HAL
open science

Communication dans les réseaux de processeurs

Jean-Claude Bermond, Pierre Fraigniaud, Anne Germa, Marie-Claude Heydemann, Emmanuel Lazard, Philippe Michallon, André Raspaud, Dominique Sotteau, Michel Syska, Denis Trystram

To cite this version:

Jean-Claude Bermond, Pierre Fraigniaud, Anne Germa, Marie-Claude Heydemann, Emmanuel Lazard, et al.. Communication dans les réseaux de processeurs. Communications dans les réseaux de processeurs, Masson, 1994. hal-03220071

HAL Id: hal-03220071

https://hal.science/hal-03220071v1

Submitted on 4 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Communications dans les réseaux de processeurs

(chapitres 1 et 2)
Ouvrage collectif

Jean de RUMEUR

Auteurs

Jean-Claude BERMOND - Directeur de Recherches CNRS
I3S Sophia-Antipolis

Pierre FRAIGNIAUD - Chargé de Recherches CNRS
LIP-IMAG Lyon

Anne GERMA - Professeur
ENST Paris

Marie-Claude HEYDEMANN - Professeur
LRI Orsay

Emmanuel LAZARD[1] - Allocataire de Recherches
LRI Orsay

Philippe MICHALLON - Allocataire de Recherches
LMC-IMAG Grenoble

André RASPAUD[2] - Maître de Conférences
LaBRI Bordeaux

Dominique SOTTEAU - Directeur de Recherches CNRS
LRI Orsay

Michel SYSKA[3] - Allocataire de Recherches
I3S Sophia-Antipolis

Denis TRYSTRAM - Professeur
LMC-IMAG Grenoble

avec la collaboration de

Eric DARROT - Allocataire de Recherches, *I3S Sophia-Antipolis*
Daniel LAFAYE DE MICHEAUX - Maître de Conférences, *I3S Sophia-Antipolis*

---

[1] E. Lazard est maintenant Maître de Conférences au LAMSADE (Paris-Dauphine).
[2] A. Raspaud est aujourd'hui Professeur.
[3] M. Syska a obtenu un poste de Maître de Conférences.

CHAPITRE **1**

Eléments de théorie des graphes

Un réseau d'interconnexion peut se modéliser à l'aide d'un graphe, tel que nous le définirons formellement ci-après. Les sommets représentent les processeurs ou les machines interconnectés, et les arêtes (resp. les arcs) représentent les liens physiques bidirectionnels (resp. unidirectionnels) entre ces processeurs ou ces machines. Un certain nombre de paramètres usuels en théorie des graphes sont associés à des propriétés physiques ou à des performances des réseaux modélisés.

Ainsi, le nombre de liens de communication (les «pattes») issus d'un processeur correspond au degré du sommet associé en théorie des graphes. L'acheminement (routage) d'un message est décrit par la chaîne (ou chemin, en orienté) qui représente la suite des liens sur lesquels est transmis le message (voir chapitre 4). Le temps de transmission d'un message dans le réseau est lié, comme on le verra dans le même chapitre, à la longueur du chemin utilisé, et en particulier au diamètre du graphe. Les propriétés de vulnérabilité ou de tolérance aux pannes peuvent être étudiées à l'aide des diverses notions de connexité de la théorie des graphes. L'existence de sous-graphes se ramène à la notion de plongement (voir chapitre 5). En particulier, c'est le cas pour l'existence d'un anneau reliant tous les processeurs, qui correspond, en théorie des graphes, à l'existence d'un cycle hamiltonien. Bien d'autres propriétés des réseaux nécessitent des outils de théorie des graphes (à noter que certains auteurs parlent dans ce cas-là de propriétés topologiques des réseaux et utilisent le mot «topologie» au lieu de «graphe»).

Les graphes sont aussi susceptibles de modéliser un algorithme parallèle, comme cela sera précisé dans le chapitre 5. Il est donc nécessaire de connaître quelques rudiments de cette théorie dès le début de ce livre.

1.1 Définitions et propriétés des graphes

1.1.1 Quelques définitions de théorie des graphes

Nous donnons ici les définitions nécessaires à la bonne lecture de ce livre. Les définitions et résultats non rappelés ici peuvent se trouver par exemple dans [4], [9] ou [15].

- Un *graphe orienté* (en anglais, *digraph*) G est constitué d'un ensemble V fini d'éléments $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, appelés *sommets*, et d'une famille U d'éléments du produit cartésien $V \times V$, appelés *arcs*. Un élément (x, y) de $V \times V$ peut apparaître plusieurs fois dans la famille U.

- Le nombre de sommets du graphe est appelé *ordre* du graphe et est noté N.

- Un arc de G de la forme (x, x) est appelé *boucle* (*loop*). Si $u = (x, y)$ est un arc, alors le point x est son *extrémité initiale* et le point y, son *extrémité terminale*.

- Un graphe est dit *orienté symétrique* si, lorsque (x, y) est un arc du graphe, alors (y, x) en est un aussi.

- On dit que y est un *successeur* de x s'il existe un arc ayant son extrémité initiale en x et son extrémité terminale en y. L'ensemble des successeurs de x se note $\Gamma_G^+(x)$. Le *demi-degré extérieur* (*out-degree*) de x, noté $d^+(x)$, est le nombre d'arcs d'extrémité initiale x.

  On peut définir de manière analogue les *prédécesseurs* de x par l'ensemble $\Gamma_G^-(x)$ et le *demi-degré intérieur* (*in-degree*) de x, noté $d^-(x)$.

  Remarquons que $\sum_{i=1}^N d^-(x_i) = \sum_{i=1}^N d^+(x_i)$, ces deux valeurs étant égales au nombre d'arcs de G.

- Dans un grand nombre de cas, la distinction entre extrémité initiale et terminale des arcs n'est pas pertinente. Aussi a-t-on introduit la notion de (multi)*graphe non orienté*, où l'on substitue à l'arc (x, y) l'ensemble formé par les deux sommets x et y, que l'on note $[x, y]$ et que l'on appelle *arête* du (multi)graphe.
  Lorsque l'on est amené à considérer plusieurs arêtes ayant les mêmes extrémités, on parle d'*arête multiple* et de *multigraphe*. Si ce (multi)graphe ne comporte ni boucle, ni arête multiple, on est en présence d'un *graphe simple*. On note E l'ensemble des arêtes d'un (multi)graphe.

- Deux sommets sont dits *adjacents* s'ils sont extrémités d'une même arête, qui leur est alors *incidente* (on parle aussi de sommet *incident* à une arête).

- Deux arêtes ayant une extrémité en commun sont dites *incidentes*, ou parfois *adjacentes*.

- Dans ce chapitre ainsi que dans l'ensemble de ce livre, nous appellerons — par abus de langage — graphes (sans autre adjectif) les graphes simples. Afin de ne pas être ambigus, nous préciserons au contraire, s'il en est besoin, que nous considérons un graphe orienté.

- Nous noterons par G^* le graphe orienté symétrique associé au graphe G, obtenu en remplaçant chaque arête $[x, y]$ par les arcs (x, y) et (y, x).

- Etant donné un sommet x d'un graphe G, on appelle *degré* (*degree*) de x et on note $d_G(x)$, que l'on simplifie en $d(x)$ lorsqu'aucune confusion n'est possible, le nombre d'arêtes incidentes à x.

  On appelle *degré maximum* de G et on note Δ, le maximum, pris sur tous les sommets x de G, du degré de x.

  On appelle *degré minimum* de G et on note δ, le minimum, pris sur tous les sommets x de G, du degré de x.

  On a la proposition suivante (voir exercice 1.5.1) :

  Proposition 1.1.1 — *Le nombre m d'arêtes d'un graphe G vérifie :*

$$2m = \sum_{i=1}^{N} d(x_i)$$

- Un graphe est dit *régulier* si tous ses sommets ont même degré, c'est-à-dire si $\Delta = \delta$.

- On appelle *chaîne* (*path*) entre deux sommets x et y d'un graphe G, une suite de sommets $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dont deux consécutifs sont adjacents, avec $x_1 = x$ et $x_k = y$. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même sommet est dite *élémentaire*. On parlera le plus souvent de chaîne, sans spécifier qu'elle est élémentaire.

  La *longueur d'une chaîne* est le nombre d'arêtes de cette chaîne et on note P_N la chaîne (élémentaire) à N sommets, de longueur $N - 1$.

- Etant donnés deux sommets x et y d'un graphe G, on appelle *distance* entre x et y et on note $d_G(x, y)$, que l'on simplifie en $d(x, y)$ lorsqu'aucune confusion n'est possible, la longueur d'une plus courte chaîne d'extrémités x et y.

- On appelle *diamètre* d'un graphe G et on note D ou $D(G)$, le maximum, pris sur toutes les paires de sommets x et y de G, de la distance entre x et y.

- On appelle *cycle* dans un graphe, une chaîne dont les extrémités initiale et finale sont confondues. Le plus souvent, lorsque l'on parlera de cycle, il s'agira de *cycle élémentaire*, c'est-à-dire n'utilisant pas deux fois le même sommet.

  On appelle *longueur d'un cycle* le nombre d'arêtes (ou de sommets) de ce cycle et on note C_N, le cycle de longueur N.

- On appelle *cycle hamiltonien* un cycle passant, une fois et une seule, par tous les sommets d'un graphe G. Un tel cycle est de longueur N, ordre de G.

  Un graphe qui possède un cycle hamiltonien est dit *graphe hamiltonien.*

- On appelle *cycle eulérien* un cycle passant, une fois et une seule, par toutes les arêtes d'un graphe G.

  Un graphe qui possède un cycle eulérien est dit *graphe eulérien.*

- On peut définir les mêmes notions pour les graphes orientés. On parle alors de *chemin* (*dipath*) au lieu de chaîne, deux sommets consécutifs étant joints par un arc. Notez que dans ce cas, la distance ne possède plus la propriété de symétrie, les plus courts chemins de x à y étant différents de ceux de y à x.

  On appelle *circuit* un cycle orienté.

- On appelle *routage* la donnée, pour tout couple de sommets (x, y) d'un graphe (resp. graphe orienté), d'une chaîne (resp. chemin) reliant x à y. Si toutes les chaînes (resp. chemins) sont de longueur minimum, on parle de *routage des plus courtes chaînes* (resp. *routage des plus courts chemins*). En non orienté, on n'impose pas que la chaîne de x à y soit la même que celle de y à x.

- Un graphe G est dit *connexe* (*connected*) si deux sommets quelconques de G sont reliés par une chaîne.

  Un graphe orienté G est dit *fortement connexe* (*strongly connected* ou *strong digraph*) si, pour tout couple de sommets x et y de G, il existe toujours un chemin de x à y.

- Dans le vocabulaire de la théorie des graphes, on appelle *arbre* (*tree*) un graphe connexe et sans cycle. On peut démontrer très facilement qu'un arbre d'ordre N a $N - 1$ arêtes.

  En informatique, le mot «arbre» est souvent utilisé pour désigner un arbre orienté avec un sommet distingué appelé *racine*, tel qu'il existe un chemin unique de la racine vers tout sommet (ceci s'appelle *arborescence* en théorie des graphes). Dans ce cas, les successeurs d'un sommet sont appelés les *fils* de ce sommet (qui en est alors le *père*).

Dans le cas non orienté, on définit aussi les *arbres racinés*, où un sommet privilégié est fixé.

On appelle *feuille* (*leaf*) d'un arbre, un sommet de degré 1.

- On appelle *hauteur* ou *profondeur* (*depth*) d'un arbre raciné, la plus grande distance de la racine à une feuille.

- On appelle *arbre binaire* (*binary tree*) un graphe défini récursivement comme suit : un tel arbre est soit vide, soit constitué d'un sommet (la racine), lequel peut avoir au plus deux fils, qui sont eux-même des arbres binaires. On distingue le plus souvent les deux fils d'un sommet en parlant de fils gauche et de fils droit. Une définition analogue peut être donnée pour un *arbre k-aire*.

- Un arbre binaire de profondeur h ayant $2^{h+1} - 1$ sommets est appelé *arbre binaire complet*.

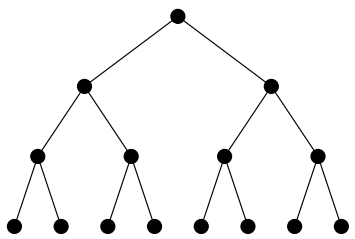


Figure 1.1 - Arbre binaire complet de profondeur 3

- On appelle *couplage* (*matching*) un ensemble d'arêtes deux à deux non incidentes. Etant donné un couplage d'un graphe G, un sommet de G incident à une arête du couplage est dit *saturé* par le couplage. On appelle *couplage parfait* (*perfect matching*) un couplage qui sature tous les sommets de G.

- On appelle *indice chromatique* (*chromatic index*) d'un graphe G, le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes de G, de sorte que deux arêtes incidentes soient de couleurs différentes. Chaque ensemble d'arêtes de même couleur forme donc un couplage.

- On appelle *stable* (*independent set*) d'un graphe, un ensemble de sommets deux à deux non adjacents de ce graphe.

- On appelle *nombre chromatique* (*chromatic number*) d'un graphe G, le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de G, de sorte que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes. Chaque ensemble de sommets d'une même couleur forme donc un stable.

- Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* s'il existe une partition de V en deux classes V_1 et V_2, telle que tout élément de E a une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2. Ceci implique que les deux classes de sommets V_1 et V_2 sont des stables (le nombre chromatique de G est 2). Une caractérisation importante est donnée dans la proposition suivante, dont la démonstration est laissée en exercice (exercice 1.5.2).

  Proposition 1.1.2 — *Un graphe G est biparti si et seulement si il n'admet pas de cycle de longueur impaire.*

- On appelle *bissection-arête* (*bisection width*) d'un graphe G, le nombre minimum d'arêtes qu'il faut supprimer pour déconnecter G en deux parties ayant le même nombre de sommets (à un près si l'ordre de G est impair).

- Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont dits *isomorphes* si et seulement si il existe une bijection f de V sur V', telle que, pour tous sommets x et y de V, $[x, y]$ est élément de E si et seulement si $[f(x), f(y)]$ est élément de E'.

- Soient G et H deux graphes simples non orientés. Un *plongement* du graphe G dans le graphe H est défini par la donnée d'une application f de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des sommets de H et d'une application P_f de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble des chaînes de H, qui associe à chaque arête $[x, y]$ de G, une chaîne entre les sommets $f(x)$ et $f(y)$ dans H.

- On appelle *sous-graphe* (*induced subgraph*) d'un graphe $G = (V, E)$, un graphe $G' = (V', E')$ dont l'ensemble des sommets V' est inclus dans V et l'ensemble des arêtes E' est la restriction de E à $V' \times V'$.

- On dit que $G' = (V', E')$ est un *graphe partiel* de G si $V' = V$ et $E' \subseteq E$ (G' peut être vu comme étant obtenu à partir de G en supprimant des arêtes).
  Dans la littérature anglaise, on parle de *spanning subgraphs*. Le mot anglais «*subgraph*» correspond à ce qui est appelé en français un sous-graphe partiel. Lorsqu'un arbre T est un graphe partiel d'un graphe G, l'arbre T est dit arbre *de recouvrement* de G ou *couvrant* G.

- La *somme cartésienne* (*cartesian sum*, souvent appelée *cartesian product*) de deux graphes G et G', que nous noterons $G \square G'$, est le graphe dont les sommets sont tous les couples (x, x') où x est un sommet de G et x' est un sommet de G'. Deux sommets (x, x') et (y, y') de $G \square G'$ sont adjacents si et seulement si $x = y$ et $[x', y']$ est une arête de G' ou si $x' = y'$ et $[x, y]$ est une arête de G. Des exemples seront donnés dans la section 1.2.

Théorème 1.1.3 — *Le diamètre de la somme cartésienne de deux graphes est la somme des diamètres de ces graphes.*

La démonstration de ce théorème est laissée à titre d'exercice (voir exercice 1.5.3).

1.1.2 Connexité

On désire qu'un réseau continue de fonctionner si un processeur ou un lien tombe en panne, c'est-à-dire que le graphe reste au moins connexe. Dans ce cas, on dit que le réseau possède de bonnes propriétés de *connexité*. On peut aussi souhaiter que, toujours en cas de panne, certains de ses paramètres varient peu (faible augmentation du diamètre, etc.). Dans ce cas, on dit plutôt que le réseau a une faible *vulnérabilité* ou une bonne *tolérance aux pannes* (*fault-tolerance*).

- La *sommet-connexité*, appelée aussi *connexité* (resp. *arête-connexité*), d'un graphe connexe G, notée $\kappa(G)$ (resp. $\lambda(G)$), est le nombre minimum de sommets (resp. arêtes) qu'il faut supprimer pour que G ne soit plus connexe ou qu'il soit réduit à un sommet unique.
- La *forte connexité* (resp. *arc-connexité*) d'un graphe orienté fortement connexe G, notée aussi $\kappa(G)$ (resp. $\lambda(G)$), est le nombre minimum de sommets (resp. arcs) qu'il faut supprimer pour que G ne soit plus fortement connexe ou soit réduit à un sommet unique.
- On dit que G est *k-connexe* (resp. *k-fortement connexe*) si $\kappa(G) \geq k$, c'est-à-dire si G est connexe (resp. fortement connexe) et reste connexe (resp. fortement connexe) après suppression d'au plus $k-1$ sommets.
- De la même façon, on dit que G est *k-arête-connexe* (resp. *k-arc-connexe*) si $\lambda(G) \geq k$, c'est-à-dire si G est connexe (resp. fortement connexe) et reste connexe (resp. fortement connexe) après suppression d'au plus $k-1$ arêtes (resp. arcs).

La proposition suivante, dont la preuve est laissée en exercice (voir exercice 1.5.4), relie la connexité et le degré minimum.

Proposition 1.1.4 — *Pour tout graphe G, $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

La détermination des connexités peut se faire à l'aide des théorèmes de Menger (théorèmes de style «minimax», voir [4] et [9]), dont on donne une version locale, puis globale.

Théorème 1.1.5 — *Soient s et t deux sommets d'un graphe orienté G. Le nombre minimum d'arcs à supprimer pour détruire tous les chemins de s à t est égal au nombre maximum de chemins deux à deux arc-disjoints de s à t.*

Théorème 1.1.6 — *Un graphe G orienté est k-arc-connexe si et seulement si il existe, pour tout couple de sommets (x, y) de G, k chemins deux à deux arc-disjoints de x à y.*

On obtient aisément des versions non orientées de ces théorèmes en associant à un graphe non orienté G, le graphe orienté symétrique G^*. Le résultat se déduit du fait qu'il y a correspondance entre les chaînes de G et les chemins de G^*.

Les versions concernant les sommet-connexités peuvent s'obtenir à partir de celles concernant les arête(ou arc)-connexités (voir exercice 1.5.5) :

Théorème 1.1.7 — *Soient s et t deux sommets non adjacents d'un graphe orienté G. Le nombre minimum de sommets à supprimer dans G pour détruire les chemins de s à t est égal au nombre maximum de chemins deux à deux sommet-disjoints de s à t.*

1.2 Paramètres des réseaux classiques

Pour familiariser le lecteur avec les notions introduites ci-dessus, nous allons définir un certain nombre de graphes classiques et en calculer les paramètres. Certains de ces calculs seront laissés en exercice. D'autres graphes seront définis et étudiés dans le chapitre 2.

1.2.1 Le cycle

On appelle *cycle* ou *anneau d'ordre N* et on note C_N, le graphe connexe régulier (tous les sommets ont même degré) de degré 2, à N sommets.

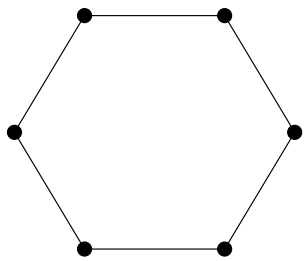


Figure 1.2 - Cycle de longueur 6

L'anneau est un réseau très utilisé à cause de sa structure simple et de sa facilité d'extension (par exemple, le *token-ring* d'IBM). De plus, de nombreux algorithmes ont été écrits pour l'anneau. Le problème du plongement d'un anneau dans un graphe hôte de même ordre est donc important. Il revient à déterminer si le graphe hôte est hamiltonien (voir chapitre 5).

Le diamètre et les connexités de l'anneau se calculent facilement en utilisant l'existence de deux chaînes de longueur k et $N-k$ entre deux sommets quelconques. Le diamètre de C_N est $\frac{N}{2}$ si N est pair et $\frac{N-1}{2}$ si N est impair. La connexité et l'arête-connexité de C_N sont égales à 2.

Une structure analogue à l'anneau dans le cas orienté est le circuit $\vec{C}_N$. Dans $\vec{C}_N$, il existe un chemin unique d'un sommet x à un sommet y. Le diamètre est $N-1$ et la forte connexité 1.

1.2.2 Le graphe complet

On appelle *graphe complet d'ordre* N et on note K_N, le graphe à N sommets dont deux sommets quelconques sont adjacents. Tout sommet est de degré $N-1$. La distance entre deux sommets quelconques est 1, donc le diamètre de K_N est égal à 1. Par définition, la connexité de K_N est $N-1$.

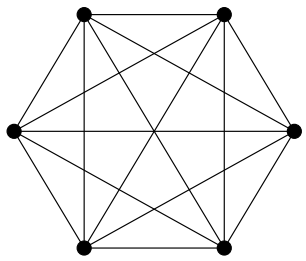


Figure 1.3 - Graphe complet d'ordre 6

Il s'agit là aussi d'un réseau très courant, en particulier pour interconnecter un petit nombre de processeurs. De nombreux algorithmes ont été écrits pour cette structure. En effet, K_N contient comme sous-graphes des cycles de toutes longueurs i (prendre par exemple le cycle $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_1$) et en particulier est hamiltonien. On peut montrer qu'il admet le plus grand nombre possible de cycles hamiltoniens deux à deux arête-disjoints, à savoir $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ (exercice 1.5.6).

On utilise aussi K_N^*, *graphe complet orienté symétrique*, dans lequel il existe un arc de tout sommet x vers tout sommet y. Le diamètre de K_N^* est 1. Pour tout sommet x, $d^+(x) = d^-(x) = N-1$ et la forte connexité est $N-1$. K_N^* est aussi hamiltonien : on peut montrer qu'il admet $N-1$ circuits hamiltoniens deux à deux arc-disjoints, sauf pour $N = 4$ ou 6. Ceci est une conséquence du résultat de l'exercice 1.5.6 dans le cas où N est impair. La démonstration est nettement plus compliquée quand N est pair et est due à Tillson [17].

Graphe complet biparti

On appelle *graphe complet biparti*, noté K_{n_1,n_2}, le graphe biparti $G = (V, E)$ avec $V = V_1 \cup V_2$, $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$ et dans lequel tout sommet de V_1 est joint à tout sommet de V_2. K_{n_1,n_2} a $n_1 + n_2$ sommets et $n_1 n_2$ arêtes. Le degré d'un sommet de V_1 est n_2 et le degré d'un sommet de V_2 est n_1. Le diamètre est 2.

1.2.3 L'hypercube

On appelle *hypercube de dimension* n et on note $H(n)$, le graphe dont les sommets sont les mots de longueur n sur un alphabet à deux lettres 0 et 1, et dont deux sommets sont adjacents si et seulement si ils diffèrent en une seule coordonnée. Un sommet, noté $x_1 x_2 \cdots x_i \cdots x_n$, est donc relié aux sommets $x_1 x_2 \cdots \overline{x_i} \cdots x_n$, avec $i = 1, 2, \ldots, n$.

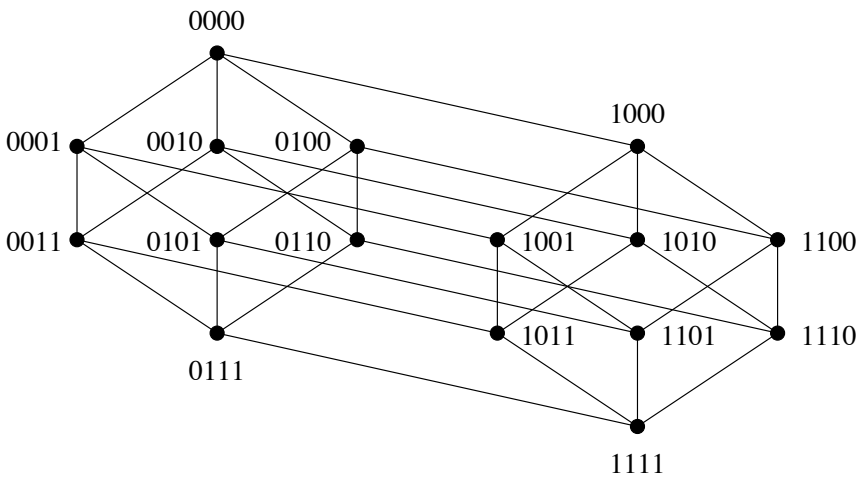


Figure 1.4 - Hypercube de dimension 4 représenté par niveaux

$H(n)$ a 2^n sommets et est régulier de degré n. On parle aussi de n-cube au lieu d'hypercube de dimension n. On peut remarquer que $H(1)$ est le graphe isomorphe à une arête, $H(2)$ est isomorphe à C_4 et $H(3)$ peut se voir comme le cube classique.

L'hypercube est un réseau utilisé dans plusieurs machines parallèles comme les nCUBE de nCUBE, les iPSC-1, 2 et 860 d'Intel ou les Connection Machines (CM-1 ou CM-2) (voir annexe B). Un de ses avantages principaux réside dans sa structure récursive, très adaptée à de nombreux algorithmes. En effet, $H(n)$ est obtenu à partir de deux copies de $H(n-1)$ en reliant par une arête les sommets représentés par les mêmes mots. Les sommets du nouvel hypercube sont obtenus en préfixant les sommets des deux copies respectivement par 0 et par 1. On peut résumer ceci dans la proposition suivante :

Proposition 1.2.1 — *L'hypercube peut être défini récursivement à partir du graphe complet d'ordre* 2 *:*

$$H(n) = K_2 \square H(n-1) = \underbrace{K_2 \square K_2 \square \cdots \square K_2}_{n \text{ fois}}$$

En utilisant le théorème 1.1.3 et la proposition 1.2.1, on obtient que le diamètre de l'hypercube $H(n)$ est n. De plus, on peut aisément décrire un routage des plus courts chemins : pour aller d'un sommet x à un sommet y qui diffère de x en exactement k coordonnées, on emprunte k arêtes qui permettent d'échanger les coordonnées qui diffèrent (on parle souvent de changer de dimension). Il y a $k!$ ordres possibles pour les changements de dimension et donc $k!$ plus courts chemins entre x et y. Le routage le plus utilisé consiste à changer les coordonnées dans l'ordre croissant (ou décroissant). Il est alors dit *ascend* (ou *descend*).

On peut montrer, par induction, qu'entre deux sommets quelconques de l'hypercube, il existe n chaînes deux à deux sommet-disjointes, ce qui prouve que sa sommet-connexité (et donc son arête-connexité) est égale au degré, n. La proposition suivante est une proposition plus forte, dont la preuve est laissée en exercice (voir exercice 1.5.7).

Proposition 1.2.2 — *Il existe $n-1$ chaînes de longueur inférieure ou égale à n et une chaîne de longueur inférieure ou égale à $n+1$, deux à deux sommet-disjointes, entre toute paire de sommets distincts de l'hypercube de dimension n.*

On montre aussi, par induction sur n, que $H(n)$ est hamiltonien. Il suffit de prendre une chaîne hamiltonienne d'un des sous-hypercubes $H(n-1)$ et de la connecter à la même chaîne hamiltonienne de l'autre $H(n-1)$ par deux arêtes de la dimension n. Le cycle ainsi obtenu définit ce qu'on appelle un *code de Gray réfléchi* (voir chapitre 5, en particulier l'exercice 5.3.5).

Il est également possible, mais beaucoup plus difficile, d'exhiber $\frac{n}{2}$ cycles hamiltoniens deux à deux arête-disjoints dans l'hypercube $H(n)$ si n est pair, ou $\frac{n-1}{2}$ cycles hamiltoniens et un couplage parfait si n est impair [3].

L'hypercube contient de nombreuses autres sous-structures (voir le chapitre 5).

1.2.4 La grille

Etant donnés n entiers p_i tels que, pour tout i de 1 à n, $p_i \geq 2$, la *grille de dimension* n, appelée aussi *grille n-dimensionnelle* et notée $M(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, est la somme cartésienne de n chaînes de p_i sommets, soit $P_{p_1} \square P_{p_2} \square \ldots \square P_{p_n}$. Les sommets de la grille sont les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, avec $x_i = 1, 2, \ldots, p_i$

et $i = 1, 2, \ldots, n$. Une arête joint deux sommets qui diffèrent de 1 sur l'une des coordonnées.
Le nombre de sommets de la grille est égal au produit des longueurs des chaînes. Son degré maximum vaut $2n$ et son degré minimum vaut n. On peut déduire du théorème 1.1.3 que le diamètre de la grille de dimension n est $\sum_{i=1}^{n}(p_i - 1)$. Grâce aux théorèmes de Menger, on peut calculer les connexités qui valent n.

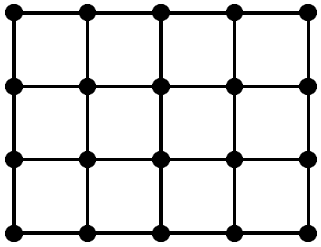


Figure 1.5 - Grille $M(4,5)$

Si tous les p_i sont impairs, on peut montrer, en utilisant le fait que la grille est un graphe biparti, qu'elle n'admet pas de cycle hamiltonien (exercice 1.5.8 a). Par contre, si au moins un des p_i est pair, la grille admet au moins un cycle hamiltonien. La démonstration pour le cas 2-dimensionnel est proposée dans la correction de l'exercice 1.5.8 b.

1.2.5 La grille torique

Etant donnés n entiers p_i tels que, pour tout i de 1 à n, $p_i \geq 2$, la *grille torique de dimension* n, ou *tore*, notée $TM(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, est la somme cartésienne de n cycles de p_i sommets.
C'est un graphe régulier de degré $2n$ et son ordre est le même que celui de la grille $M(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de même dimension. On détermine son diamètre, qui vaut $\sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{p_i}{2} \rfloor$, en utilisant le théorème 1.1.3.

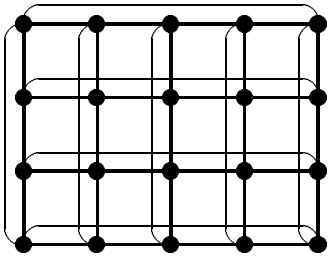


Figure 1.6 - Grille torique $TM(4,5)$

D'une manière analogue à celle utilisée pour la grille, on montre que la grille torique est toujours hamiltonienne.

1.3 Problème (Δ, D)

Un des problèmes qui peuvent se poser dans la réalisation de réseaux est la construction de graphes de diamètre D, de degré maximum Δ fixés et ayant le maximum de sommets. Ce problème a été posé en 1964 par Elspas [12] sous la forme suivante : «Quel est le nombre maximum de sommets d'un (Δ, D)-graphe, un (Δ, D)-graphe étant un graphe de degré maximum Δ et de diamètre D ?» On note $N(\Delta, D)$ le nombre maximum de sommets d'un (Δ, D)-graphe.

Pour des références sur ce problème, le lecteur pourra consulter les livres [7] et [11] pour des majorants de $N(\Delta, D)$, et les deux synthèses [5] et [6] pour des minorants de $N(\Delta, D)$ et un état de l'art sur les (Δ, D)-graphes ayant le maximum de sommets connus actuellement.

Proposition 1.3.1 (E. F. Moore, 1958) — *On a l'inégalité suivante :*

$$N(\Delta, D) \leq 1 + \Delta + \Delta(\Delta - 1) + \cdots + \Delta(\Delta - 1)^{D-1}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} N(\Delta, D) &\leq \frac{\Delta(\Delta-1)^D - 2}{\Delta - 2} \quad \textit{pour} \quad \Delta \geq 3 \\ \textit{et} \quad N(2, D) &\leq 2D + 1 \end{aligned}$$

Preuve. Soient $G = (V, E)$ un (Δ, D)-graphe et x_0 un sommet de G. On pose $\Gamma_i(x_0) = \{y \in V \mid d(x_0, y) = i\}$ pour $1 \leq i \leq D$. Il est clair que :

$$V = \{x_0\} \bigcup \bigcup_{i=1}^{D} \Gamma_i(x_0)$$

D'autre part, pour tout i différent de j, on a $\Gamma_i(x_0) \bigcap \Gamma_j(x_0) = \emptyset$. Donc :

$$N = 1 + \sum_{i=1}^{D} |\Gamma_i(x_0)|$$

Enfin, $|\Gamma_1(x_0)| \leq \Delta$ et, pour $k \geq 2$, $|\Gamma_k(x_0)| \leq (\Delta - 1)\,|\Gamma_{k-1}(x_0)|$ car G est de degré maximum Δ. Donc, par induction :

$$|\Gamma_k(x_0)| \leq \Delta(\Delta - 1)^{k-1}$$

Alors, on a :

$$N \leq 1 + \Delta + \Delta(\Delta - 1) + \cdots + \Delta(\Delta - 1)^{D-1}$$

- si $\Delta = 2$: $N \leq 2D + 1$ (borne atteinte par le cycle C_{2D+1})
- si $\Delta \geq 3$: $N \leq \dfrac{\Delta(\Delta-1)^D - 2}{\Delta - 2}$

□

La borne obtenue sur le nombre maximum de sommets d'un (Δ, D)-graphe est appelée *borne de Moore*. Les *graphes de Moore* sont les (Δ, D)-graphes atteignant cette borne. On remarque que, si G est un graphe de Moore, alors, pour tout i allant de 1 à D, on a $|\Gamma_i(x_0)| = \Delta(\Delta-1)^{i-1}$ et tous les sommets de l'ensemble $\{x_0\} \bigcup \bigcup_{i=1}^{D-1} \Gamma_i(x_0)$ sont de degré Δ. Etant donné que l'on veut le nombre maximum de sommets, tous les sommets dans chaque $\Gamma_i(x_0)$ sont distincts et non adjacents pour tout $i \in [1, D-1]$, donc le graphe $G - E(\Gamma_D(x_0))$ est un arbre. La taille g du plus petit cycle, appelée *maille* (*girth*) de G, est donc égale à $2D+1$.

Dans le cas des graphes bipartis, le nombre maximum de sommets d'un graphe de diamètre D et de degré maximum Δ se note $b(\Delta, D)$ et vérifie le résultat suivant :

Proposition 1.3.2 — *Le nombre maximum de sommets d'un graphe biparti de diamètre D et de degré maximum Δ, noté $b(\Delta, D)$, vérifie :*

$$\begin{aligned} b(2, D) &= 2D \\ b(\Delta, D) &\leq 2\left(\frac{(\Delta-1)^D - 1}{\Delta - 2}\right) \quad \textit{pour} \quad \Delta \geq 3 \end{aligned}$$

PREUVE. Dans le cas du degré 2, le graphe, étant de diamètre fini, est connexe. Il est donc réduit à un cycle qui est nécessairement pair, puisque le graphe est biparti. L'ordre du graphe est alors le double de son diamètre.
Considérons maintenant le cas où $\Delta \geq 3$. Etant donnée $[x, y]$, une arête de G, on fait une sorte de mise en niveaux de G à partir de cette arête, de la façon suivante : x et y sont au niveau 0. Une fois les niveaux de 1 à i construits, on met dans le niveau $i+1$ les sommets de G non encore rencontrés et à distance $i+1$ de x ou de y. Remarquons que le graphe étant biparti, et donc sans cycle de longueur impaire, un sommet ne peut pas être à la même distance de x et de y. Le nombre de niveaux ainsi construits est égal à au plus $D-1$. Supposons en effet qu'il soit supérieur ou égal à D. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que l'on a trouvé un sommet à distance D de x : ce sommet est alors à distance $D+1$ de y, ce qui est contraire à la définition de D. Un sommet de tout niveau i a au plus $\Delta - 1$ voisins dans le niveau $i+1$. Ceci achève la preuve et permet de trouver la borne annoncée : $b(\Delta, D) \leq 2(1 + (\Delta-1) + \cdots + (\Delta-1)^{D-1})$. □

En fait, il existe peu de graphes de Moore, comme le précisent les deux théorèmes ci-dessous, dûs à différents auteurs (voir les livres [7] et [11]). La démonstration utilise des résultats sur les valeurs propres de la *matrice d'adjacence* associée au graphe (c'est une matrice $N \times N$, dont les lignes et les colonnes sont indicées par les sommets du graphe ; l'élément de la ligne x et de la colonne y vaut 1 si et seulement si les sommets x et y sont adjacents, sinon il vaut 0). La démonstration, dans le cas des graphes de Moore de diamètre 2, est donnée dans la correction de l'exercice 1.5.9.

Théorème 1.3.3 — *Les graphes de Moore existent seulement pour :*

- $\Delta = 2$, *ce sont les cycles* C_{2D+1}.
- $D = 1$, *ce sont les graphes complets* $K_{\Delta+1}$.
- $D = 2$ *et* $\Delta = 3$, *c'est le graphe de Petersen (voir la définition ci-après).*
- $D = 2$ *et* $\Delta = 7$, *c'est le graphe de Hoffman-Singleton [9].*
- *Peut-être pour* $D = 2$ *et* $\Delta = 57$.

REMARQUE. On ne sait toujours pas aujourd'hui si un graphe de Moore de diamètre $D = 2$ et de degré maximum $\Delta = 57$ existe, mais s'il existe, il a 3250 sommets et n'est pas sommet-transitif [6].

DEFINITION. Le *graphe de Petersen* est le graphe d'ordre 10, régulier de degré 3, et de diamètre 2 (cette définition conduit à la représentation donnée sur la partie gauche de la figure 1.7). Une représentation plus classique consiste à le voir comme l'union de deux cycles de longueur 5, joints par un couplage (partie droite de la figure 1.7). Ce graphe peut aussi être défini de la manière suivante : les sommets représentent les parties à deux éléments d'un ensemble à cinq éléments, deux sommets étant joints si les parties qu'ils représentent sont disjointes.
Ce graphe est à la base de nombreux contre-exemples en théorie des graphes ; c'est en particulier un exemple de graphe non hamiltonien.

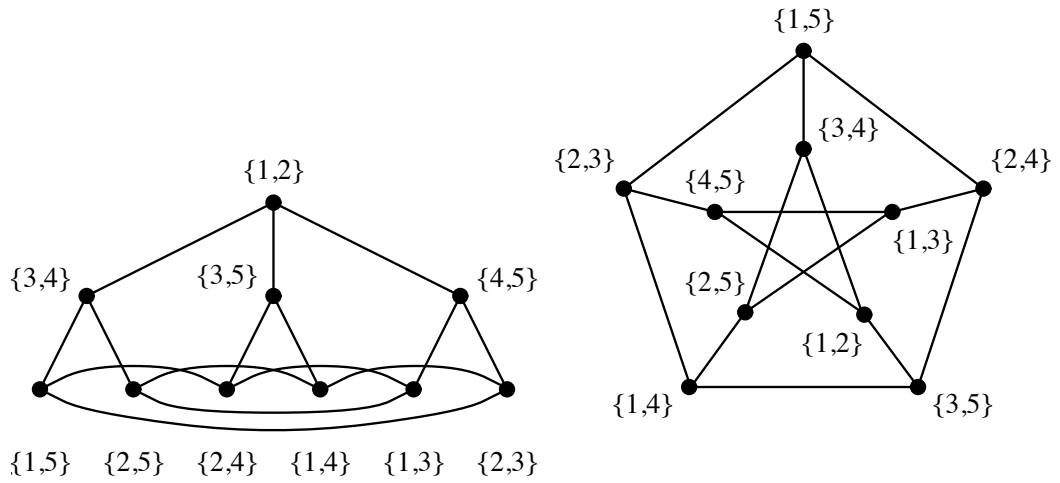


Figure 1.7 - Deux représentations du graphe de Petersen

REMARQUE. Le graphe de Hoffmann-Singleton d'ordre 50, régulier de degré 7, peut être vu comme l'union de cinq graphes de Petersen joints de manière astucieuse, voir [9].

Le deuxième résultat concerne les graphes bipartis :

Théorème 1.3.4 (Singleton, 1966 [16]) — *Les graphes de Moore bipartis ne peuvent pas exister sauf si :*

- $\Delta = 2$, *ce sont les cycles* C_{2D}.
- $D = 2$, *ce sont les graphes complets bipartis* $K_{\Delta,\Delta}$.
- $D = 3$, 4 *ou* 6.

REMARQUE. Pour $D = 3$, 4 ou 6, si $\Delta = q + 1$, q étant une puissance de nombre premier, il existe des graphes de Moore bipartis de degré Δ (voir [7] et [11]).

Dans le cas des graphes orientés, il existe une borne sur le nombre maximum de sommets possible. La preuve de la proposition suivante est similaire à celle du cas non orienté et est laissée à titre d'exercice (exercice 1.5.10).

Proposition 1.3.5 — *Si G est un graphe orienté de diamètre D, de demi-degré maximum intérieur et extérieur d et d'ordre N, alors l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\begin{array}{rrcl} & N & \leq & 1 + d + \cdots + d^D \\ \textit{ce qui donne :} & N & \leq & \dfrac{d^{D+1} - 1}{d - 1} \quad \textit{si} \quad d \geq 2 \end{array}$$

La borne obtenue sur N est appelée *borne de Moore orientée* et n'est atteinte que très rarement, comme le montre le résultat suivant :

Théorème 1.3.6 (Bridges et Toueg, 1980 [10]) — *La borne de Moore est atteinte si et seulement si $d = 1$ ou $D = 1$.*

PREUVE. Soit G un graphe orienté atteignant la borne de Moore. On a alors :

1. $d^+ = d^- = d$.
2. G ne contient pas de circuit de longueur inférieure ou égale à D.
3. pour tout couple de sommets (x, y), il existe un seul chemin de x à y.

Comme dans le cas non orienté (exercice 1.5.9), on peut définir une matrice d'adjacence associée à un graphe orienté. C'est une matrice $N \times N$, que l'on note $A = (a_{ij})$, définie, si on suppose ici les sommets numérotés de 1 à N, par :

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{s'il existe un arc de } i \text{ vers } j \\ a_{ij} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut montrer que le coefficient $a_{ij}^{(k)}$ de la matrice A^k est égal au nombre de chemins non nécessairement élémentaires de longueur k de i à j. La condition 3 implique $I+A+A^2+\cdots+A^D = J$ où J est la matrice $N \times N$ dont les coefficients sont tous égaux à 1. La condition 1 implique que $AJ = dJ$, donc on a l'égalité $(A-dI)(I+A+\cdots+A^D) = 0$. Les valeurs propres de A sont d et les racines de $1+x+\cdots+x^D = 0$, soit les racines $(D+1)^{ièmes}$ de l'unité. Si λ_i est valeur propre de A, alors $\bar{\lambda}_i = \lambda_i^{-1} = \lambda_i^D$ est aussi valeur propre. La valeur propre d est simple. La condition 2 implique que $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour $k \in [1, D]$.

Si $k = 1$, $\quad d + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i = 0$.

Si $k = D$, $\quad d^D + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i^D = 0$.

Donc :

$$-d = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i = \sum_{i=1}^{N-1} \bar{\lambda}_i = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i^D = -d^D$$

Ce qui implique $d = d^D$, donc $d = 1$ ou $D = 1$. □

Conjecture 1.3.7 (J-C. Bermond) — *Le nombre maximum de sommets d'un graphe G de diamètre D, vérifiant $d^+(x)+d^-(x) \leq 2d$, pour tout sommet x, est :*

$$1 + d + d^2 + \cdots + d^D$$

1.4 Graphes de Cayley

Les graphes de Cayley sont des graphes très réguliers, définis algébriquement. C'est ce qui permet, par exemple, de calculer facilement des routages dans de tels graphes. De plus, ils sont bien adaptés à traiter des algorithmes sur des structures régulières, car leurs sommets jouent le même rôle. Les graphes de Cayley sont beaucoup étudiés et il a été prouvé qu'un certain nombre de graphes, utilisés depuis longtemps comme supports de réseaux, étaient en fait des graphes de Cayley. Le lecteur en verra des exemples dans l'exercice 1.5.11.

1.4.1 Définitions

Soient Γ un groupe dont la loi de composition est notée multiplicativement et S un ensemble de générateurs de Γ vérifiant :

- l'élément neutre de Γ n'est pas dans S,
- pour tout élément s de S, son inverse s^{-1} est dans S.

Un graphe G est un *graphe de Cayley* associé à Γ et S, noté $G(\Gamma, S)$, si l'ensemble des sommets de G est constitué des éléments de Γ et l'ensemble des arêtes de G est constitué de toutes les paires $[g, gs]$ pour $g \in \Gamma$ et $s \in S$.

Proposition 1.4.1 — *Un graphe de Cayley est un graphe simple (non orienté, sans boucle et sans arête multiple), régulier de degré égal au nombre d'éléments de S et connexe.*

Rappelons que le *groupe symétrique* Σ_n est le groupe des permutations d'un ensemble fini à n éléments. Ce groupe a $n!$ éléments. Un *groupe de permutations* est un sous-groupe du groupe Σ_n.
L'étude des graphes de Cayley peut être simplifiée en ne considérant que des groupes de permutations, en vertu du théorème suivant [8] :

Théorème 1.4.2 — *Tout groupe fini est isomorphe à un groupe de permutations.*

Par exemple, $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe additif qui est isomorphe au groupe des applications bijectives $\{x \to x + p \pmod n,\ 0 \leq p \leq n-1\}$. Ces applications sont des permutations de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Si σ est une permutation, l'image qu'elle donne d'un élément x est notée $x\sigma$. On définit une permutation σ des éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ par son image : $(1\sigma, 2\sigma, \ldots, n\sigma)$.
On peut donc définir un graphe de Cayley en se donnant un ensemble S de permutations d'un ensemble fini $\{1, 2, \ldots, n\}$, tel que, pour tout élément s de S, son inverse s^{-1} soit dans S, et considérer comme groupe Γ le groupe de permutations engendré par S, noté $Gr(S)$, sous-groupe du groupe symétrique d'ordre n, Σ_n.

Les graphes C_N, K_N et $H(n)$ sont des graphes de Cayley. Le lecteur cherchera, pour chacun de ces graphes, le groupe Γ et les générateurs associés à Γ, soit sous forme de groupes classiques, soit comme groupes de permutation (voir exercice 1.5.11).
De nombreux résultats sur les graphes de Cayley peuvent être trouvés dans [1], [2], [7], [8] et [13].

1.4.2 Hamiltonisme des graphes de Cayley

La conjecture suivante a été formulée par plusieurs chercheurs (voir [13]) :

Conjecture 1.4.3 — *Tout graphe de Cayley est hamiltonien.*

Cette conjecture n'a été démontrée que pour des classes particulières de groupes. Il est connu que tout graphe de Cayley défini sur un groupe fini abélien (c'est-à-dire commutatif) est hamiltonien. Aucun contre-exemple n'est connu dans le cas d'un groupe non commutatif.
Il a aussi été montré qu'un graphe de Cayley dont l'ordre est une puissance de nombre premier ou le produit de deux nombres premiers est hamiltonien.

Remarque. On peut définir des graphes de Cayley orientés en supprimant la condition $s^{-1} \in S$.

1.4.3 Graphes sommet-transitifs

Un *automorphisme* ϕ d'un graphe G est une permutation des sommets de G telle que, pour toute arête $[x, y]$ de G, $[x\phi, y\phi]$ est une arête de G.
Un graphe G est dit *sommet-transitif* si, pour tout couple de sommets (x, y) de G, il existe un automorphisme de G qui envoie x sur y.

Théorème 1.4.4 — *Tout graphe de Cayley est sommet-transitif.*

PREUVE. Soient g_1 et g_2 deux sommets d'un graphe de Cayley $G(\Gamma, S)$. Considérons l'application f, définie par $f(u) = uf = g_2 g_1^{-1} u$, pour tout $u \in V(G) = \Gamma$ (g_1^{-1} est l'inverse de g_1 dans le groupe Γ). Cette application transforme g_1 en g_2 et c'est un automorphisme de $G(\Gamma, S)$. En effet, f est bijective et, pour toute arête $[u, us]$ de $G(\Gamma, S)$, $[uf, usf]$ est aussi une arête de $G(\Gamma, S)$ car, par définition, $g_2 g_1^{-1} us$ est adjacent à $g_2 g_1^{-1} u$. □

1.4.4 Cas particuliers

Tout graphe sommet-transitif n'est pas nécessairement un graphe de Cayley, comme le montre le graphe de Petersen. Pour prouver que le graphe de Petersen n'est pas un graphe de Cayley, le lecteur intéressé peut faire une recherche exhaustive des graphes de Cayley d'ordre 10 ! Cependant, des démonstrations plus rapides utilisant la théorie des groupes existent.
Deux exemples de graphes de Cayley sont donnés ci-après. Le premier prouve que le fait de savoir qu'un graphe est un graphe de Cayley ne permet pas pour autant de déterminer facilement ses paramètres.

Le graphe pancake

On considère le graphe de Cayley dont le système générateur est donné par l'ensemble $S = \{i, (i-1), \ldots, 1, (i+1), (i+2), \ldots, n \mid 2 \leq i \leq n\}$ dans le groupe des permutations de n éléments. Le nom vient du fait que l'action d'un générateur correspond au retournement d'une pile de crêpes avec une spatule introduite au niveau i. Le problème de la complexité de la détermination du diamètre de ce graphe, connu sous le nom de *pancake flipping problem* (1975), n'est pas résolu à ce jour [14].

Le star-graph

Le *star-graph de dimension* n, noté $S(n)$, est le graphe dont les sommets sont les permutations d'un ensemble à n éléments telles que tout sommet $x_1 x_2 \cdots x_n$ est relié aux sommets $x_i x_2 \cdots x_{i-1} x_1 x_{i+1} \cdots x_n$. Le système de générateurs est donc formé des transpositions échangeant 1 et i : $S = \{\tau(1, i) \mid 1 \leq i \leq n\}$. Le degré de $S(n)$ est $n - 1$, son ordre $n!$ et son diamètre vaut $\left\lfloor \frac{3(n-1)}{2} \right\rfloor$.

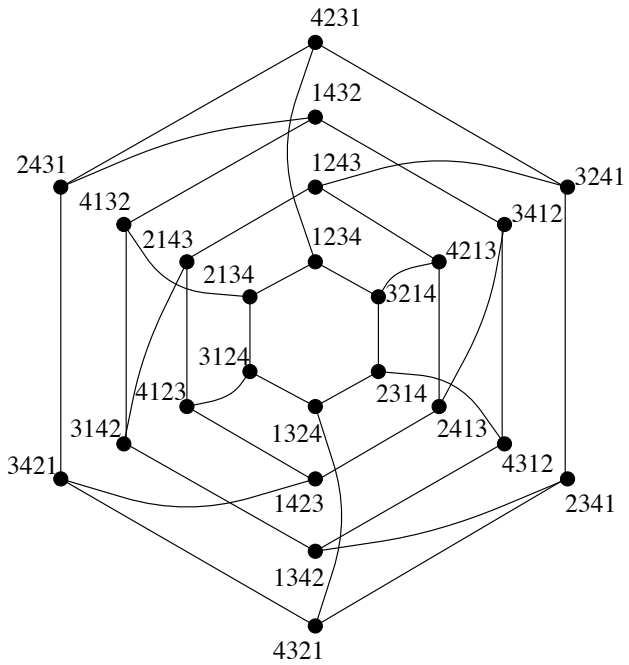


Figure 1.8 - Le star-graph $S(4)$ sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$

1.5 Exercices

Exercice 1.5.1 — *Démontrer la proposition 1.1.1. En déduire que tout graphe a un nombre pair de sommets de degré impair.*

Exercice 1.5.2 — *Montrer qu'un graphe G est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impaire.*

Exercice 1.5.3 — *Démontrer que le diamètre de la somme cartésienne de deux graphes est égal à la somme des diamètres de ces graphes.*

Exercice 1.5.4 — *Montrer que pour tout graphe G, $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

Exercice 1.5.5 — *Démontrer le théorème 1.1.7 sur la sommet-connexité, en admettant le théorème 1.1.6.*

Exercice 1.5.6 — *Montrer que le graphe complet K_N admet $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ cycles hamiltoniens deux à deux arête-disjoints.*

Exercice 1.5.7 — *Montrer qu'il existe $n-1$ chaînes de longueur inférieure ou égale à n et une chaîne de longueur inférieure ou égale à $n+1$, toutes deux à deux sommet-disjointes, entre toute paire de sommets distincts de l'hypercube $H(n)$.*

Exercice 1.5.8 — *Hamiltonisme de la grille :*
a) Montrer que, si tous les p_i sont impairs, la grille $M(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ n'est pas hamiltonienne.
b) Dans la grille $M(p, q)$, dans le cas où au moins p est pair, construire un cycle hamiltonien et des cycles de toutes longueurs paires.

Exercice 1.5.9 — *Le but de cet exercice est d'exhiber les graphes de Moore G, de diamètre 2 et de degré Δ, qui ont donc pour ordre $N = \Delta^2 + 1$.*

1. *Montrer que la matrice d'adjacence A de G vérifie $A^2 + A - (\Delta - 1)I = J$, où J est la matrice $N \times N$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.*
2. *Déterminer les valeurs propres de J et les sous-espaces propres associés.*
3. *Montrer que Δ est valeur propre de A avec la multiplicité 1, et que les autres valeurs propres de A vérifient $r^2 + r - \Delta + 1 = 0$.*
4. *Montrer qu'il existe deux entiers positifs ou nuls m_1 et m_2 tels qu'on ait les égalités $m_1 + m_2 = N - 1$ et $\Delta + m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$ où r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation précédente.*
5. *Etablir la relation $2m = \dfrac{\Delta(\Delta - 2)}{\sqrt{4\Delta - 3}} + \Delta^2$ pour $m = m_1$ ou m_2.*
6. *En déduire que $\Delta \in \{2, 3, 7, 57\}$ (on pourra poser $4\Delta - 3 = (2p + 1)^2$).*

Exercice 1.5.10 — *Prouver la proposition 1.3.5.*

Exercice 1.5.11 — *Prouver que le cycle C_N, le graphe complet K_N et l'hypercube $H(n)$ sont des graphes de Cayley.*

1.6 Solutions des exercices

Preuve de l'exercice 1.5.1

Une arête $[x, y]$ contribue pour 1 au degré de x et pour 1 au degré de y. Donc, dans $\sum_{i=1}^{N} d(x_i)$, on compte deux fois le nombre d'arêtes.
La somme des degrés du graphe G est donc un nombre pair, ce qui implique qu'on ne peut avoir qu'un nombre pair de valeurs impaires pour $d(x)$.

□

Preuve de l'exercice 1.5.2

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti et V_1 et V_2 les deux classes de la partition. Soit $C = x_1, x_2, \ldots, x_i, x_1$ un cycle de G de longueur i. On peut supposer, sans perte de généralité, que $x_1 \in V_1$, alors $x_2 \in V_2$, $x_3 \in V_1$, et ainsi de suite, et d'une manière générale, $x_{2j+1} \in V_1$ et $x_{2j+2} \in V_2$. Comme $[x_i, x_1]$ est une arête, $x_i \in V_2$

et donc, $i = 2k + 2$ et C est de longueur paire. Il suffit de prouver la réciproque pour un graphe G connexe sans cycle de longueur impaire.

Soit x_0 un sommet choisi arbitrairement et soient :

$$\begin{aligned} V_1 &= \{x \in V \mid d_G(x_0, x) \text{ paire}\} \\ V_2 &= \{x \in V \mid d_G(x_0, x) \text{ impaire}\} \end{aligned}$$

Nous allons montrer que G est biparti en montrant que V_1, V_2 est la bipartition de V. Soient x et y deux sommets du même ensemble V_i. Soient P un plus court chemin de x_0 à x, et Q un plus court chemin de x_0 à y. Alors, P et Q sont de même parité. Raisonnons par l'absurde : si il existe une arête entre x et y, $P \cup Q \cup [x, y]$ est un cycle de longueur impaire. Si ce cycle n'est pas élémentaire, on peut le voir comme la concaténation de deux cycles (en prenant comme point commun l'un des sommets répétés). L'un de ces deux cycles est de longueur impaire. En répétant cette opération, on trouve un cycle élémentaire de longueur impaire, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

□

Preuve de l'exercice 1.5.3

Soient (x, x') et (y, y') deux sommets de $G \square G'$. Un cheminement possible de (x, x') à (y, y') consiste à aller de (x, x') à (y, x') en utilisant la chaîne de x à y dans la copie de G formée des sommets $(*, x')$, puis de (y, x') à (y, y') en utilisant la chaîne de x' à y' dans la copie de G' formée des sommets $(y, *)$. Si la chaîne de x à y dans G s'écrit $x{=}x_0, x_1, \ldots, x_k{=}y$ et celle de x' à y' dans G' s'écrit $x'{=}x'_0, x'_1, \ldots, x'_j{=}y'$, alors la chaîne de (x, x') à (y, y') s'écrit :

$$(x, x'), (x_1, x'), \ldots, (x_{k-1}, x'), (y, x'), (y, x'_1), \ldots, (y, x'_{j-1}), (y, y')$$

Cette chaîne est de longueur $k + j$. Si on choisit une plus courte chaîne de x à y et de x' à y', alors $k \leq D(G)$ et $j \leq D(G')$ et donc $D(G \square G') \leq D(G) + D(G')$. Pour établir l'égalité, il suffit de prendre deux sommets (x, x') et (y, y') du graphe $G \square G'$ tels que $d_G(x, y) = D(G)$ et $d_{G'}(x', y') = D(G')$.

□

Preuve de l'exercice 1.5.4

Soit un ensemble de λ arêtes disconnectant G. Il existe un ensemble d'au plus λ sommets choisis sur chacune de ces arêtes qui, si on les supprime, disconnecte G. Donc, $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.
Si on supprime les arêtes issues d'un sommet x, on disconnecte ce sommet du reste du graphe. Donc, $\lambda(G) \leq d(x)$, $\forall x$. On a bien : $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

□

Preuve de l'exercice 1.5.5

A G associons le nouveau graphe orienté G' construit de la manière suivante :

- On remplace chaque sommet x, autre que s et t, par deux nouveaux sommets x' et x'' et on ajoute l'arc (x', x'').
- On remplace chaque arc (x, y) de G, avec x et y différents de s et t, par un arc (x'', y') dans G', puis chaque arc (s, x) (resp. (t, x)) par un arc (s, x') (resp. (t, x')) et chaque arc (x, s) (resp. (x, t)) par un arc (x'', s) (resp. (x'', t)).

A chaque chemin $s, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n, t$ liant s à t dans G, correspond un chemin dans G', obtenu en remplaçant chaque x_i par les x'_i et x''_i correspondants, soit le chemin : $s, x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x'_i, x''_i, \ldots, x'_n, x''_n, t$. De plus, à deux chemins sommet-disjoints dans G correspondent deux chemins arc-disjoints de G' et vice-versa. Donc, le nombre maximum de chemins sommet-disjoints de s à t de G est égal au nombre maximum de chemins arc-disjoints de s à t de G'. On montre de même que le nombre minimum d'arcs de G' dont la suppression disconnecte s de t est égal au nombre minimum de sommets de G dont la suppression disconnecte s de t. En effet, si l'ensemble d'arcs disconnectant G' est de la forme $\{(x'_i, x''_i), (y, x'_j), (x''_k, z)\}$, y et z représentant tout sommet de G' (s et t inclus), alors $\{(x'_i, x''_i), (x'_j, x''_j), (x'_k, x''_k)\}$ est aussi un ensemble d'arcs disconnectants.

□

Preuve de l'exercice 1.5.6

Si N est pair ($N = 2p$), on peut décomposer K_N en p chaînes hamiltoniennes de la manière suivante (les sommets sont considérés comme étant les entiers modulo $2p$) :

$$P_i = i,\ i+1,\ i+2p-1,\ i+2,\ i+2p-2,\ \ldots,\ i+p+1,\ i+p$$

Par exemple, pour $N = 6$, on a :

$$\begin{aligned} P_0 &= 0, 1, 5, 2, 4, 3 \\ P_1 &= 1, 2, 0, 3, 5, 4 \\ P_2 &= 2, 3, 1, 4, 0, 5 \end{aligned}$$

Cette décomposition s'étend en une décomposition de K_{2p+1} en p cycles hamiltoniens en ajoutant un sommet noté ∞ et en le joignant aux extrémités des chaînes P_i de K_{2p}. Pour $N = 7$, on a :

$$\begin{aligned} C_0 &= \infty, 0, 1, 5, 2, 4, 3, \infty \\ C_1 &= \infty, 1, 2, 0, 3, 5, 4, \infty \\ C_2 &= \infty, 2, 3, 1, 4, 0, 5, \infty \end{aligned}$$

La preuve résulte du fait que les extrémités des chaînes sont toutes différentes.

Avec $N = 2p$, on a une décomposition en $p-1$ cycles hamiltoniens plus un couplage parfait. Ces cycles sont (les sommets étant $\infty \cup \mathbb{Z}_{2p-1}$) :

$$C_i = \infty, i, i+1, i+2p-2, i+2, \ldots, i+p-1, i+p, \infty \quad avec \quad i = 0, 1, \ldots, p-2$$

Le couplage parfait est formé de l'arête $[\infty, p-1]$ et des arêtes $[i, N-i]$.

Pour $N = 6$, on a :

$$\begin{aligned} C_0 &= \infty, 0, 1, 4, 2, 3, \infty \\ C_1 &= \infty, 1, 2, 0, 3, 4, \infty \end{aligned}$$

les arêtes du couplage parfait étant $[\infty, 2]$, $[0, 4]$ et $[1, 3]$.

□

Preuve de l'exercice 1.5.7

La preuve se fait par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 2$. Soient x et y deux sommets de $H(n)$, avec $n \geq 3$:

Si x et y sont dans le même sous-hypercube $H(n-1)$ (au moins une coordonnée identique), alors, par hypothèse de récurrence, on a déjà $n-1$ chaînes requises de longueur inférieure ou égale à n dans cet hypercube. La n-ième chaîne est construite à partir d'une chaîne de longueur inférieure ou égale à $n-1$ entre x' et y', homologues de x et y dans le $H(n-1)$ complémentaire du premier, qu'on relie à x et y de la manière suivante :

$$x, x', \text{chaîne entre } x' \text{ et } y' \text{ dans le } H(n-1) \text{ complémentaire}, y', y$$

Cette chaîne est bien de longueur $n+1$.

Sinon, x et y sont antipodaux ($x = x_1 x_2 \cdots x_i \cdots x_n$ et $y = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \cdots \overline{x_i} \cdots \overline{x_n}$), et on a les n chaînes deux à deux sommet-disjointes de longueur n suivantes entre x et y ayant pour sommets intermédiaires :

$$x_1 \cdots x_{i-1}\overline{x_i}x_{i+1} \cdots x_n, x_1 \cdots x_{i-1}\overline{x_i}\,\overline{x_{i+1}} \cdots x_n, \ldots, \overline{x_1} \cdots \overline{x_{i-2}}x_{i-1}\overline{x_i}\,\overline{x_{i+1}} \cdots \overline{x_n}$$

obtenues en utilisant la dimension i, puis $i+1$, etc., pour $i = 1, 2, \ldots, n$ (ces chaînes correspondent à des routages *ascend*).

Remarque. Deux sommets sont dits *antipodaux* dans un graphe G, si leur distance est égale au diamètre de G. Par exemple, les sommets 0^n et 1^n sont antipodaux dans l'hypercube $H(n)$.

□

Preuve de l'exercice 1.5.8

a) La grille $M(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ est un graphe biparti. L'une des classes de la bipartition contient les sommets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont la somme des coordonnées est paire et dans l'autre, ceux pour lesquels elle est impaire. D'après la proposition 1.1.2 (voir exercice 1.5.2), la grille n'admet pas de cycle de longueur impaire. Or, si tous les p_i sont impairs, elle a un nombre impair de sommets. Elle ne peut donc pas avoir de cycle hamiltonien.

b) La démonstration est implicite dans les deux dessins ci-dessous.

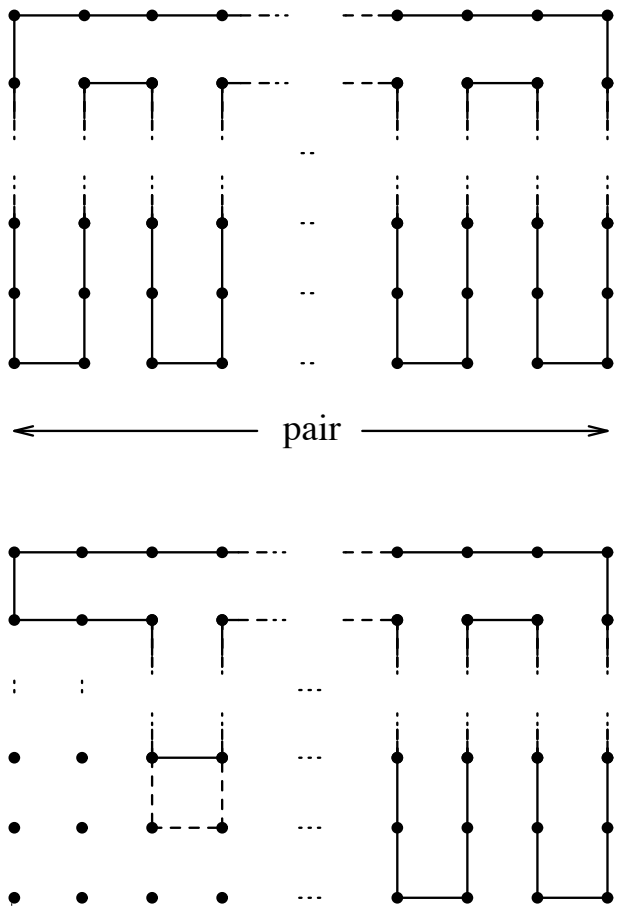


Figure 1.9 - Cycle hamiltonien et cycles de toutes longueurs paires dans la grille

□

Preuve de l'exercice 1.5.9

1. Soit A, la matrice d'adjacence de G, c'est-à-dire $A = (a_{i,j})$, avec $a_{i,j} = 1$ si $[x_i, x_j]$ est une arête de G, et 0 sinon. Soit $B = A^2 = (b_{i,j})$.

   Le nombre de chaînes de longueur 2 reliant x_i et x_j est égal à $b_{i,j}$. Comme le diamètre de G vaut 2, il existe une chaîne de longueur 1 ou 2 entre tout couple de sommets (x_i, x_j). De plus, on a au plus une chaîne entre tout couple de sommets car sinon on aurait un cycle de longueur 2, 3, ou 4 (or, la maille de G vaut 5). On a donc : $b_{i,j} + a_{i,j} = 1, \forall i \neq j$.

   D'autre part, comme G est Δ-régulier, on a $b_{i,i} = \Delta\ \forall i$. D'où l'égalité : $A^2 + A - (\Delta - 1)I = J$.

2. La matrice J admet comme valeurs propres et sous-espaces propres associés : N, associé au sous-espace engendré par le vecteur $\vec{1}$, dont toutes les coordonnées valent 1 ; et 0, associé à l'hyperplan H : $u_1 + \cdots + u_N = 0$.

3. **Rappel.** Si f est un polynôme, r une valeur propre de A et E_r, l'espace propre associé, alors $f(r)$ est valeur propre de $f(A)$ et E_r est inclus dans l'espace propre de $f(A)$ associé à $f(r)$.

   G étant Δ-régulier, on a : $A\vec{1} = \Delta\vec{1}$. Donc, Δ est valeur propre de A.

   Soit le polynôme $f(r) = r^2 + r - \Delta + 1$. Alors, $f(\Delta) = \Delta^2 + 1 = N$ est valeur propre de $f(A) = A^2 + A - (\Delta - 1)I = J$ et l'espace propre de A associé à Δ est inclus dans l'espace propre $\lambda\vec{1}$ de $f(A)$ associé à N. Donc, Δ est valeur propre de multiplicité 1 de A.

   Pour toute valeur propre r de A avec $r \neq \Delta$, $f(r)$ est valeur propre de J : $f(r) = 0$.

4. Soient $r_1 = \frac{-1+\sqrt{4\Delta-3}}{2}$ et $r_2 = \frac{-1-\sqrt{4\Delta-3}}{2}$, solutions de l'équation $f(r) = 0$, et m_1 et m_2, leurs ordres de multiplicité comme valeurs propres, on a :

   $$tr(A) = \Delta + m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$$

   en rappelant que la trace d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux, ou encore la somme de ses valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité.

   $$m_1 + m_2 = N - 1 = \Delta^2$$

5. $$m_2 = -\frac{\Delta + m_1 r_1}{r_2} = \Delta^2 - m_1$$

   $$m_1(1 - \frac{r_1}{r_2}) = \Delta^2 + \frac{\Delta}{r_2}$$

$$m_1(1+\frac{\sqrt{4\Delta-3}-1}{\sqrt{4\Delta-3}+1}) = \Delta^2 - \frac{2\Delta}{\sqrt{4\Delta-3}+1}$$

$$2m_1\sqrt{4\Delta-3} = \Delta^2(\sqrt{4\Delta-3}+1) - 2\Delta$$

$$2m_1 = \Delta^2 + \frac{\Delta(\Delta-2)}{\sqrt{4\Delta-3}}$$

Pour $\Delta = 2$, nous obtenons $N = 5$ et $G = C_5$.

Pour $\Delta > 2$, comme m_1 est entier et $(4\Delta - 3)$ impair, on peut poser :

$$4\Delta - 3 = (2p+1)^2$$

Il vient :

$$\begin{array}{l} 4\Delta - 3 = 4p^2 + 4p + 1 \\ \Delta = p^2 + p + 1 \\ 2m_1 = \Delta^2 + \frac{(p^2+p+1)(p^2+p-1)}{2p+1} \end{array}$$

$2p+1$ doit diviser $(p^2+p+1)(p^2+p-1) = p^2(p+1)^2 - 1$. On a donc :

$$\begin{array}{l} p^2(p+1)^2 \equiv 1 \pmod{2p+1} \\ p^4 + p^2(2p+1) \equiv 1 \pmod{2p+1} \\ p^4 \equiv 1 \pmod{2p+1} \end{array}$$

mais $2p \equiv -1 \pmod{2p+1}$. Donc, $16p^4 \equiv 1 \pmod{2p+1}$.

On déduit des relations ci-dessus que $16 \equiv 1 \pmod{2p+1}$ et donc que $2p+1$ est diviseur de 15. Comme p est positif, $p = 1, 2$ ou 7, d'où :

$$\Delta \in \{3, 7, 57\}$$

Les seuls graphes de Moore de diamètre 2 sont donc :

- pour $\Delta = 2$, C_5 ;
- pour $\Delta = 3$, le graphe de Petersen ;
- pour $\Delta = 7$, le graphe d'Hoffman-Singleton ;
- pour $\Delta = 57$, un graphe inconnu dont l'existence n'est pas prouvée à ce jour, non plus que la non existence.

□

Preuve de l'exercice 1.5.10

La preuve est similaire à celle de la proposition 1.3.1. Soit G un graphe orienté, de diamètre D, et vérifiant $d^+(x) \leq d$ pour tout x. Soit x_0 un sommet de G et $\Gamma_i^+(x_0) = \{y \in V$ tel que $d(x_0, y) = i\}$ pour $1 \leq i \leq D$, on a :

$$N = 1 + \sum_{i=1}^{D} \mid \Gamma_i^+(x_0) \mid$$

Comme $\mid \Gamma_i^+(x_0) \mid \leq d \mid \Gamma_{i-1}^+(x_0) \mid$, on a : $N \leq 1 + d + d^2 + \cdots + d^D$.

□

Preuve de l'exercice 1.5.11

1. C_N est un graphe de Cayley : on considère le sous-groupe de Σ_N engendré par les permutations σ_1 et $\sigma_2 = \sigma_1^{-1}$ où $\sigma_1 = \{2, 3, \ldots, N, 1\}$.

   On peut aussi prendre $\Gamma = \mathbb{Z}_N$ (entiers modulo N) avec la notation additive et prendre pour ensemble de générateurs $S = \{1, -1\}$ (les arêtes sont de la forme $[i, i \pm 1]$).

2. K_N est un graphe de Cayley : on considère le sous-groupe de Σ_N engendré par les permutations σ_i avec $\sigma_i = \{i, i+1, \ldots, N, 1, \ldots, i-1\}$ avec $i \in [2, N]$.

   On peut, là encore, prendre $\Gamma = \mathbb{Z}_N$ avec $S = \{1, 2, \ldots, N-1\}$.

3. $H(n)$ est un graphe de Cayley : on considère le sous-groupe de Σ_{2n} engendré par les n transpositions σ_i disjointes suivantes :

   $$S = \{1, 2, \ldots, 2i-2, 2i, 2i-1, 2i+1, \ldots, 2n\} \quad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq n$$

   où chaque transposition σ_i transpose deux éléments consécutifs : $2i - 1$ et $2i$.

   On peut aussi prendre $\Gamma = \mathbb{Z}_2^n$ avec $x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_i + y_i, \ldots, x_n + y_n)$, l'addition étant celle de $\mathbb{Z}_2$, et $S = \{e_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ où e_i est le i-ème générateur canonique $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (un seul 1 en i-ème position).

□

Bibliographie

[1] S. Akers and B. Krishnamurthy. Group graphs as interconnection networks. In *Proceedings of 14th International Conference on Fault Tolerant Computing*, pages 422–427, 1984.

[2] S. Akers and B. Krishnamurthy. A group theoretic model for interconnection networks. *IEEE Transactions on Computers*, 38:555–566, 1989.

[3] B. Alspach, J-C. Bermond, and D. Sotteau. Decomposition into cycles I: Hamilton decompositions. In *Proceedings of 1987 Cycles and Rays Colloquium, Montréal*, 1987. Also in NATO ASI Ser. C, Kluwer Academic Publishers, Dordrech, pages 9-18, 1990.

[4] C. Berge. *Graphes.* Gauthiers-Villars, 1983.

[5] J-C. Bermond, C. Delorme, and J-J. Quisquater. Strategies for interconnexion networks: Some methods from graph theory. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 3:433–449, 1986.

[6] J-C. Bermond, C. Delorme, and J-J. Quisquater. Table of large (Δ, d)-graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 37/38:575–577, 1992.

[7] N. Biggs. *Algebraic graph theory.* Cambridge University Press, 1974.

[8] N. Biggs. *Discrete Mathematics.* Oxford Sciences Publications, 1985.

[9] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory with applications.* MacMillan Press, 1976.

[10] W. G. Bridges and S. Toueg. On the impossibility of directed Moore graphs. *Journal of Combinatorial Theory, ser. B*, 29:339–341, 1980.

[11] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier. *Distance-regular graphs.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3 Folge - Band 18. Springer-Verlag, 1989.

[12] B. Elspas. Topological constraints on interconnection limited logic. *Switching circuits theory and Logical design*, 5:133–147, 1964.

[13] J. A. Gallian and D. Witte. A survey : Hamiltonian cycles in Cayley graphs. *Discrete Mathematics*, 51:293–304, 1984.

[14] W. H. Gates and C. H. Papadimitriou. Bounds for sorting by prefix reversal. *Discrete Mathematics*, 27:47–57, 1979.

[15] F. T. Leighton. *Introduction to parallel algorithms and architectures.* Morgan Kaufmann, 1992.

[16] R. R. Singleton. On minimal graphs of maximum even girth. *Journal of Combinatorial Theory*, 1:306–332, 1966.

[17] T. Tillson. An hamiltonian decomposition of K_{2n}, $2n \geq 8$. *Journal of Combinatorial Theory, ser. B*, 29:68–74, 1980.

CHAPITRE **2**

Graphes pour les réseaux d'interconnexion

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'à degré et diamètre fixés, on ne peut construire des graphes aussi grands que l'on veut. D'autre part, nous avons donné les propriétés classiques de quelques graphes simples, utilisés dans l'architecture des machines actuelles. Ces graphes ont des défauts : un trop grand degré pour le graphe complet et l'hypercube, un trop grand diamètre pour des graphes à degré fixé comme le cycle ou les grilles. Idéalement, on veut construire des graphes ayant un degré fixé petit (quatre, par exemple, pour assembler des transputers) et un diamètre D proche de celui obtenu par la borne de Moore, à savoir $\log_d N$, où d est le degré et N, l'ordre du graphe.

Dans ce chapitre, nous allons construire des graphes ayant un petit degré et un diamètre logarithmique, comme les graphes de de Bruijn ou de Kautz. De nombreuses autres constructions, plus ou moins exotiques, ont été proposées. Mais si les familles de graphes obtenues par ces constructions sont meilleures au regard des seuls paramètres d et D, elles présentent des inconvénients pour d'autres paramètres et les réseaux associés ne semblent pas faciles à réaliser.

Tous les réseaux étudiés ici sont dits «point-à-point» car les liaisons se font entre deux processeurs. D'autres réseaux, où les liaisons se font par des supports tels qu'un bus, ont aussi été considérés dans la littérature. La modélisation se fait alors à l'aide de la théorie des hypergraphes. Nous n'en parlerons pas ici.

Par contre, nous donnerons un bref aperçu des réseaux multiétages qui sont aussi appelés réseaux dynamiques ou reconfigurables (par opposition aux réseaux classiques, dits statiques). En effet, ces réseaux comprennent des commutateurs (*switches*) qui peuvent être positionnés de manière différente dans le temps et qui, suivant leur position, permettent d'obtenir différents réseaux.

Un récapitulatif des propriétés des graphes modélisant les réseaux point-à-point les plus courants est donnée dans l'annexe A de ce livre.

2.1 Graphes de de Bruijn et graphes de Kautz

Nous allons définir les graphes de de Bruijn et de Kautz qui ont un degré constant et un diamètre petit par rapport au nombre de sommets (logarithmique). Ils constituent, par leur ordre, une des meilleures familles de (Δ, D)-graphes (ou (d, D)-graphes orientés).
Il existe des algorithmes très performants (tris, FFT, etc.) qui utilisent leur structure. Notamment, un réseau de de Bruijn a été construit afin d'être utilisé comme décodeur de signal dans le cadre de la mission spatiale Galileo de la NASA [6].
Nous donnons de ces graphes, qui sont essentiellement des graphes orientés, trois définitions. Pour plus de détails et de références, le lecteur pourra se référer à l'une des deux synthèses [4] ou [16].

2.1.1 Définition à partir d'un alphabet

Graphes de de Bruijn

Le *graphe de de Bruijn* $B(d, D)$ est le graphe orienté dont les sommets sont les mots de longueur D sur un alphabet de taille d ($d \geq 2$) et dont un sommet, noté $x_1x_2 \cdots x_D$, est relié aux sommets $x_2 \cdots x_D\lambda$, λ étant une lettre quelconque de l'alphabet. On passe donc d'un sommet à un autre par un décalage à gauche (*left-shift*) avec adjonction d'une lettre. On notera $x_1x_2 \cdots x_Dx_{D+1}$ l'arc reliant le sommet $x_1x_2 \cdots x_D$ au sommet $x_2 \cdots x_Dx_{D+1}$.
Dans tout ce qui suit, l'alphabet sera formé des lettres $\{0, 1, \ldots, d-1\}$, soit les entiers modulo d.
Le demi-degré intérieur (resp. extérieur) de $B(d, D)$ est égal à d et son ordre est d^D. Notons que ce graphe comporte d boucles, exactement une en chaque sommet de type $aa \cdots a$, noté aussi a^D, où a est une lettre de l'alphabet répétée D fois.

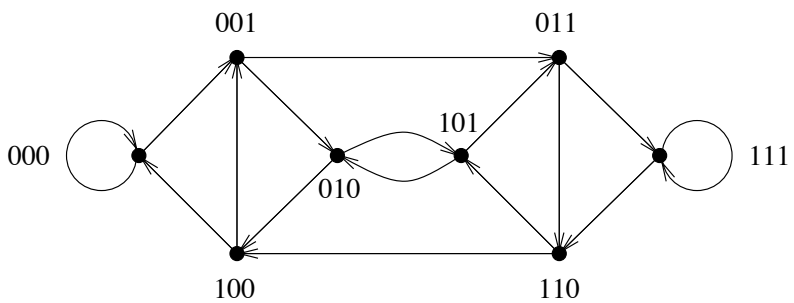


Figure 2.1 - Graphe de de Bruijn $B(2, 3)$

Le diamètre de $B(d, D)$ est D. En effet, si on part d'un sommet donné, après D décalages dans le même sens, on aura obtenu tous les sommets (donc le diamètre est au plus égal à D). Les sommets 0^D et 1^D sont un exemple de sommets à distance D l'un de l'autre et sont dits *antipodaux*.

On peut donner un protocole de communication très simple qui ne dépend que de l'adresse du destinataire : pour aller d'un sommet $x_1x_2x_3\cdots x_D$ à un sommet $y_1y_2\cdots y_{D-1}y_D$, on introduit successivement les lettres y_i après le décalage, c'est-à-dire que l'on passe par les sommets $x_2x_3\cdots x_Dy_1$, $x_3\cdots x_Dy_1y_2$, ..., $x_Dy_1y_2\cdots y_{D-1}$ avant d'arriver à $y_1y_2\cdots y_{D-1}y_D$. Notons que ce protocole n'est pas optimal : dans le $B(2,3)$ par exemple, il fait passer du sommet 001 au sommet 011 en trois étapes, via 010 et 101, alors que ces deux sommets sont adjacents. Néanmoins, ce protocole est très utile et montre qu'il existe un unique chemin, non nécessairement élémentaire, de longueur exactement le diamètre, entre toute paire de sommets (propriété qui peut être utilisée pour des algorithmes distribués synchronisés). En d'autres termes, la matrice d'adjacence A de $B(d, D)$ vérifie l'égalité $A^D = J$ avec $J_{i,j} = 1, \forall i, j$. Cette particularité caractérise $B(d, D)$ parmi les graphes orientés d-réguliers de diamètre D.

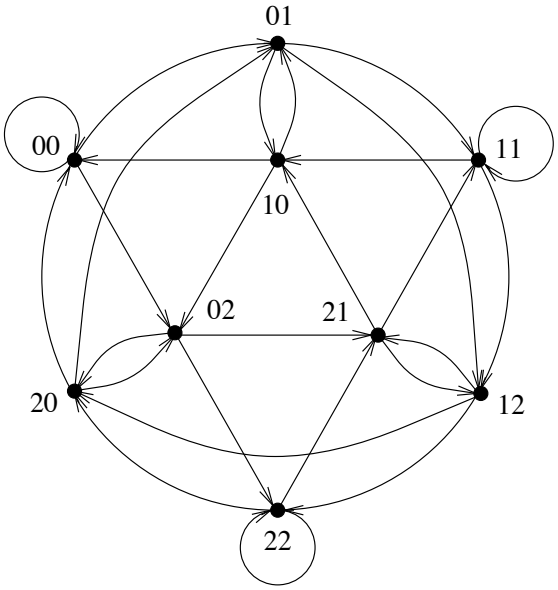


Figure 2.2 - Graphe de de Bruijn $B(3,2)$

On trouvera, dans la section 2.4, des exercices se rapportant aux graphes de de Bruijn (exercices 2.4.1, 2.4.2 et 2.4.3), concernant les propriétés de distance et les routages de plus courts chemins.

Graphes de Kautz

Le *graphe de Kautz* $K(d, D)$ est le graphe orienté dont les sommets sont les mots de longueur D sur un alphabet de taille $d+1$, tels que deux lettres consécutives soient différentes. Les mots sont donc de la forme $x_1x_2\cdots x_D$ avec $x_i \neq x_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \ldots, D-1$. Les arcs sont définis de la même manière que pour le graphe de de Bruijn : un sommet $x_1x_2\cdots x_D$ est relié aux sommets $x_2\cdots x_D\lambda$, où λ est une lettre quelconque de l'alphabet, différente de x_D.
Dans tout ce qui suit, l'alphabet sera composé des lettres $\{0, 1, \ldots, d\}$, soit les entiers modulo $d+1$.
Le demi-degré intérieur (resp. extérieur) est égal à d. En effet, un sommet admet seulement d successeurs (resp. d prédécesseurs), λ ne prenant que d valeurs. Le nombre de sommets est égal à $d^{D-1} + d^D$: on a $d+1$ choix pour la première lettre et d choix pour chacune des $D-1$ autres lettres, soit $N = (d+1)d^{D-1}$.

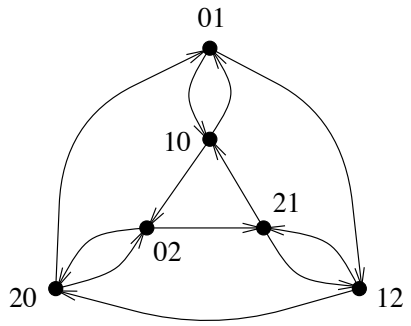


Figure 2.3 - Graphe de Kautz $K(2, 2)$

Comme pour le graphe de de Bruijn, le diamètre de $K(d, D)$ est D. On peut utiliser quasiment le même protocole de communication, la seule différence étant que, si $y_1 = x_D$, on n'introduit pas la lettre y_1, mais directement la lettre y_2. Entre tout couple de sommets du graphe de Kautz, on a donc un chemin unique de longueur D ou $D-1$. En d'autres termes, la matrice d'adjacence A de $K(d, D)$ vérifie $A^D + A^{D-1} = J$ (ceci est aussi une caractérisation des graphes de Kautz).

Proposition 2.1.1 — *$K(d, 2)$ est un graphe orienté ayant le nombre maximum possible de sommets, à savoir $d+d^2$, parmi les graphes de degré d et de diamètre 2.*

PREUVE. D'après le théorème 1.3.6, pour $D = 2$, la borne de Moore $1 + d + d^2$ n'est pas atteinte, donc le maximum de sommets d'un graphe de degré d et de diamètre 2 est $d + d^2$, ce qui est exactement le nombre de sommets de $K(d, 2)$. □

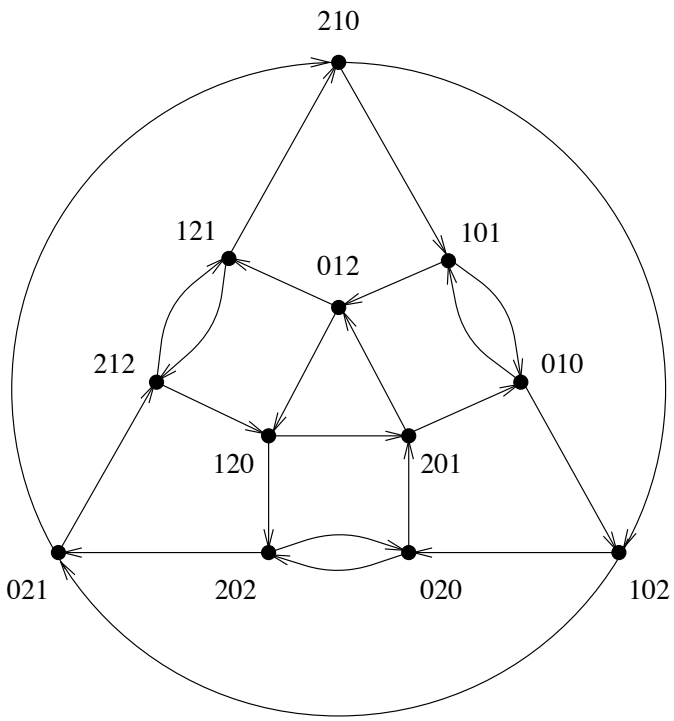


Figure 2.4 - Un autre exemple de graphe de Kautz : $K(2,3)$

Graphes de de Bruijn et de Kautz non orientés

On peut, ayant défini les graphes de de Bruijn et de Kautz orientés, définir maintenant les graphes de de Bruijn et de Kautz non orientés : il suffit d'oublier l'orientation des arcs, puis de supprimer les arêtes multiples ainsi créées et les éventuelles boucles. Les graphes de de Bruijn, resp. de Kautz, non orientés sont notés $UB(d,D)$, resp. $UK(d,D)$ (U de l'anglais *Underlying graph*). La figure 2.5 donne un exemple de chacun de ces graphes.

Remarque. Pour les rendre réguliers, on peut modifier les graphes de de Bruijn et de Kautz non orientés, en rajoutant des arêtes entre les sommets qui n'ont pas un degré maximum. Par exemple, dans le cas du graphe de de Bruijn, on peut ajouter un cycle entre les sommets qui ont des boucles dans sa version orientée (on peut faire de même dans le cas orienté, en ajoutant un circuit). Néanmoins, il apparaît très intéressant d'avoir des sommets non saturés pour relier le réseau au monde extérieur (stations de travail, imprimantes, etc.).

L'exercice 2.4.4 propose de calculer les paramètres des graphes de de Bruijn et de Kautz non orientés.

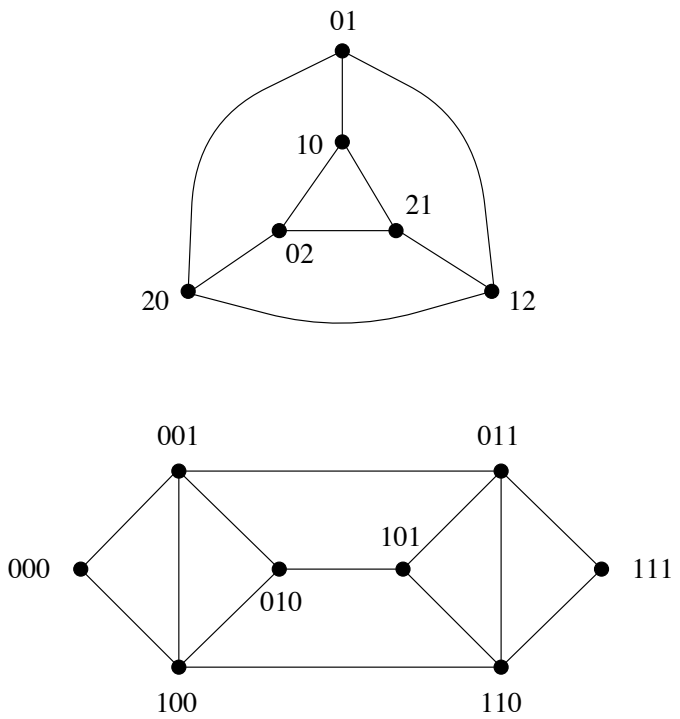


Figure 2.5 - Graphes non orientés $UK(2,2)$ et $UB(2,3)$

2.1.2 Définition à partir du graphe représentatif des arcs

Soit un graphe orienté G, on appelle *graphe représentatif des arcs* du graphe G (*line-digraph*), le graphe orienté $L(G)$ dont les sommets représentent les arcs de G et dont les arcs sont définis de la façon suivante : il existe un arc du sommet e vers le sommet f dans $L(G)$, si et seulement si l'arc de G représenté par e a pour extrémité terminale, l'extrémité initiale de l'arc de G représenté par f.

EXEMPLE. $L(K_3^*) = K(2,2)$.

Proposition 2.1.2 — *Si G est un graphe orienté d-régulier (c'est-à-dire si on a $d^+(x) = d^-(x) = d$ pour tout sommet x de G) à N sommets et de diamètre D, alors $L(G)$ est d-régulier, a dN sommets et un diamètre égal à $D+1$, sauf si G est un circuit.*

PREUVE. La preuve de cette proposition fait l'objet de l'exercice 2.4.5. □

On définit le graphe représentatif des arcs k-itéré de la façon suivante :

$$\begin{aligned} L^0(G) &= G \\ L^k(G) &= L(L^{k-1}(G)) \quad \textit{pour} \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

Corollaire 2.1.3 — *Si G est un graphe orienté, d-régulier et de diamètre D, alors $L^k(G)$ est d-régulier et de diamètre égal à $D+k$, sauf si G est un circuit.*

Proposition 2.1.4 — *Dans le cas des graphes de de Bruijn et de Kautz, les isomorphismes suivants sont vérifiés :*

$$\begin{aligned} B(d, D+1) &= L(B(d, D)) \\ K(d, D+1) &= L(K(d, D)) \end{aligned}$$

PREUVE. On définit la bijection entre $L(B(d, D))$ et $B(d, D+1)$ en associant au sommet de $L(B(d, D))$ représentant l'arc $x_1x_2\cdots x_Dx_{D+1}$ qui relie les sommets $x_1x_2\cdots x_D$ et $x_2\cdots x_Dx_{D+1}$ dans $B(d, D)$, le sommet $x_1x_2\cdots x_Dx_{D+1}$ de $B(d, D+1)$. La bijection conserve clairement la relation d'adjacence, c'est donc un isomorphisme de graphes. La bijection est exactement la même pour les graphes de Kautz. □

Notons qu'à la base de l'induction, on a :

$$\begin{aligned} B(d, 1) &= K_d^+ \\ K(d, 1) &= K_{d+1}^* \end{aligned}$$

où K_d^+ désigne le graphe complet orienté symétrique sur d sommets avec une boucle en chacun d'eux, et K_{d+1}^*, le graphe complet orienté symétrique avec $d+1$ sommets sans boucle.

On obtient ainsi une définition des graphes de de Bruijn et de Kautz en terme de graphe représentatif itéré :

Proposition 2.1.5 — *On peut définir les graphes de de Bruijn et de Kautz de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} B(d, D) &= L^{D-1}(K_d^+) \\ K(d, D) &= L^{D-1}(K_{d+1}^*) \end{aligned}$$

Cette caractérisation est à la base de la plupart des démonstrations de propriétés des graphes de de Bruijn ou de Kautz. En effet, si une propriété se conserve par l'opération «graphe représentatif» et, si elle est vraie pour K_d^+ ou K_d^*, elle sera vraie pour tout graphe de de Bruijn ou tout graphe de Kautz. Nous en donnons deux exemples dans le paragraphe suivant.

2.1.3 Connexité et hamiltonisme

Connexité

Les connexités de G et de $L(G)$ sont reliées de la façon suivante :

Lemme 2.1.6 — *Si $\kappa(L(G))$ et $\lambda(G)$ désignent respectivement la sommet-connexité de $L(G)$ et l'arc-connexité de G, alors on a :*

$$\kappa(L(G)) = \lambda(G)$$

PREUVE. D'après le théorème de Menger (chapitre 1), si G est λ-arc-connexe, alors il existe λ chemins deux à deux arc-disjoints reliant tout couple de sommets x et y de G.
Soient deux sommets quelconques e et f de $L(G)$, et soient x l'extrémité terminale de e, et y l'extrémité initiale de f, alors les λ chemins deux à deux arc-disjoints reliant x et y dans G induisent λ chemins deux à deux sommet-disjoints reliant e et f dans $L(G)$, et réciproquement. Donc, $\kappa(L(G)) = \lambda(G)$. □

REMARQUE. Cette preuve est fausse ! Une démonstration correcte du lemme est proposée dans la correction de l'exercice 2.4.6.

Proposition 2.1.7 — *Les connexités des graphes de de bruijn et de Kautz sont :*

$$\begin{aligned} \kappa(B(d,D)) = \lambda(B(d,D)) &= d-1 \\ \kappa(K(d,D)) = \lambda(K(d,D)) &= d \end{aligned}$$

PREUVE. La preuve se fait par induction. $B(d,1) = K_d^+$ est $(d-1)$-fortement connexe. Du lemme 2.1.6 et du fait que $\lambda(G) \geq \kappa(G)$ (proposition 1.1.4), on déduit que, pour tout graphe G :

$$\kappa(L(G)) = \lambda(G) \geq \kappa(G)$$

D'où, par récurrence, $\kappa(B(d,D)) \geq d-1$. Or, $B(d,D)$ est au plus $(d-1)$-arc-connexe, puisque la suppression des $d-1$ arcs sortants de 0^D, autres que la boucle, disconnecte $B(d,D)$. Ainsi :

$$d-1 \leq \kappa(B(d,D)) \leq \lambda(B(d,D)) \leq d-1$$

Donc, $\lambda(B(d,D)) = \kappa(B(d,D)) = d-1$.

Pour le graphe de Kautz, $K(d,1) = K_{d+1}^*$ est d-fortement connexe. Comme le degré minimum est d, $\lambda(K(d,D) = \kappa(K(d,D) = d$. □

REMARQUE. Ceci prouve que les graphes de Kautz ont une connexité optimale. On peut modifier les graphes de de Bruijn en supprimant les boucles et en rajoutant un nouveau circuit reliant tout les sommets de type a^D. On montre que la connexité devient d ce qui est optimal.
Les résultats sur la connexité des graphes de de Bruijn ou de Kautz non orientés sont beaucoup plus difficiles à établir. On montre cependant (dans [2]) que :

$$\begin{aligned} \kappa(UK(d,D)) &= 2d-1 \\ \kappa(UB(d,D)) &= 2d-2 \end{aligned}$$

ce qui, dans les deux cas, correspond au degré minimum (voir exercice 2.4.4).

Hamiltonisme

Nous utilisons de nouveau la propriété de graphe représentatif pour montrer que les graphes $B(d,D)$ et $K(d,D)$ sont hamiltoniens. En fait, nous allons montrer que ces deux graphes sont eulériens. Rappelons qu'un graphe orienté est dit hamiltonien (resp. eulérien) s'il existe un circuit, dit hamiltonien (resp. eulérien), qui passe par tous les sommets (resp. arcs) de ce graphe une fois et une seule.

REMARQUE. L'existence de cycles hamiltoniens ou eulériens est un problème très ancien en théorie des graphes (Hamilton, 1856 et Euler, 1736). Ces problèmes sont importants en optimisation combinatoire, ou du moins leur généralisation, connue sous le nom de *problème du voyageur de commerce* ou *problème du postier chinois*. Même s'ils sont apparemment très voisins, ces deux problèmes sont de complexité très différente : l'existence d'un cycle eulérien est un problème que l'on peut résoudre en temps polynomial (voir ci-après) alors que l'existence d'un cycle hamiltonien est un problème NP-complet (voir [10]).

Théorème 2.1.8 — *Un graphe orienté fortement connexe G admet un circuit eulérien si et seulement si $d^+(x) = d^-(x)$, pour tout sommet x de G.*

PREUVE. Une preuve algorithmique de ce théorème repose sur l'existence d'*anti-arborescences couvrantes* (voir définition ci-après) :

DEFINITION. Un graphe partiel T de G est une *anti-arborescence* de racine r, si c'est un arbre raciné en r, orienté des feuilles vers la racine. En d'autres termes, on a $d_T^+(x) = 1$, pour tout $x \neq r$, et $d_T^+(r) = 0$. Une anti-arborescence est *couvrante* si elle contient tout sommet de G. Tout graphe fortement connexe admet une arborescence et une anti-arborescence couvrantes de racine r quelconque. On peut prendre, par exemple, comme arborescence (resp. anti-arborescence) celle des plus courts chemins issus de r (resp. terminant en r). Les sommets sont rangés par niveaux. Dans le cas du graphe de de Bruijn $B(d,D)$, l'anti-arborescence de racine 0^D est formée de l'arc $x_1x_2\cdots x_D0$ en tout sommet $x_1x_2\cdots x_D$ différent de 0^D.

Algorithme de construction d'un circuit eulérien d'un graphe orienté G

1. Choisir un sommet r, de départ, et une anti-arborescence T de G, de racine r.
2. Au sommet courant x, choisir un arc sortant de x, tel que :
   - cet arc n'a pas été emprunté ;
   - si c'est possible, cet arc n'appartient pas à T (on n'utilise l'arc de T sortant de x que si c'est la seule possibilité).
3. S'il n'existe plus d'arc sortant, et si G vérifie $d^+(x) = d^-(x)$ pour tout sommet x, alors le chemin obtenu est un circuit eulérien.

La preuve de l'algorithme est donnée dans la correction de l'exercice 2.4.7. □

Proposition 2.1.9 — *$B(d, D)$ et $K(d, D)$ sont des graphes eulériens.*

PREUVE. Il suffit d'appliquer le théorème 2.1.8. En effet, que ce soit pour $B(d, D)$ ou $K(d, D)$, $d^+(x) = d^-(x) = d$ en tout sommet x. □

Proposition 2.1.10 — *Un graphe orienté G est eulérien si et seulement si $L(G)$ est hamiltonien.*

PREUVE. Un circuit eulérien de G est un circuit couvrant tous les arcs de G, ce qui correspond à un circuit couvrant tous les sommets de $L(G)$. Un tel circuit est, par définition, un circuit hamiltonien de $L(G)$. □

Corollaire 2.1.11 — *Si G est d-régulier, alors $L^n(G)$ est hamiltonien pour tout n supérieur ou égal à 1.*

PREUVE. Si G est régulier vérifiant $d^+ = d^- = d$, alors G est eulérien. Par induction, pour $n \geq 0$, $L^n(G)$ est régulier et tel que $d^+ = d^- = d$, donc encore eulérien. Or, G eulérien équivaut à $L(G)$ hamiltonien. Nous avons donc $L^{(n+1)}(G)$ hamiltonien pour tout $n \geq 0$, soit $L^n(G)$ hamiltonien pour tout $n \geq 1$. □

Corollaire 2.1.12 — *$B(d, D)$ et $K(d, D)$ sont des graphes hamiltoniens.*

PREUVE. Pour établir cette proposition, il suffit d'appliquer le corollaire 2.1.11 en prenant pour G les graphes K_d^+ et K_{d+1}^*. □

Historique. Les graphes de de Bruijn sont appelés ainsi suite à l'article de de Bruijn [8]. En fait, de Bruijn cherchait à construire ce qui est appelé des *suites de de Bruijn*. Une suite de de Bruijn (*de Bruijn sequence*) est une suite circulaire de $N = d^D$ éléments pris dans $\{0, 1, \ldots, d-1\}$ telle que toute sous-suite de longueur D apparait une fois et une seule. Par exemple, la suite circulaire 00011101 de longueur $8 = 2^3$ contient successivement les huit sous-suites 000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100. L'existence d'une suite de de Bruijn à d^D éléments correspond exactement à l'existence d'un circuit hamiltonien dans le graphe de de Bruijn $B(d, D)$.
Une manière simple de construire une suite de de Bruijn consiste à utiliser l'algorithme de construction d'un circuit eulérien dans $B(d, D)$ avec l'anti-arborescence définie plus haut (voir l'exercice 2.4.8). D'autres constructions sont données dans la littérature, en particulier si D est une puissance de premier. La construction de suites de de Bruijn a été obtenue en même temps par Good [11] qui a aussi ramené le problème à la construction de cycles hamiltoniens dans $B(d, D)$. Les graphes de de Bruijn sont aussi appelés des graphes de Good (*Good graphs*). En fait, la construction de telles suites semble être une découverte beaucoup plus vieille : le lecteur pourra se référer à l'article de «Pour la science» [21] ou au livre de Stein [20] pour réaliser que les graphes de de Bruijn étaient déjà connus il y a des milliers d'années...

2.1.4 Définition à partir des congruences

La définition suivante permet de construire une généralisation des graphes de de Bruijn et de Kautz, valable pour un nombre quelconque de sommets.

Graphes de de Bruijn généralisés

Le graphe orienté $GB(d, N)$ a pour ensemble de sommets les entiers modulo N. Il existe un arc d'un sommet x vers tous les sommets y tels que $y \equiv dx + a \pmod N$, avec $0 \leq a \leq d-1$. Le graphe $GB(d, N)$ est d-régulier pour $d < N$. Cette définition a été introduite par, entre autres, Reddy, Pradhan et Kuhl en 1980 [18].

Ces graphes sont bien une généralisation des graphes de de Bruijn comme le montre la proposition suivante :

Proposition 2.1.13 — *Si $N = d^D$, alors $GB(d, N) = B(d, D)$.*

PREUVE. Elle résulte de l'écriture en base d d'un entier : au sommet $x_1 x_2 \cdots x_D$ de $B(d, D)$ correspond l'entier $x \equiv x_D + x_{D-1} d + \cdots + x_1 d^{D-1} \pmod N$ et réciproquement. Cette correspondance laisse invariant le voisinage d'un sommet. En effet, il existe un arc de x vers y dans $GB(d, D)$ si $y \equiv dx + a \pmod N$, avec $0 \leq a \leq d-1$. Donc, y s'écrit $a + x_D d + \cdots + x_2 d^{D-1} + x_1 d^D$ (modulo N),

ou encore $a + x_D d + \cdots + x_2 d^{D-1}$, puisque $d^D \equiv 0 \pmod N$. Par conséquent, y correspond au sommet $x_2 \cdots x_D a$ de $B(d, D)$.
Notons, par exemple, que dans le cas $d = 2$, le décalage à gauche suivi de l'introduction de 0 correspond exactement à la manière d'implémenter la multiplication par 2 (les nombres étant écrits en binaire). □

Théorème 2.1.14 — *Le diamètre de $GB(d, N)$ est égal à $\lceil \log_d N \rceil$.*

PREUVE. Par récurrence, on montre que l'ensemble des sommets à distance k du sommet x est formé des d^k entiers consécutifs :

$$\{d^k x, d^k x + 1, \ldots, d^k x + d^k - 1\}$$

Si $k \geq \log_d N$, on obtient donc comme sommets à distance $\lceil \log_d N \rceil$ d'un sommet quelconque, un ensemble d'entiers consécutifs de taille $\geq N$ et par suite, tous les entiers modulo N. Donc, le diamètre est inférieur ou égal à $\lceil \log_d N \rceil$.
De plus, à distance inférieure ou égale à k de 0, on trouve exactement d^k sommets. Par conséquent, si $N > d^k$, le diamètre est strictement supérieur à k. Donc, le diamètre est aussi supérieur ou égal à $\lceil \log_d N \rceil$. □

Graphes de Kautz généralisés

Le graphe orienté $GK(d, N)$ a pour ensemble de sommets les entiers modulo N et il existe un arc d'un sommet x vers tous les sommets y tels que $y \equiv -dx - b \pmod N$, avec $1 \leq b \leq d$. Le graphe $GK(d, N)$ est d-régulier pour $d < N$.
Imase et Itoh [12] (1983) sont les auteurs de cette définition.

Proposition 2.1.15 — *Si $N = d^D + d^{D-1}$, alors $GK(d, N) = K(d, D)$.*

PREUVE. La preuve de cette proposition est laissée en exercice (exercice 2.4.9). □

Dans [12], Imase et Itoh ont prouvé le résultat suivant, dont la démonstration est voisine de celle du théorème 2.1.14 :

Proposition 2.1.16 — *Le diamètre de $GK(d, N)$ est $\lceil \log_d N \rceil$ ou $\lceil \log_d N \rceil - 1$.*

2.2 Autres graphes

De nombreux autres graphes ont été proposés ayant aussi un petit degré et un diamètre logarithmique en le nombre de sommets. Les liens entre ces graphes seront étudiés en particulier dans le chapitre 5.

2.2.1 Le graphe *shuffle-exchange*

Le graphe *shuffle-exchange* a une définition très voisine de celle du graphe de de Bruijn. Nous en donnons ici la définition la plus courante avec un alphabet binaire.

DEFINITION. Le *graphe shuffle-exchange de dimension* n, noté $SE(n)$, est un graphe simple non orienté qui a pour sommets les mots binaires de longueur n. Le sommet $x_1x_2\cdots x_n$ est relié au sommet $x_1x_2\cdots\overline{x_n}$ par une arête de type *échange* (*exchange*) et aux sommets $x_2\cdots x_nx_1$ et $x_nx_1\cdots x_{n-1}$ par une arête de type *décalage* (littéralement *mélange*, car de l'anglais *shuffle*), qui est en fait un décalage cyclique.

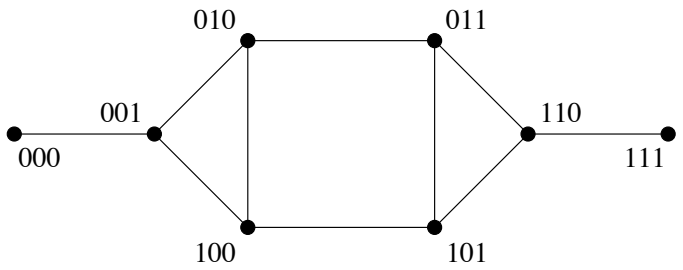


Figure 2.6 - Graphe shuffle-exchange $SE(3)$

Ce graphe a 2^n sommets, un degré maximum 3 et son diamètre est $2n-1$. En effet, on passe d'un sommet $x_1x_2\cdots x_n$ à un sommet $y_1y_2\cdots y_n$ en faisant une suite de $n-1$ décalages entrecoupés, si besoin est, d'échanges. Par exemple, si $x_n = \overline{y_1}$, on fait d'abord un échange sinon rien, puis un décalage à gauche ; si $x_1 = \overline{y_2}$, on fait un échange sinon rien, puis un décalage à gauche et ainsi de suite. La distance entre deux sommets est donc au plus $2n-1$. La distance entre 0^n et 1^n est $2n-1$; le diamètre est donc $2n-1$.
Le calcul du nombre d'arêtes du graphe *shuffle-exchange* est donné en exercice (voir l'exercice 2.4.10).

Le graphe de de Bruijn peut être obtenu à partir du graphe *shuffle-exchange* par une transformation très simple appelée *contraction* :
On appelle *contracté de* $SE(n)$ le graphe obtenu en remplaçant chaque paire de sommets $\{x_1x_2\cdots x_n, x_1x_2\cdots\overline{x_n}\}$ par un seul sommet, en supprimant l'arête de type échange et en gardant une arête entre deux nouveaux sommets si les sommets avant contraction étaient reliés (on a «contracté» les arêtes de type échange en un sommet). Le contracté de $SE(n)$ ainsi obtenu est isomorphe à $UB(2, n-1)$. En effet, au sommet contracté des deux sommets $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ et $x_1x_2\cdots x_{n-1}\overline{x_n}$, on associe le sommet $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ de $UB(2, n-1)$. Les arêtes

de type *shuffle* de $SE(n)$ induisent alors exactement les arêtes de type décalage de $UB(2, n-1)$.
En fait, il est plus intéressant de considérer l'opération inverse de la contraction comme nous le verrons plus loin dans la section 2.2.5.

2.2.2 Le graphe *cube-connected-cycles*

Le graphe *cube-connected-cycles*, noté $CCC(n)$, a été défini par Preparata et Vuillemin en 1981 [17] comme un graphe aussi efficace que l'hypercube pour les algorithmes de la classe «*ascend-descend*», qui contient les algorithmes classiques (tris, fusion, FFT, permutations, convolutions, opérations sur des matrices, etc.), et ayant un petit degré et une bonne surface VLSI (*layout area*).

DEFINITION. Ce graphe est obtenu à partir d'un hypercube de dimension n en remplaçant chaque sommet par un cycle de longueur n et en reliant deux cycles par une arête, dite *arête hypercubique*, s'ils remplacent des sommets adjacents dans l'hypercube.

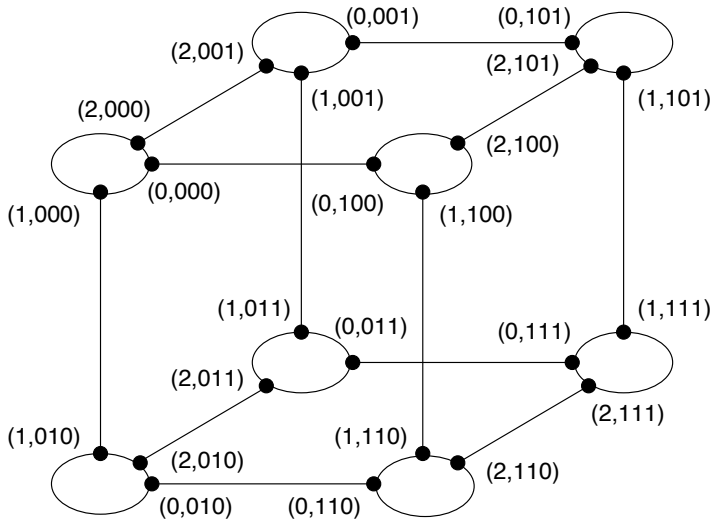


Figure 2.7 - Graphe cube-connected-cycles $CCC(3)$

Il existe a priori plusieurs façons d'interconnecter les cycles entre eux. La manière classique consiste à donner comme extrémités aux arêtes de la i-ème dimension les i-èmes sommets de cycles à relier. Les sommets sont notés $(i, x_0x_1 \cdots x_{n-1})$, avec $0 \leq i \leq n-1$ et $x_i = 0, 1$. Le sommet $(i, x_0x_1 \cdots x_i \cdots x_{n-1})$ est connecté aux sommets $(i-1 \pmod n), x_0x_1 \cdots x_i \cdots x_{n-1})$ et $(i+1 \pmod n), x_0x_1 \cdots x_i \cdots x_{n-1})$ dans le même cycle, et au sommet $(i, x_0x_1 \cdots \overline{x_i} \cdots x_{n-1})$ par une arête hypercubique. Le degré de tout sommet est donc 3, dès que n est supérieur ou égal à 3.

L'ordre du $CCC(n)$ est $n2^n$ et son diamètre est $2n - 1 + \max(1, \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor)$ (voir exercice 2.4.11).

REMARQUE. Comme précédemment, on peut dire que l'hypercube $H(n)$ est le contracté du graphe *cube-connected-cycles* $CCC(n)$: on contracte les sommets de chaque cycle en un unique sommet. On peut aussi montrer, en utilisant la structure sous-jacente de l'hypercube, que le graphe $CCC(n)$ est hamiltonien et a une connexité égale au degré, à savoir 3. C'est aussi un graphe de Cayley (voir exercice 2.4.14).

2.2.3 Le graphe *butterfly*

Le *graphe butterfly de dimension* n, noté $BF(n)$, est le graphe (multigraphe pour $n = 2$) dont les sommets sont les couples (l, x) où l est le numéro de *niveau*, tel que $0 \leq l < n$, et x est un mot binaire de longueur n qui correspond au numéro de *rangée*.
Tout sommet $(l, x_0x_1 \cdots x_l \cdots x_{n-1})$ du graphe *butterfly* est relié par une arête aux sommets $(l', x_0x_1 \cdots x_l \cdots x_{n-1})$ et $(l', x_0x_1 \cdots \overline{x_l} \cdots x_{n-1})$, avec $l' = (l+1) \bmod n$.

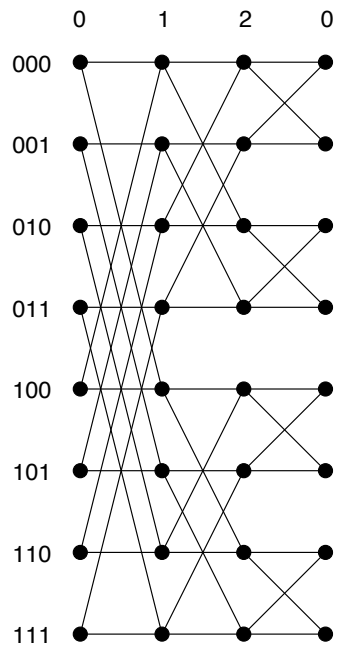


Figure 2.8 - Graphe butterfly $BF(3)$

Le degré du graphe *butterfly* est toujours 4, son ordre est $n2^n$ et son diamètre vaut : $n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

REMARQUE. De manière à obtenir une figure plus lisible, on représente presque toujours le graphe *butterfly* en dédoublant le niveau 0, comme sur la figure 2.8. Cependant, ce graphe ne possède bien que n niveaux de 2^n sommets. C'est pour cette raison qu'on l'appelle aussi *graphe butterfly rebouclé* (une représentation plus suggestive de ce graphe est donnée dans l'annexe A), par opposition au réseau multiétages correspondant, qui lui, compte $n+1$ niveaux (ou *étages*).

2.2.4 La grille d'arbres d-aires

La *grille d'arbres d-aires*, notée $MT(d,h)$, est le graphe dont les sommets sont tous les couples (u,v) de mots sur un alphabet de d lettres, tels que le plus long des deux mots est de longueur h.
Il existe une arête $[(u,v),(u',v')]$ dans $MT(d,h)$ si $|u| = h$, $u = u'$ et $v = v'\lambda$ ou si $|v| = h$, $v = v'$ et $u' = u\lambda$, λ étant une lettre quelconque de l'alphabet.

Dans l'exemple de la figure 2.9, $d = 3$ et $h = 1$. Les mots possibles sont le mot vide e et les mots à une lettre 0, 1 et 2.

REMARQUE. Il est possible de voir la grille d'arbres d-aires $MT(d,h)$ comme une grille $M(d^h, d^h)$, dont les sommets coïncideraient avec les feuilles d'arbres d-aires de profondeur h. On ne s'intéresse donc ici qu'au cas bi-dimensionnel, c'est-à-dire avec une grille sous-jacente de dimension 2.

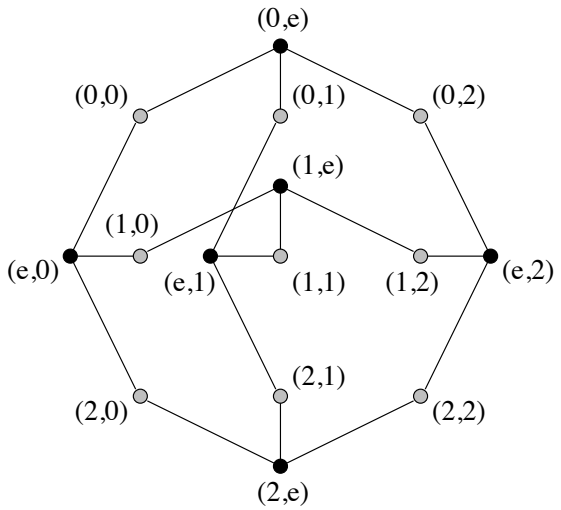


Figure 2.9 - Grille d'arbres ternaires $MT(3,1)$

Le degré maximum de la grille d'arbres varie de d, quand h vaut 1, à $d+1$, si h est plus grand que 1. Son ordre est $d^h\left(d^h + 2\frac{d^h-1}{d-1}\right)$ et son diamètre est $4h$.

2.2.5 Graphes composés

La méthode utilisée pour construire le graphe $CCC(n)$ fait partie d'une méthode générale qui est la duale de la contraction, et qui permet de construire de grands graphes ayant un petit degré, à partir de graphes plus petits.

DEFINITION. On appelle *graphe composé* (*compound graph*) d'un graphe G par un graphe H, tout graphe obtenu de la façon suivante : on remplace les sommets de G par des copies de H, et on relie certains sommets de deux de ces copies, seulement si les sommets correspondants de G sont adjacents.

Formellement, un sommet d'un graphe composé sera noté (x, u), x étant un sommet de G et u un sommet de H. Pour tout x, les sommets (x, u) et (x, v) sont reliés par une arête, si et seulement si u et v sont adjacents dans H. Pour x fixé dans G, le sous-graphe engendré par l'ensemble des sommets $\{(x, u) \mid u \in V(H)\}$ est donc isomorphe à H et sera appelé la *copie* H_x, associée au sommet x de G. Si x et y ne sont pas adjacents dans G, il n'y a pas d'arête entre les copies H_x et H_y. Si x et y sont adjacents dans G, on peut avoir certaines arêtes entre les copies H_x et H_y.
Insistons sur le fait que cette opération ne définit pas un graphe de manière unique. L'ordre d'un composé de G par H est clairement le produit des ordres de G et H, mais son degré maximum, son diamètre et la plupart de ses propriétés vont dépendre de la manière de relier les sommets appartenant à deux copies H_x et H_y, avec x adjacent à y dans G. On peut, par exemple, relier tous les sommets (x, u) et (y, u). L'exercice 2.4.12 propose de trouver une borne sur le diamètre d'un composé, en supposant qu'il y a au moins une arête entre deux copies H_x et H_y, pour toute paire de sommets x et y adjacents dans G. Le graphe *cube-connected-cycles* $CCC(n)$ défini en 2.2.2 est un composé de l'hypercube $H(n)$ par le cycle C_n ; dans ce cas, il y a exactement une arête (l'arête hypercubique) entre deux cycles associés à des sommets adjacents dans l'hypercube.

La réalisation pratique du réseau associé à un composé est facilitée par le fait qu'on peut d'abord construire une série de réseaux associés à H sous forme de cartes, et ensuite relier ces cartes entre elles. Le réseau de la Connection Machine CM-2 est en fait le composé d'un hypercube ($H(12)$ dans la version la plus importante) par un *butterfly* à seize sommets.
Lorsque G et H ont de bonnes propriétés, vis-à-vis du problème (Δ, D) par exemple, un de leurs composés peut, lui aussi, être un graphe intéressant. Il semble qu'un bon choix pour le graphe G est de prendre un graphe de de Bruijn. En effet, pour un degré maximum Δ fixé, les meilleurs (Δ, D)-graphes connus actuellement, pour D assez grand, sont obtenus en prenant le composé d'un graphe de de Bruijn avec un graphe H bien choisi. La difficulté réside dans le choix du bon graphe H et surtout dans la définition des liaisons entre les copies de H (voir l'article de Jerrum et Skyum [13]). On peut choisir par exemple pour H

un hypercube. Ci-dessous, nous illustrons ceci avec le cas particulier $H = K_2$ et avec un degré maximum du composé égal à 3.

Le graphe *shuffle-exchange* $SE(n)$ peut être considéré comme un composé de $B(2, n-1)$ par K_2. Un sommet du composé sera noté $(x_1x_2\cdots x_{n-1}, i)$, où $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ est un sommet de $B(2, n-1)$ et i ($i = 0$ ou 1) un sommet de K_2. Pour montrer que le composé que l'on va définir est bien isomorphe au graphe *shuffle-exchange* $SE(n)$, il suffit de faire correspondre au sommet $(x_1x_2\cdots x_{n-1}, i)$ du composé, le sommet $x_1x_2\cdots x_{n-1}i$ de $SE(n)$. Dans le composé, chaque copie de K_2 associée au sommet $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ de $B(2, n-1)$ est une arête $[(x_1x_2\cdots x_{n-1}, 0), (x_1x_2\cdots x_{n-1}, 1)]$ qui correspond à une arête de type échange de $SE(n)$. Les arêtes entre les différentes copies de K_2 dans le composé sont définies comme suit : à chaque arc reliant le sommet $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ au sommet $x_2\cdots x_{n-1}i$ dans $B(2, n-1)$, nous associons une arête reliant les sommets $(x_1x_2\cdots x_{n-1}, i)$ et $(x_2\cdots x_{n-1}i, x_1)$ dans le composé. Il est facile de voir que ces arêtes correspondent exactement aux arêtes de type décalage dans $SE(n)$. Le composé obtenu a donc $N = 2^n$ sommets, un degré maximum égal à 3 et un diamètre de $2n-1$, c'est-à-dire de l'ordre de $2\log_2 N$.
Nous allons donner une manière plus astucieuse de relier les copies de K_2, qui va donner un autre composé G' de $B(2, n-1)$ par K_2 ayant toujours 2^n sommets, un degré maximum 3, mais avec un diamètre d'au plus $\frac{3n+1}{2}$. Pour cela, à l'arc reliant $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ à $x_2\cdots x_{n-1}i$ dans $B(2, n-1)$, nous associons dans le composé une arête reliant $(x_1x_2\cdots x_{n-1}, i)$ et $(x_2\cdots x_{n-1}(i+\delta), x_1)$, où δ désigne la parité du sommet $x_1x_2\cdots x_{n-1}$, c'est-à-dire $\delta = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}$ (mod2), et où $(i+\delta)$ est pris modulo 2. Le composé G' ainsi obtenu, a un diamètre d'au plus $\frac{3n+1}{2}$ (voir exercice 2.4.13). On a donc ainsi construit une famille de graphes de degré maximum 3 ayant un diamètre de l'ordre de $1,5\log_2 N$.

Remarque. Nous avons décrit trois familles de graphes de degré maximum 3, à savoir le graphe *cube-connected-cycles* $CCC(n)$, qui a un diamètre de l'ordre de $2,5\log_2 N$, le graphe *shuffle-exchange* $SE(n)$ de diamètre environ $2\log_2 N$, et le graphe composé décrit ci-dessus, de diamètre $1,5\log_2 N$.
La borne de Moore pour $\Delta = 3$ implique que tout graphe de degré maximum 3 a un diamètre valant au moins $\log_2 N$. Utilisant une technique de construction analogue à celle décrite ci-dessus, mais en remplaçant les sommets d'un $B(3, D)$ par une étoile à trois branches, Jerrum et Skyum [13] ont construit une famille de graphes de degré maximum 3 et de diamètre $\frac{7}{3}\log_3 N \simeq 1,47\log_2 N$. Ceci est la meilleure famille connue de graphes de degré maximum 3. Un problème ouvert consiste à trouver des graphes de degré maximum 3 ayant un diamètre qui vaut $\log_2 N$. De tels graphes existent d'après un résultat de Bollobás et de la Vega [5] qui ont montré que «presque tous» les graphes de degré fixé Δ ont un diamètre de l'ordre $\log_{\Delta-1} N$. Ceci veut dire intuitivement que si on construit, pour N assez grand, un graphe de degré 3 au hasard, il a presque sûrement un diamètre très bon. Pourtant, personne n'a encore réussi à en exhiber un seul !

2.3 Réseaux multiétages

Nous venons de présenter la construction des réseaux de processeurs les plus usuels. Ces réseaux peuvent être modélisés par un graphe dont les sommets sont les processeurs (ou des circuits spécialisés dans le routage) et les arêtes représentent les liens de communication inter-processeurs. Ces réseaux sont *statiques* dans le sens où la topologie est fixée une fois pour toutes. Il existe une seconde catégorie de réseaux dont la topologie est *dynamique*, c'est-à-dire pour lesquels le support physique est fixé, mais où des *commutateurs* (on trouve aussi parfois le terme de *connecteurs* dans la littérature), permettent de modifier le schéma de connexion. Les *réseaux multiétages*, dont il va être question dans cette section, font partie de cette dernière classe.

Le terme «multiétages» signifie que les commutateurs, qui sont les briques de base du réseau, sont organisés en *étages*. Un étage est composé de commutateurs. Chaque commutateur possède un certain nombre de liens d'entrée et de sortie. Plusieurs étages sont juxtaposés. Si un réseau est constitué de n étages, numérotés en général de 0 à $n-1$, les sorties des commutateurs de l'étage i (que l'on appelle plus brièvement sorties de l'étage i) ne peuvent être directement liées qu'aux entrées de l'étage $i+1$ (entrées des commutateurs de l'étage $i+1$), ceci pour tout i, $0 \leq i \leq n-2$. L'ensemble des liens d'entrée (resp. de sortie) de l'étage 0 (resp. étage $n-1$) constituent les liens d'entrée (resp. de sortie) du réseau.

Historiquement, ces réseaux ont été proposés dans le but de modéliser les mouvements de données entre les processeurs et la mémoire dans une machine parallèle à mémoire partagée. La mémoire commune y est divisée en *bancs* (petits modules de mémoire possédant leurs propres canaux d'entrée/sortie).
Pour fixer les idées, quand nous considérons un réseau multiétages, nous supposons qu'il existe P processeurs $(P_0, P_1, \ldots, P_{P-1})$, reliés aux P liens d'entrée $(E_0, E_1, \ldots, E_{P-1})$ du réseau, et Q bancs-mémoire $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_{Q-1})$, reliés aux Q liens de sortie $(S_0, S_1, \ldots, S_{Q-1})$ du réseau. Par la suite, nous identifions un processeur P_i (resp. un banc-mémoire Q_j) et l'entrée E_i (resp. la sortie S_j) du réseau auquel il est relié. On cherche à construire des réseaux dans lesquels chaque processeur soit potentiellement connecté à tous les bancs-mémoire via le réseau multiétages [15]. On peut toutefois noter l'apparition récente de machines (voir annexe B, les machines CS-2, SP1, etc.) dans lesquelles le réseau multiétages relie les processeurs entre eux et les mémoires sont distribuées sur les processeurs, ce qui revient à identifier les liens d'entrée et de sortie.

Dans un réseau multiétages, il n'est possible d'établir une nouvelle liaison qu'entre une entrée libre du réseau (un processeur) et une sortie libre du réseau (un banc-mémoire), c'est-à-dire une entrée et une sortie qui ne sont pas en cours de communication.

Dans le cas où le nombre d'entrées P est égal au nombre de sorties, on dit que le réseau réalise une permutation π de l'ensemble E des entrées sur l'ensemble S des sorties, s'il existe un état des commutateurs qui permet de connecter l'entrée E_i à la sortie $S_{\pi(i)}$ pour tout i. On dit aussi que l'on peut *coupler* l'ensemble d'entrées E sur l'ensemble de sorties S.

2.3.1 Description préliminaire de deux réseaux simples

La complexité des réseaux multiétages se mesure en nombre de commutateurs élémentaires (ou, comme nous le verrons plus tard, points de croisement) mis en jeu dans le réseau. Il est clair qu'il y a là un compromis à trouver entre des réseaux physiquement complexes, difficiles — sinon impossibles — à réaliser en pratique, mais possédant une capacité de connexions simultanées maximale, et les réseaux simples, faciles à mettre en œuvre, mais ayant de mauvaises performances en cas de demandes multiples de connexions.

Le plus simple de ces réseaux est le *bus* utilisé en temps partagé, représenté dans la figure 2.10. Tout processeur est relié à toute mémoire par l'intermédiaire du même bus, mais une seule requête peut être envisagée à la fois. En effet, dès que le bus est utilisé pour relier un processeur à une mémoire, il faut attendre qu'il se libère pour relier un autre processeur à une mémoire. La mise en œuvre est en général facile.

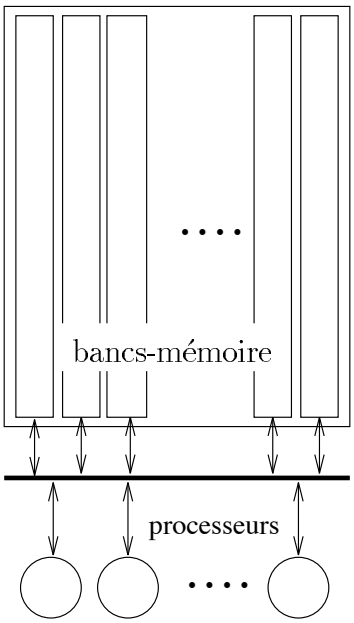


Figure 2.10 - Liaison par bus

Le réseau le plus complexe est le *crossbar*. Dans ce type de réseau, il existe toujours une liaison possible entre tout couple de nœuds libres (processeur vers

banc-mémoire), indépendamment des liaisons déjà existantes. On peut représenter un réseau *crossbar* par une grille (P, Q), les P processeurs étant en tête des lignes, les Q bancs-mémoire en tête des colonnes (voir figure 2.11), avec un interrupteur à chaque point de croisement entre une ligne et une colonne. Chaque processeur P_i est alors simplement relié à la mémoire M_j en fermant l'interrupteur se trouvant au point de croisement de la ligne i et de la colonne j. Le réseau *crossbar* est malheureusement le réseau le plus coûteux qui permette de réaliser toute permutation en établissant des liaisons dans un ordre quelconque. Le nombre de points de croisement est égal au produit du nombre de processeurs par le nombre de bancs-mémoire.

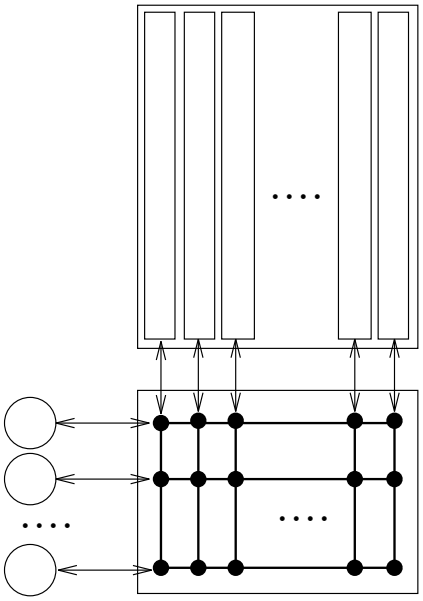
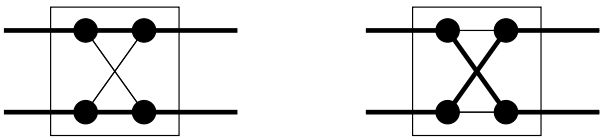


Figure 2.11 - Crossbar

Un réseau *crossbar* $(2, 2)$ est donc un réseau à deux entrées (E_0 et E_1) et deux sorties (S_0 et S_1). Deux états sont possibles pour ce réseau. Dans l'un, l'entrée E_0 (resp. E_1) est reliée à la sortie S_0 (resp. S_1) : on continue sur la même ligne. Dans l'autre, l'entrée E_0 (resp. E_1) est reliée à la sortie S_1 (resp. S_0) : on croise (système de bascule, ou *switch*). On dit alors que l'on a réalisé une permutation sur les entrées, la permutation identité dans le premier cas, une transposition dans le deuxième cas. En pratique, cela est matériellement réalisé grâce à un simple commutateur composé de quatre points de croisement (commutateur $(2, 2)$). Une représentation logique en est donnée dans la figure 2.12.

Les réseaux *crossbar* (P, P) permettent de réaliser toutes les permutations des entrées. C'est-à-dire que, quelle que soit la permutation π de $\{0, 1, 2, \ldots, P-1\}$, il existe un état du réseau qui permet simultanément d'associer, à toute entrée E_i, la sortie $S_{\pi(i)}$. Un état du réseau correspond à une position donnée de chaque interrupteur, et donc, dans ce cas, la permutation π est réalisée en fermant, pour tout i, l'interrupteur situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne $\pi(i)$.



en ligne bascule

Figure 2.12 - Etats d'un commutateur $(2, 2)$

Il est difficile aujourd'hui de construire des réseaux *crossbar* avec plus de trente deux entrées. On doit donc assembler de petits réseaux *crossbar* pour construire de plus grands réseaux, ce qui entraîne des délais plus importants lors des transmissions interprocesseurs. Plutôt que d'utiliser de vrais réseaux *crossbar*, les constructeurs proposent des composants programmables qui permettent d'établir des connexions entre un nombre limité de liens de communication. C'est, en particulier, le principe introduit par Clos dans les années 50. Nous présentons plus loin, en détail, les solutions les plus connues.

2.3.2 Définitions

Pour les réseaux multiétages, un certain nombre de définitions ont été introduites, permettant de caractériser certaines de leurs qualités (et défauts). Nous en donnons ici quelques unes. Un grand nombre de résultats concernant ces réseaux se trouvent dans le livre de Leighton [14] ou de Siegel [19], ou dans des articles de synthèse, comme ceux de Auguin et Boeri [1] ou Tobagi [22].

- A tout réseau multiétages on peut associer un *graphe multiparti*, c'est-à-dire un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en stables (voir chapitre 1). A chaque commutateur du réseau est associé un sommet. Chaque étage est un stable de la partition des sommets. Un sommet de l'étage i est relié à un sommet de l'étage $i + 1$ si les commutateurs correspondants sont reliés.

- Un réseau pour lequel il existe une unique liaison possible entre toute entrée et toute sortie est dit *réseau de Banyan*.

- Un réseau est dit *sans blocage* si l'on peut toujours établir une liaison entre toute entrée libre et toute sortie libre et cela, sans modifier les liaisons déjà établies.
  C'est le cas du réseau *crossbar*, où toute entrée est directement connectée à toute sortie. Dans un réseau sans blocage, on peut donc réaliser n'importe quel couplage entre tout sous-ensemble d'entrées libres et tout sous-ensemble de sorties libres de même cardinalité.

- Un réseau est dit *réarrangeable* s'il a le même nombre d'entrées que de sorties et s'il peut réaliser n'importe quelle permutation des entrées sur les

sorties. Contrairement à ce qui se passe pour un réseau sans blocage, il peut être nécessaire, pour établir une une liaison entre une entrée libre et une sortie libre, de modifier des liaisons déjà établies.
Le *réseau de Clos* et le *réseau de Beneš*, que nous allons définir plus loin, sont des réseaux réarrangeables.

- Un réseau est dit *avec blocage* si l'on ne peut pas toujours établir une liaison entre toute entrée libre et toute sortie libre, même en s'autorisant à modifier des liaisons déjà établies.
  C'est le cas du *réseau butterfly* ou du *réseau baseline*, également définis plus loin. Il existe donc certaines permutations des entrées qu'on ne peut pas réaliser à l'aide de ce type de réseau.
  Notons qu'un réseau qui n'est pas sans blocage peut être, soit réarrangeable, soit avec blocage.

- Par *commande d'un réseau multiétages*, on entend, soit la donnée d'un ensemble de liaisons où chacune relie un processeur et un banc-mémoire donnés, soit la commande des commutateurs du réseau. Notons que, dans le cas d'un réseau de Banyan, fixer la position des commutateurs revient à fixer la liaison si elle existe. Certains auteurs incluent aussi sous le terme de «commande» des rudiments de protocole, par exemple en définissant la conduite à tenir en cas de blocage.
  Dans la suite de ce chapitre, nous donnerons une commande pour presque tous les réseaux définis. Des résultats sur les commandes d'un certain nombre de ces réseaux peuvent être trouvés dans l'article de De Biase [7].

Le théorème suivant n'est qu'une formalisation théorique de la notion de réarrangeabilité qui se déduit immédiatement des définitions.

Théorème 2.3.1 — *Un réseau multiétages à base de commutateurs* $(2,2)$ *est réarrangeable si et seulement si, dans le graphe multiparti associé, il existe un ensemble de* P *chaînes deux à deux arête-disjointes entre les sommets du premier étage et les sommets du dernier étage.*

Le résultat suivant donne une borne sur la complexité des réseaux multiétages réarrangeables.

Théorème 2.3.2 — *Le nombre de points de croisement d'un réseau multiétages réarrangeable à* P *entrées et* P *sorties est en* $\Omega(P \log P)$.

Preuve. Si C est le nombre de points de croisement du réseau (il y en a quatre dans un commutateur $(2,2)$), alors il y a au plus 2^C façons de connecter le réseau (en effet, chaque interrupteur situé à un point de croisement est soit ouvert, soit fermé). Si le réseau est réarrangeable, il permet de réaliser toutes les permutations possibles des entrées. Si le réseau a P entrées (et sorties), on

doit donc avoir $2^C \geq P!$, ou encore $C \geq \log_2(P!)$, ce qui prouve que C est en $\Omega(P \log P)$. □

Tout réseau sans blocage étant réarrangeable, on déduit du théorème 2.3.2 le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.3 — *Le nombre de points de croisement d'un réseau multiétages sans blocage à P entrées et P sorties est en $\Omega(P \log_2 P)$.*

2.3.3 Réseau de Clos

DEFINITION. Un réseau de Clos, de paramètres p, q et r, noté $CL(p,q,r)$, est constitué de trois étages : le premier étage (étage 0) est constitué de r commutateurs identiques, dits (p,q), chacun reliant p entrées vers q sorties (on a donc rp entrées et rq sorties au premier étage) ; le deuxième étage (étage 1) comporte q commutateurs (r,r) identiques (on a donc ici qr entrées et autant de sorties) ; et le troisième étage (étage 2) est le symétrique du premier et consiste en r commutateurs (q,p) identiques. Nous faisons l'hypothèse que ces commutateurs sont en fait, eux-mêmes, des réseaux sans blocage. C'est le cas, par exemple, si ce sont des réseaux *crossbar*.
Les q sorties disponibles d'un commutateur de l'étage 0 vont vers des commutateurs différents de l'étage 1. Il en est de même entre les étages 1 et 2. Les r entrées (resp. sorties) d'un commutateur quelconque de l'étage central sont donc reliées aux r commutateurs du premier (resp. dernier) étage. La figure 2.13 illustre un tel réseau.

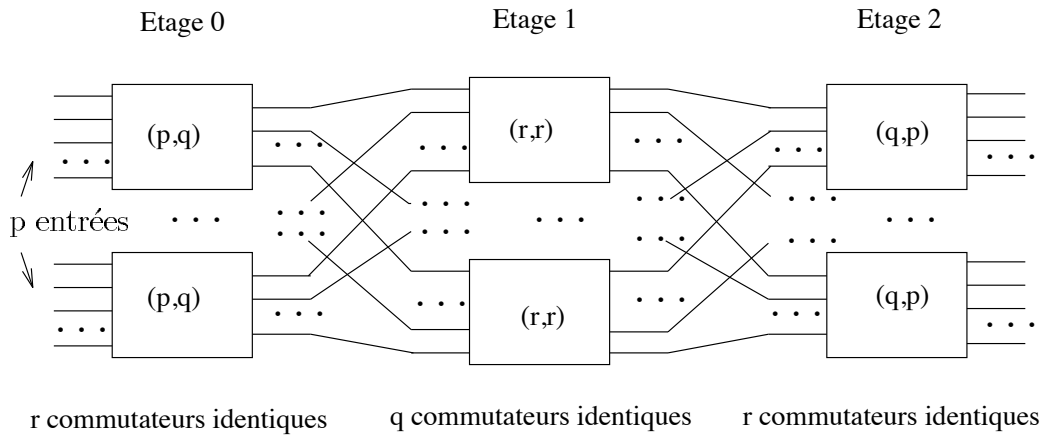


Figure 2.13 - Réseau de Clos $CL(p,q,r)$

Proposition 2.3.4 — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau de Clos $CL(p,q,r)$ soit sans blocage est $q \geq 2p-1$.*

PREUVE. Prouvons d'abord que la condition $q \geq 2p-1$ est suffisante. Nous désirons établir une liaison entre une entrée libre du premier étage et une sortie libre du dernier étage. Cette entrée est donc reliée à un commutateur (p,q) de l'étage 0. Comme ce commutateur est par hypothèse sans blocage, et que l'on a $q \geq p$, on peut atteindre toute sortie libre de ce commutateur. Or, il y en a au moins $q-(p-1)$ qui sont non utilisées (cette borne est atteinte si et seulement si aucune entrée du commutateur, sauf une, n'est libre au moment de la tentative d'établir cette nouvelle liaison). On peut donc atteindre au moins $q-(p-1)$ commutateurs de l'étage central. De manière symétrique, toute sortie libre du dernier étage peut être atteinte depuis au moins $q-(p-1)$ commutateurs de l'étage central. La liaison est donc possible dès qu'il existe un des q commutateurs de l'étage central qui peut être atteint par l'entrée et à partir duquel on peut atteindre la sortie, c'est-à-dire dès que $2(q-(p-1)) > q$, ce qui est la condition annoncée.
La démonstration ci-dessus montre que si $q \leq 2p-2$, on peut arriver à un blocage en interdisant $p-1$ commutateurs de l'étage central (avec $p-1$ entrées) et $p-1$ autres (avec $p-1$ sorties), de sorte qu'aucune liaison ne soit possible de la dernière entrée vers la dernière sortie. □

Nous pouvons calculer la complexité (en nombre de points de croisement) d'un réseau $CL(p,q,r)$ sans blocage, en fonction de son nombre d'entrées $P = rp$. Par exemple, si $r = p$ et $q = 2p-1$ (d'où $P = r^2$), un tel réseau possède $6P^{3/2} - 3P$ points de croisement. Remarquons qu'un réseau *crossbar*, lui aussi sans blocage, liant les mêmes processeurs aux mêmes bancs-mémoire, aurait de l'ordre de P^2 points de croisement, ce qui est plus coûteux. Nous avons donc intérêt à réitérer le procédé ci-dessus et à prendre comme commutateurs (p,q), non plus des réseaux *crossbar*, mais des réseaux de Clos. En fait, la complexité optimum est en $\Omega(P \log_2 P)$.

Proposition 2.3.5 — *Un réseau de Clos $CL(p,q,r)$ est réarrangeable dès que $q \geq p$.*

PREUVE. Notons E l'ensemble des entrées et S l'ensemble des sorties du réseau de Clos $CL(p,q,r)$. A ce réseau et à une bijection $\pi : E \to S$, nous associons un multigraphe biparti G dont les ensembles de sommets de la bipartition sont notés $I = \{I_i : 1 \leq i \leq r\}$ et $O = \{O_j : 1 \leq j \leq r\}$. Les sommets de I sont les commutateurs du premier étage, les sommets de O ceux du troisième étage. Le graphe G a une arête $[I_i, O_j]$ si, pour une entrée e connectée au commutateur I_i, la sortie $s = \pi(e)$ est connectée au commutateur O_j.

Prenons par exemple le réseau $CL(3,5,4)$ qui a douze entrées et douze sorties. Numérotons les entrées, les sorties et les commutateurs comme sur la figure 2.14 et considérons la bijection π définie par :

$$\begin{aligned} E &= \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\ \} \\ S &= \{\ 6,\ 4,\ 12,\ 8,\ 3,\ 10,\ 2,\ 11,\ 7,\ 9,\ 1,\ 5\ \} \end{aligned}$$

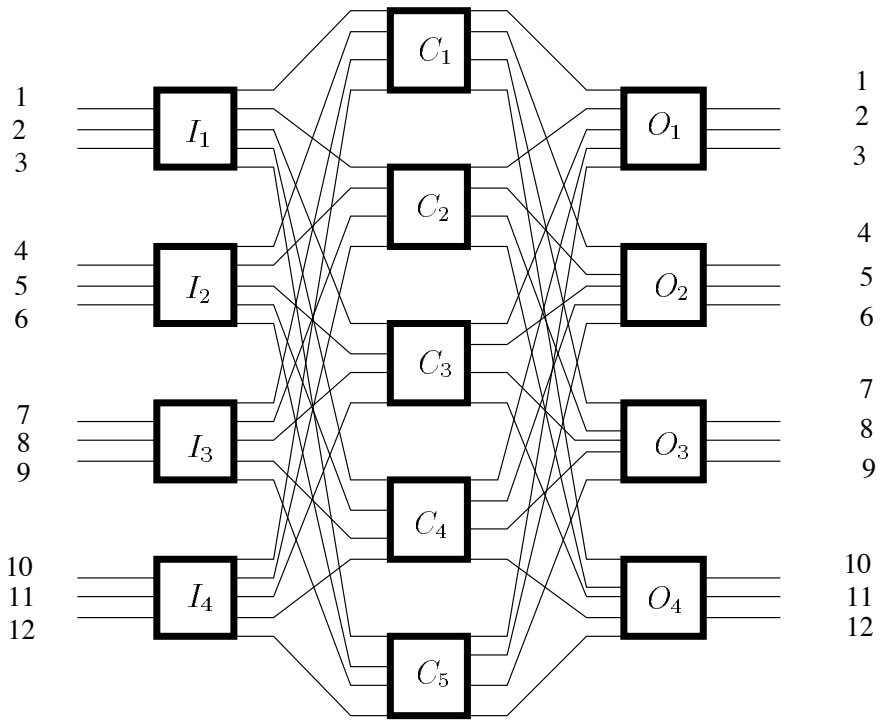


Figure 2.14 - Réseau de Clos $CL(3,5,4)$

Nous avons ainsi associé, au réseau initial et à la permutation π, un multigraphe G biparti régulier de degré p (figure 2.15).
Un résultat classique de théorie des graphes nous permet d'affirmer que, le graphe étant biparti régulier de degré p, son indice chromatique est p. Rappelons que cela signifie que le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorer les arêtes de G, afin que deux arêtes incidentes n'aient pas la même couleur, est p. On voit sur la figure 2.15 une telle coloration.
Maintenant, comme q est supérieur ou égal à p, nous pouvons choisir p commutateurs, parmi les q commutateurs du deuxième étage du réseau $CL(p,q,r)$, à chacun desquels nous associons l'une des p couleurs utilisées. Admettons que la couleur c_l ($1 \leq l \leq p$) est associée au commutateur C_{k_l} ($1 \leq k_l \leq q$ et $k_l \neq k_{l'}$ si $l \neq l'$). Alors, si l'arête $[I_i, O_j]$ du graphe G a pour couleur c_l, on relie l'entrée e, connectée à I_i, à la sortie $s = \pi(e)$, connectée à O_j, par l'intermédiaire du commutateur C_{k_l}.

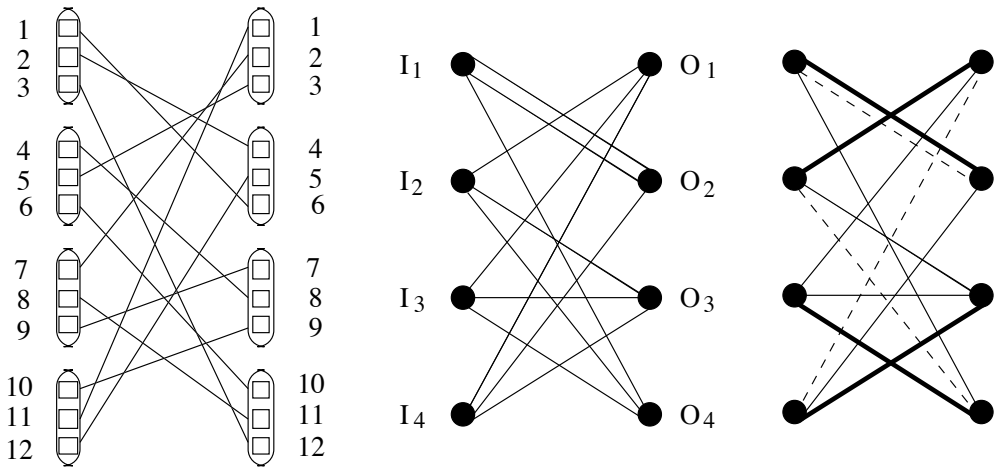


Schéma de la bijection Construction du multigraphe biparti et coloration

Figure 2.15 - Schéma de la bijection et multigraphe biparti

Dans l'exemple traité, en associant des couleurs différentes aux commutateurs C_2, C_3 et C_5, nous obtenons la figure 2.16, que le lecteur est prié de compléter pour réaliser entièrement la permutation π. □

COMMANDE. Cette commande, qui s'inspire de la démonstration de la proposition 2.3.4, ne s'applique que dans le cas où le réseau est sans blocage. On associe à tout commutateur (p, q) de l'étage d'entrée (resp. commutateur (q, p) de l'étage de sortie) un vecteur à q composantes booléennes, indiquant ses sorties (resp. ses entrées) libres. En faisant alors un «ET» logique entre les deux vecteurs correspondant aux commutateurs auxquels sont reliés le processeur et le banc-mémoire que l'on veut connecter, on trouve une sortie libre dans le commutateur du processeur et une entrée libre dans celui du banc-mémoire, à la même position, ce qui correspond à un même commutateur de l'étage central. On utilise ce commutateur pour établir la liaison. Le principe de cette commande est essentiellement centralisé. Notons, de plus, que cette commande est *statique*, c'est-à-dire que le routage est déterminé une fois pour toutes au début.

Les réseaux que nous allons présenter maintenant sont tous à base de commutateurs $(2, 2)$ (ou *crossbar* $(2, 2)$). Les sommets des graphes associés, qui modélisent donc des commutateurs $(2, 2)$, sont de degré 4, sauf ceux des étages d'entrées et de sortie qui sont de degré 2. En outre, chaque sommet du premier étage comporte deux liaisons vers les processeurs (les liens d'entrée), et chaque sommet du dernier étage possède deux liaisons vers les bancs mémoire (les liens de sortie). Précisons que, dans les réalisations pratiques, on trouve aussi des réseaux réalisés à partir de commutateurs $(4, 4)$ ou plus (voir annexe B, machines CS-2, SP1, etc.).

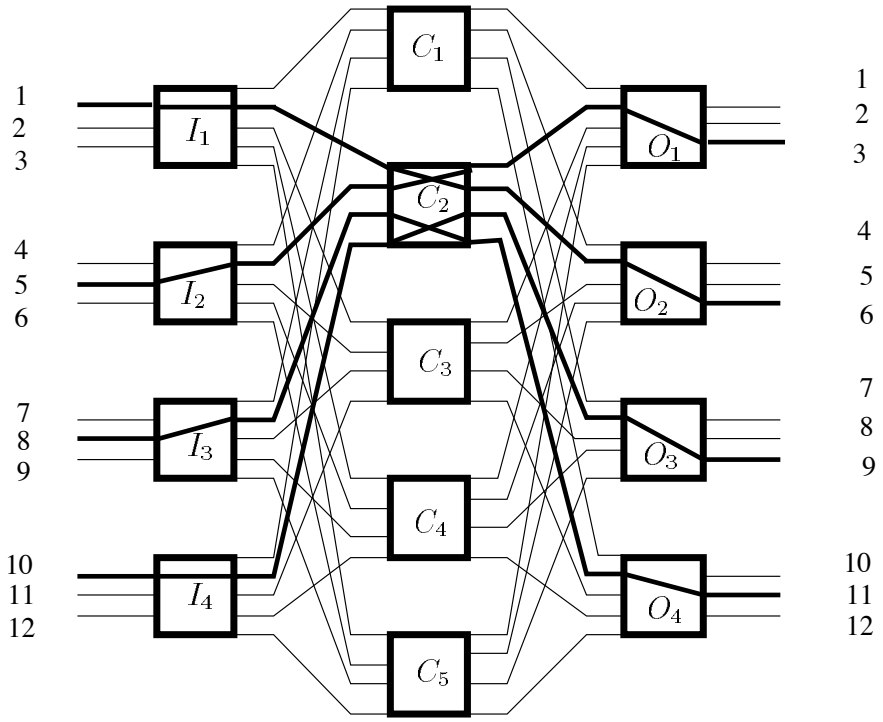


Figure 2.16 - Coloration du réseau de Clos $CL(3,5,4)$

2.3.4 Réseau *butterfly*

DEFINITION. Le *réseau multiétages butterfly de dimension n* est un réseau formé de $n+1$ étages ayant chacun 2^n commutateurs $(2,2)$. Il a donc 2^{n+1} liens d'entrée et 2^{n+1} liens de sortie. Les étages sont généralement étiquetés par les entiers de 0 à n. Le graphe associé est d'ordre $(n+1)2^n$ et possède $n2^{n+1}$ arêtes. Ses sommets sont en bijection avec les couples (l,x) où l est le numéro de *niveau* (on dit aussi *étage*), avec $0 \leq l \leq n$, et x est un mot binaire de longueur n, noté $x_0x_1 \cdots x_{n-1}$, représentant le numéro de rangée du commutateur.
Deux sommets (l,x) et (l',x'), avec $l \leq l' \leq n$, sont adjacents si et seulement si $l' = l+1$, et si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- x et x' sont identiques.
- x et x' diffèrent par le l-ième bit.

Si x et x' sont identiques, l'arête est dite *droite*. Sinon, elle est dite *croisée*.

La figure 2.17 représente un réseau *butterfly* de dimension 3 et son graphe associé. On numérote les entrées et les sorties du réseau de 0 à $2^{n+1}-1$, ou par la représentation binaire correspondante. Cela revient à ajouter un 0 ou un 1 derrière la représentation binaire du numéro de rangée du commutateur dans le graphe associé.

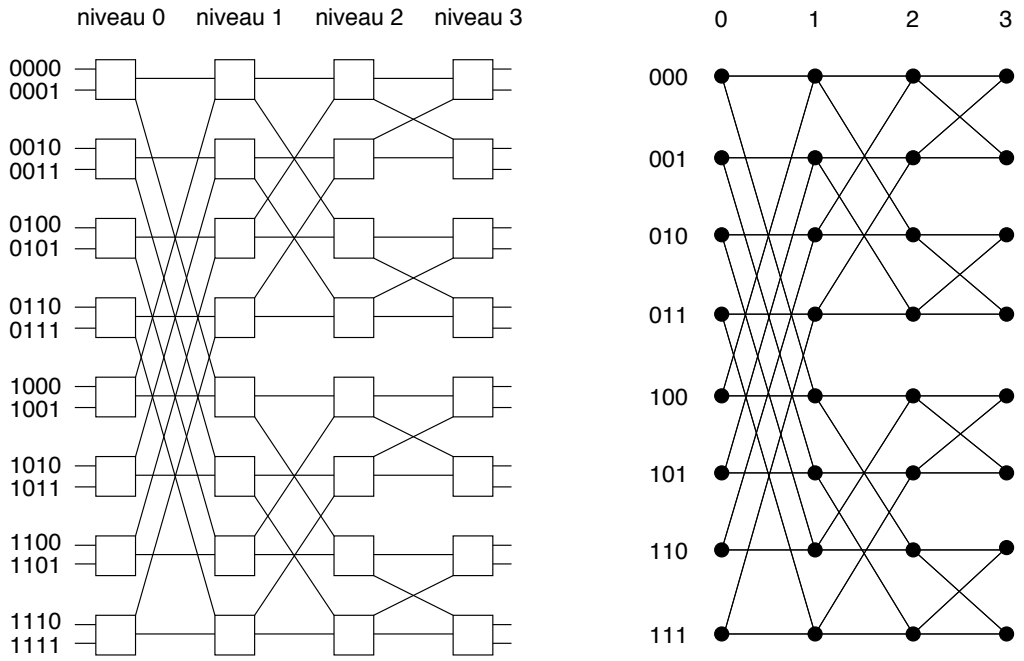


Figure 2.17 - Réseau butterfly de dimension 3 et son graphe associé

REMARQUE. Le réseau multiétages *butterfly* est couramment utilisé pour les calculs de FFT (voir chapitre 6). On notera que son graphe associé, décrit ci-dessus, appelé aussi *butterfly non rebouclé* ou *graphe FFT*, est différent du *graphe butterfly* ou *graphe butterfly rebouclé* considéré dans la première partie de ce chapitre et dans le chapitre 5.

Le réseau *butterfly* a des propriétés récursives : en effet, un réseau *butterfly* de dimension n contient comme sous-réseaux, deux réseaux *butterfly* de dimension $n-1$ (il suffit d'enlever les sommets de l'étage 0 et les arêtes qui leur sont incidentes).

COMMANDE. Une autre propriété importante du réseau *butterfly* est la simplicité de sa commande : le lien d'entrée $x_0x_1\ldots x_n$ de l'étage 0 est lié au lien de sortie $x'_0x'_1\ldots x'_n$ de l'étage n par exactement une chaîne de longueur n. Cette chaîne traverse chaque étage exactement une fois, utilisant une arête croisée entre les étages l et $l+1$, si et seulement si $x_l \neq x'_l$.

Le réseau multiétages *butterfly* est donc un réseau de Banyan, qui permet a priori de connecter toute entrée à toute sortie, même si, comme il est demandé de le montrer dans l'exercice 2.4.15, il s'agit d'un réseau avec blocage et donc non réarrangeable.

2.3.5 Réseau de Beneš

DEFINITION. Un *réseau de Beneš de dimension* n, noté B_n, est constitué d'un réseau *butterfly* de dimension n, suivi d'un *réseau butterfly de dimension* n *inversé* (c'est-à-dire obtenu par une opération miroir), de sorte que l'étage n du premier soit confondu avec l'étage n du second (figure 2.18). Il a donc $2n+1$ étages de 2^n commutateurs $(2,2)$ chacun.

On peut définir récursivement le réseau de Beneš comme suit : B_0 est réduit à un seul commutateur $(2,2)$ et n'est donc rien d'autre qu'un *crossbar* $(2,2)$. Le réseau de Beneš de dimension n, B_n, possède 2^{n+1} entrées et 2^{n+1} sorties. Le premier et le dernier étages sont constitués de $\frac{2^{n+1}}{2} = 2^n$ commutateurs $(2,2)$. La partie intermédiaire (étages 1 à $2n-1$) est constituée de deux réseaux de Beneš de dimension $n-1$, B_{n-1}, superposés (dans la représentation classique où les étages sont dessinés en colonnes). Chacun des commutateurs du premier et du dernier étages est connecté à chacun des deux réseaux B_{n-1}.
Puisque B_0 possède un seul étage, et que l'on passe de la dimension $n-1$ à la dimension n en doublant B_{n-1} et en ajoutant deux étages (de part et d'autre), B_n possède $2n+1$ étages, avec 2^n commutateurs $(2,2)$ par étage. Comme un commutateur $(2,2)$ possède 4 points de croisement, le réseau B_n a $4(2n+1)2^n$ points de croisement, soit $4P\log_2 P - 2P$, en fonction de son nombre d'entrées $P = 2^{n+1}$. Ceci est à comparer à la borne inférieure générale établie pour les réseaux multi-étages sans blocage qui est en $\Omega(P\log_2 P)$ (corollaire 2.3.3).

Alors que le *butterfly* est un réseau avec blocage, le réseau de Beneš est réarrangeable :

Proposition 2.3.6 — *Le réseau de Beneš est réarrangeable.*

PREUVE. Nous ne donnons ici que des indications. On peut prouver que le réseau de Beneš est un cas particulier de réseau de Clos. En effet, considérons le réseau de Clos $CL(2,2,2^n)$ dont le premier et le dernier étages sont constitués de 2^n commutateurs $(2,2)$ et dont l'étage central est constitué de deux commutateurs $(2^n,2^n)$. On obtient un réseau de Beneš de dimension n en remplaçant récursivement l'étage central de $CL(2,2,2^n)$ par des réseaux $CL(2,2,2^i)$, pour i variant de $n-1$ à 1. □

En utilisant le résultat de la proposition 2.3.1, on obtient alors le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.7 — *Etant donnée une permutation π de 2^{n+1} nombres entre 0 et $2^{n+1}-1$, il est possible de relier toute entrée i d'un réseau de Beneš de dimension n à la sortie $\pi(i)$, pour tout i tel que $0 \leq i \leq 2^{n+1}-1$, sans utiliser deux fois une même liaison du réseau entre deux étages.*

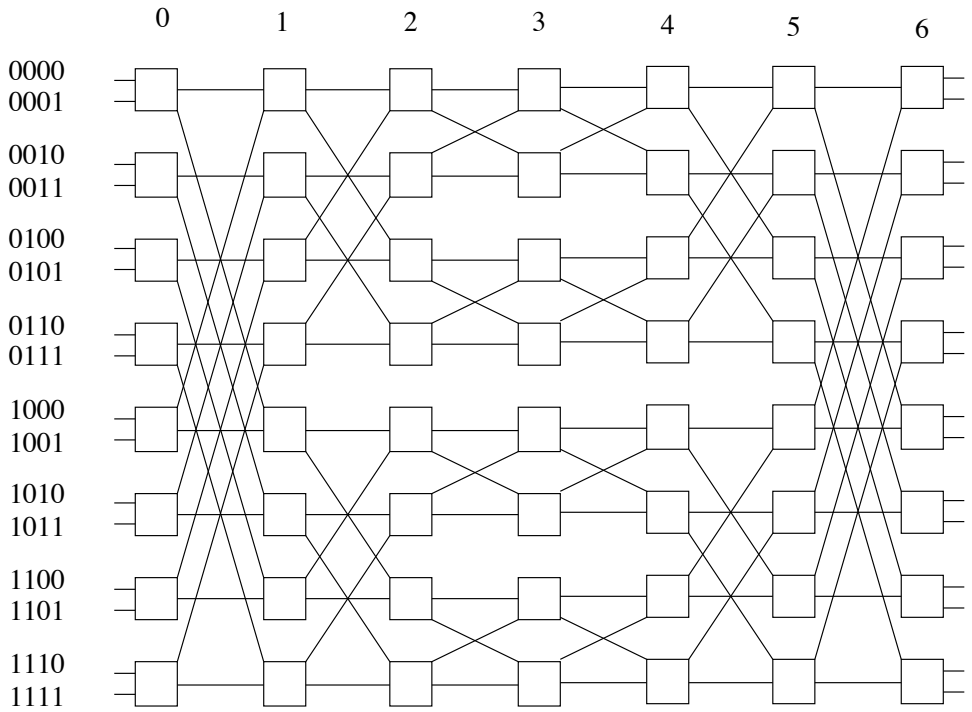


Figure 2.18 - Réseau de Beneš de dimension 3

La preuve peut également se faire par récurrence (en utilisant la récursivité de la construction du réseau), en s'inspirant de la preuve de la proposition 2.3.1.

De manière similaire, on peut obtenir le résultat suivant [14] :

Proposition 2.3.8 — *Considérons le graphe associé à un réseau de Beneš de dimension n. Etant donnée une permutation π de 2^n nombres entre* 0 *et* $2^n - 1$, *il existe, dans ce graphe, un ensemble de chaînes deux à deux sommet-disjointes reliant le sommet i du premier étage (étage* 0*) au sommet $\pi(i)$ du dernier étage (étage $2n$), pour tout i tel que* $0 \leq i \leq 2^n - 1$.

On peut obtenir une commande directe d'un réseau de Beneš en s'inspirant de la preuve de la proposition 2.3.5. Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'article de Auguin et Boeri [1].

2.3.6 Réseaux omega et *baseline*

DEFINITION. Le *réseau omega de dimension n* est formé de $n+1$ étages de 2^n commutateurs $(2,2)$. Les sorties des 2^{n-1} premiers commutateurs d'un étage quelconque sont reliées aux entrées hautes des commutateurs de l'étage suivant, dans le même ordre.

Plus formellement, le graphe associé au réseau omega de dimension n possède $2^n(n+1)$ sommets notés (l, x), avec $0 \leq l \leq n$ et $x \in \{0,1\}^n$. Pour tout l tel que $0 \leq l \leq n-1$, il existe une arête entre les sommets (l, x) et $(l+1, x')$, si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- x' est un décalage cyclique à gauche de x.
- x' est un décalage cyclique à gauche de x, suivi de l'échange du dernier bit.

Par exemple, dans le graphe associé au réseau omega de dimension 2, le sommet $(l, 01)$ est relié aux sommets $(l+1, 10)$ et $(l+1, 11)$. La figure 2.19 représente un réseau omega de dimension 2 et son graphe associé.

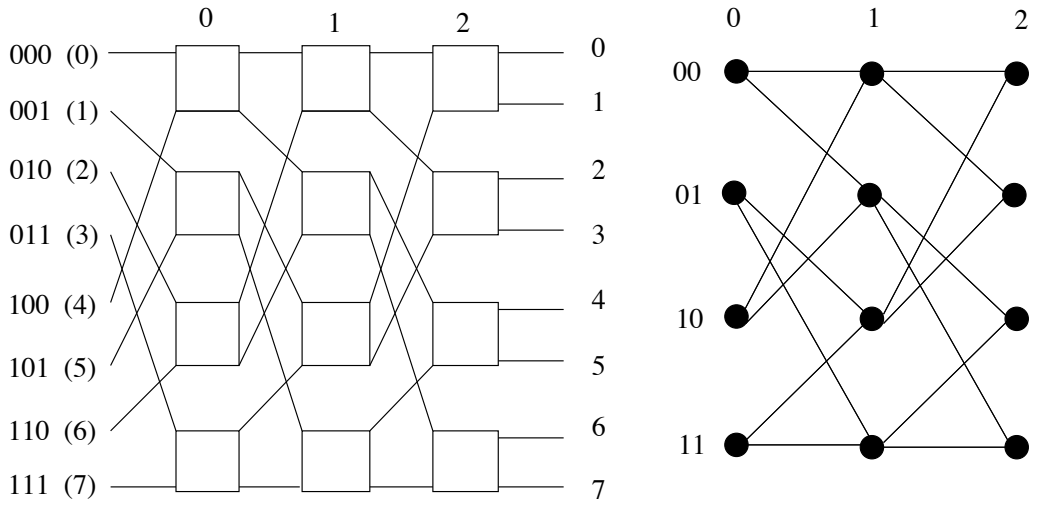


Figure 2.19 - Réseau omega de dimension 2

On remarque que, par définition, la disposition des arêtes est identique entre deux étages quelconques. Elles formes ce qu'on appelle un *perfect shuffle*.
En fait, le graphe associé au réseau omega est isomorphe à celui associé au réseau *butterfly*. Il suffit d'associer le sommet (l, x) du graphe omega au sommet $(l, \pi_l(x))$ du graphe *butterfly*, où π_l est le décalage à droite l-itéré de x. Ainsi, le sommet $(2, 100)$ du réseau omega de dimension 3 est le sommet $(2, 001)$ du réseau *butterfly* de même dimension. Si les graphes associés à deux réseaux sont isomorphes, on dit que les réseaux sont *topologiquement équivalents*.

COMMANDE. Un réseau omega a 2^{n+1} liens d'entrée et autant de liens de sortie. On les numérote de 0 à $2^{n+1}-1$, par leur représentation binaire. Les liens d'entrée $0x_1 \cdots x_n$ et $1x_1 \cdots x_n$ sont reliés au commutateur $x_1 \cdots x_n$, c'est-à-dire que l'étage 0 du réseau est lui aussi précédé d'un *perfect shuffle* sur les liens d'entrée. Soit M_j le banc-mémoire auquel le processeur P_k veut accéder, et soit $m_0 \cdots m_n$ la représentation binaire de j, le commutateur de l'étage i du réseau

omega utilise le bit m_i de l'adresse de destination pour déterminer la liaison à établir. Quelle que soit l'entrée sur ce commutateur, si $m_i = 0$, la connexion est établie avec la sortie haute du commutateur, sinon elle est établie avec la sortie basse.
Supposons que, dans le réseau omega de dimension 2, nous voulions connecter le processeur P_6 au banc-mémoire M_3. L'adresse de M_3 est 011. On a donc $m_0 = 0$, $m_1 = 1$ et $m_2 = 1$. On établit les liaisons suivantes : on quitte l'étage 0 (où l'on est entré à partir du processeur P_6) par le haut, puis les étages 1 et 2 par le bas, comme représenté sur la figure 2.20.

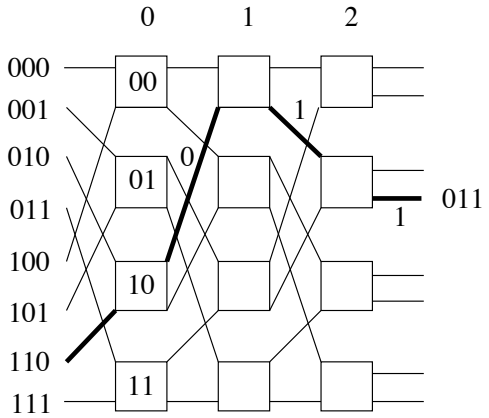


Figure 2.20 - Commande du réseau omega

Comme le réseau omega est équivalent au réseau *butterfly*, il n'est pas réarrangeable et ne permet pas de réaliser n'importe quelle permutation des entrées.

Le réseau omega n'est pas le seul réseau topologiquement équivalent au réseau *butterfly*. Il en est de même du *réseau baseline* que nous définissons ci-après (pour l'équivalence entre ces réseaux se reporter à [9]).

DEFINITION. Le *réseau baseline de dimension* n est également formé de $n+1$ étages de 2^n commutateurs $(2,2)$. Le graphe associé a $(n+1)2^n$ vertices que l'on note encore (l,x), avec $0 \leq l \leq n$ et $x \in \{0,1\}^n$.. Le sommet (l,x) est adjacent au sommet (l',x'), si et seulement si $l' = l+1$ et l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- x' est le résultat du décalage cyclique à droite des $n-l$ derniers bits de x.
- x' est le résultat de l'échange du dernier bit de x, suivi d'un décalage cyclique à droite de ses $n-l$ derniers bits.

La correspondance entre ce réseau et le réseau *butterfly*, ainsi que la définition d'une commande du réseau *baseline* sont laissées au lecteur intéressé. Sur la figure 2.21, on peut voir que le réseau *baseline* est un réseau avec blocage.

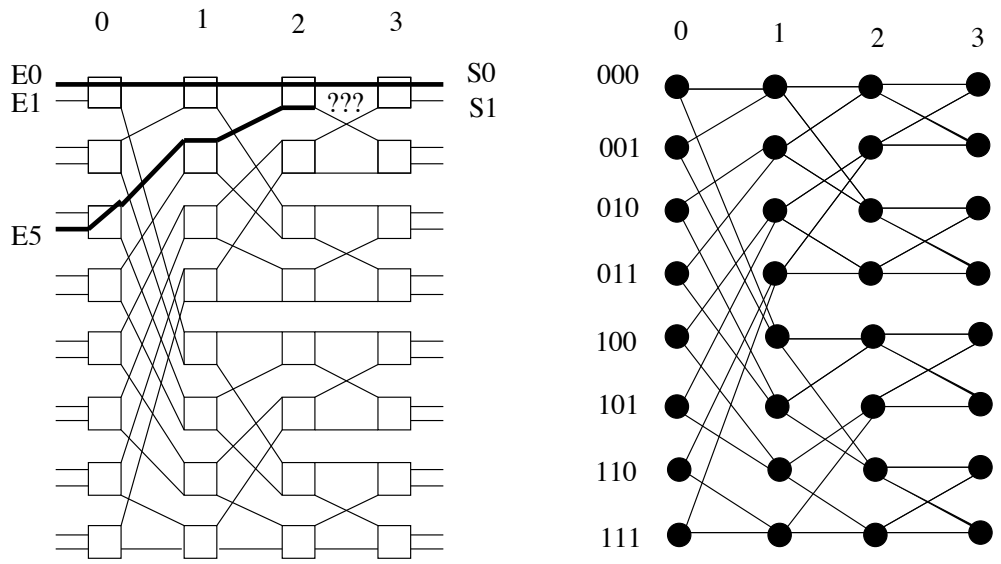


Figure 2.21 - Réseau baseline de dimension 3 et son graphe associé

2.4 Exercices

Exercice 2.4.1 — *Donner une expression de la distance entre deux sommets du graphe de de Bruijn $B(d, D)$ et un plus court chemin entre ces deux sommets.*

Exercice 2.4.2 — *Dans le graphe de de Bruijn $B(d, D)$, donner une partition des arcs, autres que les boucles, en d arbres couvrants de profondeur D.*

Exercice 2.4.3 — *On appelle* excentricité moyenne *d'un sommet x appartenant à un graphe orienté G d'ordre N, la moyenne des distances de x à y, pour tout sommet y de G, avec $x \neq y$. Notée $\overline{e}_G(x)$, l'excentricité moyenne se calcule à partir de la formule suivante :*

$$\overline{e}_G(x) = \frac{\sum_{y \in G} d(x, y)}{N - 1}$$

Calculer ce paramètre pour le graphe de de Bruijn orienté : $\overline{e}_{B(d,D)}(0^D)$.

Exercice 2.4.4 — *Calculer le degré minimum et le nombre d'arêtes des graphes de de Bruijn et de Kautz non orientés.*

Exercice 2.4.5 — *Démontrer la proposition 2.1.2.*

Exercice 2.4.6 — *Pourquoi la preuve du lemme 2.1.6 est-elle fausse ? Trouver une démonstration correcte du lemme, qui lui est vrai !*

Exercice 2.4.7 — *Faire la preuve de l'algorithme introduit dans la preuve de la proposition 2.1.8.*

Exercice 2.4.8 — *Soit la suite circulaire à d^D éléments pris dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, d-1\}$, ainsi construite :*

> *On part de la sous-suite 0^D. Supposons que nous ayons construit une sous-suite de longueur p notée $a_1 a_2 \cdots a_p$ ($p \leq d^D$), on introduit comme $p+1$-ième élément une lettre a_{p+1} telle que la sous-suite $a_{p+D-2} a_{p+D-1} \cdots a_p a_{p+1}$ n'ait pas été rencontrée et que, si c'est possible, $a_{p+1} \neq 0$.*

Montrer que l'on a ainsi obtenu une suite de de Bruijn.

Exercice 2.4.9 — *Démontrer la proposition 2.1.15, en associant au sommet noté $x_1 x_2 \cdots x_D$ de $GK(d, N)$, l'entier $x = \sum_{i=1}^{D} (\alpha_i d^{D-i})$.*

Exercice 2.4.10 — *Calculer le nombre d'arêtes du graphe shuffle-exchange de dimension n, $SE(n)$.*

Exercice 2.4.11 — *Montrer que le diamètre du graphe cube-connected-cycles de dimension n est $2n - 1 + \max(1, \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor)$.*

Exercice 2.4.12 — *Soit G et H deux graphes de diamètre respectifs D et D'. Considérons un composé de G par H satisfaisant la propriété suivante : si les sommets x et y sont adjacents dans G, alors il existe au moins une arête reliant les copies H_x et H_y dans le composé. Montrer qu'alors le diamètre du composé est au plus $DD' + D + D'$.*

Exercice 2.4.13 — *Montrer que le graphe G', composé de $B(2, n-1)$ par K_2 tel que défini dans la section 2.2.5, a un diamètre au plus $\frac{3n+1}{2}$. On utilisera le fait que dans le graphe de de Bruijn $B(2, n-1)$, on a deux chemins de longueur au plus n entre toute paire de sommets $x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$ et $y_1 y_2 \cdots y_{n-1}$, à savoir les chemins ($\alpha = 0$ ou 1) : $x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$, $x_2 x_3 \cdots x_{n-1} \alpha$, $x_3 \cdots x_{n-1} \alpha y_1$, $\ldots$, $x_i \cdots x_{n-1} \alpha y_1 y_2 \cdots y_{i-2}$, $\ldots$, $\alpha y_1 y_2 \cdots y_{n-2}$, $y_1 y_2 \cdots y_{n-1}$.*

Exercice 2.4.14 — *Montrer que le graphe cube-connected-cycles $CCC(n)$ est bien un graphe de Cayley.*

Exercice 2.4.15 — *Montrer que le réseau butterfly est un réseau bloquant.*

2.5 Solutions des exercices

Preuve de l'exercice 2.4.1

Il faut examiner l'arbre des chemins issus d'un sommet général $x_1x_2\cdots x_D$. Au niveau k de l'arbre, nous trouvons tous les sommets que l'on peut atteindre via un chemin de longueur k. Le niveau k est très simple à caractériser puisqu'il est constitué de tous les sommets qui s'écrivent $x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_D\Lambda$, où Λ désigne toute chaîne de longueur k. On peut d'ailleurs noter que si un chemin de longueur k existe, il est unique. Cet arbre peut contenir plusieurs fois le même sommet. Si on veut l'arbre des plus courts chemins, il faut supprimer les sommets répétés. La distance de x à y est exactement le plus petit niveau où y apparaît. On est donc amené à rechercher le plus long sous-mot commun à la fin du mot x et au début du mot y. Ainsi, $d(x,y) = \min(k \,|\, y_1y_2\cdots y_{D-k} = x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_D)$. Le plus court chemin (unique) de x à y est alors obtenu en introduisant successivement les lettres $y_{D-k+1}y_{D-k+2}\cdots y_D$.

□

Preuve de l'exercice 2.4.2

Pour chaque lettre a de l'alphabet, considérons l'arbre T_a des plus courts chemins issus du sommet a^D. Au niveau k de cet arbre, figurent les sommets de la forme $a^{D-k}b\Lambda$ où b est une lettre de l'alphabet différente de a et Λ un mot de longueur $k-1$. Il s'agit bien d'un arbre couvrant de profondeur D. De plus, si $a \neq b$, pour tout a et tout b dans l'alphabet, T_a et T_b sont deux à deux arc-disjoints. En effet, un arc de T_a (resp. T_b) commence nécessairement par a (resp. b). De plus, tout arc commençant par la lettre a appartient à T_a. On a donc bien une partition en d arbres deux à deux arc-disjoints.

□

Preuve de l'exercice 2.4.3

Comme on l'a vu dans l'exercice 2.4.2, les sommets à distance k de 0^D sont de la forme $0^{D-k}b\Lambda$ où b est une lettre différente de 0 et Λ un mot de longueur $k-1$. Leur nombre est donc $d^{k-1}(d-1)$. L'excentricité moyenne de 0^D peut donc s'exprimer par :

$$\overline{e}_{B(d,D)}(0^D) \;=\; \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{D} k(d-1)d^{k-1} \quad \text{avec} \quad N = d^D$$

Rappelons que $\sum_{k=0}^{D} d^k = \frac{d^{D+1}-1}{d-1}$ et donc que $\sum_{k=1}^{D} kd^{k-1} = \frac{(D+1)d^D}{d-1} - \frac{d^{D+1}-1}{(d-1)^2}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\overline{e}_{B(d,D)}(0^D) &= \frac{1}{N-1}\left(Dd^D - \frac{d^D-1}{d-1}\right)\\ &= D - \frac{1}{d-1} + \frac{D}{N-1}\end{aligned}$$

REMARQUE. On peut montrer (voir Bermond, Liu et Syska [3]) que les sommets de type a^D sont ceux ayant l'excentricité moyenne la plus grande. Ceux ayant la meilleure excentricité moyenne sont de la forme $a^{D-1}b$ (où $b \neq a$) et leur excentricité moyenne vaut :

$$D - \frac{d}{(d-1)^2} + \frac{d}{d-1}\frac{D}{N-1}$$

Ce résultat montre qu'en fait le protocole de communication simple défini dans la section 2.1.1, s'il n'est pas optimal, n'affecte pas la distance moyenne.

□

Preuve de l'exercice 2.4.4

Dans les deux cas, le nombre d'arêtes en non orienté s'obtient à partir du nombre d'arêtes en orienté en déduisant le nombre de boucles et d'arêtes multiples (doubles) :
Les boucles du graphe de de Bruijn sont situées en les sommets $x_1x_2\cdots x_D$ invariants après introduction d'une lettre. Ce sont donc tous les sommets pour lesquels on a l'égalité $x_1x_2\cdots x_D = x_2\cdots x_D\lambda$, donc $x_1 = x_2 = \cdots = x_D = \lambda$, soit les sommets de la forme a^D, a étant une lettre quelconque de l'alphabet comptant d lettres. Il y a donc d boucles.
Les circuits de longueur 2 (les arêtes doubles en non orienté) sont situés entre les sommets de type $abab\cdots ab$ et $baba\cdots ba$. En effet, une arête double en un sommet $x_1x_2\cdots x_D$ induit qu'on retrouve ce sommet après insertion de deux lettres de l'alphabet. Il s'agit donc des sommets tels que $x_1x_2x_3\cdots x_{D-1}x_D = x_3\cdots x_D\lambda\lambda'$, donc tels que $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$, ..., $x_{D-1} = \lambda$ et $x_D = \lambda'$, soit les sommets de la forme $abab\cdots ab$, avec $a \neq b$ (sinon on recompte les boucles) appartenant à l'alphabet. Il y a donc $d(d-1)$ sommets de ce type, soit $\frac{d(d-1)}{2}$ arêtes doubles.
Ainsi, pour le $UB(d, D)$, le degré minimum est $2d-2$ et le nombre d'arêtes est :

$$d \times d^D - d - \frac{d(d-1)}{2} = d \times d^D - \frac{d^2+d}{2}$$

Le graphe de Kautz, lui, n'admet pas de boucle (deux lettres consécutives étant par définition différentes). Ses arêtes doubles sont du même type que celles du graphe de de Bruijn. Il y en a donc $\frac{(d+1)d}{2}$.
On en déduit que le degré minimum de $UK(d, D)$ est $2d-1$ et que son nombre d'arêtes est :

$$d(d^D + d^{D-1}) - \frac{d(d+1)}{2} = d^{D+1} + d^D - \frac{d^2+d}{2}$$

□

Preuve de l'exercice 2.4.5

Les sommets de $L(G)$ représentant les arcs de G, le nombre de sommets de $L(G)$ est le nombre d'arcs de G, soit : $\sum_{x \in V(G)} d^+(x) = dN$. Soit e un sommet de $L(G)$ représentant l'arc $e = (x, y)$ de G. Les successeurs de e dans $L(G)$ représentent les arcs d'extrémité initiale y, donc $d^+_{L(G)}(e) = d^+_G(y) = d$. De même, $d^-_{L(G)}(e) = d^-_G(x) = d$. Soient e et f deux sommets de $L(G)$ représentant les arcs e et f de G. Supposons que e ait pour extrémité terminale x dans G et que f ait pour extrémité initiale y. En utilisant un chemin de longueur l liant x et y dans G, on obtient, dans $L(G)$, un chemin de longueur $l' = (l-1)+2$. Donc, $D' \leq D+1$.
Pour montrer que $D' \geq D+1$, on choisit deux sommets x et y de G à distance D. Puis, on choisit un arc e entrant en x et un arc f sortant de y. Si e et f sont distincts, le plus court chemin de e à f dans $L(G)$ sera de longueur $D+1$. Si d est strictement supérieur à 1, il est toujours possible de trouver deux arcs distincts e et f. Si d vaut 1, G est un circuit et $L(G)$ est un circuit de même longueur, donc de même diamètre.

□

Preuve de l'exercice 2.4.6

Que se passe-t-il lorsque les arêtes e et f sont adjacentes ? Dans ce cas, $x = y$. Le théorème de Menger n'affirme rien en ce qui concerne le nombre de circuits deux à deux disjoints contenant x. On peut établir que la connexité mesure le nombre de chemins entre deux sommets, même confondus, en coupant un sommet en un sommet d'entrée et un sommet de sortie, comme dans l'exercice 1.5.5. Une démonstration plus directe consiste à utiliser la définition. La suppression de p sommets de $L(G)$ correspond exactement à la suppression de p arêtes de G. De plus, on a $L(G)$ fortement connexe qui équivaut à G fortement connexe, donc $\kappa(L(G)) = \lambda(G)$.

□

Preuve de l'exercice 2.4.7

L'algorithme finit nécessairement au sommet r. En effet, si on entre à un moment en un sommet $x \neq r$, alors $d^-_P(x) > d^+_P(x)$ où P est le chemin construit à ce moment, et il y a donc encore au moins un arc sortant non pris dans P.
Supposons qu'il existe un arc (x, y) non emprunté à la fin de l'algorithme. Nécessairement, l'arc sortant de x appartenant à T n'a pas été utilisé. Si on appelle (x, z) cet arc, z pouvant être y, alors, en z, un arc sortant n'a pas été utilisé car, en chaque sommet différent de r, un nombre pair d'arcs sur les $2d$ ont été utilisés et donc un arc sortant appartenant à T n'a pas été utilisé. En remontant ainsi (puisque de tout sommet x il existe un chemin unique de x vers la racine dans T), on obtient qu'un arc sortant de r n'a pas été utilisé (contradiction).

□

Preuve de l'exercice 2.4.8

Appliquons au graphe $B(d, D-1)$ l'algorithme de construction d'un circuit eulérien décrit dans la preuve du théorème 2.1.8. Choisissons pour T l'anti-arborescence de racine 0^D formée de l'arc $x_1x_2\cdots x_D0$ en tout sommet $x_1x_2\cdots x_D$ différent de 0^D. A chaque arc reliant $x_1x_2\cdots x_D$ à $x_2\cdots x_Dx_{D+1}$, dans le graphe de de Bruijn, correspond la sous-suite $x_1x_2\cdots x_Dx_{D+1}$. Le fait de choisir un arc non encore emprunté revient à choisir a_{p+1} comme dans l'énoncé de l'exercice, et si cet arc n'appartient pas à T, cela signifie $a_{p+1} \neq 0$.

□

Preuve de l'exercice 2.4.9

Dans le cas du graphe de Kautz, la correspondance est moins évidente que dans celui du graphe de de Bruijn. L'alphabet choisi est l'ensemble $\{0, 1, \ldots, d\}$. Au sommet $x_1x_2\cdots x_D$ de $K(d, D)$, on associe l'entier $x = \sum_{i=1}^{D}(\alpha_i d^{D-i})$, tel que $\alpha_1 = d+1-x_1$ (donc $0 \leq \alpha_1 \leq d$), $\alpha_i \equiv (-1)^i(x_i - x_{i-1}) + d \pmod{d+1}$ pour $2 \leq i \leq D$ (donc $0 \leq \alpha_i \leq d-1$ si $i \geq 2$). Notons que l'entier x vérifie l'inégalité $0 \leq x \leq d^D + d^{D-1} - 1$, et que $\alpha_i \neq d$ car $x_i \neq x_{i-1}$.
Le sommet $x_1x_2\cdots x_D$ a pour successeurs les sommets $x_2\cdots x_D\lambda$ auxquels sont associés les entiers $y = \sum_{i=1}^{D}(\mu_i d^{D-i})$, avec $\mu_1 = d+1-x_2$, $\mu_i \equiv (-1)^i(x_{i+1}-x_i)+d \pmod{d+1}$ pour $2 \leq i \leq D-1$ (donc $0 \leq \mu_i \leq d-1$ si $i \geq 2$), $\mu_D \equiv (-1)^D(\lambda - x_D) \pmod{d+1}$.
Montrons que y est de la forme $-dx - a$ avec $1 \leq a \leq d$. On a $\mu_i = d-1-\alpha_{i+1}$ pour $2 \leq i \leq D-1$ et $\mu_1 \equiv \alpha_1 - \alpha_2 - 1 \pmod{d+1}$ avec $0 \leq \mu_1 \leq d$. Etant donné que $N = d^D + d^{D-1}$, on a $\mu_1 d^{D-1} \equiv (\alpha_1 - \alpha_2 - 1)d^{D-1} \pmod{N}$. De plus, $d^D \equiv -d^{D-1} \pmod{N}$. Donc, on a (modulo N) :

$$\begin{aligned}
y &\equiv -\alpha_1 d^D - \alpha_2 d^{D-1} - d^{D-1} + \sum_{i=2}^{D-1}(d-1-\alpha_{i+1})d^{D-i} + \mu_D \\
&\equiv -d(\alpha_1 d^{D-1} + \alpha_2 d^{D-2} + \sum_{i=3}^{D}(\alpha_i d^{D-1})) + (d-1)d\sum_{i=0}^{D-3} d^i + \mu_D - d^{D-1} \\
&\equiv -dx + d^{D-1} - d + \mu_D - d^{D-1} \\
&\equiv -dx + \mu_D - d \\
&\equiv -dx - a \quad \text{avec} \quad a = d - \mu_D
\end{aligned}$$

Puisque $a = d - \mu_D$ et que $0 \leq \mu_D < d$, a prend toutes les valeurs comprises entre 1 et d. Le sommet x est donc bien relié aux sommets $-dx - a \pmod{N}$ avec $1 \leq a \leq d$.

□

Preuve de l'exercice 2.4.10

Les sommets 0^n et 1^n sont de degré 1 (les arêtes de type *shuffle* étant des boucles). De plus, si n est pair, on a une arête double entre les sommets $(01)^{\frac{n}{2}}$ et $(10)^{\frac{n}{2}}$. Donc, le nombre d'arêtes du graphe *shuffle-exchange* de dimension n est :

- $3 \times 2^{n-1} - 2$ si n est impair
- $3 \times 2^{n-1} - 3$ si n est pair

□

Preuve de l'exercice 2.4.11

Soient deux sommets $x = (i, x_1x_2 \cdots x_n)$ et $y = (j, y_1y_2 \cdots y_n)$ de $CCC(n)$. Soient $i_1, i_2, \ldots, i_k$ les coordonnées dans lesquelles x et y diffèrent, rangées dans l'ordre croissant à partir de i (modulo n). Ainsi, i_1 est le premier élément de la suite $i, i+1, i+2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, i-1, i_2$ le deuxième élément, etc., où les coordonnées diffèrent.
Un chemin de x à y consiste à aller de x au sommet $(i_1, x_1x_2 \cdots x_{i_1} \cdots x_n)$, puis de changer de cycle via le sommet $(i_1, x_1x_2 \cdots \overline{x_{i_1}} \cdots x_n)$ et ainsi de suite. On arrive donc en $z = (i-1, y_1y_2 \cdots y_n)$ en au plus $2n-1$ étapes. Un autre chemin obtenu en parcourant les cycles en sens opposé (i décroissant) amène en $2n-1$ étapes au sommet $z' = (i+1, y_1y_2 \cdots y_n)$. De z ou z', en une étape, on atteint les sommets $(j, y_1y_2 \cdots y_n)$ avec $j = i, i-2, i+2$, et en au plus $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ tous les sommets du cycle associé à $y_1y_2 \cdots y_n$. On a donc un chemin de longueur au plus $2n - 1 + \max(1, \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor)$. Cette borne est atteinte en considérant les deux sommets $(0, 000)$ et $(0, 111)$ pour $n = 3$ et les deux sommets $(0, 0^n)$ et $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1^n)$ pour $n \geq 4$.

□

Preuve de l'exercice 2.4.12

Soient (x, u) et (y, v) deux sommets du composé. Soit $x{=}x_0$, x_1, ..., $x_p{=}y$ une plus courte chaîne de longueur p entre x et y dans G. Par définition, p est inférieur ou égal à D. Soit $[(x_i, a_i), (x_{i+1}, b_i)]$ une arête reliant les copies H_{x_i} et $H_{x_{i+1}}$ (une telle arête existe d'après l'hypothèse). Considérons la chaîne suivante, reliant (x, u) à (y, v) dans le composé : on emprunte dans la copie H_{x_0} une plus courte chaîne entre (x_0, u) et (x_0, a_0), puis l'arête $[(x_0, a_0), (x_1, b_0)]$, puis, dans la copie H_{x_1}, une plus courte chaîne entre (x_1, b_0) et (x_1, a_1), puis l'arête $[(x_1, a_1), (x_2, b_1)]$, et ainsi de suite jusqu'au sommet (x_p, b_{p-1}) et, pour finir, une plus courte chaîne entre ce sommet et (x_p, v). On a ainsi emprunté, dans chaque copie H_{x_i}, pour i de 1 à p, une chaîne de longueur au plus D' et p arêtes reliant les copies H_{x_i} et $H_{x_{i+1}}$, pour i de 0 à $p-1$. La longueur totale de cette chaîne est donc au plus : $(p+1)D' + p \leq (D+1)D' + D = DD' + D + D'$.

□

Preuve de l'exercice 2.4.13

Utilisons les deux chemins donnés dans l'énoncé de l'exercice. Notons que les sommets intermédiaires des chemins à distance i de l'origine ont tous des parités différentes (ils ont les mêmes lettres, sauf α). Soient $(x_1x_2\cdots x_{n-1}, i)$ et $(y_1y_2\cdots y_{n-1}, j)$ deux sommets du composé G'. Nous définissons deux chaînes entre ces sommets : la première (resp. deuxième) emprunte les arêtes du composé reliant les copies associées aux sommets du premier chemin, avec $\alpha = 0$ (resp. deuxième chemin, avec $\alpha = 1$) dans $B(2, n-1)$, plus les arêtes internes aux copies nécessaires. Par exemple, la première chaîne va utiliser comme arêtes entre les copies : d'abord, $[(x_1x_2\cdots x_{n-1}, (\alpha+\delta)), (x_2\cdots x_{n-1}\alpha, x_1)]$, où δ est la parité de $x_1x_2\cdots x_{n-1}$, puis l'arête $[(x_2\cdots x_{n-1}\alpha, (y_1+\delta')), (x_3\cdots x_{n-1}\alpha y_1, x_2)]$, où δ' est la parité de $x_2\cdots x_{n-1}\alpha$, etc. Si i est différent de $\alpha+\delta$, il faut rajouter l'arête interne de la copie associée à $x_1x_2\cdots x_{n-1}$. De même, si x_1 est différent de $y_1+\delta'$, il faut rajouter l'arête interne à la copie $x_2\cdots x_{n-1}\alpha$, etc. Prenons comme exemple $n-1=3$ et supposons que l'on veuille relier $(001, 0)$ à $(100, 1)$.

Dans $B(2, 3)$, les deux chemins reliant 001 à 100 sont :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } \alpha = 0: & 001,\ 010,\ 101,\ 010,\ 100 \\ \text{Pour } \alpha = 1: & 001,\ 011,\ 111,\ 110,\ 100 \end{array}$$

Dans le composé, on obtient les deux chaînes suivantes :

- pour $\alpha = 0$, une chaîne de longueur 6 :

  $$(001,0),\ (001,1),\ (010,0),\ (101,0),\ (010,1),\ (100,0),\ (100,1)$$

  utilisant les deux arêtes internes : $[(001,0),(001,1)]$ et $[(100,0),(100,1)]$;

- pour $\alpha = 1$, une chaîne de longueur 7 :

  $$(001,0),\ (011,0),\ (011,1),\ (111,0),\ (111,1),\ (110,1),\ (110,0),\ (100,0)$$

  utilisant les trois arêtes internes : $[(011,0),(011,1)]$, $[(111,0),(111,1)]$ et $[(110,1),(110,0)]$.

En général, pour aller du sommet entrant dans la copie $x_i\cdots x_{n-1}\alpha y_1y_2\cdots y_{i-2}$ au sommet sortant vers la copie $x_{i+1}\cdots x_{n-1}\alpha y_1y_2\cdots y_{i-1}$, il faudra utiliser dans un des chemins l'arête interne à la copie, dans l'autre non. Si on appelle l_α la longueur du chemin entre le sommet de départ et celui d'arrivée dans G' pour la chaîne associée au chemin de type α, on a l'égalité $l_0 + l_1 = 3n+1$ (le «+1» vient du fait que dans l'un des deux chemins, on aura à utiliser l'arête interne dans la copie $y_1y_2\cdots y_{n-1}$). Donc, l'un des chemins est de longueur au plus $\frac{3n+1}{2}$. □

Preuve de l'exercice 2.4.14

Rappelons que les sommets du graphe *cube-connected-cycles* $CCC(n)$ sont les couples $(l, x_0x_1\cdots x_{n-1})$ avec $l \in \{0, n-1\}$, et que ses arêtes sont de deux types : le sommet $(l, x_0x_1\cdots x_{n-1})$ est relié aux sommets $(l+1 \pmod n, x_0x_1\cdots x_{n-1})$ et $(l, x_0x_1\cdots \overline{x_l}\cdots x_{n-1})$.

Pour montrer que $CCC(n)$ est un graphe de Cayley, on considère les permutations de $\mathbb{Z}_2^n$ de la forme $\pi(l,x)$, avec $0 \leq l \leq n-1$, $x = x_0x_1\cdots x_{n-1}$, $x_i \in \{0,1\}$, et telles que leur action sur l'élément $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ de $\mathbb{Z}_2^n$ est donnée par :

$$(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})\ \pi(l,x) = (x_l + y_l, x_{l+1} + y_{l+1}, \ldots, x_{l-1} + y_{l-1})$$

ce qui revient à ajouter $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ à $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$, composante par composante, puis à décaler de l positions vers la gauche.
Remarquons que $\pi(l,x) = \pi(0,x)\ \pi(l,0^n)$ (faire attention à l'ordre des facteurs).

L'ensemble des permutations $\pi(l,x)$ forme un groupe, que nous noterons Γ, et qui est un sous-groupe du groupe de toutes les permutations sur $\mathbb{Z}_2^n$. Comme il s'agit d'un groupe fini, il suffit, pour démontrer cette propriété, de montrer que le produit de deux permutations $\pi(l,x)$ a la même forme. Le lecteur peut vérifier que :

$$\pi(l,x)\ \pi(l',x') = \pi(l+l', (x_0 + x'_{n-l})(x_1 + x'_{n-l+1})\cdots(x_{n-1} + x'_{n-l-1}))$$

ce qui correspond au *produit en couronne*, du groupe $\mathbb{Z}_2$ par le groupe $\mathbb{Z}_n$.

On peut montrer, de plus, que Γ admet comme ensemble de générateurs :

$$S = \{\pi(1,0^n), \pi(n-1,0^n), \pi(0,10^{n-1})\}$$

Pour montrer que $CCC(n)$ est le graphe de Cayley défini sur Γ, et d'ensemble de générateurs S, il suffit de voir qu'il existe une bijection (évidente) entre les sommets du graphe et les éléments de Γ, faisant correspondre la permutation $\pi(l,x)$ au sommet $(l, x_0\cdots x_{n-1})$ de $CCC(n)$, et qu'à chacun des deux types d'arête, correspond un produit par un élément du groupe.
En effet, à l'arête reliant les sommets $(l, x_0\cdots x_{n-1})$ et $(l+1 \bmod n, x_0\cdots x_{n-1})$, correspond le produit par $\pi(1,0^n)$; et à l'arête reliant les sommets $(l, x_0\cdots x_{n-1})$ et $(l, x_0\cdots \overline{x_l}\cdots x_{n-1})$, correspond le produit par $\pi(0,10^{n-1})$.

Remarque. Le graphe butterfly $BF(n)$ est un graphe de Cayley sur le même groupe Γ, mais avec comme ensemble de générateurs :

$$\{\pi(1,0^n), \pi(n-1,0^n), \pi(1,10^{n-1}), \pi(n-1,10^{n-1})\}$$

□

Preuve de l'exercice 2.4.15

Dans le réseau multiétages *butterfly*, il n'y a qu'une chaîne possible entre un commutateur du premier étage et un commutateur du dernier étage. On le prouve aisément par récurrence sur la dimension.
En utilisant la figure 2.17 représentant le réseau *butterfly*, avec les notations qu'elle comporte, il est facile de voir que si on a établi une liaison de l'entrée 0000 avec la sortie 0000, il n'est plus possible d'établir une liaison entre l'entrée 0100 et la sortie 0001.

□

Bibliographie

[1] M. Auguin and F. Boeri. Réseaux d'interconnexion et leurs commandes asynchrones. *Parallélisme, communication et synchronisation, Editions du CNRS*, 1985.

[2] J-C. Bermond, N. Homobono, and C. Peyrat. Large fault-tolerant interconnection networks. *Graphs and Combinatorics*, 5:107–123, 1989.

[3] J-C. Bermond, Z. Liu, and M. Syska. Mean excentricities of de Bruijn networks. *submitted to Networks*, 1993.

[4] J-C. Bermond and C. Peyrat. de Bruijn and Kautz networks: a competitor for the hypercube? In F. Andre and J-P. Verjus, editors, *Proceedings of the 1st Europeen Workshop on Hypercube and distributed computers*, pages 279–293, 1989.

[5] B. Bollobás and W. F. de la Vega. The diameter of random regular graphs. *Combinatorica*, 2:125–134, 1982.

[6] O. Collins, S. Dolinar, R. McEliece, and F. Pollara. A VLSI decomposition of the de Bruijn graphs. *Journal of the ACM*, 39:931–949, 1992.

[7] G. A. De Biase. Interconnection structures and parallel computing. *Advances in Parallel Computing*, 1:241–271, 1990.

[8] N. G. de Bruijn. A combinatorial problem. In *Rominklijke Netherland Academie Van Wetenschepen Proc.*, volume 49, pages 758–764, 1946. Part 20.

[9] J-M. Fourneau. *Modélisation des réseaux multiétages*. PhD thesis, Université de Paris-Sud (France), 1985.

[10] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability - A Guide to theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, 1979.

[11] I. J. Good. Normal recurring decimals. *Journal of the London Mathematics Society*, 21:167–169, 1946.

[12] M. Imase and M. Itoh. Design to minimize diameter on building block network. *IEEE Transactions on Computers*, C-32:782–784, 1983.

[13] M. R. Jerrum and S. Skyum. Families of fixed degree graphs for processor interconnection. *IEEE Transactions on Computers*, C-33(2):190–194, 1984.

[14] F. T. Leighton. *Introduction to parallel algorithms and architectures*. Morgan Kaufmann, 1992.

[15] J. Lenfant. Mémoires parallèles et réseaux d'interconnexion. *Technique et Science Informatiques*, pages 135–142, 1982.

[16] D. K. Pradhan and M. R. Samathan. The de Bruijn multiprocessor network: A versatile sorting network. In *IEEE Proceedings of the 12th International Symposium on Computer Architecture, Boston, MA*, pages 360–367, June 1985.

[17] F. P. Preparata and J. Vuillemin. The cube-connected-cycles: a versatile network for parallel computation. *Communications of the ACM*, 24:300–309, 1981.

[18] S. M. Reddy, D. K. Pradhan, and J. Kuhl. Directed graphs with maximal diameter and connectivity. Technical report, Oakland University, School of engineering, 1980.

[19] H. J. Siegel. *Interconnection networks for large-scale parallel processing.* Lexington books, 1985.

[20] S. Stein. *Mathematics: the man-made universe.* W. H. Freeman and Company, 1976. San Fransisco.

[21] I. Stewart. Ouroboro, ourotore, codage et problèmes annexes non résolus. *Pour la science*, Janvier:16–19, 1988.

[22] F. Tobagi. Fast packet switch architectures for broad-band integrated services digital networks. In *IEEE Proceedings*, volume 78-1, pages 133–167, 1990.