HAL open science

Modèle de couplage stochastique non-biparti

Céline Comte

To cite this version:

Céline Comte. Modèle de couplage stochastique non-biparti. ALGOTEL 2021 - 23èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications, Sep 2021, La Rochelle, France. hal-03219422

HAL Id: hal-03219422

https://hal.science/hal-03219422v1

Submitted on 6 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modèle de couplage stochastique non-biparti

Céline Comte[1]

[1] *Université Technologique d'Eindhoven, Pays-Bas*

Alors que la plus grande partie de la littérature sur les problèmes de couplage considère des modèles statiques où le nombre d'éléments à coupler est donné, plusieurs travaux récents se sont intéressés à une variante stochastique où des éléments de différentes classes arrivent selon des processus de Poisson indépendants, les contraintes de couplage entre ces éléments étant décrites par un graphe non-biparti entre leurs classes. Ces éléments peuvent notamment représenter des pièces à assembler dans une chaîne de production ou des couples donneur-receveur sur une liste de don d'organes. Dans ce papier, nous développons de nouvelles formules pour calculer des métriques de performance comme le temps moyen d'attente. Ces formules, ainsi que les résultats numériques qu'elles nous permettent de tracer, sont utilisées pour mieux comprendre l'impact des paramètres sur la performance. Nous caractérisions en particulier un régime limite où les éléments de certaines classes s'accumulent alors que les éléments des autres classes deviennent rares.

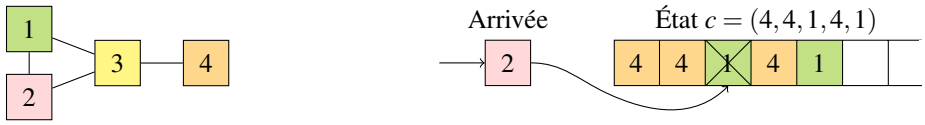
Une version longue de cet article [Com20] est en cours de révision auprès du journal *Stochastic Models*.

Mots-clefs : Modèle de couplage stochastique, file d'attente à forme produit, régime limite en trafic élevé.

1 Couplage stochastique non-biparti

Soit G un graphe non-orienté, connexe, sans boucle et non-biparti défini sur un ensemble $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$. Les éléments de $\mathcal{V}$ sont appelés des *classes* et le graphe G est appelé *graphe de compatibilité* car il décrira les compatibilités entre (classes d')éléments. On note $\mathcal{E}(i) \subseteq \mathcal{V}$ l'ensemble des voisins de la classe i dans G et, avec un léger abus de notation, $\mathcal{E}(A) = \bigcup_{i \in A} \mathcal{E}(i)$ l'ensemble des voisins des classes d'un ensemble $A \subseteq \mathcal{V}$ dans G. On note aussi $\mathbb{I}$ l'ensemble des ensembles indépendants du graphe G et $\mathbb{I}_0 = \mathbb{I} \cup \{\emptyset\}$.

Couplage stochastique Pour chaque $i \in \mathcal{V}$, les éléments de la classe i arrivent selon un processus de Poisson indépendant d'intensité μ_i. Les éléments qui n'ont pas encore été couplés sont classés par ordre d'arrivée dans une file d'attente. Lorsqu'on nouvel élément de la classe i arrive, cet élément est ajouté à la fin de la file d'attente si celle-ci ne contient aucun élément dont la classe appartient à $\mathcal{E}(i)$; autrement, l'élément de la classe i est couplé avec l'élément le plus ancien dont la classe appartient à $\mathcal{E}(i)$ et ces deux éléments disparaissent instantanément. Cette politique de couplage est appelée *premier arrivé, premier couplé*. Pour chaque $A \subseteq \mathcal{V}$, on note $\mu(A) = \sum_{i \in A} \mu_i$ le taux d'arrivée des éléments des classes dans A.



(a) Graphe de compatibilité.

(b) Si un nouvel élément de la classe 2 trouve la file dans l'état $c = (4,4,1,4,1)$, cet élément est couplé avec l'élément le plus ancien de la classe 1, de sorte que le nouvel état de la file est $d = (4,4,4,1)$.

FIGURE 1 – Un modèle de couplage stochastique avec un ensemble $\mathcal{V} = \{1,2,3,4\}$ de classes d'éléments.

Ce modèle de couplage stochastique a été considéré dans [MM16, MBsM20]. Dans [Com20], nous donnons des preuves plus simples pour plusieurs résultats démontrés dans ces travaux et développons de nouvelles formules pour calculer plusieurs métriques de performance. Pour cela, nous observons que le processus de Markov défini par le modèle de couplage stochastique qui nous intéresse a le même diagramme de transition que le processus de Markov défini par un autre modèle connu, appelé une *file order-independent*

à pertes, qui n'est pas rappelé ici. Bien que cette observation ait guidé notre travail, les résultats et preuves que nous formulons ci-dessous peuvent être compris sans avoir connaissance de ce second modèle.

Processus de Markov L'état du système est décrit par la séquence $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathcal{V}^*$ des classes d'éléments en attente classés par ordre d'arrivée, où n dénote le nombre d'éléments en attente et c_1 la classe de l'élément le plus ancien. Le système est initialement vide, et on note $\varnothing$ l'état correspondant. Avec un léger abus de notations, pour chaque $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathcal{V}^*$, on note $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subseteq \mathcal{V}$ l'ensemble des classes qui apparaissent dans la séquence c. Si un élément d'une classe $i \in \mathcal{V}$ arrive alors que le système est dans l'état $c = (c_1, \ldots, c_n)$, le nouvel état est $(c_1, \ldots, c_n, i)$ si $i \notin \mathcal{E}(\{c_1, \ldots, c_n\})$ et $(c_1, \ldots, c_{q-1}, c_{q+1}, \ldots, c_n)$, où $q = \min\{p \in \{1, \ldots, n\} : c_p \in \mathcal{E}(i)\}$, autrement. L'évolution de la séquence c définit un processus de Markov. Comme la politique de couplage garantit que la file d'attente ne contiendra jamais deux éléments dont les classes sont voisines dans le graphe G, l'espace d'états de ce processus de Markov est $\mathcal{C} = \bigcup_{I \in \mathbb{I}_0} \mathcal{C}_I$, où $\mathcal{C}_I = \{(c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{V}^* : \{c_1, \ldots, c_n\} = I\}$ est l'ensemble des séquences qui contiennent les classes de l'ensemble I (et seulement ces classes). Ceci forme une partition de l'ensemble $\mathcal{C}$.

Le théorème suivant a été démontré dans [MBsM20]. La preuve que nous proposons dans [Com20], plus simple, repose sur l'équivalence avec le modèle de file d'attente. La quantité $\rho(I)$ définie dans la condition de stabilité (1) est appelée la *charge* de l'ensemble I. C'est cette condition de stabilité qui impose d'utiliser un graphe de compatibilité non-biparti. Dans [Com20, Lemme 11], nous proposons une méthode simple pour générer des taux d'arrivée $\mu_1, \ldots, \mu_N$ qui vérifient cette condition. Les expressions (1) et (2) restent inchangées si les taux d'arrivée sont tous multipliés par la même constante positive car cela revient à changer d'unité de temps, de sorte que nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\sum_{i \in \mathcal{V}} \mu_i = 1$.

Théorème 1. *Le système est stable, dans le sens où le processus de Markov est ergodique, si et seulement si*

$$\rho(I) := \frac{\mu(I)}{\mu(\mathcal{E}(I))} < 1, \quad I \in \mathbb{I}. \tag{1}$$

Si cette condition est vérifiée, la distribution stationnaire du processus de Markov est donnée par

$$\pi(c_1, \ldots, c_n) = \pi(\varnothing) \prod_{p=1}^{n} \frac{\mu_{c_p}}{\mu(\mathcal{E}(\{c_1, \ldots, c_p\}))}, \quad (c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{C}, \tag{2}$$

où la constante $\pi(\varnothing)$ est obtenue par normalisation.

2 Métriques de performance

Nous développons maintenant des formules pour calculer la probabilité et le temps moyen d'attente. Elles peuvent être implémentées par programmation dynamique et, bien que leur complexité en temps soit $O(|\mathcal{V}| \cdot |\mathbb{I}|)$, ces formules constituent un pas en avant vers une analyse explicite du modèle de couplage stochastique. Leur dérivation se base sur des méthodes développées pour les files d'attente order-independent [Com19].

Probabilité d'attente Pour chaque $I \in \mathbb{I}_0$, on note $\pi(I) = \sum_{c \in \mathcal{C}_I} \pi(c)$ la probabilité que l'ensemble des classes d'éléments en attente soit I. D'après la propriété PASTA, la probabilité qu'un élément de la classe i attende (c'est-à-dire, qu'il ne soit pas couplé dès son arrivée) est égale à la probabilité $\omega_i = \sum_{I \in \mathbb{I}_0 : i \notin \mathcal{E}(I)} \pi(I)$ que la file d'attente ne contienne pas d'élément compatible avec la classe i. On peut vérifier que $\sum_{i \in \mathcal{V}} \mu_i \omega_i = \frac{1}{2}$ car chaque couplage a lieu entre un élément qui vient d'arriver (et qui n'a donc pas besoin d'attendre) et un élément qui a attendu. Cette égalité montre qu'améliorer la performance d'une classe se fait nécessairement au détriment d'une autre. Les probabilités $\pi(I)$ peuvent être calculées en combinant la proposition suivante avec la condition de normalisation $\sum_{I \in \mathbb{I}_0} \pi(I) = 1$.

Proposition 2. *Pour chaque $I \in \mathbb{I}$, on a* $\pi(I) = \dfrac{\rho(I)}{1 - \rho(I)} \left(\displaystyle\sum_{i \in I} \frac{\mu_i}{\mu(I)} \pi(I \setminus \{i\}) \right)$.

Démonstration. Pour chaque $I \in \mathbb{I}_0$, on a successivement :

$$\pi(I) = \sum_{i \in I} \frac{\mu_i}{\mu(\mathcal{E}(I))} \sum_{c \in \mathcal{C}_I : c_n = i} \pi(c_1, \ldots, c_{n-1}) = \frac{1}{\mu(\mathcal{E}(I))} \sum_{i \in I} \mu_i \left(\pi(I) + \pi(I \setminus \{i\}) \right).$$

où la première égalité est obtenue en injectant (2) dans la définition de $\pi(I)$ et en faisant une disjonction de cas sur la valeur de c_n, et la deuxième égalité est obtenue en observant que, pour chaque $(c_1,\dots,c_n) \in \mathcal{C}_I$ tel que $c_n = i$, $(c_1,\dots,c_{n-1})$ appartient à $\mathcal{C}_I$ ou à $\mathcal{C}_{I\setminus\{i\}}$. La conclusion suit en réarrangeant les termes. □

Temps moyen d'attente D'après la loi de Little, le temps moyen d'attente d'un élément est donné par $T = L/(\sum_{i\in\mathcal{V}}\mu_i) = L$, où L est le nombre moyen d'éléments dans la file d'attente. La proposition suivante donne une formule explicite pour L. La preuve est omise car elle est similaire à celle de la proposition 2.

Proposition 3. *On a $L = \sum_{I\in\mathbb{I}} L(I)\pi(I)$, où $L(I)$ satisfait la relation de récurrence $L(\emptyset) = 0$ et*

$$L(I)\pi(I) = \frac{\pi(I)}{1-\rho(I)} + \frac{\rho(I)}{1-\rho(I)}\left(\sum_{i\in I}\frac{\mu_i}{\mu(I)}L(I\setminus\{i\})\pi(I\setminus\{i\})\right), \quad I \in \mathbb{I}.$$

On peut vérifier que $L(I)$ est l'espérance conditionnelle du nombre d'éléments en attente *sachant* que l'ensemble des classes d'éléments en attente est I. Une formule similaire permet, pour chaque $i \in \mathcal{V}$, de calculer le nombre moyen L_i d'éléments de la classe i en attente, puis d'en déduire le temps moyen d'attente $T_i = L_i/\mu_i$ des éléments de la classe i grâce à la loi de Little. Dans [Com20], nous obtenons des expressions similaires pour les fonctions génératrices et transformées de Laplace-Stieltjes de ces variables aléatoires.

3 Impact de la charge sur la performance

Les résultats de la partie précédente suggèrent que, si l'on peut remanier certaines arêtes du graphe de compatibilité ou modifier des taux d'arrivée, *tâcher de minimiser le maximum des charges* $\rho(I)$ (pour $I \in \mathbb{I}$) est une bonne heuristique pour obtenir une performance comparable à l'optimal. En effet, les propositions 2 et 3 montrent que les quantités $\pi(I)$ et $L(I)\pi(I)$ sont des sommes dont chaque terme contient un produit de facteurs de la forme $\frac{1}{1-\rho(J)}$ pour des ensembles indépendants $J \subseteq I$. Implémenter cette règle à la lettre nécessiterait d'énumérer tous les ensembles indépendants du graphe de compatibilité, de sorte que la complexité en temps serait du même ordre que si l'on implémentait les expressions de la partie 2 ; l'idée ici est plutôt de proposer une règle empirique pour guider le dimensionnement.

Pour mieux comprendre l'impact de la charge sur la performance, faisons varier les taux d'arrivée de sorte que la charge d'un ensemble indépendant I maximal (pour l'inclusion) tende vers 1. On définit ainsi $\mu_i = \frac{\rho}{1+\rho}p_i$ pour $i \in I$ et $\mu_i = \frac{1}{1+\rho}q_i$ pour $i \in \mathcal{V}\setminus I = \mathcal{E}(I)$, les ratios $\sum_{i\in I} p_i = \sum_{i\in\mathcal{V}\setminus I} q_i = 1$ étant fixés et $0 < \rho < 1$ étant la charge de l'ensemble I. La proposition suivante montre que, comme le suggère l'intuition, la probabilité et le temps moyen d'attente des éléments des classes dans I tendent respectivement vers 1 et $+\infty$ lorsque ρ tend vers 1, alors que ces métriques tendent vers 0 pour les autres classes. À nouveau, des résultats plus élaborés concernant les distributions de ces variables aléatoires sont donnés dans [Com20]. Les conditions techniques énoncées au début de la proposition, qui garantissent simplement que l'ensemble I soit le seul à devenir saturé lorsque ρ tend vers 1, peuvent être allégées.

Proposition 4. *Supposons qu'il existe $\rho_* \in [0,1[$ tel que la condition de stabilité* (1) *soit satisfaite pour chaque $\rho \in [\rho_*,1[$, et supposons aussi que $\lim_{\rho\uparrow 1}\mu(J) < \lim_{\rho\uparrow 1}\mu(\mathcal{E}(J))$ pour chaque $J \in \mathbb{I}\setminus\{I\}$. Alors :*

— *les probabilités d'attente satisfont $\lim_{\rho\uparrow 1}\omega_i = 1$ pour $i \in I$ et $\lim_{\rho\uparrow 1}\omega_i = 0$ pour $i \in \mathcal{V}\setminus I$;*

— *les temps moyen d'attente satisfont $T_i \sim_{\rho\uparrow 1} \frac{2}{1-\rho}$ pour $i \in I$ et $\lim_{\rho\uparrow 1} T_i = 0$ pour $i \in \mathcal{V}\setminus I$.*

4 Résultats numériques

Nous présentons finalement quelques résultats numériques pour des modèles "jouets" à 9 classes. Des observations similaires ont été réalisées pour des modèles contenant plus de classes.

Considérons d'abord un graphe cycle où chaque classe $i \in \{1,2,\dots,9\}$ est reliée aux classes $i-1$ et $i+1$ (modulo 9). Cet exemple est éclairant car n'importe quel graphe non-biparti contient au moins un cycle de longueur impaire. Les taux d'arrivée sont $\mu_1 \propto \frac{\rho}{4}$ et $\mu_i \propto \frac{1}{8}$ pour chaque $i \in \{2,3,\dots,9\}$, où $0 < \rho < 1$ est la charge de la classe 1. Le comportement observé en Figure 2 lorsque cette charge ρ augmente de $\frac{1}{2}$ à 1 peut être expliqué par l'*effet cascade* suivant. Lorsque la charge ρ devient critique, préserver la stabilité

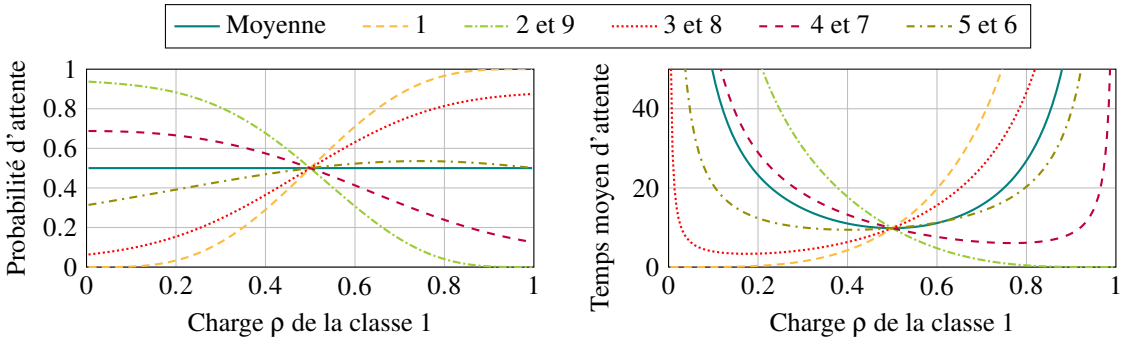


FIGURE 2 – Performance dans le graphe cycle avec $N = 9$ classes.

nécessite de coupler (presque) tous les éléments de la classe 2 avec des éléments de la classe 1, de sorte que la probabilité et temps moyen d'attente de la classe 2 tendent vers zéro. Il y a donc moins d'éléments de la classe 2 à coupler avec les éléments de la classe 3, qui s'accumulent, ce qui entraine une raréfaction des éléments de la classe 4, et par suite un excès des éléments de la classe 5, et ainsi de suite. La Figure 3 montre les résultats obtenus en ajoutant une corde entre les classes 5 et 9 ; on observe un effet cascade similaire bien que la corde brise la symétrie du modèle.

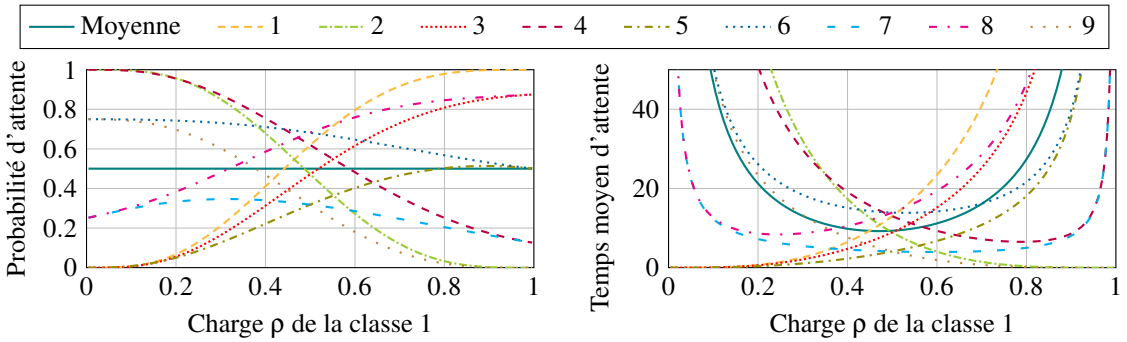


FIGURE 3 – Performance dans un graphe cycle avec $N = 9$ classes et une corde entre les classes 5 et 9.

5 Conclusion

Nous avons développé de nouvelles formules pour prédire la performance d'un modèle de couplage stochastique, puis nous avons utilisé ces formules pour mieux comprendre l'impact de la charge. Nous souhaiterions ensuite utiliser ces formules pour proposer des méthodes permettant d'*optimiser* la performance.

Références

[Com19] Céline Comte. Gestion des ressources dans les grappes d'ordinateurs : conception d'algorithmes et analyse de performance. Thèse de doctorat, Institut Polytechnique de Paris, 2019.

[Com20] Céline Comte. Stochastic non-bipartite matching models and order-independent loss queues. *arXiv :2012.00851 [cs, math]*, 2020. Disponible à http://arxiv.org/abs/2012.00851.

[MBsM20] Pascal Moyal, Ana Bušić, and Jean Mairesse. A product form for the general stochastic matching model. *arXiv :1711.02620 [math]*, 2020. Disponible à http://arxiv.org/abs/1711.02620.

[MM16] Jean Mairesse and Pascal Moyal. Stability of the stochastic matching model. *Journal of Applied Probability*, 53(4) :1064–1077, 2016.