \to \infty$, vers un processus de Poisson sur $\mathbb{R}^+$ d'intensité constante $C > 0$ et si $\{\Gamma_i^T\}$ tendent vers des variables aléatoires réelles indépendantes entre elles, identiquement distribuées, de lois de probabilité symétriques à support compact et indépendantes du processus limite de $\{\Xi_i^T\}$ alors*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\rho} \sum_{\Xi_{i,T} < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\Gamma_{i,T}}{\Xi_{i,T}}$$

est distribuée selon la loi de Cauchy standard $\mathcal{C}(0,1)$ où $\rho = \frac{C}{2}\mathbb{E}(|\Gamma|)\pi$.

Lemme 5. *Si $\{\Xi_{i,T}\}$ tend, quand $T \to \infty$, vers un processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ d'intensité constante $C > 0$ et si $\{\Gamma_i^T\}$ tendent vers des variables aléatoires réelles indépendantes entre elles, identiquement distribuées, de lois de probabilité symétriques à support compact et indépendantes du processus limite de $\{\Xi_i^T\}$ alors*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\rho} \sum_{|\Xi_{i,T}| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{\Gamma_{i,T}}{\Xi_{i,T}}$$

est distribuée selon la loi de Cauchy standard $\mathcal{C}(0,1)$ où $\rho = C\mathbb{E}(|\Gamma|)\pi$.

Pour pouvoir appliquer ces deux lemmes, il nous faudra donc prouver qu'à l'infini, des nuages de points, adaptées, se comportent comme des processus de Poisson. Pour ce faire, un outil qui nous sera particulièrement utile est le théorème 6.1 démontré dans [1] qui est particulièrement adapté quand on a affaire à des flots qui mélangent suffisamment rapidement (vitesse exponentielle, par exemple). Ce sera notre cas comme on le verra un peu plus loin. On rappelle maintenant l'énoncé de ce théorème.
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On désigne par $\mathbb{E}$ l'espérance relativement à $\mathbb{P}$.
On se donne $\lambda_1(x) = ax$ une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}$.
Soit $(\mathbf{X}, \mathbf{m})$ un espace mesurable. Soit $\mathbf{Q}$ une collection dénombrable de partitions finies de $\mathbf{X}$ tel que $\mathbf{Q}$ converge vers la partition ponctuelle.
Pour tout M, on considère une suite $\{\xi_t^M\}_{t\in[0,M]}$ de variables aléatoires prenant des valeurs entières positives et une suite $\{\nu_t^M\}_{t\in[0,M]}$ de variable aléatoires de Ω dans $\mathbf{X}$. On pourra imaginer, par exemple, que ξ_t^M est une fonction qui indique si un flot mélangeant, à l'instant t, rentre dans une boule de rayon $\frac{1}{\sqrt{M}}$ (situé à l'infini de l'espace) et ν_t^M indique jusqu'où le flot est rentré à cet instant.
Pour toute partition $Q = (K_1, \cdots, K_P) \in \mathbf{Q}$, on suppose que ξ_t^M peut s'écrire $\xi_t^M = \sum_{p=1}^P \xi_{t,p}^M$ où $\xi_{t,p}^M$ prend des valeurs dans les entiers naturels et sur l'ensemble $\{\xi_t^M = 1\}$, $\xi_{t,p}^M$ vérifie :

$$\xi_{t,p}^M = \mathbf{1}_{\nu_t^M \in K_p}.$$

On pose $\eta_t^M = \mathbf{1}_{\xi_t^M = 1}$ et $\eta_{t,p}^M = \mathbf{1}_{\xi_{t,p}^M = \xi_t^M = 1}$.
Toutes les variables dépendant de M, dans la suite on omettra pour simplifier la lettre M.
Dans toute cette partie, quand on utilise la notation $Y = \mathcal{O}(X)$ cela signifie que $|Y| \leqslant C|X|$ où C dépend éventuellement de $\mathbf{Q}$ mais pas de M, t ou encore de $\overline{\delta}$ (introduit un peu plus loin).
On suppose que pour tout M fixé, une suite de partitions F_t, $t \in \Pi$ de $(\Omega, \mathbb{P})$ est donnée. Pour $\omega \in \Omega$, on appelle $F_t(\omega)$ l'élément de F_t qui possède ω. On appelle $\mathcal{F}_t$ la σ-algèbre engendrée par F_t.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées : il existe $R > 0$ (qui ne dépend pas de M) et un ensemble mesurable E tel que

$$\mathbb{P}(E^c) = \mathcal{O}(M^{-100})$$

et

— (h1) Pour tout $t \in [0, M]$,
$$\mathbb{E}(\xi_t) = \mathcal{O}(M^{-1})\ ;$$

— (h2) Pour tout $t \in [0, M]$,
$$\mathbb{P}(\xi_t > 1) = \mathcal{O}(M^{-2})\ ;$$

— (h3) Pour tout $t \neq t' \in [0, M]$,
$$\mathbf{P}(\xi_t \geqslant 1, \xi_{t'} \geqslant 1) = \mathcal{O}(M^{-2})\ ;$$

— (h4) Pour tout $t, t' \in [0, M]$, où $\lambda_1(t) > \lambda_1(t') + R\log(M)$, pour tout $p \in [|1, P|]$ et pour tout $\omega \in E$:
$$\text{(h4a) } \mathbb{E}(\xi_t\ |\mathcal{F}_{t'})(\omega) = \frac{\mathbf{cm}(\mathbf{X})}{M} + \mathcal{O}(M^{-2})$$
$$\text{(h4b) } \mathbb{E}(\xi_{t,p}\ |\mathcal{F}_{t'})(\omega) = \frac{\mathbf{cm}(K_p)}{M} + \mathcal{O}(M^{-2})$$
$$\text{(h4c) } \mathbb{E}(\eta_{t,p}\ |\mathcal{F}_{t'})(\omega) = \frac{\mathbf{cm}(K_p)}{M} + \mathcal{O}(M^{-2})$$

— (h5) Pour $t, \bar{t} \in [0, M]$ où $\lambda_1(\bar{t}) > \lambda_1(t) + R\log(M)$, pour tout $p \in [1, P]$, pour tout $\omega \in E$,
$$\xi_{t,p} \textit{ est constant sur } F_{\bar{t}}(\omega)\ ;$$

— (h6) Les algèbres $\{\mathcal{F}_t\}$ ont une propriété de type filtration au sens où pour $t, \bar{t} \in [0, M]$, avec $\lambda_1(\bar{t}) > \lambda_1(t) + R\log(M)$, pour tout $\omega \in E$,
$$F_{\bar{t}}(\omega) \subset F_t(\omega).$$

Théorème 3 ([1])**.** *Lorsque* $(\lambda_1, \{\xi_t\}, \{\nu_t\})$ *vérifient les hypothèses (h1) jusqu'à (h6), le nuage de points*
$$\{\nu_t^M, \frac{t}{M}\}_{\xi_t^M = 1,\ t \in [0,M]}$$
converge lorsque $M \to \infty$ *vers un processus de Poisson d'intensité* $\mathbf{c}$ *sur* $(\mathbf{X} \times J, \mathbf{b} \times Leb)$.

En rajoutant des hypothèses, on peut avoir une conclusion plus forte qui nous sera utile pour obtenir, entre autres, des variables aléatoires réelles équidistribuées indépendantes entre elles, et vis-à-vis d'un processus de Poisson ad hoc, et ceci grâce au lemme 1. Précisons ces hypothèses et cette conclusion.
Avec les notations du théorème 3, supposons que l'on dispose de $\hat{\lambda}(t)$ une forme affine telle que $\hat{\lambda}(t) > \lambda_1(t)$ (où λ_1 peut maintenant être une forme affine non constante au lieu de linéaire et non nulle) sur $[0, M]$.
Supposons que pour tout M on dispose d'une séquence de ζ_t^M à valeurs dans $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{m}})$, un espace probabilisé. Cet espace est d'ailleurs supposé doté d'une collection $\tilde{\mathbf{Q}}$ dénombrable de partitions finies de $\tilde{\mathbf{X}}$ qui converge vers la partition ponctuelle. Supposons enfin que pour chaque élément $\tilde{Q} = (\tilde{K}_1, \cdots, \tilde{K}_P) \in \tilde{\mathbf{Q}}$, on dispose de $\tilde{E}$ tel que $\mathbb{P}(\tilde{E}^c) = O(M^{-100})$ et tel que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(h7) Il existe une suite $\nu_M \to 0$ quand $M \to \infty$ et $R > 0$ tels que pour tout $t, t' \in \Pi_M$ qui satisfont $\hat{\lambda}(t) \geqslant \lambda_1(t') + R\log(M) \geqslant \lambda_1(t) + 2R\log(M)$, alors pour tout $\omega \in \tilde{E}$ tel que $\xi_t(\omega) = 1$,
$$|\mathbb{P}(\zeta_t^M \in \tilde{K}_p | \mathcal{F}_{t'})(\omega) - \tilde{\mathbf{m}}(\tilde{K}_p)| \leqslant \nu_M.$$

(h8) Pour $t, \bar{t} \in \Pi_M$ où $\lambda_1(\bar{t}) > \hat{\lambda}(t) + R\log(M)$ pour tout $p \in [|1, P|]$, pour tout $\omega \in \tilde{E}$ tel que $\xi_t(\omega) = 1$,

$$\mathbf{1}_{\zeta_t \in \tilde{K}_p} \text{ est constant sur } F_{\bar{t}}(\omega).$$

On dispose alors du résultat suivant, plus fort que celui du théorème 3 :

Théorème 4 ([1])**.** *Lorsque* $(\lambda_1, \hat{\lambda}, \{\xi_t\}, \{\nu_t\}, \{\zeta_t\})$ *vérifient les hypothèses (h1) jusqu'à (h8), le nuage de points*

$$\{\nu_t^M,\ \zeta_t^M,\ \frac{t}{M}\}_{\xi_t^M=1,\ t\in\Pi_M}$$

converge quand $M \to \infty$ *vers un processus de Poisson d'intensité* $\mathbf{c}$ *sur*

$$(\mathbf{X} \times \tilde{\mathbf{X}} \times J,\ \mathbf{m} \times \tilde{\mathbf{m}} \times Leb).$$

Remarquons que dans ces deux théorèmes, on peut remplacer $[0, M]$ par $[-M, 0]$, cela ne change rien à leurs validités. On utilisera cette remarque dans la section 5.

3 Préliminaires sur l'espace des réseaux

Dans cette section on rappelle quelques résultats sur l'espace des réseaux unimodulaires et l'action du flot géodésique sur celui-ci. Ils proviennent essentiellement de [9] et [1].

Nous avons dit précédemment que l'espace des réseaux unimodulaires en dimension d est noté $\mathscr{S}_d$. Autrement dit, on a l'égalité : $\mathscr{S}_d = SL_d(\mathbb{R})/SL_d(\mathbb{Z})$.

Définition 1. *Soit* $L \in \mathscr{S}_d$*. On définit* $L^\perp \in \mathscr{S}_d$ *le réseau dual de* L *de la manière suivante :*

$$L^\perp = \{l \in \mathbb{R}^d \mid \forall k \in L,\ < k, l > \in \mathbb{Z}\}$$

où $< \cdot, \cdot >$ *désigne le produit scalaire usuel.*

Cette définition intervient en particulier lorsque l'on commence à manipuler des séries de Fourier.
On a $\mathscr{S}_d = SL_d(\mathbb{R})/SL_d(\mathbb{Z})$ et $\mathscr{S}_d$ est donc muni d'une structure de groupe de Lie. Cependant, pour $d \geqslant 2$, cet espace n'est pas compact. Mais il admet tout de même une mesure de Haar qui est de probabilités et que l'on note μ_d. Elle est donc, en particulier, unimodulaire. On peut donc faire de la dynamique mesuré sur cet espace.

Définition 2. *On dit qu'un sous-groupe* H *de* $SL_d(\mathbb{R})$ *est ergodique (pour l'action naturelle sur* $\mathscr{S}_d$*) si tout ensemble mesurable* H*-invariant de* $\mathscr{S}_d$ *est de mesure nulle ou son complémentaire l'est.*

On dispose du théorème suivant (dit de Moore) :

Théorème 5. *Un sous-groupe* H *est ergodique si, et seulement si,* H *n'est contenu dans aucun sous-groupe compact de* $SL_d(\mathbb{R})$*.*

En particulier, en posant $\Gamma = \{(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d \mid t_1 + \cdots + t_d = 0\}$, le sous-groupe $\Delta = \{\mathrm{Diag}(e^{t_1}, \cdots, e^{t_d}) \mid (t_1, \cdots, t_d) \in \mathbb{Z}^d \cap \Gamma\} \subset SL_d(\mathbb{R})$ est ergodique. Ainsi, l'action du flot géodésique (discrétisé) $(\delta, L) \in \Delta \times \mathscr{S}_d \longmapsto \delta L$ est ergodique. Posons :

$$\Delta_r = \{\mathrm{Diag}(e^{t_1}, \cdots, e^{t_d}) \mid (t_1, \cdots, t_d) \in \mathbb{Z}^d \cap \Gamma \text{ tel que } \|(t_1, \cdots, t_d)\| < r\}.$$

On appelle aussi $n_r = |\Delta_r|$ et on note que la suite d'ensembles (Δ_r) est croissante et tend vers Δ. De l'ergodicité de Δ, on tire le théorème suivant (dit théorème ergodique individuel) :

Théorème 6. *Soit $\psi \in L^1(\mathscr{S}_d, \mu_d)$. Alors pour presque tout $L \in \mathscr{S}_d$, on a :*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{n_r} \sum_{\delta \in \Delta_r} \psi(\delta L) = \int_{\mathscr{S}_d} \psi(L) d\mu_d(L).$$

Dans [9], le lemme suivant, qui donne des exemples de fonctions intégrables sur $\mathscr{S}_d$ et qui nous sera utile, est démontré :

Lemme 6. *Pour tout $\epsilon > 0$, $L \longmapsto \|L\|^{-d+\epsilon}$ est intégrable sur $\mathscr{S}_d$.*

Nous avons encore besoin de définir quelques nombres caractéristiques d'un réseau $L \in \mathscr{S}_d$.

Définition 3. *Soit $k \in \{1, \cdots, d\}$. On pose :*

$$\|L\|_k = \inf\{r > 0 \mid B_f(0, r) \text{ contient une famille libre de vecteurs de } L \text{ de } k \text{ vecteurs}\}$$

où $B_f(0, r)$ désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon r relativement à $\|\|$. En particulier, on a : $\|L\|_1 = \|L\|$.

Définition 4. *Un vecteur l d'un réseau L sera dit premier si pour tout $l' \in L$, l'égalité $l = kl'$ avec $k \in \mathbb{Z}$ implique que $k = \pm 1$.*

Tout vecteur l tel que $\|l\| = \|L\|_k$, pour $k \in \{1, \cdots, d\}$, est un vecteur premier et pour tout $\delta \in \Delta$, si l est premier, δl est premier.

Soient f, f_1, f_2 des fonctions C^∞ par morceaux à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $L \in \mathscr{S}_d$:

$$F(L) = \sum_{\substack{l \in L \\ l \text{ premier}}} f(l) \text{ et } \overline{F}(L) = \sum_{\substack{l_1 \neq \pm l_2 \in L \\ l_1,\, l_2 \text{ premiers}}} f_1(l_1) f_2(l_2).$$

Définition 5. *F est appelée la transformée de Siegel de f.*

On appelle ζ la fonction zêta de Riemann.
Alors, on dispose des identités (dites respectivement de Siegel et de Rogers) suivantes :

Lemme 7 (voir [7], [10])**.**

$$\int_{\mathscr{S}_d} F d\mu_d = \zeta(d)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d \ ,$$

$$\int_{\mathscr{S}_d} \overline{F} d\mu_d = \zeta(d)^{-2} \int_{\mathbb{R}^d} f_1 d\lambda_d \int_{\mathbb{R}^d} f_2 d\lambda_d \text{ et on en déduit}$$

$$\int_{\mathscr{S}_d} F^2 d\mu_d = \zeta(d)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f^2 d\lambda_d + \zeta(d)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) f(-x) dx + \zeta(d)^{-2} (\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d)^2.$$

La formule de Rogers peut bien sûr se généraliser à un produit fini quelconque de fonctions. Supposons pour l'heure $d = 2$. On déduit, des formules de Rogers et de Siegel, le lemme suivant qui est une des bases de notre réflexion :

Lemme 8. *Pour tout $a > 0$ assez grand,*

$$\mu_2(\{L \in \mathscr{S}_2 | \|L\|^{-2} > a\}) = Ca^{-1}$$

où on a posé $C = \frac{1}{2}c_1\pi = \frac{3}{\pi}$.

Pour démontrer ce lemme nous avons besoin de deux résultats préliminaires.

Lemme 9. *Soient l_1, l_2 deux vecteurs de L premiers. Supposons qu'ils voient leurs premières coordonnées respectives être positives. Supposons que l'un des deux voit sa norme 2 être égale à $\|L\|$. Alors, s'ils appartiennent à une même droite passant par 0, ils sont égaux.*

Démonstration. Supposons que $l_1 \neq l_2$ et que, par exemple, $\|l_1\| = \|L\|$. Alors, on a $l_2 = kl_1$ avec $k \geqslant 0$, $k \notin \mathbb{N}$ car l_2 est premier. Soit dit en passant, comme $\|L\| = \|l_1\|$, nécessairement $k > 1$. On pose $v = l_2 - \lfloor k \rfloor l_1$. Alors, on a $\|v\| < \|l_1\|$, ce qui est exclu. □

De cette preuve, on en déduit que l'on n'a pas besoin de supposer $d = 2$.
On en déduit alors le lemme suivant :

Lemme 10. *Si $\|L\| < 1$ alors $\|L\|$ est seulement atteint en un vecteur premier l et son opposée.*

Démonstration. Supposons que $\|L\|$ soient atteints en deux vecteurs l_1 et l_2. Ils sont nécessairement premiers et quitte à prendre leurs opposés, on peut supposer que leur première coordonnée est positive. Le lemme 9 donne alors que soit $l_1 = l_2$, soit (l_1, l_2) forme une famille libre de $\mathbb{R}^2$. On a donc dans ce dernier cas que $\|L\|_2 = \|L\|_1$.
Or, on a : $\mathrm{covol}(L) = \|L\|_1\|L\|_2 \sin(\alpha)$ où α est l'angle non-orienté entre deux vecteurs de L h, k tels que h, k voient leur première coordonnée être positive et $\|h\| = \|L\|_1$ et $\|k\| = \|L\|_2$.
Ainsi, on obtient : $\mathrm{covol}(L) < 1$, ce qui est exclu et donc $l_1 = l_2$. □

Démontrons maintenant le lemme 8 :

Démonstration du lemme 8. On se donne $a > 0$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = \mathbf{1}_{B_f(0,a^{-1/2})}(x)$. On appelle F la transformée de Siegel associée à f. Pour tout $a > 0$ assez grand, on a pour tout $L \in \mathscr{S}_2$, $F(L) \in \{0, 2\}$. En effet, pour $a > 0$ assez grand, $a^{-\frac{1}{2}} < 1$ et donc le lemme 10 s'applique. Ainsi, on a :

$$\frac{\mathbb{E}_{\mu_{\not\neq}}(F)}{2} = \mu_2(\{L \in \mathscr{S}_2 | \|L\|^{-2} > a\}).$$

Le lemme 7 donne alors le résultat voulu. □

Notons au passage que le raisonnement fait au lemme 10 donne le lemme suivant :

Lemme 11. *Soit $L \in \mathscr{S}_2$. On suppose $\|L\| \leqslant 1$. On appelle $\|L\|_2$ le plus petit rayon r tel que $B_f(0, r)$ contient une famille libre de deux vecteurs de L. Alors, deux cas se présentent :*

— *Soit* $\|L\| = \|L\|_2$. *Dans ce cas,* $\|L\| = 1$ *et* L *a été obtenu à partir de* $\mathbb{Z}^2$ *à l'aide d'une rotation. Par ailleurs,* $\|L\|$ *est atteint exactement en* 4 *vecteurs du réseau* L.
— *Soit* $\|L\| < \|L\|_2$. *Dans ce cas,* $\|L\|$ *est atteint en exactement* 2 *vecteurs du réseau* L.

En dimension supérieure, c'est-à-dire pour $d \geqslant 3$, le lemme 8 se généralise de la manière suivante :

Lemme 12.

$$\mu_d(\{L \in \mathscr{S}_d | \|L\|^{-d} > a\}) = Da^{-1} + O(\frac{1}{a^2})$$

où on a posé $D = \frac{\zeta(d)^{-1}\, Vol(B_f(0,1))}{2}$.

Le problème, qu'il faut d'ailleurs gérer très souvent en dimension $d \geqslant 3$, est le suivant : même si $\|L\|$ est petit, cela ne signifie pas que $\|L\|_2$ est grand, contrairement à la dimension 2. Voyons la preuve.

Démonstration. On pose, comme précédemment, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f(x) = \mathbf{1}_{B_f(0,a^{-\frac{1}{d}})}(x)$. On appelle F la transformée de Siegel de f et $\overline{F}$ la fonction définie par pour tout $L \in \mathscr{S}_d$,

$$\overline{F}(L) = \sum_{\substack{e_1 \neq \pm e_2 \\ e_1, e_2 \text{premiers}}} f(e_1) f(e_2).$$

D'une part, on a, d'après le lemme 7 :

$$\mathbb{E}(F) = \zeta(d)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d. \tag{1}$$

D'où, l'on tire, par homogénéité du volume d'une boule :

$$\mathbb{E}(F) = \frac{\zeta(d)^{-1}\mathrm{Vol}(B_f(0,1))}{a}.$$

D'autre part, on a : $\mathbb{E}(F) = 2\mathbb{P}(F = 2) + \mathbb{E}(F\mathbf{1}_{F \geqslant 3})$. Or, on a : $F\mathbf{1}_{F \geqslant 3} \leqslant \overline{F}\mathbf{1}_{F \geqslant 3} \leqslant \overline{F}$.
D'où on a : $\mathbb{E}(F\mathbf{1}_{F \geqslant 3}) \leqslant \mathbb{E}(\overline{F}) = O(\frac{1}{a^2})$ d'après le lemme 7.
Ainsi, on obtient :

$$\mathbb{E}(F) = 2\mathbb{P}(F = 2) + O(\frac{1}{a^2}). \tag{2}$$

De (1) et de (2), on tire :

$$\mathbb{P}(F = 2) = \frac{\zeta(d)^{-1}\mathrm{Vol}(B_f(0,1))}{2}\frac{1}{a} + O(\frac{1}{a^2}). \tag{3}$$

Enfin, notons que

$$\mu_d(\{L \in \mathscr{S}_d | \|L\|^{-d} > a\}) = \mathbb{P}(F > 0) = \mathbb{P}(F = 2) + \mathbb{P}(F \geqslant 3)$$

et que

$$\mathbb{P}(F \geqslant 3) \leqslant \mathbb{E}(F\mathbf{1}_{F \geqslant 3}) = O(\frac{1}{a^2}).$$

Ainsi, on obtient :

$$\mu_d(\{L \in \mathscr{S}_d | \|L\|^{-d} > a\}) = \mathbb{P}(F = 2) + O(\frac{1}{a^2}).$$

D'où le résultat voulu d'après (3). □

Rappelons que pour tout $k = (k_1, \cdots, k_d)$ tels que $k_1 + \cdots + k_d = 0$, on a posé dans l'introduction $\delta_k = \mathrm{Diag}(e^{k_1}, \cdots, e^{k_d})$. Terminons maintenant cette sous-section par deux petits lemmes qui nous permettront de calculer des plus petites longueurs de réseaux.

Lemme 13. *Pour tout $L \in \mathscr{S}_d$, pour tout $k \in \Gamma$,*

$$e^{-\|k\|_\infty}\|L\| \leqslant \|\delta_k L\| \leqslant e^{\|k\|_\infty}\|L\|. \tag{4}$$

Démonstration. C'est immédiat via les définitions de δ_k et de $\|\cdot\|$. □

Le lemme 13 nous sera essentiellement utile en dimension 2. On a le lemme suivant, en dimension quelconque :

Lemme 14. *Soit $L \in \mathscr{S}_d$. On suppose que $\|L\|_2 > \|L\|_1$. On appelle l un vecteur de L tel que $\|l\| = \|L\| > 0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}^d \cap \Gamma$ tel que $\|L\|_2 > e^{2\|k\|_\infty}\|L\|_1$ on a*

$$\|\delta_k L\|_1 = \|\delta_k l\|.$$

Démonstration. Soient k, l comme dans l'énoncé du lemme. Comme $\|L\|_2 > \|L\|_1$, pour tout $h \in L - \{l, -l\}$, h premier, $\|h\| \geqslant \|L\|_2$ d'après le lemme 9. Ainsi, on a :

$$\|\delta_k h\| \geqslant e^{-\|k\|_\infty}\|h\| \geqslant e^{-\|k\|_\infty}\|L\|_2.$$

Or, par hypothèse, on a

$$e^{-\|k\|_\infty}\|L\|_2 > e^{\|k\|_\infty}\|L\|_1.$$

Ainsi, on obtient :

$$\|\delta_k h\| > e^{\|k\|_\infty}\|L\|_1 \geqslant \|\delta_k l\|.$$

D'où le lemme. □

En dimension 2, on a une variante de ce lemme qui repose sur le lemme 13 :

Lemme 15. *Soit $L \in \mathscr{S}_2$. On suppose que $\|L\| < 1$. On appelle l un vecteur de L tel que $\|l\| = \|L\|$. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $e^{|k|}\|L\| < 1$,*

$$\|\delta_k L\| = \|\delta_k l\|.$$

Définition 6. *Soit $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. La quantité $Num(x)$ est définie par :*

$$Num(x) = \prod_{i=1}^{d} x_i.$$

Pour $L \in \mathscr{S}_d$, pour $r \geqslant \|L\|$, on définit

$$\nu(L, r) = \inf\{Num(l) \mid 0 < \|l\| < r\}.$$

On dit qu'un réseau L est faiblement admissible si pour tout $r \geqslant \|L\|$, $\nu(L, r) > 0$.

On peut noter au passage que $\nu(L, \cdot)$ est une fonction décroissante. Dans [9] (voir Lemme 4.5), la proposition suivante est démontrée :

Proposition 1 ([9]). *Pour tout $\beta > 0$, pour presque tout $L \in \mathscr{S}_d$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $l \in L - \{0\}$,*

$$|Num(l)| \geqslant C|\log(\|l\|)|^{1-d-\beta}.$$

En particulier, presque tout réseau $L \in \mathscr{S}_d$ est faiblement admissible.

Cette proposition signifie que de manière générique, si un vecteur $l \in L$ devient grand, il ne pourra pas se rapprocher trop vite des axes de coordonnées. De manière équivalente, cela veut dire que la vitesse de divergence vers l'infini de $(\delta_t L)_{t\in\Gamma_r}$ n'est pas trop importante génériquement. Skriganov démontre cette proposition en utilisant le lemme de Borel-Cantelli.

Intéressons-nous, pour finir cette section, au flot géodésique sur $\mathscr{S}_d$ et à un aspect plus "différentiel" de celui-ci (alors qu'avant on s'est intéressé à des choses plus "métriques"). Les résultats qui seront énoncés le seront en dimension 2 et se généralise en dimension supérieure. Gardons tout d'abord en tête que l'action de δ_t (pour $t \in \mathbb{R}$) sur $\mathscr{S}_2$ est partiellement hyperbolique dans le sens où :

$$T\mathscr{S}_2 = E_0 + E_1^+ + E_1^-$$

où E_0 est tangent aux orbites du flot géodésique et $E_1^\pm$ sont des distributions invariantes de dimension 1.

Définition 7. *Les exposants de Lyapunov correspondants sont $\pm\lambda_1$ où*

$$\lambda_1 = 2t.$$

Par ailleurs, $E_1^\pm$ sont tangents aux feuilletages $W_1^\pm$ pour les feuilletages d'orbites des groupes $h_1^\pm$ où

$$h_1^+ = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$h_1^-(u)$ est la transposée de $h_1^+(u)$.
Dans la suite on désignera E_1^+ par E_1 et W_1^+ par W_1 et h_1^+ par h_1 et les résultats énoncés seront encore valables pour E_1^-, W_1^- et h_1^-. Par ailleurs $\|\cdot\|_{H^s}$ désignera la norme de Sobolev d'indice s.

Définition 8. *Soient $s, r \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction $F : \mathscr{S}_2 \to \mathbb{R}$ est dans $H^{s,r}$ avec $\|A\|_{H^{s,r}} = K$ si pour tout $1 \geqslant \epsilon > 0$, il existe des H^s-fonctions $A^- \leqslant A \leqslant A^+$ telles que*

$$\|A^+ - A^-\|_{L^1(\mu_{\mathscr{S}_2})} \leqslant \epsilon \text{ et } \|A^\pm\|_{H^s} \leqslant K\epsilon^{-r}.$$

Définition 9. *On dit que γ est une W_1-courbe de longueur L s'il existe $L \in \mathscr{S}_2$ tel que*

$$\gamma = \{h_1(\tau)y \ |\tau \in [0, L]\}.$$

Dans ce cas, pour une fonction $F : \mathscr{S}_2 \to \mathbb{R}$, on utilisera la notation

$$\int_\gamma A = \frac{1}{L}\int_0^L A(h_1(s)y)ds.$$

Définition 10. *Soit $\kappa_0 > 0$. Soit $L > 0$ et $\mathcal{P}$ une partition de $\mathscr{S}_2$ en W_1-courbes de longueur L. Désignons par $\gamma(x)$ l'élément de $\mathcal{P}$ possédant x. Étant donné une suite, finie ou infinie, d'entiers (k_n) et une fonction $A \in H^{s,r}$, on dit que $\mathcal{P}$ est κ_0-représentative relativement à $((k_n), A)$ si pour tout n,*

$$\mu_{\mathscr{S}_2}(x \in \mathscr{S}_2 \mid |\int_{g^{k_n}\gamma(x)} A - \mu_{\mathscr{S}_2}(A)| \geqslant \mathcal{K}_A L_n^{-\kappa_0}) \leqslant L_n^{-\kappa_0} \tag{5}$$

où $\mathcal{K}_A = \|A\|_{s,r} + 1$, $L_n = Le^{\lambda_1(k_n)}$ *est la longueur de* $g^{k_n}\gamma(x)$ *et* $\mu_{\mathscr{S}_2}(A) = \int_{\mathscr{S}_2} A(x)d\mu_{\mathscr{S}_2}(x)$. *Les points* x *tels que pour tout* n,

$$|\int_{g^{k_n}\gamma(x)} A - \mu_{\mathscr{S}_2}(A)| \leqslant \mathcal{K}_A L_n^{-\kappa_0}$$

sont dits représentatifs relativement à $(\mathcal{P}, (k_n), A)$.
Notons au passage que si $\mathcal{P}$ *est* κ_0*-représentative relativement à* $((k_n), A)$ *et si*

$$\sum_n (L_n)^{-\kappa_0} \leqslant \epsilon$$

alors l'ensemble des points représentatifs est de mesure au moins $1 - \epsilon$.

Dans [1] (voir Proposition 7.3), la proposition suivante est prouvée :

Proposition 2 ([1]). *(a) Il existe* $s, \kappa_0, \epsilon_0 > 0$ *tel que pour tout* $0 \leqslant r \leqslant s$, $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_0$, *pour toute famille finie de fonctions* $\mathfrak{F}$ *de* $H^{s,r}$, *pour tout* $L > 0$ *pour toute suite* (k_n) *tel que*

$$\sum_n (Le^{\lambda_1(k_n)})^{-\kappa_0} \leqslant \epsilon,$$

il existe une partition $\mathcal{P}$ *de* $\mathscr{S}_2$ *en* W_1*-courbes de longueur* L *qui est* κ_0*-représentative relativement à* $((k_n), F)$ *et ce quelque soit* $F \in \mathfrak{F}$.
(b) Si $L \in \mathscr{S}_2$ *est distribué une mesure* $\tilde{\mu}_{\mathscr{S}_2}$ *de densité bornée relativement à la mesure* $\mu_{\mathscr{S}_2}$ *alors le résultat de (a) est encore valable pour peu que dans la définition de partition représentative, l'équation* 5 *soit remplacée par*

$$\tilde{\mu}_{\mathscr{S}_2}(x \in \mathscr{S}_2 \mid |\int_{g^{k_n}\gamma(x)} A - \mu_{\mathscr{S}_2}(A)| \geqslant \mathcal{K}_A L_n^{-\kappa_0}) \leqslant \tilde{C} L_n^{-\kappa_0}$$

où $\tilde{C}$ *représente la borne supérieure de la densité* f *de* $\tilde{\mu}_{\mathscr{S}_2}$ *relativement à* $\mu_{\mathscr{S}_2}$.

Elle repose sur le fait que le flot géodésique mélange à vitesse exponentielle. Toujours dans [1](Lemme A.2), on trouve le lemme suivant, qui va nous permettre d'estimer des $\|\cdot\|_{H^{s,r}}$.

Lemme 16 ([1]). *Pour chaque entier naturel* s, *pour chaque* $R > 0$, *il existe une constante* $C(R, s)$ *telle que : pour* $f \in C^{s,r}(\mathbb{R}^d)$ *à support compact inclus dans la boule euclidienne de centre* 0 *et de rayon* R *alors, si on appelle* F *la transformée de Siegel de* f, $F \in H^{s,r}$ *et*

$$\|F\|_{H^{s,r}} \leqslant C(R, s)\|f\|_{C^{s,r}}.$$

Il faut noter que $C^{s,r}$ est définie d'une manière analogue à $H^{s,r}$ et que l'espace C^s est l'espace des fonctions régulières, à support compact, munie de la norme $\|\cdot\|_{\infty,s}$ (s indiquant l'ordre maximal de dérivation pris en compte).

4 Étude de $S(\omega, L, T)$

4.1 Introduction au problème

Dans cette section, nous allons préciser le comportement asymptotique de $S(\omega, L, r)$.
Soit $(\theta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles dont l'aléa ω appartient à $(\Omega, \mathbb{P}_1)$ un

espace probabilisé, indépendantes, identiquement distribuées et symétriques, c'est-à-dire tels que $\mathbb{P}_{\theta_t} = \mathbb{P}_{-\theta_t}$.

Notons que la construction d'un tel objet, où $\Omega = \mathscr{S}_2$ et avec indépendance par rapport aux $\|\delta L\|$, peut se faire de la manière suivante : pour tout $t \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\theta_{t,n} = f(\delta_t^{n^2} \cdot)$ où f est une fonction régulière mesurable de $\mathscr{S}_2$ à valeurs dans un segment $[-a, a]$ où $a > 0$ tel que $\mu_2(f(L) \in [0, b]) = \mu_d(f(L) \in [-b, 0])$ et ce pour tout $0 \leqslant b \leqslant a$. La suite de variables (θ_t) peut-être pensé comme la limite, quand $n \to \infty$, de $(\theta_{t,n})_{t\in\Gamma}$.
Cependant, en général, il n'est pas certain que cette limite existe. En revanche, comme chacune de ces suites (en n) de variables aléatoires est tendu, on va pouvoir trouver une extractrice ϕ tel que $(\theta_{t,\phi(n)})_{t\in\mathbb{N}}$ converge vers une suite de variables aléatoires réelles identiquement distribuées (comme μ_2 est une mesure de Haar), symétriques, à support compact et indépendantes entre elles et des $\|\delta L\|$ (comme le flot géodésique mélange à vitesse exponentielle).
Notons que cette construction peut se généraliser à la dimension $d \geqslant 2$.

On s'intéresse maintenant au comportement quand $T \to \infty$ de $S(\omega, L, T)$.
Le principal résultat que l'on va démontrer à ce sujet est le théorème 7.
Rappelons-le :

Théorème 7. *Lorsque L est distribué selon la loi de probabilités μ_2 et ω selon $\mathbb{P}_1$,*

$$S(\omega, L, T) = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\theta_t(\omega)}{\|\delta_t L\|^2 T}$$

converge, quand $T \to \infty$, vers une loi de Cauchy centrée.

Dans les sous-sections qui suivent, on s'attache à démontrer ce théorème.

4.2 Élimination des termes dont le dénominateur est trop grand

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $\epsilon > 0$, posons :

$$A_1(\epsilon, T, L) = \{i \in [0, T-1] \mid \|\delta_i L\|^2 T \leqslant \frac{1}{\epsilon}\}. \tag{6}$$

Posons aussi

$$S_1(\omega, L, \epsilon, T) = \sum_{t\in A_1(\epsilon,T,L)} \frac{\theta_t(\omega)}{T\|\delta_t L\|^2}. \tag{7}$$

Proposition 3. *Pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, pour tout T assez grand, on a :*

$$\mathbb{P}(|S(\omega, L, T) - S_1(\omega, L, \epsilon, T)| \geqslant \alpha) \leqslant \alpha.$$

Cette proposition nous dit fondamentalement que les termes dont le dénominateur est trop grand peuvent être négligés.

Démonstration. On a, pour $L \in \mathscr{S}_2$, pour $T \in \mathbb{N} - \{0\}$:

$$\sum_{i=0}^{T-1} \frac{\theta_i(\omega)}{T\|\delta_i L\|^2} - \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant T-1 \\ T\|\delta_i L\|^2 \leqslant \frac{1}{\epsilon}}} \frac{\theta_i(\omega)}{T\|\delta_i L\|^2} = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant T-1 \\ T\|\delta_i L\|^2 > \frac{1}{\epsilon}}} \frac{\theta_i(\omega)}{T\|\delta_i L\|^2}. \tag{8}$$

Or, comme les θ_i sont des variables aléatoires identiquement distribuées, d'espérances nulles et que les $L \longmapsto \delta_j L$ sont identiquement distribuées et que l'on travaille sur l'espace probabilisé produit $\Omega \times \mathscr{S}_d$, on a :

$$E(\sum_{\substack{0\leqslant t\leqslant T-1\\ T||\delta_i t||^2>\frac{1}{\epsilon}}} \frac{\theta_i(\omega)}{T\|\delta_i L\|^2}) = 0 \tag{9}$$

et

$$\begin{aligned} V(\frac{1}{T}\sum_{\substack{0\leqslant t\leqslant T-1\\ T||\delta_i L||^2>\frac{1}{\epsilon}}} \frac{\theta_i(\omega)}{\|\delta_i L\|^2}) &= T\frac{1}{T^2}V(\frac{\theta_0(\omega)}{\|\delta_0 L\|^2}\mathbf{1}_{T||\delta_0 L||^2>\frac{1}{\epsilon}}) \\ &= \frac{1}{T}E((\frac{\theta_0(\omega)}{\|\delta_0 L\|^2}\mathbf{1}_{T||\delta_0 L||^2>\frac{1}{\epsilon}})^2) \\ &\leqslant \frac{M^2}{T}E(\frac{1}{\|L\|^4}\mathbf{1}_{T\|L\|^2>\frac{1}{\epsilon}})) \end{aligned} \tag{10}$$

où $M = \|\theta_0\|_\infty \geqslant 0$. Or le lemme 8 donne que pour tout $\epsilon > 0$, pour tout T assez grand, $E(\frac{1}{\|L\|^4}\mathbf{1}_{T\|L\|^2>\frac{1}{\epsilon}})) \sim \epsilon T$. D'où le résultat voulu via l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. □

La proposition 3 nous ramène ainsi à l'étude de la quantité $S_1(\omega, L, T, \epsilon)$ où ϵ peut être supposé, et sera supposé par la suite, compris strictement entre 0 et 1.

4.3 Existence des minima locaux et centrage sur ceux-ci

Posons

$$A_2(\epsilon, T, L) = \{i \in [0, T-1] \cap A_1(\epsilon, T, L) \mid \|\delta_{i-1}L\| > \|\delta_i L\| < \|\delta_{i+1}L\|\}. \tag{11}$$

La proposition suivante nous assure qu'on peut "centrer" les termes de S_1 sur ces minima locaux :

Proposition 4. *Il existe $k_d(i) \leqslant 0$ et $k_m(i) \geqslant 0$ pour $i \in A_2(\epsilon, T, L)$ tels que pour tout $\alpha > 0$, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, pour tout T assez grand, on a :*

$$\mathbb{P}(|S_1(\omega, L, \epsilon, T) - S_2(\omega, L, \epsilon, T)| \geqslant \alpha) \leqslant \alpha$$

où, pour tout $L \in \mathscr{S}_2$ et $\omega \in \Omega$,

$$S_2(\omega, L, \epsilon, T) = \sum_{i\in A_2(\epsilon,T,L)} \sum_{k_d(i)\leqslant k\leqslant k_m(i)} \frac{\theta_{i+k}(\omega)}{T\|\delta_{i+k}L\|^2} \tag{12}$$

et où :
- $|k_d(i)|, |k_m(i)| \geqslant \frac{\log(T)}{2} + C_\epsilon$ *où* $C_\epsilon = \frac{\log(\epsilon)}{2} - 3$ *;*
- *tous les ensembles* $\{i+k\}_{k_d(i)\leqslant k\leqslant k_m(i)}$ *sont deux à deux disjoints ;*
- *pour tout* $k \in [k_d(i), k_m(i)]$, $1 > \|\delta_{i+k}L\| > \|\delta_i L\|$.

Il faut noter que $k_d(i)$ et $k_m(i)$ dépendent éventuellement de $\|\delta_i L\|$. On verra un peu plus loin qu'on pourra éliminer cette dépendance éventuelle.
Avant de continuer, nous avons besoin de deux lemmes préliminaires.
Soient l_1, l_2 deux réels non nuls et $l = (l_1, l_2)$. Pour tout $a > 0$, on pose :

$$f_{(l_1,l_2)}(a) = al_1^2 + \frac{1}{a}l_2^2.$$

Lemme 17. *$f_{(l_1,l_2)}$ est strictement décroissante jusqu'en $a_0 = |\frac{l_1}{l_2}|$, où elle atteint son minimum, puis est strictement croissante.*

Démonstration. Une étude des variations de $f_{(l_1,l_2)}$ via un calcul de dérivé donne le résultat. □

Lemme 18. *Soient $\beta > 0$, $C > 0$ et $L \in \mathscr{S}_2$ tels que pour tout $l \in L - \{0\}$,*

$$|Num(l)| \geqslant C|\log(\|l\|)|^{-1-\beta}.$$

Alors il existe $D > 0$ tel que pour tout T assez grand, pour tout $i \in [|-\log(T), T + \log(T)|]$

$$\frac{\|\delta_i L\|^2}{2} \geqslant DT^{-1-\beta} \tag{13}$$

pour peu que l'on suppose $\|L\| \geqslant \sqrt{\epsilon}$.

La première hypothèse de ce lemme est réalisée quitte à écarter un petit nombre de réseaux et ce d'après la proposition 1. Il en va de même pour la seconde hypothèse d'après le lemme 8. On peut ainsi supposer ces deux hypothèses vérifiées et on le fera par la suite.

Démonstration. Soit $i \in [-\log(T), T + \log(T)]$. Appelons $l = (l_1, l_2) \in L - \{0\}$ le vecteur tel que $\|\delta_i l\| = \|\delta_i L\|$.
Par ailleurs, en supposant que $\|L\| > 1$, l'inégalité arithmético-géométrique donne, d'une part, que :

$$\frac{\|\delta_i L\|^2}{2} \geqslant |l_1 l_2| \geqslant C \log(\|l\|)^{-1-\beta}.$$

D'autre part, on a, d'après le théorème de Minkowski :

$$e^{2i} l_1^2 + e^{-2i} l_2^2 = \|\delta_i L\|^2 \leqslant \frac{4}{\pi}$$

et donc, comme $i \in [-\log(T), T + \log(T)]$,

$$\|l\|^2 \leqslant \frac{4(e^{2(T+\log(T))})}{\pi}.$$

Ainsi, il existe $\tilde{C} > 0$ (indépendant de i et de L) tel que pour tout T assez grand,

$$\log(\|l\|)^{-1-\beta} \geqslant \tilde{C} T^{-1-\beta}$$

et en particulier,

$$\frac{\|\delta_i L\|^2}{2} \geqslant |l_1 l_2| \geqslant C\tilde{C} T^{-1-\beta}. \tag{14}$$

D'où le résultat voulu dans le cas où $\|L\|_2 > 1$. L'autre cas est immédiat car on a toujours $\|l\|_2 \geqslant \|L\| \geqslant \sqrt{\epsilon}$ et on peut toujours prendre T plus grand ou D plus petit si nécessaire. □

On peut maintenant aborder la démonstration de la proposition 4. L'idée principale est que si i n'est pas un minimum local alors on a un sens à suivre qui va nous mener à un minimum local d'après le lemme 17.

Démonstration de la proposition 4. • Dans cette première partie, on explique comment, à partir d'un terme qui a un dénominateur petit, on peut se ramener à un terme qui a un dénominateur petit et qui est un minimum local.

On prend T assez grand pour que $\log(\epsilon) + \log(T) - 2 > 0$. En particulier, on a $\frac{1}{\epsilon T} < 1$.
Par définition, on a $A_2(\epsilon, T, L) \subset A_1(\epsilon, T, L)$.
Réciproquement, soit $i \in A_1(\epsilon, T, L)$. Soit on a $i \in A_2(\epsilon, T, L)$, soit on a $\|\delta_{i-1}L\| \leqslant \|\delta_i L\|$ ou $\|\delta_i L\| \geqslant \|\delta_{i+1}L\|$.
Plaçons-nous dans le cas où on a seulement $\|\delta_{i-1}L\| \leqslant \|\delta_i L\|$ avec $T - 1 \geqslant i \geqslant 0$.
On appelle $k \in \delta_i L$ tel que $\|\delta_i L\| = \|k\|_2$. On a alors, comme $\|\delta_i L\| \leqslant \sqrt{\frac{1}{\epsilon T}} < 1$:

$$\|\delta_i L\|^2 = k_1^2 + k_2^2 \ \textit{et} \ \|\delta_{i-1}L\|^2 = e^{-2}k_1^2 + e^2 k_2^2.$$

Quitte à éliminer les réseaux non-faiblement admissibles (voir la définition 6), qui constituent un ensemble négligeable pour $\mu_{\mathscr{S}_2}$, on peut supposer que $k_1, k_2 \neq 0$. On a alors :

$$f_{(k_1,k_2)}(e^{-2}) = \|\delta_{i-1}L\|^2 \leqslant f_{(k_1,k_2)}(1) = \|\delta_i L\|^2$$

et, en particulier, $f_{(k_1,k_2)}$ permet de calculer les plus courts vecteurs autour de l'instant i.
D'après le lemme 17, il existe donc un unique $m_i \in \mathbb{Z}$ tel que $m_i < i$ et pour tout $m_i \leqslant k \leqslant i-1$, $\|\delta_k L\| < \|\delta_{k+1}L\|$ et $\|\delta_{m_i-1}L\| > \|\delta_{m_i}L\|$. En particulier, $m_i \in A_2(\epsilon, T, L)$.

Supposons qu'on se place maintenant dans le cas où on a seulement $\|\delta_i L\| \geqslant \|\delta_{i+1}L\|$ avec $0 \leqslant i \leqslant T - 1$. De même qu'avant, on obtient un unique m_i tel que $m_i \in \mathbb{Z}$, tel que $m_i > i$ et tel que pour tout $k \in [i, m_i - 1]$, $\|\delta_k L\| > \|\delta_{k+1}L\|$ et $\|\delta_{m_i}L\| < \|\delta_{m_i+1}L\|$. En particulier, $m_i \in A_2(\epsilon, T, L)$.

Supposons maintenant qu'on soit dans le cas où $0 \leqslant i \leqslant T - 1$ et $\|\delta_{i-1}L\| \leqslant \|\delta_i L\| \geqslant \|\delta_{i+1}L\|$. Le lemme 17 exclut cela.

Ainsi, pour tout $i \in A_1(\epsilon, T, L)$, on a défini un $m_i \in A_2(\epsilon, T, L)$ qui s'interprète comme le "premier minimum local que l'on peut rencontrer en suivant la direction indiquée"(dans le cas où $i \in A_2(\epsilon, T, L)$, on pose simplement $m_i = i$).

• Dans un second temps, on construit les $k_d(i)$ et les $k_m(i)$ et on démontre que l'étude de S_1 se ramène à l'étude de S_2 grâce à ce qui vient d'être fait.

On pose, pour tout $i \in A_2(\epsilon, T, L) - \{T - 1\}$, $k_m(i)$ le plus grand entier positif tel que pour tout $k \in [0, k_m(i) - 1]$, $\|\delta_{i+k}L\| \leqslant \|\delta_{i+k+1}L\| \leqslant \sqrt{\frac{1}{\epsilon T}}$. On définit pour l'autre sens et de manière analogue $k_d(i)$ pour tout $i \in A_2(\epsilon, T, L) - \{0\}$. On notera que $k_d(i) \leqslant 0$ et $k_m(i) \geqslant 0$. On pose aussi, dans le cas où $0 \in A_2(\epsilon, T, L)$, $k_d(0) = -\left\lfloor \frac{\log(\epsilon)}{2} + \frac{\log(T)}{2} - 2 \right\rfloor$. On fait de même dans le cas où $T - 1 \in A_2(\epsilon, T, L)$ avec $k_m(T - 1)$. On a pas noté les dépendances en L, en ϵ et en T de k_d et k_m dans un souci de simplification.

Le raisonnement nous permettant de construire m_i nous donne en sus qu'étudier la convergence en loi de S_1 revient à étudier la convergence en loi de

$$S_2(\omega, L, \epsilon, T) = \sum_{i \in A_2(\epsilon,T,L)} \sum_{k_d(i) \leqslant k \leqslant k_m(i)} \frac{\theta_{i+k}(\omega)}{T\|\delta_{i+k}L\|^2} \tag{15}$$

(S_2 contient éventuellement des termes avant 0 et après $T - 1$).
En effet, le lemme 18 s'applique et ainsi on a, pour tout T assez grand :

$$P(|S_1(\omega, L, \epsilon, T) - S_2(\omega, L, \epsilon, T)| \neq 0) \leqslant D \log(T) T^{\beta} \|\theta_0\|_\infty \mathbb{P}(T\|L\|^2 \leqslant \frac{1}{\epsilon}), \tag{16}$$

en utilisant l'équation (13), la compacité de la loi commune des θ_i et où $D > 0$. En choisissant $\beta > 0$ tel que $\beta < 1$, on obtient le résultat voulu grâce au lemme 8. On est donc ramenés à S_2.

Soit $i \in A_1(\epsilon, T, L)$. Notons que $\|\delta_i L\|^2 \leqslant \frac{1}{\epsilon T}$ et que donc pour $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|k| < \frac{\log(\epsilon)}{2} + \frac{\log(T)}{2}$, $\|\delta_k L\|^2 < 1$ d'après le lemme 13.
En utilisant le lemme 15 et le lemme 17, on voit alors que pour tout $i \in A_1(\epsilon, T, L)$, les ensembles

$$[-\lfloor \frac{\log(\epsilon)}{2} + \frac{\log(T)}{2} - 2 \rfloor, \lfloor \frac{\log(\epsilon)}{2} + \frac{\log(T)}{2} - 2 \rfloor] + \{i\}$$

sont disjoints pour tout $0 \leqslant i \leqslant T - 1$.
Quitte à diminuer les $k_d(i)$ et augmenter les $k_m(i)$ pour avoir $k_d(i) \leqslant -\lfloor \frac{\log(\epsilon)}{2} + \frac{\log(T)}{2} - 2 \rfloor$ et $k_m(i) \geqslant \lfloor \frac{\log(\epsilon)}{2} + \frac{\log(T)}{2} - 2 \rfloor$ et ce pour tout i, on peut supposer effectivement ces deux inégalités satisfaites.
En effet, cela revient à rajouter des instants $t \in [-2\log(T), T + 2\log(T)]$ dans S_2 tels que

$$T\|\delta_t L\|^2 > \frac{1}{\epsilon}$$

et les équations (9) et (10) montrent que cet ajout est négligeable. □

On peut donc maintenant concentrer notre attention sur l'étude asymptotique de S_2.

4.4 Étude du comportement asymptotique de S_2

Posons :

$$\Gamma_i(\omega, L, \epsilon, T) = \sum_{k_d(i) \leqslant k \leqslant k_m(i)} \frac{\theta_{i+k}(\omega)\|\delta_i L\|^2}{\|\delta_{i+k} L\|^2}, \tag{17}$$

$$\Xi_i(L, T) = T\|\delta_i L\|^2 \tag{18}$$

de sorte que l'on a :

$$S_2(\omega, L, \epsilon, T) = \sum_{i \in A_2(\epsilon, T, L)} \frac{\Gamma_i(\omega, L, T, \epsilon)}{\Xi_i(L, T)}. \tag{19}$$

Pour appliquer le lemme 4 et ainsi obtenir le théorème 7, on va maintenant montrer que, dans notre cas : $\{\Gamma_i(\omega, L, \epsilon, T)\}_{i \in A_2(\epsilon, T, L)}$ sont asymptotiquement des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées, symétriques et dont le support est compact, et indépendantes de $\{\Xi_i(L, T)\}_{i \in A_2(\epsilon, T, L)}$ et que $\{\Xi_i(L, T)\}_{i \in A_2(\epsilon, T, L)}$ converge vers un processus de Poisson sur $[0, \frac{1}{\epsilon}]$ d'intensité constante indépendante de ϵ. Concentrons-nous tout d'abord sur le comportement asymptotique des Γ_i.

4.4.1 Comportement asymptotique des Γ_i

Dans cette sous-section, on va prouver la proposition suivante qui détermine le comportement asymptotique des Γ_i :

Proposition 5. *$\{\Gamma_i(\omega, L, \epsilon, T)\}_{i \in A_2(\epsilon, T, L)}$ sont asymptotiquement des variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, symétriques, à support compact et sont indépendantes de $\{\Xi_i(T, L)\}_{i \in A_2(\epsilon, T, L)}$.*

Pour démontrer cette proposition, on a besoin de quelques lemmes :

Lemme 19. *Pour tout T assez grand, pour tout $i \in A_2(\epsilon, T, L)$, pour tout $k \in [k_d(i), k_m(i)]$, il existe $K > 0$ tel que*

$$\frac{\|\delta_i L\|^2}{\|\delta_{i+k} L\|^2} \leqslant \frac{K}{\cosh(2|k|)}. \tag{20}$$

Démonstration. Soient i et k comme dans l'énoncé du lemme. En appelant $h \in (\delta_i L) - \{0\}$ le vecteur tel que $\|\delta_i L\| = \|h\|$ et tel que $h_1 \geqslant 0$, on a d'après le lemme 15 :

$$\frac{\|\delta_i L\|^2}{\|\delta_{i+k} L\|^2} = \frac{h_1^2 + h_2^2}{e^{2k} h_1^2 + e^{-2k} h_2^2}. \tag{21}$$

En appelant (r, α) les coordonnées polaires de h (et donc $r > 0$ et $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), on a :

$$\frac{\|\delta_i L\|^2}{\|\delta_{i+k} L\|^2} = \frac{1}{\cos^2(\alpha) e^{2k} + \sin^2(\alpha) e^{-2k}}.$$

Or, on a : $\frac{\|\delta_i L\|^2}{\|\delta_{i+k} L\|^2} \leqslant 1$ pour $k = -1$ et $k = 1$. Ainsi il existe $\frac{\pi}{2} > \kappa > 0$ tel que : $\frac{\pi}{2} - \kappa > |\alpha| > \kappa$. D'où le lemme. □

Notons au passage que d'après les hypothèses faites juste après le lemme 18 avec $\beta = \frac{1}{2}$ et d'après le théorème de Minkowski qui donne que pour tout réseau L', $\|L'\| \leqslant \frac{4}{\pi}$, on a donc d'après le lemme 19 et la proposition 4 que pour tout i, $|k_d(i)|, |k_m(i)| \leqslant \log(T)$ dès que T est assez grand.
Grâce au lemme précédent, on peut établir que $k_d(i)$ et $k_m(i)$ peuvent être choisis de sorte à ne pas dépendre de $\|\delta_i L\|$ pour $i \in A_2(\epsilon, T, L)$. C'est tout l'objet du lemme suivant :

Lemme 20. *Posons :*

$$S_3(\omega, L, \epsilon, T) = \sum_{i \in A_2(\epsilon, T, L)} \frac{1}{\Xi_i(L, T)} \sum_{-(\frac{\log(T)}{2} + C_\epsilon) \leqslant k \leqslant \frac{\log(T)}{2} + C_\epsilon} \frac{\theta_{i+k}(\omega) \|\delta_i L\|^2}{\|\delta_{i+k} L\|^2}.$$

Alors, quand $T \to \infty$, $S_3(\omega, L, \epsilon, T) - S_2(\omega, L, \epsilon, T)$ tend presque sûrement vers 0.

Ainsi, on pourra considérer par la suite que : $k_d(i) = -(\frac{\log(T)}{2} + C_\epsilon)$ et $k_m(i) = \frac{\log(T)}{2} + C_\epsilon$.

Démonstration. On a :

$$|S_3(\omega, L, \epsilon, T) - S_2(\omega, L, \epsilon, T)| \leqslant \sum_{i \in A_2(\epsilon, T, L)} \Big(\sum_{|k| \geqslant \frac{\log(T)}{2} + C_\epsilon} \frac{2K \|\theta_0\|_\infty}{\cosh(2|k|)} \Big) \frac{1}{T \|\delta_i L\|^2} \tag{22}$$

car $|k_d(i)|, |k_m(i)| \geqslant \frac{\log(T)}{2} + C_\epsilon$ et car $\Xi_i(L, T) = T \|\delta_i L\|^2$.
Or, on a :

$$\sum_{|k| \geqslant \frac{\log(T)}{2} + C_\epsilon} \frac{1}{\cosh(2|k|)} \sim \frac{H_\epsilon}{T}$$

quand $T \to \infty$ et où $H_\epsilon > 0$.
D'où, il vient, d'après l'équation (22) que :

$$|S_3(\omega, L, \epsilon, T) - S_2(\omega, L, \epsilon, T)| \leqslant \sum_{i \in A_2(\epsilon, T, L)} \frac{M_\epsilon}{T^2 \|\delta_i L\|^2} \tag{23}$$

où $M_\epsilon > 0$.
Or la quantité de droite de l'inéquation (23) converge presque sûrement vers 0 quand $T \to \infty$ d'après le lemme 3.2 de [9] (qui est basé sur le théorème ergodique individuel). D'où le résultat voulu. □

Lemme 21. *Supposons $\|L\| < 1$. Soit $\alpha(L)$ l'angle entre la droite engendré par un vecteur l de L tel que $\|l\| = \|L\|$ et l'axe des abscisses. Conditionnellement à l'évènement ($\|L\| < 1$), $\alpha(L)$ est indépendant de $\|L\|$.*

Démonstration. Soient $-\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant b \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $0 < r_1 \leqslant r_2 < 1$. On pose

$$f_1(x) = \mathbf{1}_{r_1 \leqslant \|x\| \leqslant r_2}$$

et

$$f_2(x) = \mathbf{1}_{0<\|x\|<1} \mathbf{1}_{\alpha(x) \in [a,b]}$$

où $\alpha(x)$ désigne l'angle orienté entre $(1,0)$ et x.
Posons :

$$\overline{F}(L) = \sum_{l_1 \neq \pm l_2 \in L} f_1(l_1) f_2(l_2).$$

Alors le lemme 24 s'applique et nous donne, que :

$$\begin{aligned} \mu_2(\alpha(L) \in [a,b], \|L\| \in [r_1, r_2]) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(\overline{F}) \\ &= \frac{1}{2}\zeta(2)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x)dx \int_{\mathbb{R}^2} f_2(x)dx \end{aligned}$$

En passant en coordonnées polaires, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x)dx = \int_{\substack{r_1<r<r_2 \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi}} r dr d\alpha = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_2(x)dx = \int_{\substack{0<r<1 \\ a \leqslant \alpha \leqslant b}} r dr d\alpha = \frac{b-a}{2}.$$

D'où on tire :

$$\mu_2(\alpha(L) \in [a,b], \|L\| \in [r_1, r_2] \mid \|L\| < 1) = \mu_2(\alpha(L) \in [a,b] \mid \|L\| < 1)\mu_2(\|L\| \in [r_1, r_2] \mid \|L\| < 1).$$

□

On peut maintenant prouver la proposition 5.

Démonstration de la proposition 5. La série des $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\cosh(2|k|)}$ converge.
Ainsi, grâce au lemme 19, grâce au fait que $\|\theta_0\|_\infty < \infty$ et en utilisant (17), on obtient que les Γ_i, pour $i \in A_1(T, \epsilon, L)$, convergent vers des variables aléatoires réelles à support compact. Ces variables sont nécessairement symétriques dans la mesure où les θ_i sont symétriques et indépendantes entre elles.
Par ailleurs, comme les θ_i sont des variables aléatoires réelles indépendantes entre elles, comme μ_2 est $SL_2(\mathbb{R})$-invariante et comme $|k_d(i)|, |k_m(i)| \to \infty$, il est clair qu'asymptotiquement les Γ_i sont identiquement distribuées.

Voyons maintenant qu'asymptotiquement les Γ_i sont indépendants des Ξ_i.

Regardons tout d'abord ce qu'il se passe entre Γ_i et Ξ_i. Rappelons-nous que $\Xi_i = T||\delta_i L||^2$ et que Γ_i s'écrit :

$$\Gamma_i(\omega, L, T, \epsilon) = \sum_{k_d(i) \leqslant k \leqslant k_m(i)} \frac{\theta_{i+k}(\omega)\|\delta_i L\|^2}{\|\delta_{i+k} L\|^2},$$

où $k_m(i) = \frac{\log(T)}{2} + C_\epsilon$ et $k_d(i) = -k_m(i)$.
L'équation (21) montre que $\frac{\theta_{i+k}(\omega)\|\delta_i L\|^2}{\|\delta_{i+k} L\|^2}$ ne dépend pas de $\|\delta_i L\|$ mais seulement de $\alpha(\delta_i L)$.
Or, $\alpha(\delta_i L)$ est indépendant de $\|\delta_i L\|$, comme μ_2 est une mesure de Haar à gauche et à droite et d'après le lemme 21.
Ainsi, asymptotiquement, Γ_i est indépendant de $\Xi_i = T\|\delta_i L\|^2$.

Enfin, notons que pour $i \neq j \in A_2(\epsilon, L, T)$, on peut créer un écart entre les blocs $\{i+k\}$ et $\{j+k\}$ de taille, par exemple, au moins $\log(\log(T))$, c'est-à-dire à la place de considérer $k_m(h)$, considérer $\tilde{k}_m(h) = k_m(h) - \frac{\log(\log(T))}{2}$ et à la place de considérer $k_d(h)$ considérer $\tilde{k}_d(h) = k_d(h) + \frac{\log(\log(T))}{2}$, sans que cela change quelque chose de significatif dans l'étude asymptotique des Γ_h, des Ξ_h ou de S_2 (voir les équations 22 et 23). Finalement, en utilisant la vitesse exponentielle de mélange du flot géodésique sur $\mathscr{S}_2$ et en utilisant l'indépendance des θ_k, on obtient qu'asymptotiquement :

1) Les Γ_i sont asymptotiquement indépendants entre eux
2) Les Γ_i sont asymptotiquement indépendants de $\{\Xi_i\}$

□

Étudions maintenant le comportement asymptotique des $\{\Xi_i\}_{i \in A_2(\epsilon,T,L)}$.

4.4.2 Convergence des $\{\Xi_i\}_{i \in A_1(\epsilon,T,L)}$ vers un processus de Poisson sur $[0, \frac{1}{\epsilon}]$ et démonstration du théorème 7

Le but de cette section est d'établir la proposition suivante :

Proposition 6. *$\{\Xi_i(L,T)\}_{i \in A_2(\epsilon,T,L)}$ converge vers un processus de Poisson sur $[0, \frac{1}{\epsilon}]$ d'intensité constante $D = \zeta(2)^{-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{1}_{e^{-2}\cos^2(\theta)+e^2\sin^2(\theta) \leqslant 1} \mathbf{1}_{e^2\cos^2(\theta)+e^{-2}\sin^2(\theta) \leqslant 1} d\theta > 0$.*

Cette proposition nous donne une meilleure idée de la répartition à l'infini des points de la trajectoire géodésique dans l'espace $\mathscr{S}_2$. C'est aussi à ce genre de chose que l'on s'intéresse dans [8].
Pour établir la convergence voulue, on va s'appuyer sur le théorème 3.
Ici, quitte à regarder la somme qui nous intéresse comme allant de 0 à T (au lieu de $T-1$), T joue le rôle de M.
Par ailleurs, on pose

$$\nu_0^T(L) = (\mathbf{1}_{\|\delta_{-1}L\| \geqslant \|L\| \leqslant \|\delta_1 L\|})T\|L\|^2,$$
$$\nu_t^T(L) = \nu_0^T(\delta_t L),$$
$$\xi_t^T(L) = \mathbf{1}_{\nu_t^T(L) \in]0, \frac{1}{\epsilon}]}$$

et la suite de partitions considérée $\mathbf{Q}$ est donnée par $(]\frac{k}{p}\frac{1}{\epsilon}, \frac{k+1}{p}\frac{1}{\epsilon}])_{p \in \mathbb{N}-\{0\},\ k \in [0,p-1]}$.
Remarquons que l'on a, pour T assez grand (par rapport à $\epsilon > 0$) :

$$\xi_t^T(L) = \frac{1}{2} F_0^T(\delta_t L) \tag{24}$$

où $F_0^T(L)$ est la transformée de Siegel de la fonction f_0^T telle que :

$$f_0^T(x) = \mathbf{1}_{\|\delta_{-1}x\| \geqslant \|x\| \leqslant \|\delta_1 x\|} \mathbf{1}_{0<T\|x\|^2 \leqslant \frac{1}{\epsilon}}.$$

Enfin, λ_1 a été définie dans la définition 7.
Maintenant que nous avons fait ces choix, nous pouvons énoncer la proposition suivante qui s'énonce en deux parties :

Proposition 7. *On a :*

- $\{\Xi_t(L,T)\}_{t\in A_2(\epsilon,T,L)}$ *est exactement le même processus que* $\{\nu_t^M\}_{\xi_t^M=1,\ t\in[0,M]}$
- $(\lambda_1, \{\xi_t\}, \{\nu_t\})$ *satisfont les hypothèses (h1) jusqu'à (h6) du théorème* 3.

La première partie de la proposition est évidente au vu des choix faits. Il reste donc à démontrer la deuxième partie de la proposition sur laquelle on va se concentrer maintenant.
Pour voir que les hypothèses (h1) jusqu'à (h6à sont vérifiées, nous allons suivre une démarche analogue à celle suivie dans [1]. Seulement analogue, car les zones à l'infini dans $\mathscr{S}_2$ qui nous intéressent ne sont pas les mêmes, ce qui explique que des différences, des adaptations apparaissent dans la preuve.
Avant de montrer 7, nous avons besoin de quelques lemmes préliminaires.

Lemme 22. *Pour tout $t \neq t' \in \mathbb{Z}$, pour tout $b > 0$, pour tout $T > 0$ assez grand (la grandeur dépendant uniquement de b), on a :*

$$\mathbb{P}(T\|\delta_t L\|^2 \leqslant b, T||\delta_{t'} L||^2 \leqslant b) = \frac{D_1 b^2}{T^2} + \frac{D_2 b}{T} \arccos(\frac{1-e^{-2|t-t'|}}{1+e^{-2|t-t'|}})$$

où $D_1, D_2 > 0$.

Démonstration. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_t(x) = \mathbf{1}_{\|\delta_t x\|^2 \leqslant \frac{b}{T}}$ et $f_{t'}(x) = \mathbf{1}_{||\delta_{t'} x||^2 \leqslant \frac{b}{T}}$ et F_t et $F_{t'}$ les transformées de Siegel correspondantes. Alors, en suivant la démarche du lemme 8 et en appliquant les formules du lemme 7 et en remarquant que pour tout $r > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{B_f(0,r)}(\delta_t \cdot) \mathbf{1}_{B_f(0,r)}(\delta_{t'} \cdot) = 2r^2 \arccos(\frac{1-e^{-2|t-t'|}}{1+e^{-2|t-t'|}}),$$

on obtient le résultat voulu. □

Pour voir que (h4) et (h5) sont vérifiées, on va s'inspirer de ce qui a été fait dans [1]. On pose ainsi $K =]0, \frac{1}{\epsilon}]$ et $K_i =]\frac{i}{p}\frac{1}{\epsilon}, \frac{i+1}{p}\frac{1}{\epsilon}]$ pour $0 \leqslant i \leqslant p-1$ avec $p \geqslant 1$ (p est sous-entendu). On a avec ces notations : $\xi_t = \mathbf{1}_{\nu_t \in K}$ et $\xi_{t,i} = \mathbf{1}_{\nu_t \in K_i}$.
On pose de même $\hat{K} = \{x \in]0, \infty[\mid d(x, \partial K) \leqslant T^{-1000}\}$ et de même $\hat{K_i} = \{x \in]0, \infty[\mid d(x, \partial K_i) \leqslant T^{-1000}\}$.
On pose $\hat{\xi_t} = \mathbf{1}_{\nu_t \in \hat{K}}$ et de même $\hat{\xi_{t,i}} = \mathbf{1}_{\nu_t \in \hat{K_i}}$. On dispose alors des lemmes suivants :

Lemme 23. *On a :*

$$\|\xi_0^T\|_{H^{s,s}} = O(1). \tag{25}$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a aussi :

$$\|\xi_{0,i}^T\|_{H^{s,s}} = O(1). \tag{26}$$

Démonstration. Le lemme 16, appliqué à F_0^T, donne que $F_0^T \in H^{s,s}$ et que $\|F_0^T\|_{H^{s,s}} = O(1)$. Pour démontrer ce dernier point, on procède en approchant via des fonctions affines par morceaux la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{B_f(0,\frac{1}{\sqrt{\epsilon T}})}$ et en régularisant ces fonctions à l'aide d'approximation de l'unité.
D'où le premier résultat voulu d'après (24). On procède de même pour obtenir le second résultat. □

Lemme 24. *On a :*

$$\mu_{\mathscr{S}_2}(\hat{\xi_{0,i}}) = O(T^{-1000}) \text{ et} \tag{27}$$

$$\mu_{\mathscr{S}_2}(\hat{\xi_0}) = O(T^{-1000}) \tag{28}$$

Démonstration. C'est une application du lemme 7. □

Prouvons maintenant la proposition 7.

Démonstration de la proposition 7. • Vérification de (h1)
On rappelle que pour T assez grand (par rapport à $\epsilon > 0$)

$$\xi_t^T(L) = \frac{1}{2} F_t^T(L)$$

où $F_t^T(L)$ est la transformée de Siegel de la fonction f_t^T telle que :

$$f_t^T(x) = \mathbf{1}_{\|\delta_{-1}\delta_t x\| \geqslant \|\delta_t x\| \leqslant \|\delta_1 \delta_t x\|} \mathbf{1}_{0 < T\|\delta_t x\|^2 \leqslant \frac{1}{\epsilon}}. \tag{29}$$

En utilisant le lemme 7, en faisant un changement de variable $u = \delta_t x$ et en passant en coordonnées polaires, on trouve que :

$$E(\xi_t^T) = \frac{D}{T}\frac{1}{\epsilon} \tag{30}$$

où

$$D = \zeta(2)^{-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{1}_{e^{-2}\cos^2(\theta)+e^2\sin^2(\theta)\leqslant 1} \mathbf{1}_{e^2\cos^2(\theta)+e^{-2}\sin^2(\theta)\leqslant 1} d\theta.$$

Avant de continuer, notons qu'une étude des variations de la fonction $\theta \longmapsto \frac{1}{a^2}\cos^2(\theta) + a^2\sin^2(\theta)$, avec $a > 0$, permet de voir qu'en réalité D vaut :

$$D = \zeta(2)^{-1}(\arccos(\frac{1}{\sqrt{e^2+1}}) - \arccos(\frac{e}{\sqrt{e^2+1}})).$$

(qui peut encore se simplifier en utilisation une formule de différence d'arccos)

• Vérification de (h2)
(h2) est vérifiée car $\xi_t \in \{0, 1\}$.

• Vérification de (h3)
Si on a $t, t' \in \Pi$, différents tels que $\xi_t, \xi_{t'} = 1$ alors $t, t' \in A_2(\epsilon, T, L)$ et sont donc séparés au moins de $\log(T) + 2C_\epsilon$ d'après ce que l'on a vu précédemment.
En utilisant le lemme 22, on voit donc que l'on a :

$$P(\xi_t \geqslant 1, \xi_{t'} \geqslant 1) \leqslant \mathcal{O}(\frac{1}{T}\arccos(\frac{1-e^{-2(\log(T)+2C_\epsilon)}}{1+e^{-2(\log(T)+2C_\epsilon)}})) \tag{31}$$

et le terme en arccos est un $\mathcal{O}(\frac{1}{T})$.

• Vérification de (h4a), (h4b) et (h4c)
Dans notre cas, notons que $\eta_{t,p} = \xi_{t,p}$. Il suffit donc d'avoir (h4a) et (h4b) vérifiées pour obtenir que les trois hypothèses sont vérifiées.
On se fixe $T > 0$. On se fixe $t \in \Pi$ (l'exposant T est sous-entendu). On appelle $\Pi^+(t)$ l'ensemble des éléments $t' \in [0, T]$ tels que $\lambda_1(t') > \lambda_1(t) + R\log(T)$ où $R > 0$ sera fixé par la suite. On considère $\mathfrak{F} = \{\xi_0, \xi_{0,1}, \cdots, \xi_{0,p}\}$. On appelle F_t une partition en W_1-courbes de taille $L_t = (e^{\lambda_1(t)}T^{1000})^{-1}$ donnée par la proposition 2 qui est κ_0-représentative relativement à $(\Pi^+(t), \mathfrak{F})$. C'est possible dans la mesure où :

$$\sum_{t\in\Pi}\ \sum_{t'\in\Pi^+(t)} (L_t e^{\lambda_1(t')})^{-\kappa_0} \leqslant T^2 T^{1000\kappa_0} T^{-R\kappa_0} = O(T^{-1000}) \tag{32}$$

pour R choisi assez grand.
En particulier, si on appelle $\tilde{E}_1$ l'ensemble des $L \in \mathscr{S}_2$ tel que pour tout $t \in \Pi$, L est un point représentatif de $(F_t, \Pi^+(t), \mathfrak{F})$, on voit que l'on a $\mu_2(\tilde{E}_1^c) = O(T^{-1000})$.
Pour $L \in \tilde{E}_1$, d'après la définition de point représentatif, d'après le calcul fait pour obtenir l'égalité (30), d'après le lemme 23, on voit que $(h4)$ est vérifiée pour ce choix de $E = \tilde{E}_1$ et cette partition F_t.

• Vérification de (h5)
Donnons-nous $t \in [0, T]$ et $\bar{t} \in \Pi^+(t)$ et $\gamma_{\bar{t}} \in F_{\bar{t}}$. Quitte à prendre R encore plus grand, on peut supposer que la longueur de $\delta_t\gamma_t$, qui vaut $e^{-\lambda_1(\bar{t})}T^{-1000}e^{\lambda_1(t)}$, est plus petite que T^{-10^9}.
Ceci étant dit, si ξ_t est nul sur γ_t, le résultat est clairement acquis sur $\gamma_{\bar{t}}$. Sinon, il existe $\overline{L} \in \gamma_{\bar{t}}$ et p tel que $\xi_{t,p}(\overline{L}) = 1$ et il s'en suit donc qu'il existe $u \in \overline{L}$ tel que $\nu_t \in K_p$.
Par ailleurs, notons que $\delta_t\gamma_{\bar{t}} = \{h(\tau)\delta_t\overline{L}\}_{\tau\in\mathscr{I}}$ où $\mathscr{I}$ est un intervalle fermé possédant 0 de longueur plus petite que T^{-10^9}. On observe alors que $h(\tau)\delta_t\overline{L}$ admet $h(\tau)\delta_t u$ comme plus petit vecteur et

$$T\|h(\tau)\delta_t u\|^{-2} = T\|\delta_t u\|^{-2} + O(T^{-10^9+1}).$$

Pour peu que l'on remplace la condition $t \in A_2(\epsilon, T, L)$ par

$$t \in \tilde{A}_2(\epsilon, L, T) = \{i \in [0, T-1] \cap A(\epsilon, T, L) \mid \|\delta_{i-1}L\| > \|\delta_i L\| + \frac{1}{T^{2001}} < \|\delta_{i+1}L\|\},$$

si $\delta_t\gamma_{\bar{t}}$ n'intersecte pas (ou du moins son image)

$$\{x \in]0, \infty[\mid d(x, \partial K_p) \leqslant T^{-10^3}\},$$

elle est complètement incluse dans K_p et donc $\xi_{t,p} = 1$ le long de cette courbe.
La mesure de l'ensemble des L tel que $\delta_t\gamma_{\bar{t}}$ intersecte $\{x \in]0, \infty[\mid d(x, \partial K_p) \leqslant T^{-10^3}\}$ est donc $O(T^{-1000})$ car cet ensemble est inclus dans l'ensemble des L qui « sont » dans $\hat{K}_p$ et qui a une mesure en $O(T^{-1000})$ d'après le lemme 24. Et l'ensemble négligé par le remplacement au début de ce paragraphe ne coûte aussi qu'un $O(T^{-1000})$.
En prenant le complémentaire de l'union de tous ces exceptionnels L pour $t \in [0, T]$, pour $\bar{t} \in \Pi^+(t)$ (et en considérant son intersection avec E_1), on obtient un ensemble mesurable E_2 tel que $\mu_2(E_2^c) = O(T^{-998})$ sur lequel (h5) est valide (ainsi que (h4)).

• Vérification de (h6)
La taille des pièces de F_t est $L_t = (e^{\lambda_1(t)}T^{1000})^{-1}$ et celle de $F_{\bar{t}}$ est $L_{\bar{t}} = (e^{\lambda_1(\bar{t})}T^{1000})^{-1}$, si on pose

$$E_3 = \{L \in \mathscr{S}_2 \mid F_{\bar{t}}(L) \subset F_t(L) \text{ pour tout } t \in [0, T],\ \bar{t} \in \Pi^+(t)\},$$

on voit que son complémentaire est de mesure en $O(T^{-998})$ quitte à prendre R assez grand. En effet, à $t, \bar{t}$ fixé, pour chaque courbe de F_t, la longueur totale des ensembles ne vérifiant pas la condition voulue est au plus de $2L_{\bar{t}}$.

Sur l'ensemble $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$, on voit que (h4) jusqu'à (h6) sont vérifiées. De plus, $\mu_2(E^c) = O(T^{-100})$. Par ailleurs, (h1) jusqu'à (h3) sont vérifiées. D'où le résultat voulu. □

Démonstration du théorème 7. En utilisant le lemme 5 conjugué à la proposition 4, la proposition 5 et la proposition 7 qui nous permet d'appliquer le théorème 3 on obtient finalement la validité du théorème 7. □

Note : le résultat reste valable si l'on suppose L distribué selon $\tilde{\mu}_2$ car le flot géodésique mélange à vitesse exponentielle.

5 Étude asymptotique de $\mathcal{R}$

5.1 Premières considérations sur l'erreur $\mathcal{R}$

Le problème qui nous intéresse maintenant est celui de la convergence en loi de $\frac{\mathcal{R}(t,P,L,X)}{\log(t)}$ où $X \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$, P est un parallélogramme d'intérieur non vide et $L \in \mathscr{S}_2$. On peut supposer pour simplifier, étant donné que l'on travaille avec L distribué selon $\tilde{\mu}_2$ et X selon $\tilde{\lambda}_2$, que le parallélogramme P d'intérieur non vide est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées (cela peut se faire en déformant P via les matrices de rotation et via les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) et, quitte à déformer le rectangle P via les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$, on peut supposer que P est en réalité un carré dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées et enfin, quitte à translater P, on peut supposer que le centre du carré P est $(0,0)$. On notera qu'on a utilisé tous les degrés de liberté du problème dont on disposait a priori.
Cette simplification faite, appelons A_1 le sommet inférieur droit de P de coordonnées $(a, -a)$, A_2 le sommet supérieur droit de P de coordonnées (a, a), A_3 le sommet supérieur gauche de P de coordonnées $(-a, a)$ et A_4 le sommet inférieur gauche de P de coordonnées $(-a, -a)$ avec $a > 0$.
Nous avons maintenant besoin d'introduire quelques notations pour rappeler un résultat de [9] duquel on partira pour établir la convergence en loi désirée. Appelons :

- $\tau = \frac{\log(t)^{\frac{1}{4}}}{t}$
- $t^{\pm} = t \pm \beta\tau$ avec $\beta \in \mathbb{R}$ approprié
- $\rho > 0$ tel que $\tau = \rho^{-\theta}$ où $\theta \in]0,1[$ avec θ aussi proche de 1 que l'on veut fixé
- $\lambda(l) = \frac{l_1^2}{l_1^2 + l_2^2}$
- ω_1 est une fonction à support compact $\subset B_f(0, \frac{1}{4})$, de classe C^∞, positive, plus petite que 1 et tel que $\omega_1 = 1$ sur $B_{B_f(0,\frac{1}{8})}$, à symétrie sphérique
- ω_2 est la transformée de Fourier de $\frac{\omega_1}{\int \omega_1}$ (et est donc une fonction à décroissance rapide et à symétrie sphérique)

Avec ces notations, on peut désormais poser :

$$\tilde{S}_1^{\pm}(\tau,t,P^0,R_1,X,L)=\frac{1}{\log(t)}\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{l\in L^{\perp}-\{0\}}\frac{1}{(R_1l)_1(R_1l)_2}\lambda(R_1l)\omega_2(\tau l)\omega_1(\rho^{-1}l)e^{2i\pi<l,t^{\pm}P^0+X>}$$

où $R_1\in SO_2(\mathbb{R})$ et où $R_1L^{\perp}$ est supposée faiblement admissible (voir définition 6).
Enfin, appelons : $R=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et

$$\tilde{S}^{\pm}(\tau,t,X,L)=\sum_{i=1}^{4}(-1)^i(\tilde{S}_1^{\pm}(\tau,t,A_i,I_2,X,L)-\tilde{S}_1^{\pm}(\tau,t,A_i,R,X,L)).$$

Les deux sommes $\tilde{S}^{\pm}$ correspondent en fait à deux sommes sur ce qui s'appelle l'ensemble des drapeaux du carré P, qui est composé dans ce cas particulier de 8 éléments (voir [9] pour plus de détails).
On dispose du résultat suivant grâce à [9] :

Proposition 8. *Pour tout $\alpha>0$, pour tout t assez grand,*

$$\mathbb{P}\left(\alpha+\tilde{S}^{+}(\tau,t,X,L)\geqslant\frac{\mathcal{R}(t,P,L,X)}{\log(t)}\geqslant\tilde{S}^{-}(\tau,t,X,L)-\alpha\right)\geqslant 1-\alpha.$$

Ainsi, pour montrer le théorème 1, il nous suffit de montrer que $\tilde{S}^-$ et $\tilde{S}^+$ ont une distribution asymptotique commune qui est une loi de Cauchy centrée.
Par ailleurs, l'étude de la convergence asymptotique de $\tilde{S}^-$ pouvant se conduire de manière tout à fait analogue à celle de $\tilde{S}^+$, la limite trouvée sera indépendante du signe $\pm$. On se concentre donc sur l'étude $\tilde{S}^+$ et on la renomme $\tilde{S}$. On signalera tout au long de la preuve ce qui se serait passé si on avait traité $\tilde{S}^-$ à la place de $\tilde{S}^-$.

5.2 Étude d'un seul terme

Dans un but pédagogique, on va simplifier la situation en se concentrant sur l'étude d'un seul terme de $\tilde{S}$ à savoir :

$$\tilde{S}_2(\tau,t,X,L)=\tilde{S}_1^{+}(\tau,t,A_2,I_2,X,L). \tag{33}$$

Le but de cette sous-section est de montrer le résultat suivant :

Théorème 8. *Quand $L\in\mathscr{S}_2$ est distribué selon $\tilde{\mu}_2$, quand X est distribué selon $\tilde{\lambda}_2$, $\tilde{S}_2$ converge en loi vers une loi de Cauchy centrée.*

Une précision toutefois : comme on l'a vu dans la section précédente, on peut supposer, et on le fera, qu'il existe $D>0$ tel que pour tout $l\in L-\{0\}$,

$$|l_1l_2|\geqslant D|\log(\|l\|_2)|^{-1-\beta} \tag{34}$$

(avec $\beta>0$) et que

$$\|L\|_1\geqslant\sqrt{\epsilon}. \tag{35}$$

Par ailleurs on remplacera $L^{\perp}$ par L dans l'étude (ce qui ne pose aucun soucis car $L\longmapsto L^{\perp}$ est une bijection, d'inverse elle-même, continue).

Heuristiquement, le terme au dénominateur $|Num(l)|$ est en fait relié à un certain $\|\delta_k L\|$, tandis qu'au numérateur on a un terme qui va se comporter à l'infini comme un θ_k. Comme on a réussi à prouver le théorème 7, on devrait réussir à prouver ce dernier théorème.

Introduisons :

$$\tilde{S}_9(\tau, t, \epsilon, X, L) = \frac{2}{(2\pi i)^2} \sum_{h \in \tilde{I}_-(t)} \frac{\Gamma_{h,t}}{\Xi_{h,t}} \tag{36}$$

où

$$\Xi_{h,t} = \mathrm{Num}(l(L,h)) \log(t) \ , \tag{37}$$

$$\Gamma_{h,t} = \sum_{k \in \mathbb{N} - \{0\}} \frac{1}{k^2} \cos(2k\pi < l(L,h), t^+ A_2 + X >) \ et \tag{38}$$

$$\tilde{I}_-(t) = \{h \in [-\lceil \log(t) \rceil, 0] \mid \|\delta_h L\|^2 < 2\cosh(1) |\mathrm{Num}(e(\delta_h L))| \text{ et } |\mathrm{Num}(e(\delta_h L))| \leqslant \frac{1}{\epsilon \log(t)}\} \tag{39}$$

avec $e(L)$ l'unique vecteur d'un réseau L de première coordonnée strictement positive et tel que $\|e(L)\| = \|L\|$ ($e(L)$ est défini pour presque tout réseau L) et $\epsilon > 0$ et où $l(L,h) = \delta_h^{-1} e(\delta_h L)$. Avec ces notations, on va procéder de la manière suivante pour montrer le théorème 8. D'abord, dans la prochaine sous-sous-section, on va montrer la proposition suivante qui permet de passer de l'étude asymptotique de $\tilde{S}_2$ à celle de $\tilde{S}_9$

Proposition 9. *Pour tout $\alpha > 0$, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, pour tout t assez grand,*

$$\mathbb{P}(|\tilde{S}_2 - \tilde{S}_9| \geqslant \alpha) \leqslant \alpha.$$

Cette proposition sera l'objet de la sous-sous-section suivante et s'obtient après un certain nombre de réductions successives, qui nécessitent des estimations d'intégrales, d'utiliser des outils de l'analyse de Fourier et de l'analyse classique, de faire de la géométrie des réseaux et d'utiliser des outils dynamiques sur l'espace des réseaux muni du flot géodésique (théorème ergodique par exemple).
Une troisième sous-section sera réservée à la mise en place d'un cadre permettant de ramener l'étude asymptotique des $\{\Xi_{h,t}\}$ et des $\{\Gamma_{h,t}\}$ à la vérification des hypothèses (h1) jusqu'à (h8) du théorème 4. La sous-section qui suivra sera dédiée à la vérification de ces hypothèses ce qui nous assurera que les $\{\Xi_{h,t}\}$ sont asymptotiquement un processus de Poisson et les $\{\Gamma_{h,t}\}$ sont asymptotiquement des variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées, symétriques, à support compact et indépendantes de $\{\Xi_{h,t}\}$. Cela nous permettra, *in fine*, via le lemme 4 d'obtenir le théorème 8.
Dans la cinquième et dernière sous-section de cette section, fort des résultats des sous-sections précédentes, nous reviendrons sur l'étude de $\tilde{S}_1$ et prouverons le théorème 1.

5.2.1 Preuve de la proposition 9 - « Oubli » de la fonction ω_1

On introduit la quantité suivante :

$$\tilde{S}_3(\tau, t, X, L) = \frac{1}{\log(t)} \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{l \in J_3(L,\alpha,t)} \frac{1}{l_1 l_2} \lambda(l) \omega_2(\tau l) e^{2i\pi < l, t^+ A_2 + X >}$$

où

$$J_3(L, \alpha, t) = \{l \in L - \{0\} \mid \|l\| \leqslant \frac{1}{8} t^\alpha\}$$

avec $1 < \alpha < \frac{1}{\theta}$ est quelconque et on le fera tendre plus tard vers 1.
Le but de cette sous-sous-section est alors de prouver la proposition suivante :

Proposition 10. *$|\tilde{S}_2 - \tilde{S}_3|$ converge en probabilités vers* 0.

Heuristiquement, cette proposition signifie qu'on remplace ω_1 par sa seule valeur en 0, qui vaut 1, et qu'on coupe les termes en l dont la norme est trop importante, ce que fait la fonction ω_1 lorsque le terme l en norme est plus grand que $\frac{1}{4}t^{\frac{1}{\theta}}$. C'est donc assez naturel de prouver cela. Pour démontrer cette proposition, on a besoin du lemme suivant, énoncé en dimension $d \geqslant 2$.

Lemme 25. *Pour tout $\epsilon_1 > 0$, pour tout $\beta > 0$, pour tout $\gamma > 0$,*

$$\int_{\substack{l\in\mathbb{R}^d \\ 1<\|l\|\leqslant t^{1+\epsilon_1} \\ |l_1\cdots l_d|\geqslant D|\log(\|l\|)|^{1-d-\beta}}} \frac{1}{|l_1\cdots l_d|} dl_1\cdots dl_d = O(\log(t)^d).$$

Démonstration. Par continuité et par symétrie, cela revient à démontrer que :

$$\int_{\substack{l\in\mathbb{R}^d \\ 1<\|l\|\leqslant t^{1+\epsilon_1} \\ l_1\cdots l_d\geqslant D\log(\|l\|)^{1-d-\beta} \\ 0<l_1\leqslant l_2\leqslant\cdots\leqslant l_d}} \frac{1}{l_1\cdots l_d} dl_1\cdots dl_d = O(\log(t)^d).$$

Appelons I cette dernière intégrale.
Le système d'inégalités portant sur l implique que :
pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, $l_i \leqslant t^{1+\epsilon_1}$ et $l_i^i(t^{1+\epsilon_1})^{d-i} \geqslant D\log(\|l\|)^{1-d-\beta} \geqslant C\log(t^{1+\epsilon_1})^{1-d-\beta}$.
Ainsi, on a, pour tout i :

$$t^{1+\epsilon_1} \geqslant l_i \geqslant C_i \frac{\log(t)^{\frac{1-d-\beta}{i}}}{t^{(1+\epsilon_1)\frac{d-i}{i}}}.$$

D'où, pour tout t assez grand, par le théorème de Fubini, on a :

$$I \leqslant \prod_{i=1}^{d} \int_{t^{1+\epsilon_1}\geqslant l_i\geqslant C_i\frac{\log(t)^{\frac{1-d-\beta}{i}}}{t^{(1+\epsilon_1)\frac{d-i}{i}}}} \frac{1}{l_i} dl_i.$$

Or pour tout i, $\int_{t^{1+\epsilon_1}\geqslant l_i\geqslant C_i\frac{\log(t)^{\frac{1-d-\beta}{i}}}{t^{(1+\epsilon_1)\frac{d-i}{i}}}} \frac{1}{l_i} dl_i = O(\log(t))$. D'où le résultat voulu. □

Démontrons maintenant la proposition 10.

Démonstration de la proposition 10. Vu les propriétés sur ω_1 et vu la définition de ρ, on a (en sous-entendant les diverses variables) :

$$|\tilde{S}_2 - \tilde{S}_3| \leqslant \frac{M}{\log(t)} \sum_{\substack{l\in L-\{0\} \\ \frac{t^{\frac{1}{\theta}}}{4}\geqslant\|l\|\geqslant\frac{1}{8}t^{\alpha}}} \frac{1}{|\mathrm{Num}(l)|} |\omega_2(\tau l)|. \tag{40}$$

Or ω_2 est à décroissance rapide et pour l comme dans la somme, on a $\|\tau l\| \geqslant \tau t^{\alpha} \geqslant t^{\alpha-1}$ et $\alpha - 1 > 0$.
D'où de (40) on tire que :

$$|\tilde{S}_2 - \tilde{S}_3| \leqslant \frac{M}{\log(t)t^{17(\alpha-1)}} \sum_{\substack{l\in L-\{0\} \\ \frac{t^{\frac{1}{\theta}}}{4}\geqslant\|l\|\geqslant\frac{1}{8}t^{\alpha}}} \frac{1}{|\mathrm{Num}(l)|}. \tag{41}$$

D'où le résultat voulu grâce au lemme 7 et grâce à (34) qui nous permet d'appliquer le lemme 25. □

On est donc ramené à l'étude de $\tilde{S}_3$ [1].

5.2.2 Preuve de la proposition 9 - Centrage sur les vecteurs premiers

On introduit :

$$\tilde{S}_4(\tau,t,X,L) = \frac{2}{\log(t)}\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{l\in J_4(L,\alpha,t)}\frac{1}{l_1 l_2}\lambda(l)\sum_{k\in\mathbb{N}-\{0\}}\frac{\omega_2(k\tau l)}{k^2}\cos(2k\pi < l, t^+A_2 + X >) \tag{42}$$

où

$$J_4(L,\alpha,t) = \{l \in L - \{0\} \mid \|l\| \leqslant \frac{1}{8}t^\alpha,\ l \text{ premier},\ l_1 > 0\}.$$

Le but de cette sous-sous-section est de prouver la proposition suivante :

Proposition 11. *$\tilde{S}_4 - \tilde{S}_3$ tend en probabilités vers 0.*

Cette proposition nous dit d'une part, qu'on peut regrouper tous les termes qui sont multiples d'un vecteur premier l, et, d'autre part, qu'on peut se contenter de considérer les vecteurs premiers l qui voient leur première coordonnée être strictement positive (via un argument de parité et quitte à éliminer un ensemble de réseaux négligeable).

Démonstration. Tout d'abord, en utilisant l'invariance par la transformation $l \longmapsto -l$ de $\omega_2(l)$, de $\mathrm{Num}(l)$ (cela dépend en général de la dimension d) et de $\lambda(l)$, il vient :

$$\tilde{S}_3(\tau,t,X,L) = \frac{2}{\log(t)}\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{\substack{l\in L\\ \|l\|\leqslant\frac{1}{8}t^\alpha\\ l_1>0}}\frac{1}{l_1 l_2}\lambda(l)\omega_2(\tau l)\cos(2\pi < l, t^+A_2 + X >). \tag{43}$$

De (42) et de (43), on obtient :

$$|\tilde{S}_3 - \tilde{S}_4| \leqslant \frac{M}{\log(t)}\sum_{\substack{l\in L\\ \|l\|\geqslant\frac{1}{8}t^\alpha\\ l_1>0}}\frac{|\omega_2(\tau l)|}{|\mathrm{Num}(l)|}.$$

On conclut comme pour la proposition 10. □

On est donc ramenés à l'étude de $\tilde{S}_4$ [2].

1. On voit dans la preuve de la proposition 10 que l'on a majoré le module des termes $e^{2i\pi<l,t^+A_2+X>}$ par 1. Donc cette preuve est aussi valable en ayant t^- à la place de t^+.

2. On voit que dans la preuve de la proposition 11, on a essentiellement utilisé un argument de parité et que l'on a majoré les termes $|\cos(2\pi < l, t^+A_2 + X >)|$ par 1. Cette preuve est donc encore valable en considérant t^- à la place de t^+.

5.2.3 Preuve de la proposition 9 - Réduction de la somme aux termes l tels que $Num(l)$ est petit

Soit $\epsilon > 0$. On introduit :

$$\tilde{S}_5(\tau, t, \epsilon, X, L) = \frac{2}{\log(t)} \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{l \in J_5(L,\alpha,\epsilon,t)} \frac{1}{l_1 l_2} \lambda(l) \sum_{k \in \mathbb{N}-\{0\}} \frac{\omega_2(k\tau l)}{k^2} \cos(2k\pi < l, t^+ A_2 + X >) \tag{44}$$

où

$$J_5(L, \alpha, \epsilon, t) = \{l \in L - \{0\} \mid \|l\| \leqslant \frac{1}{8} t^\alpha,\ l \text{ premier},\ l_1 > 0,\ |Num(l)| \leqslant \frac{1}{\log(t)\epsilon}\}.$$

Le but de cette sous-sous-section est alors de démontrer la proposition suivante :

Proposition 12. *Pour tout $\kappa > 0$, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, pour tout t assez grand, on a*

$$\mathbb{P}(|\tilde{S}_4(\tau, t, X, L) - \tilde{S}_5(\tau, t, \epsilon, X, L)| \geqslant \kappa) \leqslant \kappa.$$

Cette proposition nous dit essentiellement qu'on peut se ramener aux termes $l \in J_4(L, \alpha, t)$ qui voient leur *Num* être petit (ce qui est naturel puisque comme la quantité inverse intervient dans la somme, cela correspond à des termes qui contribuent beaucoup à la somme).
La démonstration s'appuie sur le lemme suivant énoncé en dimension $d \geqslant 2$:

Lemme 26. *Il existe $M > 0$ tel que pour tout $\epsilon_1 > 0$,*

$$\int_{\substack{l \in \mathbb{R}^d \\ 1 \leqslant \|l\| \leqslant t^{1+\epsilon_1} \\ |Num(l)| \geqslant \frac{1}{\epsilon \log(t)^{d-1}}}} \frac{1}{l_1^2 \cdots l_d^2} dl_1 \cdots dl_d \leqslant M \log(t)^{2d-2} \epsilon.$$

Démonstration. Par symétrie, on se ramène au domaine où les l_i sont strictement positifs.
On pose $\phi : (l_1, \cdots, l_d) \longmapsto (l_1, l_1 l_2, \cdots, l_1 \cdots l_d)$. Alors ϕ réalise un C^∞-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+ - \{0\})^d$ sur lui-même et la matrice jacobienne évaluée en $(l_1, \cdots, l_d)$, à savoir $\mathrm{Jac}(l_1, \cdots, l_d)$, vérifie :

$$\mathrm{Jac}(l_1, \cdots, l_d) = \prod_{i=1}^{d-1} \phi_i(l_1, \cdots, l_d). \tag{45}$$

Par ailleurs, puisque l appartient au domaine de l'intégrale dont il est question dans le lemme 26, on voit que pour tout $i \in \{1, \cdots, d-1\}$, $b_i = \frac{1}{\epsilon \log(t)^{d-1} t^{(1+\epsilon_1)(n-i)}} \leqslant \phi_i(l) \leqslant t^{(1+\epsilon_1)i} = h_i$ et $\phi_d(l) \geqslant \frac{1}{\epsilon \log(t)^{d-1}} = b_d$.
D'où de (45), on tire :

$$\int_{\substack{\forall 1 \leqslant i \leqslant d,\ l_i > 0 \\ 1 \leqslant \|l\|_2 \leqslant t^{1+\epsilon_1} \\ \mathrm{Num}(l) \geqslant \frac{1}{\epsilon \log(t)^{d-1}}}} \frac{1}{l_1^2 \cdots l_d^2} dl_1 \cdots dl_d \leqslant \int_{\substack{\forall 1 \leqslant i \leqslant d-1,\ b_i \leqslant u_i \leqslant h_i \\ b_d \leqslant u_d}} \frac{1}{u_d^2 \prod_{i=1}^{d-1} u_i} du. \tag{46}$$

Le membre de droite se calcule et donne le résultat voulu. □

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 12.

Démonstration de la proposition 12. En appelant Δ la norme 2 au carré de la différence entre $\tilde{S}_4$ et $\tilde{S}_5$ relativement à X, la formule de Parseval donne que :

$$\Delta = \frac{M_1}{\log(t)^2} \sum_{\substack{l \in J_4(L,\alpha,t) \\ |Num(l)| > \frac{1}{\epsilon \log(t)}}} \frac{1}{(l_1 l_2)^2} (\lambda(l))^2 \sum_{k \in \mathbb{N} - \{0\}} \frac{(\omega_2(k\tau l))^2}{k^4} \tag{47}$$

où $M_1 > 0$.
En utilisant le fait que ω_2 et λ sont bornées et en intégrant selon L et en utilisant le lemme 7 puis le lemme 26 (dans le cas où $d = 2$), on obtient que pour tout t assez grand :

$$\mathbb{E}(\Delta) \leqslant \frac{M_2}{\log(t)^2} \epsilon \log(t)^2$$

où $M_2 > 0$. D'où le résultat voulu. □

On est donc ramené à l'étude, pour $\epsilon > 0$, de $\tilde{S}_5$ [3].

5.2.4 Preuve de la proposition 9 - Passage à une somme géodésique

Le but de cette sous-sous-section est de passer d'une somme sur $l \in L - \{0\}$ à une somme sur $\delta_h L$ avec h entier. Pour parler plus précisément, introduisons quelques notations. Pour $L \in \mathscr{S}_2$ faiblement admissible, soit $e(L)$ l'unique vecteur de L tel que $e(L)_1 > 0$ et $\|e(L)\| = \|L\|_1$ ($e(L)$ est nécessairement premier) et on se donne $\eta > \alpha - 1$, aussi proche que l'on veut de $\alpha - 1$.
Introduisons maintenant l'ensemble

$$I(t,\eta) = \{h \in [-\lceil (1+\eta)\log(t) \rceil, \lceil (1+\eta)\log(t) \rceil] \mid \|\delta_h L\|^2 < 2\cosh(1)|\mathrm{Num}(e(\delta_h L))| \text{ et } |\mathrm{Num}(e(\delta_h L))| \leqslant \frac{1}{\epsilon \log(t)}\}$$

les vecteurs de L de la forme

$$l(L,h) = \delta_h^{-1} e(\delta_h L) \tag{48}$$

où h parcourt $\mathbb{Z}$ et la somme

$$\tilde{S}_6(\tau,t,\epsilon,X,L) = \frac{2}{(2\pi i)^2} \sum_{h \in I(t,\eta)} \frac{1}{\Xi_{h,t}} \lambda(l(L,h)) \tag{49}$$
$$\Big(\sum_{k \in \mathbb{N} - \{0\}} \frac{\omega_2(k\tau l(L,h))}{k^2} \cos(2k\pi < l(L,h), t^+ A_2 + X >) \Big).$$

On rappelle que $\Xi_{h,t}$ a été défini par l'équation (37).
Le but de cette sous-sous-section est de démontrer la proposition qui suit :

Proposition 13. *$\tilde{S}_5 - \tilde{S}_6$ converge en probabilités vers* 0.

Cette proposition nous permet de nous ramener à l'étude de sommes géodésiques, à savoir $\tilde{S}_6$. L'idée principale est que les points l des sommes $\tilde{S}_5$ sont en fait de la forme $l(L,h)$ avec

3. On voit que dans la preuve, si l'on remplace t^+ par t^-, celle-ci fonctionne encore : le terme $\cos(2k\pi < l, t^+ A_2 + X >)$ intervient seulement au début de la preuve et on l'élimine via la formule de Parseval, qui fonctionne encore en remplaçant t^+ par t^-.

$h \in I(t,\eta)$ (voir les lemmes 28 et 30) et que les termes de $\tilde{S}_6$ qui sont en plus par rapport aux sommes $\tilde{S}_5$ sont en quantité négligeable (ce qui est donné par les lemmes 28, 29 et 30).
Pour démontrer cette proposition, nous avons d'abord besoin de revenir et de préciser le début de la section 7 de [9].
On pose $\mathcal{P} =]0,\infty[\times(\mathbb{R}-\{0\})$.
Dans cette section, Skriganov introduit l'action de groupe qui à $(\delta, x) \in \Delta \times \mathcal{P} \longmapsto \delta x$.
Celle-ci admet pour domaine fondamentale :

$$\mathcal{F}_\Delta = \{\ m(e^y, e^{-y}) \mid m > 0,\ y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\ \}\dot{\cup}\{\ m(e^y, -e^{-y}) \mid m > 0,\ y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\ \}.$$

Lemme 27. *Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{P}$, l'unique $h(x) \in \mathbb{Z}$ tel que $\delta_{h(x)}x \in \mathcal{F}_\Delta$ est donné par :*
$h(x) = \frac{1}{2}\lceil \log(\frac{|x_2|}{x_1})\rceil$ *si* $\lceil \log(\frac{|x_2|}{x_1})\rceil$ *est paire et sinon* $h(x) = \frac{1}{2}\lfloor \log(\frac{|x_2|}{x_1})\rfloor$.
Par ailleurs, on a : $\delta_{h(x)}x = m(e^y, sgn(x_2)e^{-y})$ *où* $m = \sqrt{x_1|x_2|}$ *et* $y = h(x) - \frac{1}{2}\log(\frac{|x_2|}{x_1})$.

Démonstration. La démonstration est élémentaire □

On remarque que, quitte à enlever à $\mathcal{P}$ un ensemble dénombrable de portion de droites, on peut supposer que $y \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Cela symétrise la situation et à cause de ce fait on considèrera des réseaux L qui ne touchent jamais cet ensemble de morceaux de droites. Cet ensemble constitue un ensemble mesurable de mesure pleine.
On dispose alors du lemme suivant :

Lemme 28. *Soit $l \in L$ comme dans le domaine de la somme S_5. Alors $h(l) \in I(t,\eta)$.*

Démonstration. Soit l comme dans l'énoncé du lemme. Alors on a $\|\delta_{h(l)}l\|^2 = 2\cosh(2y)|l_1l_2|$ et donc, comme $y \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$,

$$2|l_1l_2| \leqslant \|\delta_{h(l)}l\|^2 < 2\cosh(1)|l_1l_2|. \tag{50}$$

Ainsi, comme $|l_1l_2|$ est suffisamment petit et que l est premier, pour peu que t soit assez grand, $\delta_{t(l)}l$ est un plus court vecteur du réseau $\delta_{t(l)}L$ d'après le raisonnement qui a mené au lemme 10 et comme $(\delta_{h(l)}l)_1 > 0$, on a

$$e(\delta_{h(l)}L) = \delta_{h(l)}l. \tag{51}$$

De plus, comme pour tout x, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Num}(\delta_k x) = \mathrm{Num}(x)$, on a, d'après (52) :

$$Num(e(\delta_{h(l)}L)) \leqslant \frac{1}{\epsilon\log(t)}. \tag{52}$$

Enfin, on a : $h(l) = \lceil \frac{1}{2}\log(\frac{|l_2|}{l_1})\rceil$ ou $h(l) = \lfloor \frac{1}{2}\log(\frac{|l_2|}{l_1})\rfloor$ et $\frac{|l_2|}{l_1} = \frac{l_1|l_2|}{l_1^2} = \frac{l_2^2}{l_1|l_2|}$.
Or, d'après (34) :

$$D\alpha^{-1-\beta}\log(t)^{-1-\beta} \leqslant D\log(\|l\|)^{-1-\beta} \leqslant l_1|l_2| \leqslant \frac{1}{\epsilon\log(t)}.$$

D'où, comme $\|l\| \leqslant t^\alpha$, il vient que pour t assez grand (la grandeur dépendant de D, α, β et ϵ),

$$-\lceil(1+\eta)\log(t)\rceil \leqslant t(l) \leqslant \lceil(1+\eta)\log(t)\rceil$$

où $\eta > \alpha - 1$ et est aussi proche que l'on veut de $\alpha - 1$. D'où le résultat voulu. □

Le lemme suivant assure une forme de réciproque :

Lemme 29. *Pour $h \in I(t,\eta)$,*

$$l(L,h) \in V(L,t) = \{l \in L | l_1 > 0,\ l \text{ est premier},\ \|l\| \leqslant Ct^{1+\eta},\ l_1|l_2| \leqslant \frac{1}{\epsilon \log(t)}\}$$

où $C > 0$ est une constante.

Démonstration. On pose $l = l(L,h) = \delta_h^{-1} e(\delta_h L)$. Il est clair que $l_1 > 0$ et que l est premier par définition de e.
Par ailleurs, le théorème de Minkowski nous donne qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\|e(\delta_h L)\| \leqslant C$$

d'où l'on tire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|L\|_2 \leqslant Ct^{1+\eta}.$$

Enfin, on note que $\mathrm{Num}(l) = \mathrm{Num}(e(\delta_h L))$ et ainsi $l(L,h) \in V(L,t)$. □

On voit qu'avec $l(L,\cdot)$ on ne retombe pas exactement dans le domaine de S_5 a priori (mais on en tombe pas trop loin). Mais $l(L,\cdot)$ joue quand même le rôle de réciproque de $t(l)$:

Lemme 30. *Soit $k \in L$ premier tel que $|Num(k)| \leqslant \frac{1}{\epsilon \log(t)}$. Pour peu que t soit assez grand, on a $l(L,t(k)) = k$.*
Réciproquement, soit $h \in \mathbb{Z}$ tel que $|Num(e(\delta_h L))| \leqslant \frac{1}{\epsilon \log(t)}$ et $\|\delta_h L\|^2 < 2\cosh(1)|Num(e(\delta_h L))|$.
Pour peu que t soit assez grand, $t(l(L,h)) = h$.

Remarquons que ce lemme implique que les $h \in I(\eta,t)$ sont des minima locaux (au sens où on l'a défini dans la section précédente).

Démonstration. Occupons-nous de la première partie du lemme et prenons $t > 2\cosh(1)$ et k comme dans l'énoncé. Alors d'après (50), $e(\delta_{t(k)} L) = \delta_{t(k)} k$. Ainsi, on a :

$$l(L,t(k)) = \delta_{t(k)}^{-1} e(\delta_{t(k)} L) = k.$$

Occupons-nous maintenant de la seconde partie du lemme et prenons à nouveau $t > 2\cosh(1)$ et h comme dans l'énoncé. On rappelle que $t(l(L,h))$ est l'unique $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\delta_p l(L,h) \in \mathcal{F}_\Delta.$$

Or, on a : $l(L,h) = \delta_h^{-1} e(\delta_h L)$ et donc $\delta_h l(L,h) = e(\delta_h L)$.
Or, on a :

$$||\delta_h L||^2 < 2\cosh(1)|\mathrm{Num}(e(\delta_h L))|.$$

Comme $e(\delta_h L)$ s'écrit : $e(\delta_h L) = \sqrt{|\mathrm{Num}(e(\delta_h L))|}(e^y, \pm e^{-y})|$ où $y \in \mathbb{R}$, l'inéquation qui précède implique que :

$$2\cosh(2y) < 2\cosh(1).$$

D'où $y \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et $e(\delta_h L) \in \mathcal{F}_\Delta$. □

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 13.

Démonstration de la proposition 13. On a, d'après les lemmes 27, 28, 29 et 30, pour tout t assez grand :

$$|(\tilde{S}_5-\tilde{S}_6)(\tau,t,\epsilon,X,L)| \leqslant \frac{M}{\log(t)} \sum_{l\in H(L,\alpha,\epsilon,\eta,t)} |\lambda(l)| \frac{1}{|l_1 l_2|} \sum_{k\in\mathbb{N}-\{0\}} \frac{|\omega_2(k\tau l)|}{k^2} |\cos(2k\pi < l, t^+A_2+X >)|$$

où

$$H(L,\alpha,\epsilon,\eta,t) = \{l \in L-\{0\} \mid \frac{1}{8}t^\alpha < \|l\| \leqslant Ct^{1+\eta},\ l \text{ premier},\ l_1 > 0,\ |Num(l)| \leqslant \frac{1}{\log(t)\epsilon}\}.$$

On conclut comme on a conclu la démonstration de la proposition 11 [4]. □

5.2.5 Preuve de la proposition 9 - Réduction du nombre de termes de la somme

On introduit $\tilde{I}(t) = I(t,\eta) \cap \{h \in \mathbb{Z} \mid |h| \leqslant \lceil \log(t) \rceil\}$ puis

$$\tilde{S}_7(\tau,t,\epsilon,X,L) = \frac{2}{(2\pi i)^2} \sum_{h\in\tilde{I}(t)} \frac{1}{\Xi_{h,t}} \lambda(l(L,h)) \tag{53}$$

$$(\sum_{k\in\mathbb{N}-\{0\}} \frac{\omega_2(k\tau l(L,h))}{k^2} \cos(2k\pi < l(L,h), t^+A_2 + X >)).$$

Proposition 14. $\mathbb{P}(\tilde{S}_7 - \tilde{S}_6 \neq 0) \leqslant M\frac{\eta}{\epsilon}$

Cette proposition dit, *grosso modo*, que le facteur η ne touche aucun rôle dans le problème que l'on étudie (ce qui se comprend bien, c'est une quantité qui n'est pas intrinsèque au problème) et qu'on peut se ramener entre ce qui passe entre $-\lceil \log(t) \rceil$ et $\lceil \log(t) \rceil$.

Démonstration. On a, pour tout $h \in I(t,\eta)$, $\|\delta_h L\|^2 < 2\cosh(1)|\mathrm{Num}(e(\delta_h L))|$ et

$$|\mathrm{Num}(e(\delta_h L))| \leqslant \frac{1}{\epsilon \log(t)}.$$

En utilisant cette remarque, combinée au lemme 8, on a :

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_7 - \tilde{S}_6 \neq 0) \leqslant \frac{M\eta \log(t)}{\epsilon \log(t)}.$$

D'où le résultat voulu. □

Comme on peut prendre le paramètre η aussi petit que l'on veut (en prenant α aussi proche de 1 que l'on veut), on est donc ramené à l'étude de $\tilde{S}_7$.

4. À la fin de la preuve, on majore le terme en $|\cos|$ par 1. La preuve reste donc encore valable en remplaçant t^+ par t^-.

5.2.6 Preuve de la proposition 9 - Élimination des termes "proches" de l'axe des ordonnées

On introduit $\tilde{I}_-(t) = \tilde{I}(t) \cap \mathbb{R}_-$ et les deux quantités suivantes :

$$\tilde{S}_8(\tau, t, \epsilon, X, L) = \frac{2}{(2\pi i)^2} \sum_{h \in \tilde{I}_-(t)} \frac{1}{\Xi_{h,t}} \tag{54}$$

$$\Big(\sum_{k \in \mathbb{N} - \{0\}} \frac{\omega_2(k\tau l(L,h))}{k^2} \cos(2k\pi < l(L,h), t^+ A_2 + X >) \Big).$$

Le but de cette sous-sous-section est de démontrer la proposition suivante

Proposition 15. *$\tilde{S}_7 - \tilde{S}_8$ converge vers 0 en probabilités.*

Le but de cette proposition est de retirer les termes $h > 0$ et de simplifier le terme λ. En réalité, les termes h en question vont devenir grand au fur et à mesure que t grandit et cela correspondra à des termes l tel que $l_1 l_2$ sera petit et l_2 grand (en valeur absolue), c'est-à-dire « proches » de l'axe des ordonnées et le terme en λ sera donc proche de 0. Quant aux termes qui correspondent à $h < 0$, ceux-ci vont devenir de plus en plus petits au fur et à mesure que t grandit et cela correspondra à des termes l tels que $l_1 l_2$ sera petit et l_1 grand (en valeur absolue), c'est-à-dire « proches » de l'axe des abscisses et le terme en λ sera donc proche de 1.

Démonstration. Supposons que l'on se donne $h \in \tilde{I}(t)$ tel que $h \geqslant 0$. On omet L et h dans le $l(L,h)$ par soucis de simplification et on pose $l(L,h) = (l_1, l_2)$. Supposons que $l_1 \geqslant l_2$. Comme $h \in \tilde{I}(t)$, on a

$$e^{2h} l_1^2 + e^{-2h} l_2^2 < \frac{2\cosh(1)}{\epsilon \log(t)}.$$

D'où, on obtient :

$$l_1^2 < \frac{2\cosh(1) e^{-2h}}{\epsilon \log(t)}$$

et

$$l_2^2 < \frac{\cosh(1)}{\epsilon \log(t) \cosh(2h)}.$$

Mais, d'après (35), $l_1^2 + l_2^2 \geqslant \epsilon$, ce qui est donc exclu pour t assez grand.
Ainsi, on a $l_1 \leqslant l_2$. On obtient, comme $h \in \tilde{I}(t)$,

$$|l_1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\epsilon \log(t)}} \ \ et \tag{55}$$

$$|l_2| \geqslant \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}. \tag{56}$$

À partir de l'expression de h à partir des coordonnées de l donné par le lemme 27, on note au passage que, pour t assez grand,

$$h \geqslant H \log(\log(t))$$

où H est une constante > 0.
Grâce à (55) et (56), on a aussi :

$$0 \leqslant \lambda(l) \leqslant \frac{1}{\epsilon^2 \log(t)}.$$

De même, dans le cas où $h \leqslant 0$, on obtient que : $l_1 \geqslant l_2$,

$$|l_2| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\epsilon \log(t)}},$$

$$l_1 \geqslant \sqrt{\frac{\epsilon}{2}},$$

$$h \leqslant -H \log(\log(t)) \ et$$

$$|\lambda(l) - 1| \leqslant \frac{1}{\epsilon^2 \log(t)}.$$

Au vu des remarques précédentes, on voit qu'il existe une constante $F > 0$ telle que :

$$|(\tilde{S}_8 - \tilde{S}_7)(\tau, t, P^0, X, L)| \leqslant \frac{F}{\epsilon^2 \log(t)^2} \sum_{h \in \tilde{I}(t)} \frac{1}{||\delta_h L||^2} \tag{57}$$

et, grâce au lemme 3.2 de [9], cette dernière quantité, pour presque tout $L \in \mathscr{S}_2$, est un $O(\frac{1}{\log(t)^{\frac{1}{2}}})$ (ce lemme de [9] découle du théorème 6 et du lemme 6). D'où le résultat voulu [5]. □

5.2.7 Preuve de la proposition 9 - Remplacement de ω_2 par $\omega_2(0)$ et conclusion

Comme ω_2 est la transformée de Fourier de $\frac{\omega_1}{\int \omega_1}$, $\omega_2(0) = 1$ et donc on a :

$$\tilde{S}_9(\tau, t, \epsilon, X, L) = \frac{2}{(2\pi i)^2} \sum_{h \in \tilde{I}_-(t)} \frac{1}{\Xi_{h,t}} \tag{58}$$

$$(\sum_{k \in \mathbb{N} - \{0\}} \frac{\omega_2(0)}{k^2} \cos(2k\pi < l(L,h), t^+ A_2 + X >))$$

d'après l'équation (36).
Le but de cette sous-sous-section est de prouver la proposition suivante qui permet de remplacer le terme en ω_2 par sa seule valeur en 0 :

Proposition 16. *$\tilde{S}_8 - \tilde{S}_9$ converge en probabilités vers 0.*

Démonstration. Notons que l'on a, pour $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, pour $h \in \tilde{I}(t)$:

$$\|k\tau l(L,h)\| \leqslant k\tau e^{\log(t)} \|\delta_h L\| \leqslant k\tau e^{\log(t)} \sqrt{\frac{2\cosh(1)}{\epsilon \log(t)}}.$$

Comme $\tau = \frac{\log(t)^{\frac{1}{4}}}{t}$, on a avec $l = l(L,h)$:

$$\|k\tau l\| \leqslant k \frac{1}{\log(t)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{2\cosh(1)}{\epsilon}}.$$

D'où, par le théorème des accroissements finis, et comme ω est une fonction à décroissance rapide :

$$|\frac{\omega(k\tau l)\cos(2\pi k < l, t^+ A_2 + X >)}{k^2} - \frac{\omega(0)\cos(2\pi k < l, t^+ A_2 + X >)}{k^2}| \leqslant \min(\frac{F}{k^2}, \frac{F}{k \log(t)^{\frac{1}{4}}}) \tag{59}$$

5. On voit qu'ici aussi on majore la valeur absolue du cos par 1. Cette preuve est donc aussi valable lorsque l'on remplace t^+ par t^-.

où F est une constante > 0 qui dépend de ϵ. À partir de (59), on trouve que :

$$|\sum_{k\in\mathbb{N}-\{0\}} \frac{\omega_2(k\tau l)}{k^2}\cos(2k\pi < l(L,h), t^+A_2 + X > - \sum_{k\in\mathbb{N}-\{0\}} \frac{\omega_2(0)}{k^2}\cos(2k\pi < l(L,h), t^+A_2 + X > | \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \min(\frac{F}{k^2}, \frac{F}{k\log(t)^{\frac{1}{4}}}) = O(\frac{1}{\log(t)^{\frac{1}{8}}}) \tag{60}$$

où le O dépend seulement de ϵ. Ainsi, on trouve que :

$$|\tilde{S}_8 - \tilde{S}_9| \leqslant F\frac{\sum_{h\in\tilde{I}_-(t)} ||\delta_h L||^{-2}}{\log(t)^{1+\frac{1}{8}}} \tag{61}$$

où $F > 0$ est une constante dépendant de ϵ.
Encore grâce au lemme 3.2 de [9], on trouve que ce terme est un $O(\frac{1}{\log(t)^{\frac{1}{16}}})$. D'où le résultat voulu [6]. □

Démonstration de la proposition 9. C'est une conséquence des propositions 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 [7]. □

5.3 Transfert du problème à la vérification des hypothèses du théorème 4

Maintenant, avec $\tilde{S}_9$, on va conclure comme dans la section précédente, c'est-à-dire montrer la proposition suivante :

Proposition 17. *On a :*

- *1) $\{\Xi_{h,t}\}_{h\in\tilde{I}_-(t)}$ converge vers un processus de Poisson sur $[-\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}] - \{0\}$ d'intensité constante (indépendante de ϵ).*

- *2) Les variables aléatoires réelles $(\Gamma_{h,t})_{h\in\tilde{I}_-(t)}$ convergent asymptotiquement vers des variables aléatoires réelles symétriques, indépendantes, identiquement distribuées, à support compact, indépendantes de $\{\Xi_{h,t}\}_{h\in\tilde{I}_-(t)}$.*

Concernant l'item 2), comme $t^+ = t + b\tau$, comme $\tau = \frac{\log(t)^{\frac{1}{4}}}{t}$, il suffit de montrer ce résultat en remplaçant t^+ par t (quitte à adapter le raisonnement menant à l'équation (61) [8]). Par ailleurs, on peut aussi remplacer $\log(t)$ par $\lceil\log(t)\rceil$.

Posons quelques nouvelles notations :

- $M = \lceil\log(t)\rceil$
- $\nu_0^M(L) = (M\mathrm{Num}(e(\cdot))\mathbf{1}_{2\cosh(1)|\mathrm{Num}(e(\cdot))|>||\cdot||^2})(L)$
- $\nu_h^M(L) = \nu_0^M(\delta_h L)$,
- $\xi_h^M = \mathbf{1}_{\nu_h^M\in[-\frac{1}{\epsilon},\frac{1}{\epsilon}]-\{0\}}$

6. Là encore on a majoré la valeur absolue du cos par 1. La preuve est donc encore valable si l'on remplace t^+ par t^-.

7. Toutes les propositions en question étant encore valables si l'on remplace t^+ par t^-, la réduction de $\tilde{S}_2$ à $\tilde{S}_9$ est encore valable avec t^- à la place de t^+.

8. Notons que ce raisonnement ne fait que intervenir $|t - t^+|$. Or $|t - t^+| = |t - t^-|$. Donc la proposition 17 sera aussi valable en remplaçant t^+ par t^- et donc on obtiendra au final que $\tilde{S}_2^+$ et $\tilde{S}_2^-$ convergent vers une même loi de Cauchy centrée.

— $\zeta_h^M(L,X) =< e(\delta_h L), \delta_h^{-1}(e^M A_2 + X) > (\text{mod } 1)$

Si l'on démontre la proposition suivante, la proposition 17 est acquise :

Proposition 18. *On a :*

— *1)* $(\nu_h^M)_{\xi_h^M=1,\ h\in[-M,0]}$ *converge vers un processus de Poisson sur* $[-\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}] - \{0\}$ *d'intensité constante (indépendante de* ϵ*).*

— *2)* $(\zeta_h^M)_{\xi_h^M=1,\ h\in[-M,0]}$ *convergent asymptotiquement vers des variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*, indépendantes, identiquement distribuées selon la mesure de Haar normalisée sur* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*, indépendantes de* $(\nu_h^M)_{\xi_h^M=1,\ h\in[-M,0]}$.

Démonstration du fait qu'il suffit de démontrer la proposition 18. Il suffit de remarquer que :

— $h \in [-M, 0]$ signifie exactement que $h \in \tilde{I}_-(t)$.

— $(\xi_h^M)(L) = 1$ signifie exactement que $|\text{Num}(l(L,h))\lceil \log(t) \rceil| \leqslant \frac{1}{\epsilon}$, et, dans ce cas, $(\nu_h^M)(L) = \text{Num}(l(L,h))\lceil \log(t) \rceil$

— $(\zeta_h^M)(L,X) = (< l(L,k), e^M A_2 + X >)$

□

Par ailleurs, le terme dominant dans $< e(\delta_h L), \delta_h^{-1}(e^M A_2 + X) >$ est $< e(\delta_h L), \delta_h^{-1} e^M A_2 >$. On peut donc supposer, et on le fera par la suite, que :

$$\zeta_h^M(L) =< e(\delta_h L), \delta_h^{-1} e^M A_2 > (\text{mod } 1)$$

(en particulier on oublie la dépendance en X).

Concentrons-nous maintenant sur la preuve de la proposition 18.

5.4 Vérification des hypothèses du théorème 4

Le théorème 4, la remarque qui le suit et la proposition (de cette sous-section) qui suit permettent de montrer la proposition 18. Pour énoncer cette proposition, gardons en tête les notations de la sous-section précédente et posons :

— $\lambda_1(h) = -2h$

— $\mathbf{X} = [-\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}] - \{0\}$

— $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_P)_{P\in\mathbb{N}-\{0\}}$ où $\forall P \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\mathbf{Q}_P = (\mathbf{X}_{k,P})_{k\in\{0,\cdots,P-1\}}$ avec

  pour tout $k \in [0; P-1]$, $\mathbf{X}_{k,P} = [-\frac{k+1}{P}\frac{1}{\epsilon}, -\frac{k}{P}\frac{1}{\epsilon}[\cup]\frac{k}{P}\frac{1}{\epsilon}, \frac{k+1}{P}\frac{1}{\epsilon}]$

— $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\tilde{\mathbf{Q}} = ((\tilde{\mathbf{X}}_{k,P})_{k\in\{0,\cdots,P-1\}})_{P\in\mathbb{N}-\{0\}}$ une collection de partitions d'intervalles de longueur $\frac{1}{P}$ avec $P \in \mathbb{N} - \{0\}$

— $\hat{\lambda}(h) = M - h$ si bien que l'on a $\hat{\lambda} > \lambda_1$ sur $\text{Int}(\Pi_M)$

On remarque alors que :

Proposition 19. $(\lambda_1, \hat{\lambda}, \{\xi_t\}, \{\nu_t\}, \{\zeta_t\})$ *satisfont les hypothèses (h1) jusqu'à (h8) du théorème* 4.

La proposition 18 *est en conséquence valide.*

Démonstration de la deuxième partie de la proposition 19. Cela repose sur le lemme 1 et le théorème 4. □

On va donc maintenant montrer que (h1) jusqu'à (h8) sont ici vérifiées.

5.4.1 Vérification des hypothèses (h1) jusqu'à (h8) et conclusion

Le but de cette section est de vérifier la proposition suivante qui est la première partie de la proposition 19 :

Proposition 20. $(\lambda_1, \hat{\lambda}, \{\xi_t\}, \{\nu_t\}, \{\zeta_t\})$ *satisfont les hypothèses (h1) jusqu'à (h8) du théorème* 4.

On a besoin de quelques lemmes préliminaires, dont on trouvera les équivalents dans la section précédente et les démonstrations sont peu ou prou les mêmes (le théorème de Green-Riemann peut être utile pour le deuxième lemme)

Lemme 31. $\xi_{0,P}$, ξ_0 *sont dans* $H^{s,s}$ *et*

$$\|\xi_{0,P}, \xi_0\|_{H^{s,s}} = O(1).$$

Posons $\hat{\mathbf{X}} = \{x \in]0, \infty[\mid d(x, \partial\mathbf{X}) \leqslant M^{-1000}\}$ et $\hat{\mathbf{X}}_i = \{x \in]0, \infty[\mid d(x, \partial\mathbf{X}_i) \leqslant M^{-1000}\}$ (l'indice P étant sous-entendu).
On pose aussi $\hat{\xi_m} = \mathbf{1}_{\nu_m \in \hat{\mathbf{X}}}$ et $\hat{\xi_{m,i}} = \mathbf{1}_{\nu_m \in \hat{\mathbf{X}}_i}$ (l'exposant M étant sous-entendu).

Lemme 32.

$$\tilde{\mu}_{\mathscr{S}_2}(\hat{\xi_{0,i}}) = O(T^{-1000}) \tag{62}$$

$$\tilde{\mu}_{\mathscr{S}_2}(\hat{\xi_0}) = O(T^{-1000}) \tag{63}$$

Avant de passer à la démonstration de la proposition 20, disons-en quelques mots. (h1) jusqu'à (h6) sont vérifiées de manière tout à fait analogue à ce qui a été fait dans la section précédente. Il en est de même pour (h8). Seule la vérification de (h7) se détache et l'avant-dernier paragraphe lui est dédiée.

Démonstration de la proposition 20. Supposons pour simplifier que $\mu_2 = \tilde{\mu}_2$, le cas général se traitant de manière analogue à l'aide de la propriété de mélange exponentielle et à l'aide des résultats du cas simplifié que l'on traite maintenant.
• Vérification de (h1) Par le même raisonnement que dans la section précédente, en utilisant le lemme 7, on trouve, en posant $D = \int_{u>0,\ v>0} \mathbf{1}_{uv \leqslant 1} \mathbf{1}_{2\cosh(1)uv > \|(u,v)\|^2}$, que

$$E(\xi_k^M) = \frac{2D}{\epsilon M}. \tag{64}$$

• Vérification de (h2)
Vu la définition de ξ_k^M, il est clair que (h2) est vérifiée.
• Vérification de (h3)
Par ailleurs, on a vu que si on disposait auparavant d'un k tel que $\xi_k^M = 1$ alors nécessairement ce k était un minimum local de $p \in \mathbb{Z} \longmapsto \|\delta_p L\|^2$ et les k tels que $\xi_k^M = 1$ sont des k tels que

$$\|\delta_p L\|^2 \leqslant \frac{2\cosh(1)e}{\epsilon M}.$$

Ainsi, par le même raisonnement qui mène à l'inéquation (31), on voit que $(h3)$ est vérifiée : les k qui conviennent sont suffisamment distants.

• Vérification de (h4a), (h4b) et (h4c)
Soit $p \in \mathbb{N} - \{0\}$. Ici aussi, on va avoir $\eta_{k,p} = \xi_{k,p}$. Dès lors, il suffit juste de vérifier (h4a) et (h4b), (h4c) étant alors vérifiée automatiquement.
En suivant toujours le même raisonnement que dans la section précédente, et en utilisant le W_1^--feuilletage (qui correspond aux matrices $h_1(\tau)$ transposés, tandis que le W_1^+-feuilletage correspond aux matrices $h_1(\tau)$), on voit qu'il existe $\tilde{E}_1$ et F_t, pour tout $t \in \Pi$, tels que (h4) soit vérifiée grâce au lemme 31.
• Vérification de (h5)
On suit là encore le même raisonnement que dans la section précédente. Ici aussi il faut remplacer l'ensemble sur lequel on travaille, $\tilde{I}_-(t)$, par l'ensemble $\tilde{\tilde{I}}_-(t)$ où :

$$\tilde{\tilde{I}}_-(t) = \{h \in [-\lceil \log(t) \rceil, 0] \mid \|\delta_h L\|^2 + M^{-2001} \leqslant 2\cosh(1)|\mathrm{Num}(e(\delta_h L))| \text{ et } |\mathrm{Num}(e(\delta_h L))| \leqslant \frac{1}{\epsilon_4 \log(t)} - M^{-2001}\},$$

Faire cela ne coûte qu'un $O(M^{-1000})$.
Pour mener à son terme le même raisonnement, il faut utiliser l'égalité exhibée dans la section précédente, à savoir

$$M\|h(\tau)\delta_k u\|^{-2} = M\|\delta_k u\|^{-2} + O(M^{-10^9+1})$$

(valable dès lors que le feuilletage utilisé soit suffisamment fin), utiliser le fait que

$$|\mathrm{Num}(e(h(\tau)\delta_k L))| = |\mathrm{Num}(e(\delta_k L))|(1 + O(\tau))$$

quand $\tau \to 0$ et utiliser le lemme 32.
• Vérification de (h6)
La vérification de (h6) se fait de manière tout à fait analogue à ce qui a été fait dans la section précédente.
• Vérification de (h7)
On dispose désormais d'un ensemble E que l'on a construit pour lequel (h1) jusqu'à (h6) sont vérifiées. Soient k, k' dans $[-M, 0]$ tels que $\hat{\lambda}(k) \geqslant \lambda_1(k') + R\log(M) \geqslant \lambda_1(k) + 2R\log(M)$. Soit $L \in E$ tel que $\xi_k(L) = \xi_{k,p}(L) = 1$ où $p \in \{0, \cdots, P-1\}$. On veut maintenant montrer, dans l'optique de vérifier (h7), que :

$$\mu_2(< e(\delta_k L), \delta_k^{-1}(e^M P^0) > (\mathrm{mod}\ 1) \in \tilde{\mathbf{X}}_{j,P} | \mathcal{F}_{k'})(L) = \mathrm{Leb}(\tilde{\mathbf{X}})_{j,P}(1 + o(1)).$$

En posant

$$h_\tau = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pour $\gamma_{k'} = F_{k'}(L)$, on a

$$\gamma_{k'} = \{h_\tau^T \overline{L}\}_{0 \leqslant \tau \leqslant (e^{\lambda_1(k')} M^{1000})^{-1}}$$

où $\overline{L} \in \mathscr{S}_2$.
Quitte à augmenter légèrement R, on peut supposer, grâce à (h5), que $\xi_{k,p} = 1$ sur γ, et donc, en particulier, en posant

$$e = (e_1, e_2) = e(\delta_k \overline{L}),$$

e vérifie :

$$2\cosh(1)|\mathrm{Num}(e)| > \|e\|^2 \ \textit{et}\ M|\mathrm{Num}(e)| \in \mathbf{X}_p.$$

Or, on a $\delta_k h_\tau^T = h_{e^{\lambda_1(k)}\tau}^T \delta_k$ et, quitte à prendre R assez grand, on peut supposer que $e^{\lambda_1(k)}\tau \leqslant 1$ et ainsi on a :

$$e(\delta_k h_\tau \overline{L}) = h_{e^{\lambda_1(k)}\tau}^T e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \tau e^{\lambda_1(k)} e_1 + e_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on obtient :

$$< e(\delta_k h_\tau^T L), \delta_k^{-1} e^M A_2 >= e_1 e^{-k} e^M (A_2)_1 + e_2 e^k e^M (A_2)_2 + e^{\lambda_1(k)} \tau e_1 e^k e^M (A_2)_2 (\text{mod } 1).$$

Or, vu les conditions que vérifie e, on a $|e_1| > \beta$ où β est une constante strictement positive. Par ailleurs, on a $e^M e^k e^{\lambda_1(k)} = e^{\hat{\lambda}(k)}$ (voir le début de la section 5.9) et τ varie dans un intervalle de longueur $(e^{\lambda_1(k')} M^{1000})^{-1}$. Ainsi, comme $\hat{\lambda}(k) \geqslant \lambda_1(k') + R\log(M)$, on obtient le résultat voulu comme $(A_2)_2 \neq 0$.

• Vérification de (h8)

On sait que : $F_{\overline{k}}(L) = \{h_\tau \overline{L}\}_{0 \leqslant \tau \leqslant (e^{\lambda_1(\overline{k})} M^{1000})^{-1}}$. D'après (h5), ξ_k vaut 1 sur $F_{\overline{k}}(L)$. Le calcul fait précédemment donne que :

$$< e(\delta_k h_\tau^T L), \delta_k^{-1} e^M A_2 >= e_1 e^{-k} e^M (A_2)_1 + e_2 e^k e^M (A_2)_2 + \tau e_1 e^{\hat{\lambda}(k)} (A_2)_2 + (\text{mod } 1).$$

Ainsi, si $\mathbf{1}_{\zeta_k \in \tilde{K}_p}$ n'est pas constant sur $F_{\overline{k}}(L)$, ζ_k est dans un $O(M^{-1000})$-voisinage de $\partial \tilde{\mathbf{X}}_p$. Si on pose

$$\begin{aligned} \tilde{E} = \{L \in E | \forall k,\ \overline{k} \in [-M, 0] \text{ avec } \lambda_1(\overline{k}) > \hat{\lambda}(k) + R\log(M) \text{ on a} \\ \forall p \in [0, P-1],\ \mathbf{1}_{\zeta_k \in \tilde{\mathbf{X}}_p} \text{ est constante sur } F_{\overline{k}}(L)\} \end{aligned}$$

alors (h8) est vérifiée sur $\tilde{E}$. Enfin le lemme 7 permet de montrer que $\mu_2(E - \tilde{E}) = O(M^{-998})$. □

On peut maintenant prouver le théorème 8 :

Démonstration du théorème 8. La proposition 20 et la proposition 19 donnent alors que la proposition 18 est vérifiée. La proposition 17 est donc acquise grâce au lemme **??**. D'où le résultat voulu grâce aux lemmes 1 et 3 et grâce à la proposition 9. □

5.5 Retour sur $\tilde{S}$ et preuve du théorème 1

On va maintenant démontrer le théorème 1 dans le cas de la dimension 2. On rappelle que la somme que l'on doit étudier est la suivante :

$$\tilde{S}(\tau, t, X, L) = \sum_{i=1}^{4} (-1)^i (\tilde{S}(\tau, t, A_i, I_2, X, L) - \tilde{S}(\tau, t, A_i, R, X, L)) \tag{65}$$

et les différentes sommes portent sur des termes $l \in L$ et non sur des termes $l \in L^\perp$.

Le cheminement pour prouver le théorème 1 dans ce cas est le suivant. Pour chaque terme en $\tilde{S}^\pm$, on réduit la somme correspondante grâce à ce qui a été fait dans la section précédente, les résultats s'étendant naturellement. Ensuite on regroupe ces 8 nouvelles sommes par de petits calculs. Enfin on conclut en suivant la même démarche que précédemment (application du théorème 4).

Plus précisément, après des réductions et des petits calculs, on voit que l'étude asymptotique de $\tilde{S}$ se ramène à l'étude de :

$$\Sigma(t,P,\epsilon,X,L) = \frac{2}{\pi^2\log(t)} \sum_{h\in\tilde{I}(L,t,\epsilon)} \frac{1}{\mathrm{Num}(l(L,h))} \tag{66}$$
$$\sum_{m\in\mathbb{N}-\{0\}} \frac{\sin(2m\pi(l(L,h))_1 t^+ a)\sin(2m\pi(l(L,h))_2 t^+ a)\cos(2m\pi < l(L,h), X >)}{m^2}.$$

Partant de là, la preuve du théorème 1 s'énonce de la manière suivante : On peut maintenant démontrer le théorème 1, dans le cas où $d = 2$, à laquelle cette section est dédiée.

Démonstration du théorème 1. En suivant la même méthode que dans la section précédente, via le théorème 4, on montre que :

— $(\mathrm{Num}(l(L,h)))_{h\in\tilde{I}(L,t,\epsilon)}$ converge vers un processus de Poisson sur $[-\frac{1}{\epsilon},\frac{1}{\epsilon}]$ d'intensité constante et strictement positive, indépendante de ϵ

— La suite de variables aléatoires $((l(L,h))_1 ta)_{h\in\tilde{I}(L,t,\epsilon)}$ à valeurs dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ convergent vers des variables aléatoires indépendantes de $(\mathrm{Num}(l(L,h)))_{h\in\tilde{I}(L,t,\epsilon)}$, indépendantes entre elles et de même loi

— La suite de variables aléatoires $((l(L,h))_2 ta)_{h\in\tilde{I}(L,t,\epsilon)}$ à valeurs dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ convergent vers des variables aléatoires indépendantes de $(\mathrm{Num}(l(L,h)))_{h\in\tilde{I}(L,t,\epsilon)}$, indépendantes entre elles et de même loi.

Enfin, on montre que à l'infini et modulo 1, la suite de variables aléatoires $((l(L,h))_1 ta)_{h\in\tilde{I}(L,t,\epsilon)}$ est indépendante de $((l(L,h))_2 ta)_{h\in\tilde{I}(L,t,\epsilon)}$.

Grâce à cela, on obtient que :

$$\Big(\sum_{m\in\mathbb{N}-\{0\}} \frac{\sin(2m\pi(l(L,h))_1 t^+ a)\sin(2m\pi(l(L,h))_2 t^+ a)\cos(2m\pi < l(L,h), X >)}{m^2}\Big)_{h\in\tilde{I}(L,t,\epsilon)}$$

convergent vers des variables aléatoires réelles indépendantes entre elles, ayant une loi commune qui est symétrique et dont le support est compact, et qui sont indépendantes asymptotiquement de $(\mathrm{Num}(l(L,h)))_{h\in\tilde{I}(L,t,\epsilon)}$. Le lemme 5 s'applique. Comme ce raisonnement fonctionne aussi en remplaçant t^+ par t^-, on obtient le résultat voulu. □

Ci-après, on expose d'abord la réduction que nous permet de faire la section précédente sur les 8 termes de la somme $\tilde{S}$ puis ensuite quelques petits calculs qui nous permettent de nous ramener à la somme Σ sous la forme ici exposée [9].

5.5.1 Réduction des 8 termes $\tilde{S}_1$ de $\tilde{S}$

En suivant ce qui a été fait tout le long de la section précédente et en posant (pour A un point de $\mathbb{R}^2$ et $R_1 \in SO_2(\mathbb{R})$) :

$$I(R_1,L,t,\epsilon) = \{h \in [-\lceil\log(t)\rceil, 0] \mid \|\delta_h R_1 L\|^2 < 2\cosh(1)|\mathrm{Num}(e(\delta_h R_1 L))| \text{ et } |\mathrm{Num}(e(\delta_h R_1 L))| \leqslant \frac{1}{\epsilon\log(t)}\} \tag{67}$$

9. Ces deux parties fonctionnent indépendamment de si l'on considère t^+ ou t^-.

$$G_1(\tau,t,A,R_1,X,l) = \sum_{m\in\mathbb{N}-\{0\}} \frac{\cos(2m\pi < l, t^+R_1A + R_1X >)}{m^2} \tag{68}$$

$$\Sigma_1(\tau,t,A,R_1,X,L) = \frac{2}{\log(t)}\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{h\in I(R_1,L,t,\epsilon)} \frac{1}{\mathrm{Num}(l(R_1L,h))} G_1(\tau,t,A,R_1,X,l(R_1L,h)) \tag{69}$$

$$\Sigma(\tau,t,X,L) = \sum_{i=1}^{4}(-1)^i(\tilde{S}_r(\tau,t,A_i,I_2,X,L) - \tilde{S}_r(\tau,t,A_i,R,X,L)) \tag{70}$$

on obtient la proposition suivante :

Proposition 21. *Pour tout $\alpha > 0$, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, pour tout t assez grand, on a*

$$\mathbf{P}(|\tilde{S}_1 - \Sigma| \leqslant \alpha) \leqslant \alpha.$$

On est donc ramené à l'étude de Σ [10].

5.5.2 Un dernier regroupement de termes

Le but de cette sous-sous-section est de voir que $\Sigma(\tau,t,X,L)$ s'écrit aussi :

Proposition 22.

$$\Sigma(t,P,\epsilon,X,L) = \frac{-1}{2\pi^2\log(t)} \sum_{h\in\tilde{I}(L,t,\epsilon)} \frac{1}{Num(l(L,h))} \sum_{m\in\mathbb{N}-\{0\}} \sum_{i=1}^{4}(-1)^i \frac{\cos(2m\pi < l(L,h), t^+A_i + X >)}{m^2} \tag{71}$$

où

$$\tilde{I}(L,t,\epsilon) = \{h \in [-\lceil\log(t)\rceil, \lceil\log(t)\rceil] \mid \|\delta_h L\|^2 < 2\cosh(1)|Num(e(\delta_h L))| \\ \text{et } |Num(e(\delta_h L))| \leqslant \frac{1}{\epsilon\log(t)}\}. \tag{72}$$

La clé de cette proposition est que quand on a un h qui est dans $I(R,L,t,\epsilon)$, $-h$ appartient à $I(I_2,L,t,\epsilon)$ et réciproquement. C'est juste la traduction du fait que si un vecteur $l \in L$ est grand en norme et « proche » de l'axe des abscisses, il est « loin » de l'axe des ordonnées et vice-versa [11].

Démonstration. Rappelons que $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Pour t assez grand, si on a h tel que $h \in I(I_2,L,t,\epsilon)$ alors

$$e(\delta_h L) = e(R\delta_{-h}RL) = \pm Re(\delta_{-h}RL)$$

et donc $-h \in I(R,L,t,\epsilon)$ et $\mathrm{Num}(e(\delta_h L)) = -\mathrm{Num}(e(\delta_{-h}RL))$.
En inversant le rôle de R et de I_2, on a de même.
En utilisant les équations (67), (68) et (70) et les remarques précédentes dans cette preuve, on obtient le résultat voulu en regroupant les termes correspondants aux différents drapeaux. □

10. Vu ce que l'on a noté tout au long du passage de $\tilde{S}_2$ à $\tilde{S}_9$, cette réduction s'applique aussi si l'on remplace t^+ par t^-.
11. Cette proposition est indépendante du fait que $t = t^+$. Elle est donc encore valable en remplaçant t^- par t^+.

5.5.3 Une dernière réécriture

Pour arriver à la formule finale de Σ donné en début de cette sous-section, nous avons besoin de réaliser une dernière réécriture des termes de la $\tilde{S}_{r,2}(t, P, \epsilon, X, L)$.
Rappelons que A_1 est de coordonnées $(a, -a)$, A_2 de coordonnées (a, a), A_3 de coordonnées $(-a, a)$ et A_4 de coordonnées $(-a, -a)$. Une utilisation des formules trigonométriques classiques donne alors :

Proposition 23.

$$\tilde{S}_{r,2}(t, P, \epsilon, X, L) = \frac{2}{\pi^2 \log(t)} \sum_{h \in \tilde{I}(L,t,\epsilon)} \frac{1}{Num(l(L,h))} \tag{73}$$

$$\sum_{m \in \mathbb{N} - \{0\}} \frac{\sin(2m\pi(l(L,h))_1 t^+ a) \sin(2m\pi(l(L,h))_2 t^+ a) \cos(2m\pi < l(L,h), X >)}{m^2}.$$

Cette proposition est encore valable si l'on remplace t^+ par t^-.

6 Conclusion

Nous avons donc démontré le théorème 1 qui s'énonce de la manière suivante :

Théorème. *Lorsque $L \in \mathscr{S}_2$ est distribué selon la mesure $\tilde{\mu}_2$ et X est distribué selon $\tilde{\lambda}_2$ alors on a :*

$$\frac{\mathcal{R}(t, P, X, L)}{\log(t)} \underset{t \to \infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{C}_c$$

où $\overset{\mathcal{L}}{\to}$ signifie que la convergence a lieu en loi et où $\mathcal{C}_c$ désigne une loi de Cauchy centrée.

Ce que ce théorème donne en substance c'est que l'erreur commise dans l'estimation de $N(tP + X, L)$ par la quantité Aire(tP) est, en moyenne spatiale (c'est-à-dire en faisant varier légèrement le réseau), exactement de l'ordre de $\log(t)$ quand t devient grand.
Dans un prochain article, nous nous intéresserons à un même type de problème mais en remplaçant le parallélogramme P par un ellipsoïde plein de dimension d, $\mathcal{E}^d$, avec $d \geqslant 2$, et montrerons le résultat suivant :

Théorème 9. *Lorsque $L \in \mathscr{S}_d$ est distribué selon une mesure $\tilde{\mu}_d$, de densité régulière et bornée par rapport à la mesure de Haar normalisée sur $\mathscr{S}_d$, on a :*

$$\frac{\mathcal{R}(t, \mathcal{E}^d, 0, L)}{t^{\frac{d-1}{2}}}$$

converge en loi quand $t \to \infty$. Par ailleurs, la loi limite admet un moment d'ordre 1, est d'espérance nulle et lorsque que l'on considère $\tilde{\mu}_d = \mu_d$, la loi limite n'admet pas de mot d'ordre 2.

Références

[1] Dmitry Dolgopyat and Bassam Fayad. Deviations of ergodic sums for toral translations ii. boxes. *arXiv preprint arXiv :1211.4323*, 2012.

[2] Dmitry Dolgopyat and Omri Sarig. Quenched and annealed temporal limit theorems for circle rotations. *Asterisque*, 415 :57–83, 2020.

[3] GH Hardy. The average order of the arithmetical functions p (x) and δ (x). *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1) :192–213, 1917.

[4] Henryk Iwaniec and CJ Mozzochi. On the divisor and circle problems. *Journal of Number theory*, 29(1) :60–93, 1988.

[5] Harry Kesten. Uniform distribution mod 1. *Annals of Mathematics*, pages 445–471, 1960.

[6] Harry Kesten. Uniform distribution mod 1 (ii). *Acta Arithmetica*, 4(7) :355–380, 1962.

[7] Jens Marklof and Zeev Rudnick. The n-point correlations between values of a linear form. Technical report, SCAN-9905042, 1998.

[8] Frédéric Paulin and Mark Pollicott. Logarithm laws for equilibrium states in negative curvature. *Communications in Mathematical Physics*, 346(1) :1–34, 2016.

[9] M. Skriganov. Ergodic theory on sl(n), diophantine approximations and anomalies in the lattice point problem. *Inventiones Mathematicae*, 132 :1–72, 04 1998.

[10] Ilya Vinogradov. Limiting distribution of visits of sereval rotations to shrinking intervals. *arXiv preprint arXiv :1005.1622*, 2010.