



**HAL**  
open science

## Sur le théorème de Brauer-Siegel généralisé

Richard Griffon, Philippe Lebacque

► **To cite this version:**

Richard Griffon, Philippe Lebacque. Sur le théorème de Brauer-Siegel généralisé. 2021. hal-03216207v2

**HAL Id: hal-03216207**

**<https://hal.science/hal-03216207v2>**

Preprint submitted on 22 Sep 2022 (v2), last revised 22 May 2024 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur le théorème de Brauer–Siegel généralisé

Richard GRIFFON      et      Philippe LEBACQUE

*À la mémoire de notre ami Alexey Zykin,  
dont les idées nous inspirent toujours,  
et de sa femme Tatyana*

---

**Résumé** – Nous nous intéressons à une conjecture due à Tsfasman et Vladuts étendant le théorème de Brauer–Siegel à toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. Cet article propose une approche permettant, outre de démontrer de nouveaux cas de cette conjecture, d’unifier les preuves de divers résultats antérieurs en direction de celle-ci tout en les généralisant à des situations relatives. Nous exhibons également de nouvelles conditions assurant qu’une famille de corps de nombres vérifie inconditionnellement la conjecture de Tsfasman et Vladuts. Nous démontrons ainsi que toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans la clôture résoluble d’un corps de nombres fixé la vérifie. Nous donnons quelques exemples explicites de telles familles : ainsi celui d’un corps global infini contenu dans une  $p$ -tour de corps de classes.

**Abstract** – We study a conjecture of Tsfasman and Vladuts which posits a general version of the Brauer–Siegel theorem for any asymptotically exact family of number fields. We suggest an approach which, not only allows to unify the proofs of several previous results towards this conjecture as well as generalise these to a relative setting, but also yields new unconditional cases of the conjecture. We exhibit new sets of conditions which ensure that a family of number fields unconditionally satisfies the conjecture of Tsfasman and Vladuts. We thus prove that this conjecture holds for any asymptotically good family of number fields contained in the solvable closure of a given number field. We further give a number of explicit examples of such families, such as that of an infinite global field contained in a  $p$ -class field tower.

*Mots-Clés* : Théorie asymptotique des corps de nombres, Théorème de Brauer–Siegel.

*2020 Math. Subj. Classification* : 11R42, 11R47, 11R99.

---

## Introduction

Le théorème de Brauer–Siegel décrit le comportement asymptotique du produit du nombre de classes d’un corps de nombres par son régulateur des unités en termes de son discriminant. C’est un résultat central de la théorie des nombres du XX<sup>e</sup> siècle, qui a trouvé de nombreuses applications à des domaines variés des mathématiques (par exemple aux empilements de sphères [RT90], aux exposants de groupes de classes [HM18], en géométrie anabélienne [Iva14], pour la conjecture d’André–Oort pour  $\mathcal{A}_g$  [Tsi18] et de l’informatique (théorie des graphes [ST96], cryptosystèmes à clé publique [HM00]). Récemment, le théorème de Brauer–Siegel a également donné lieu à des énoncés en dimension supérieure : ainsi, on pourra consulter [HP16] et [Gri16, Gri18a, Gri19] pour un analogue dans certaines suites de courbes elliptiques. Mentionnons enfin que, faisant suite à la preuve dans [Gri18b] d’un théorème de Brauer–Siegel pour la suite des surfaces de Fermat sur un corps fini, Hindry [Hin19] a proposé une vaste généralisation conjecturale pour des suites de variétés sur les corps finis.

De façon précise, le théorème de Brauer–Siegel classique (voir [Bra47]) peut s’énoncer ainsi :

**Théorème (Brauer–Siegel).** Soit  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de corps de nombres. On suppose que la suite des degrés  $[K_i : \mathbb{Q}]$  est bornée et que celle des discriminants absolus  $\Delta(K_i)$  tend, en valeur absolue, vers  $+\infty$  lorsque  $i \rightarrow \infty$ . Alors on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(h(K_i) R(K_i))}{\log \sqrt{|\Delta(K_i)|}} = 1,$$

où  $h(K_i)$  désigne le nombre de classes de  $K_i$ , et  $R(K_i)$  son régulateur des unités.

En vue de certaines des applications sus-mentionnées de ce résultat, il est apparu que la condition de degré borné est trop restrictive. L'étude du comportement asymptotique du produit  $h(K_i) R(K_i)$  dans des suites de corps de nombres a donc été poursuivie afin d'affaiblir cette hypothèse. Les travaux de Tsfasman et Vladuts (voir [TV02]) suggèrent la conjecture suivante (les définitions et notations seront rappelées à la section 1) :

**Conjecture (Tsfasman–Vladuts).** Soit  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. Alors on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(h(K_i) R(K_i))}{\log \sqrt{|\Delta(K_i)|}} = 1 + \sum_q \phi_q \log \frac{q}{q-1} - \phi_{\mathbb{R}} \log 2 - \phi_{\mathbb{C}} \log(2\pi), \quad (1)$$

la somme du côté droit portant sur l'ensemble des puissances des nombres premiers.

Nous dirons qu'une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé si la conjecture de Tsfasman–Vladuts est vraie pour cette famille. Tsfasman et Vladuts ont montré que l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH) implique leur conjecture en toute généralité (voir [TV02]). Des cas particuliers de cette conjecture ont par la suite été démontrés (sans GRH) par Tsfasman–Vladuts, Zykina, Lebacque (avec des hypothèses successivement plus générales sur la famille  $(K_i)_i$ ) et Dixit. Résumons comme suit quelques-uns des résultats inconditionnels majeurs en direction de cette conjecture :

**Théorème.** Soit  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille de corps de nombres vérifiant l'une des hypothèses suivantes :

$(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une...	Voir
tour asymptotiquement bonne de corps galoisiens sur $\mathbb{Q}$	[TV02]
famille asymptotiquement mauvaise de corps galoisiens par pas sur $\mathbb{Q}$	[Zyk05]
famille asymptotiquement exacte de corps galoisiens par pas sur $\mathbb{Q}$	[Leb07]
tour asymptotiquement bonne de corps à clôture galoisienne résoluble sur $\mathbb{Q}$	[Dix20]
famille asymptotiquement mauvaise de corps à clôture galoisienne résoluble sur $\mathbb{Q}$	[Dix20]

Alors  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Dans la situation de la conjecture de Tsfasman–Vladuts, notons  $g(K_i) := \log \sqrt{|\Delta(K_i)|}$  le genre de  $K_i$ ,  $\zeta_{K_i}(s)$  la fonction zeta de Dedekind de  $K_i$ , et  $\zeta_{K_i}^*(1) = \text{Res}_{s=1} \zeta_{K_i}(s)$  son résidu en  $s = 1$ . Par la formule des classes de Dirichlet, la conclusion (1) de la conjecture se reformule ainsi :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log \zeta_{K_i}^*(1)}{g(K_i)} = \sum_q \phi_q \log \frac{q}{q-1}.$$

La démonstration du théorème de Brauer–Siegel généralisé pour la famille  $(K_i)_i$  passe alors par un encadrement du résidu  $\zeta_{K_i}^*(1)$ . L'étape cruciale est en fait l'obtention d'une minoration convenable de  $\zeta_{K_i}^*(1)$  : on ne s'étonnera donc pas que la conjecture de Tsfasman–Vladuts soit connue modulo l'hypothèse de Riemann généralisée. Sans cette hypothèse, Stark [Sta74] a montré comment un argument de « descente » des zéros de Siegel permet de conclure dans le cas galoisien par pas de degré borné : un zéro de  $\zeta_{K_i}(s)$  qui est « trop » proche de 1 est un zéro de Siegel associé à un sous-corps quadratique. Cette approche a ensuite été utilisée par Tsfasman–Vladuts pour démontrer leur conjecture pour une tour asymptotiquement bonne : ils remarquent pour cela

qu'une telle tour n'admet qu'un nombre fini de sous-corps quadratiques. Puis Zykin a remarqué que les travaux de Louboutin [Lou01, Theorem 1] liant résidu en  $s = 1$  et zéro de Siegel permettent de conclure dans le cas asymptotiquement mauvais et galoisien par pas. Enfin Lebacque s'est appuyé sur le théorème de Mertens généralisé et les arguments de Zykin pour traiter le cas galoisien par pas général. Plus récemment encore, Dixit [Dix20] a démontré un résultat analogue à ceux de Tsfasman–Vladuts et Zykin pour les familles de corps dont la clôture galoisienne sur  $\mathbb{Q}$  est résoluble : il s'appuie pour ce faire sur un résultat de « descente » de Murty [Mur01] en lieu et place de celui de Stark, et emprunte les arguments de Tsfasman, Vladuts et Zykin.

Dans cet article, nous reprenons et développons l'approche de Lebacque [Leb07] basée sur le théorème de Mertens (que l'on peut voir comme une « version finie » du théorème de Brauer–Siegel). Nous obtenons une preuve unifiée et des versions généralisées de tous les travaux précédents cités ci-avant et de nombreux nouveaux cas dans lesquels la conjecture de Tsfasman–Vladuts est vraie. Énonçons à présent les trois principaux résultats de ce travail.

Le premier unifie et généralise les cas connus de la Conjecture de Tsfasman–Vladuts mentionnés ci-avant : on peut désormais remplacer « sur  $\mathbb{Q}$  » dans les hypothèses du Théorème, par « sur  $K$  » où  $K$  est un corps de nombres fixe ou variant dans une suite « raisonnable » de corps de nombres.

**Théorème A.** *Soit une famille asymptotiquement exacte  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  de corps de nombres et, pour tout  $i$ , un sous-corps  $K_i$  de  $L_i$ . On suppose :*

- (1) *Pour tout  $i$ , l'extension  $L_i/K_i$  est galoisienne par pas ou à clôture galoisienne résoluble.*
- (2) *Et la suite  $(K_i)_i$  vérifie l'une des hypothèses suivantes :*
  - *Le genre  $g(K_i)$  reste borné lorsque  $i$  varie.*
  - *La quantité  $[K_i : \mathbb{Q}] \log[K_i : \mathbb{Q}] / g(K_i)$  tend vers 0.*
  - *On a  $[K_i : \mathbb{Q}] / g(K_i) \rightarrow 0$  et l'extension  $K_i/\mathbb{Q}$  est galoisienne par pas pour tout  $i$ .*

*Alors le théorème de Brauer–Siegel généralisé est vrai pour la famille  $\mathcal{L}$ .*

Poussant plus avant l'approche relative, nous démontrons également :

**Théorème B.** *Soit une famille asymptotiquement exacte  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  de corps de nombres. Soit, pour tout  $i$ , des sous-extensions  $k_i \subset K_i$  de  $L_i$ . On suppose que le degré  $[k_i : \mathbb{Q}]$  reste borné lorsque  $i$  varie et que, pour tout  $i$ , l'extension  $L_i/K_i$  vérifie l'une des deux hypothèses suivantes :*

- (1)  *$L_i/K_i$  est galoisienne par pas et l'on a  $(2[K_i : k_i])! \leq 2[L_i : K_i]$ .*
- (2)  *$L_i/K_i$  a clôture galoisienne résoluble et l'on a  $(2[K_i : k_i])! \leq E([L_i : K_i]) [L_i : K_i] / 16$ , où  $E$  est la suite définie par (2.4).*

*Alors le théorème de Brauer–Siegel généralisé est vrai pour la famille  $\mathcal{L}$ .*

Enfin, nous obtenons :

**Théorème C.** *Soit une famille asymptotiquement exacte  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  de corps de nombres. Soit aussi une suite  $\mathcal{K} = (K_i)_i$  une suite de corps de nombres. On suppose :*

- (1) *La suite  $\mathcal{K}$  est de degré borné sur  $\mathbb{Q}$ , la quantité  $[L_i : \mathbb{Q}] g(K_i) / g(L_i)$  reste bornée, et la suite des composita  $(K_i \cdot L_i / K_i)_i$  vérifie :*
  - *Lorsque  $i$  varie, le degré  $[K_i \cdot L_i : L_i]$  reste borné,*
  - *Ou pour tout  $i$ ,  $K_i \cdot L_i / K_i$  est galoisienne par pas,*
  - *Ou pour tout  $i$ ,  $K_i \cdot L_i / K_i$  a une clôture galoisienne résoluble.*
- (2) *Ou la suite  $\mathcal{K}$  est finie, et la suite des composita  $(K_i \cdot L_i / K_i)_i$  est formée d'extensions galoisiennes par pas ou ayant clôture galoisienne résoluble.*

*Alors le théorème de Brauer–Siegel généralisé est vrai pour la famille  $\mathcal{L}$ .*

Ces trois théorèmes sont démontrés aux sections 3, 4 et 5, respectivement. Les deux sections précédentes fixent les notations, rappellent les définitions des quantités étudiées ici, ainsi que quelques résultats antérieurs de « descente de zéros exceptionnels ». Nous démontrons en outre à

la section 2 deux lemmes clés sur lesquels sont basés nos résultats principaux.

On notera dans le dernier Théorème C l’absence d’hypothèse galoisienne directe sur les corps de nombres de la famille  $\mathcal{L}$ . Cet assouplissement élargit grandement le nombre de familles de corps de nombres vérifiant le théorème de Brauer–Siegel généralisé, ce qui ouvre la voie à l’obtention de nouveaux exemples explicites et inconditionnels. En particulier, un des corollaires directs du théorème C est le théorème suivant (voir section 5) :

**Théorème D.** *Soit  $K$  un corps de nombres. Toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans sa clôture résoluble  $K^{\text{solv}}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Dans l’étude asymptotique des corps globaux, il est en pratique délicat de construire des tours asymptotiquement bonnes de corps de nombres (et donc, en particulier d’exhiber des situations où le théorème de Brauer–Siegel de Tsfasman–Vladuts est véritablement une généralisation du théorème classique). Les rares exemples connus sont essentiellement obtenus comme sous-extensions d’une extension infinie  $K_S(p)$ , où  $p$  est un nombre premier,  $S$  est un ensemble fini de places d’un corps de nombres  $K$  ne divisant pas  $p$  (voir §6.3). À l’exception du cas où  $K$  est galoisien par pas sur  $\mathbb{Q}$ , on ne savait pas jusqu’à présent démontrer le théorème de Brauer–Siegel généralisé pour ces corps  $K_S(p)$ , ni *a fortiori* pour leurs sous-corps. Dans la dernière partie de l’article (section 6), nous comblons ce manque dans la théorie asymptotique des corps globaux de Tsfasman et Vladuts en démontrant le résultat suivant :

**Proposition E.** *Soient  $K$  un corps de nombres,  $p$  un nombre premier et  $S$  un ensemble de places de  $K$ . On note  $K_S(p)$  la pro- $p$ -extension maximale de  $K$  non ramifiée en dehors de  $S$ . Toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans  $K_S(p)$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. En particulier, tout corps global infini contenu dans  $K_S(p)$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Cette proposition est démontrée à la section 6. Nous y listons aussi des applications concrètes de ce résultat aux familles introduites par Hajir, Maire, Tsfasman, Vladuts et Zykin (voir entre autres [Mai00], [HM01], [HM02] [HMR21], [Zyk05]). Renvoyons également à la fin de la section 5 pour quelques autres exemples explicites de familles de corps de nombres vérifiant le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Ces applications cruciales de nos résultats à la théorie asymptotique des corps globaux donnent à cette dernière une plus forte consistance.

## 1. Définitions et notations

**1.1. Corps de nombres.** – Soit  $K$  un corps de nombres. On note  $\Delta(K)$  son discriminant absolu. Le *genre de  $K$* , noté  $g(K)$ , est alors défini par  $g(K) = \log \sqrt{|\Delta(K)|}$ . Cette définition est motivée par l’analogie entre l’arithmétique des corps de nombres et celle des corps de fonctions des courbes sur les corps finis. Il est classique (théorème d’Hermite–Minkowski, voir [Lan94, V. §4, Corollary]) que le seul corps de nombres de genre 0 est  $\mathbb{Q}$ . Si  $K \neq \mathbb{Q}$ , l’inégalité de Minkowski ([Lan94, V. §4, Theorem 5]) s’écrit :

$$[K : \mathbb{Q}] \leq (1 + (\log 3/2)^{-1}) g(K). \quad (1.1)$$

Si  $L/K$  est une extension finie de corps de nombres, rappelons que l’on a  $g(L) \geq [L : K] g(K)$  (voir [Lan94, III. §3]). Il s’agit d’une version faible de la formule de Riemann–Hurwitz qui exprime, plus généralement, la différence  $g(L) - [L : K] g(K)$  en termes de la ramification de l’extension  $L/K$ . En particulier, on déduit de cette formule l’égalité  $g(L) = [L : K] g(K)$  lorsque l’extension  $L/K$  est partout non ramifiée.

Soit  $h(K)$  le nombre de classes de  $K$ , et  $R(K)$  son régulateur des unités. Notons  $\zeta_K(s)$  la fonction zeta de Dedekind de  $K$ , et  $\zeta_K^*(1)$  le résidu de celle-ci en  $s = 1$ . Rappelons que, dans ces notations, la formule des classes de Dirichlet (voir [Lan94, VIII. §2, Theorem 5]) s’écrit :

$$\zeta_K^*(1) = \frac{h(K) R(K)}{|\Delta(K)|} \cdot \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{|\mu_K|}, \quad (1.2)$$

où  $r_1$  (resp.  $r_2$ ) désigne le nombre de places réelles (resp. complexes) de  $K$ , et  $\mu_K$  le groupe des racines de l'unité contenues dans  $K$ .

**1.2. Extensions de corps de nombres.** – Soit  $K$  un corps de nombres. Une extension  $L/K$  sera dite *galoisienne par pas* s'il existe une chaîne finie  $K = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_m = L$  de sous-extensions telle que, pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , l'extension  $L_i/L_{i-1}$  est galoisienne. (Les anglophones diraient *almost normal*, voir [Zyk05, Dix20]).

**1.3. Invariants de Tsfasman–Vladuts.** – Soient  $\mathcal{Q}_0 \subset \mathbb{Z}$  l'ensemble des puissances des nombres premiers, et  $\mathcal{Q}$  l'ensemble formé de  $\mathcal{Q}_0$  ainsi que des deux symboles  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .

Soit  $K$  un corps de nombres. Pour toute puissance  $q$  d'un nombre premier, on note  $\Phi_q(K)$  le nombre de places de  $K$  de norme  $q$ . On note en outre  $\Phi_{\mathbb{R}}(K)$  le nombre de places réelles, et  $\Phi_{\mathbb{C}}(K)$  le nombre de places complexes de  $K$ . En particulier, on a  $[K : \mathbb{Q}] = \Phi_{\mathbb{R}}(K) + 2\Phi_{\mathbb{C}}(K)$ .

Considérons à présent une suite  $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de corps de nombres. On dira que la suite  $\mathcal{K}$  est *finie* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs à isomorphisme près. Dans le cas contraire, la suite  $\mathcal{K}$  sera appelée une *famille*. Si  $\mathcal{K}$  est une famille, on a nécessairement  $g(K_i) \rightarrow \infty$  puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de corps de nombres de genre donné.

Pour tout  $q \in \mathcal{Q}$ , on définit, si cela a un sens, la limite suivante :

$$\phi_q(\mathcal{K}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Phi_q(K_i)}{g(K_i)}.$$

Une famille  $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est dite *asymptotiquement exacte* si toutes les limites  $\phi_q(\mathcal{K})$ , pour  $q \in \mathcal{Q}$ , existent. En pratique, ce n'est pas une condition restrictive. En effet, si  $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une *tour*, c'est-à-dire si  $K_i \subset K_{i+1}$  pour tout  $i$ , alors  $\mathcal{K}$  est asymptotiquement exacte (voir [TV02, §2], où il est de plus démontré que les invariants  $\phi_q(\mathcal{K})$  ne dépendent que de l'union  $\bigcup_i K_i$ ). On montre plus généralement que, de toute famille  $\mathcal{K}$ , on peut extraire une sous-famille asymptotiquement exacte. Il est clair qu'une sous-famille infinie  $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$  d'une famille asymptotiquement exacte l'est également, et que ses invariants  $\phi_q(\mathcal{K}')$  sont alors égaux à ceux de  $\mathcal{K}$ . On renvoie à [Leb10] et [Leb15] pour une étude plus poussée des invariants  $\phi_q(\mathcal{K})$ .

Une famille asymptotiquement exacte  $\mathcal{K} = (K_i)$  est dite *asymptotiquement mauvaise* si  $\phi_q(\mathcal{K}) = 0$  pour tout  $q \in \mathcal{Q}$ , et *asymptotiquement bonne* sinon. En pratique, les familles asymptotiquement mauvaises sont les plus communes. Rappelons le résultat suivant (voir Exemple 2.1 et Lemma 2.7 de [TV02], où l'on trouvera une preuve) :

**Lemme 1.1.** *Soit une famille  $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de corps de nombres.*

- (1) *La famille  $\mathcal{K}$  est asymptotiquement mauvaise si et seulement si le ratio  $[K_i : \mathbb{Q}]/g(K_i)$  tend vers 0 lorsque  $i \rightarrow \infty$ .*
- (2) *Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , fixons une extension finie  $L_i$  de  $K_i$ ; notons  $\mathcal{L} = (L_i)$  la famille ainsi formée. La famille  $\mathcal{L}$  est asymptotiquement mauvaise dès que  $\mathcal{K}$  l'est.*

**Remarque 1.2.** Soit  $\mathcal{K} = (K_i)_i$  une famille de corps de nombres galoisiens sur  $\mathbb{Q}$ . Pour tout  $i$ , on pose  $S_i \subset \mathbb{Z}$  l'ensemble des nombres premiers qui ramifient dans  $K_i$ . On suppose que  $|S_i| \rightarrow \infty$  lorsque  $i \rightarrow \infty$ . Alors  $\mathcal{K}$  est asymptotiquement mauvaise. La formule de Riemann–Hurwitz montre en effet que  $\mathcal{K}$  vérifie le premier point du Lemme. Voir [Leb10, Proposition 2.1].

**1.4. Théorème de Brauer–Siegel généralisé : architecture des preuves.** – Supposons donnée une famille asymptotiquement exacte  $\mathcal{K} = (K_i)_i$  de corps de nombres. Rappelons rapidement comment s'articule classiquement la preuve de la conjecture de Tsfasman–Vladuts pour la famille  $\mathcal{K}$  dans les cas où celle-ci est connue. Il s'agit *in fine* de montrer que la limite

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(h(K_i) R(K_i))}{\log \sqrt{|\Delta(K_i)|}}$$



existe et que celle-ci vaut  $1 + \sum_{z \in \mathcal{Q}_0} \phi_z(\mathcal{K}) \log(q/(q-1)) - \phi_{\mathbb{R}} \log 2 - \phi_{\mathbb{C}} \log 2\pi$ . Au travers de la formule des classes de Dirichlet (1.2), on se ramène facilement à prouver l'existence de  $\lim_{i \rightarrow \infty} (\log \zeta_{K_i}^*(1))/g(K_i)$ , et que l'identité

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log \zeta_{K_i}^*(1)}{g(K_i)} = \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} \phi_q(\mathcal{K}) \log \frac{q}{q-1} \quad (1.3)$$

est vérifiée. On dira que la famille  $\mathcal{K}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé si c'est le cas. Dans la terminologie de l'introduction de cet article, c'est dire que la conjecture de Tsfasman–Vladuts est vraie pour la famille  $\mathcal{K}$ .

L'inégalité de Tsfasman–Vladuts (voir Theorem 7.1 de [TV02]) donne :

**Théorème 1.3.** *Si  $\mathcal{K} = (K_i)_i$  est une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres, on a*

$$\limsup_i \frac{\log \zeta_{K_i}^*(1)}{g(K_i)} \leq \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} \phi_q(\mathcal{K}) \log \frac{q}{q-1} < \infty. \quad (1.4)$$

Avec cette inégalité, démontrer la conjecture de Tsfasman–Vladuts pour la famille  $\mathcal{K}$  revient à s'assurer que

$$\liminf_i \frac{\log \zeta_{K_i}^*(1)}{g(K_i)} \geq \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} \phi_q(\mathcal{K}) \log \frac{q}{q-1}.$$

En d'autres termes, il s'agit d'obtenir une minoration asymptotique suffisamment précise du résidu  $\zeta_{K_i}^*(1)$  en termes de  $g(K_i)$ . Une telle minoration s'obtient assez rapidement lorsque la fonction  $\zeta_{K_i}(s)$  n'a pas de zéro réel « trop proche » de  $s = 1$  (voir Lemme 2.3). Dans le cas où un tel zéro est présent, un travail supplémentaire est nécessaire ; notre approche consiste, sous hypothèses supplémentaires sur  $K_i$ , à « expliquer » la présence d'un tel zéro par l'existence d'un sous-corps de  $K_i$  de degré et genre contrôlés dont la fonction zeta s'annule en ce même point.

## 2. Résultats préliminaires

**2.1. Zéros exceptionnels.** – Soit  $K$  un corps de nombres différent de  $\mathbb{Q}$ . On dira que  $K$  admet un zéro *exceptionnel* si il existe un zéro réel  $\rho$  de sa fonction zeta  $\zeta_K(s)$  vérifiant

$$1 - (8g(K))^{-1} < \rho \leq 1.$$

Si un tel zéro existe, il est unique (voir [Sta74, Lemma 3]). Dans la suite de cet article, nous noterons  $\rho(K)$  le zéro exceptionnel de  $\zeta_K(s)$  s'il existe, et poserons  $\rho(K) = 0$  sinon.

Louboutin [Lou01] a découvert la relation suivante entre résidu  $\zeta_K^*(1)$  de la fonction zeta d'un corps de nombres  $K \neq \mathbb{Q}$  et zéro réels (en particulier exceptionnels) de  $\zeta_K(s)$ .

**Lemme 2.1.** *Soit  $K \neq \mathbb{Q}$  un corps de nombres. Si  $\rho$  est un zéro réel de  $\zeta_K(s)$ , on a*

$$\zeta_K^*(1) \leq (1 - \rho) \left( \frac{e g(K)}{[K : \mathbb{Q}]} \right)^{[K : \mathbb{Q}]}.$$

C'est un résultat essentiel pour le théorème de Brauer–Siegel généralisé, comme l'a remarqué Zykina dans [Zyk05], et comme on le verra dans la preuve du Théorème 3.3.

**2.2. Théorème de Mertens et théorème de Brauer–Siegel.** – L'article [Leb07] démontre la forme effective (et inconditionnelle) suivante du théorème de Mertens.

**Théorème 2.2.** *Il existe une constante effective  $C > 0$  telle que, pour tout corps de nombres  $K$  et tout  $X > 1$  vérifiant  $\log X > C[K : \mathbb{Q}]g(K)^2$ , l'on a*

$$\sum_{\substack{q \in \mathcal{Q}_0 \\ q \leq X}} \Phi_q(K) \log \frac{q}{q-1} = \log \log X + \gamma + \log \zeta_K^*(1) + O\left(\frac{1}{(1-\rho(K)) \log X}\right), \quad (2.1)$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler–Mascheroni, et  $\rho(K)$  désigne le zéro exceptionnel de  $\zeta_K(s)$  si celui-ci existe, 0 sinon. La constante implicite dans le terme d'erreur est absolue et effective.

Pour le confort de lecture, rappelons comment déduire de ce théorème le lemme ci-dessous (qui est essentiellement le Lemma 6 de [Leb07]), dont nous ferons usage à plusieurs reprises.

**Lemme 2.3.** *Soit  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. Pour tout  $i$ , on note  $\rho(L_i)$  le zéro exceptionnel de  $L_i$  (voir §2.1). Si l'on a de plus*

$$\liminf_i \frac{\log(1-\rho(L_i))}{g(L_i)} = 0, \quad \text{i.e.,} \quad \limsup_i \frac{|\log(1-\rho(L_i))|}{g(L_i)} = 0,$$

alors la famille  $\mathcal{L}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Ce lemme peut être vu comme une version généralisée du Lemma 4 de [Sta74] : ce dernier exprime, de façon similaire, une condition suffisante sur les zéros exceptionnels pour qu'une famille de corps de nombres vérifie le théorème de Brauer–Siegel classique.

*Démonstration.* Avec l'inégalité de Tsfasman–Vladuts (1.4), il suffit de montrer que la somme convergente  $\Sigma_0(\mathcal{L}) := \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} \phi_q(\mathcal{L}) \log q/(q-1)$  vérifie

$$\Sigma_0(\mathcal{L}) \leq \liminf_i \frac{\log \zeta_{L_i}^*(1)}{g(L_i)}.$$

Pour alléger les notations dans cette preuve, nous noterons  $n_i = [L_i : \mathbb{Q}]$ ,  $g_i = g(L_i)$  et  $\rho_i = \rho(L_i)$  pour tout  $L_i \in \mathcal{L}$ . Pour tout  $i$ , on pose  $X_i := \exp(2C n_i g_i^2 / (1-\rho_i))$  et, pour tout  $q \in \mathcal{Q}_0$ ,

$$f_i(q) := \frac{\Phi_q(L_i)}{g_i} \log \frac{q}{q-1} \text{ si } q \leq X_i, \quad \text{et } f_i(q) := 0 \text{ sinon.}$$

Comme  $\rho_i \in [0, 1]$ ,  $X_i$  vérifie  $\log X_i > C n_i g_i^2$ . Pour  $L_i \in \mathcal{L}$ , on déduit de (2.1) que

$$\frac{\log \zeta_{L_i}^*(1)}{g_i} \geq \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} f_i(q) - \frac{\log \log X_i}{g_i} - \frac{\gamma}{g_i} - \frac{c_0}{g_i(1-\rho_i) \log X_i}.$$

pour une certaine constante absolue  $c_0 > 0$ . Par choix de  $X_i$ , on en tire la minoration

$$\begin{aligned} \frac{\log \zeta_{L_i}^*(1)}{g_i} &\geq \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} f_i(q) + \frac{\log(1-\rho_i)}{g_i} - \frac{\gamma + \log(2C)}{g_i} - \frac{c_0(2C)^{-1}}{n_i g_i^3} - \frac{\log n_i}{g_i} - \frac{2 \log g_i}{g_i} \\ &\geq \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} f_i(q) + \frac{\log(1-\rho_i)}{g_i} - \frac{\gamma + \log(2C) + c_0(2C)^{-1} + \log(n_i/g_i)}{g_i} - \frac{3 \log g_i}{g_i} \\ &\geq \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} f_i(q) - \frac{|\log(1-\rho_i)|}{g_i} - o(1), \quad \text{lorsque } g_i \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Rappelons en effet que  $n_i/g_i$  est borné (par inégalité de Minkowski (1.1)) et que  $(\log g_i)/g_i = o(1)$ .

La famille  $\mathcal{L}$  étant asymptotiquement exacte, il est clair que

$$\sum_{q \in \mathcal{Q}_0} \liminf_i f_i(q) = \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(q) = \Sigma_0(\mathcal{L}) < \infty.$$



Par ailleurs, on déduit du lemme de Fatou que

$$\Sigma_0(\mathcal{L}) = \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} \liminf_i f_i(q) \leq \liminf_i \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} f_i(q).$$

Prenant les limites inférieures de part et d'autre de (2.2), et reportant l'inégalité ci-dessus dans la relation obtenue, on obtient que

$$\liminf_i \frac{\log \zeta_{L_i}^*(1)}{g(L_i)} \geq \Sigma_0(\mathcal{L}) - \limsup_i \frac{|\log(1 - \rho_i)|}{g_i} + 0.$$

Avec l'hypothèse, on conclut donc que  $\liminf_i \frac{\log \zeta_{L_i}^*(1)}{g(L_i)} \geq \Sigma_0(\mathcal{L})$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

On déduit immédiatement du Lemme 2.3 ci-dessus le cas particulier important (et bien connu, voir Theorem 7.2 et Remark 7.2 de [TV02]) suivant :

**Corollaire 2.4.** *Soit  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. Si, pour  $i$  assez grand, aucun des corps  $L_i \in \mathcal{L}$  n'admet de zéro exceptionnel, la famille  $\mathcal{L}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

**2.3. Deux lemmes clé.** – Les résultats principaux de cet article s'appuient sur les deux lemmes ci-après.

**Lemme 2.5.** *Soit  $\mathcal{M} = (M_i)_i$  une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. Pour tout  $i$ , on suppose que la fonction zeta  $\zeta_{M_i}(s)$  admet un zéro réel  $\rho_i$ , et qu'il existe un corps de nombres  $F_i$  tel que  $\zeta_{F_i}(\rho_i) = 0$ . On note  $\mathcal{F} = (F_i)_i$  la suite de ces corps, et l'on fait les trois hypothèses suivantes sur  $\mathcal{F}$  :*

- (i) *Le ratio  $g(F_i)/g(M_i)$  reste borné lorsque  $i$  varie,*
  - (ii) *Si la suite  $\mathcal{F}$  n'est pas finie, elle est asymptotiquement mauvaise,*
  - (iii) *Si la suite  $\mathcal{F}$  n'est pas finie, le ratio  $(\log \zeta_{F_i}^*(1))/g(F_i)$  tend vers 0 lorsque  $i \rightarrow \infty$ .*
- Alors  $\mathcal{M}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Dans les applications envisagées, l'un des intérêts du Lemme 2.5 est de n'imposer ni contrainte sur la position des zéros  $\rho_i$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ , ni que  $F_i$  soit contenu dans  $M_i$ .

*Démonstration.* L'argument qui suit est adapté d'un raisonnement dû à Zykin. Notons que  $F_i \neq \mathbb{Q}$  pour tout  $i$ , puisque  $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$  ne s'annule pas sur  $[0, 1]$ . D'après le Lemme 2.1, on a

$$\zeta_{F_i}^*(1) \leq (1 - \rho_i) \alpha(F_i)^{[F_i:\mathbb{Q}]}, \quad \text{où l'on a posé } \alpha(F_i) := e g(F_i)/[F_i : \mathbb{Q}].$$

Il s'ensuit que

$$0 \leq \frac{|\log(1 - \rho_i)|}{g(M_i)} \leq \underbrace{\frac{|\log \zeta_{F_i}^*(1)|}{g(M_i)}}_{:=A_i} + \underbrace{\frac{[F_i : \mathbb{Q}] |\log \alpha(F_i)|}{g(M_i)}}_{:=B_i}. \quad (2.3)$$

Deux cas de figure se présentent. *Ou bien la suite  $\mathcal{F}$  est finie (i.e., ne prend qu'un nombre fini de valeurs), auquel cas les numérateurs dans le membre de droite de (2.3) sont bornés. Dans cette situation, la quantité  $A_i + B_i$  tend vers 0, puisque le genre  $g(M_i)$  n'est pas borné lorsque  $M_i$  parcourt  $\mathcal{M}$ .*

*Ou bien la suite  $\mathcal{F}$  est infinie : auquel cas, le genre  $g(F_i)$  n'est pas borné. Ceci étant, il existe par hypothèse (i) un réel  $B > 0$  tel que  $g(F_i) \leq B g(M_i)$ . La quantité  $A_i$  dans (2.3) vérifie donc*

$$0 \leq A_i = \frac{|\log \zeta_{F_i}^*(1)|}{g(M_i)} = \frac{|\log \zeta_{F_i}^*(1)|}{g(F_i)} \cdot \frac{g(F_i)}{g(M_i)} \leq B \cdot \frac{|\log \zeta_{F_i}^*(1)|}{g(F_i)}.$$

On sait en outre par (iii) que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \log \zeta_{F_i}^*(1)/g(F_i)$  existe et vaut 0. Ainsi, on a  $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = 0$ . Remarquons à présent que la quantité  $B_i$  dans (2.3) satisfait

$$B_i = \frac{[F_i : \mathbb{Q}] |\log \alpha(F_i)|}{g(M_i)} = e \cdot \frac{|\log \alpha(F_i)|}{\alpha(F_i)} \cdot \frac{g(F_i)}{g(M_i)} \leq eB \cdot \frac{|\log \alpha(F_i)|}{\alpha(F_i)}.$$

On déduit de la dernière hypothèse inutilisée (ii) et du Lemme 1.1 que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(F_i) = \infty$ , l'inégalité ci-dessus implique alors que  $\lim_{i \rightarrow \infty} B_i = 0$ .

Dans chacun des deux cas, nous avons donc démontré que

$$0 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\log(1 - \rho_i)|}{g(M_i)} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} (A_i + B_i) = 0.$$

On applique alors le Lemme 2.3 à la famille  $\mathcal{M}$  pour conclure.  $\square$

**Remarque 2.6.** Dans la situation du lemme 2.5, si à la place de (i)–(iii), l'on impose plutôt que

(i') *Le ratio  $g(F_i)/g(M_i)$  tende vers 0 lorsque  $i \rightarrow \infty$ ,*

(ii') *Et, lorsque la suite  $\mathcal{F}$  n'est pas finie, que le ratio  $(\log \zeta_{F_i}^*(1))/g(F_i)$  reste borné,*

on peut, avec la même preuve, conclure que la famille  $\mathcal{M}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Nous utiliserons par ailleurs à plusieurs reprises l'argument de « partition » suivant :

**Lemme 2.7.** *Soit  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. Étant donnée une suite  $(c_i)_i$  de réels de  $]0, 1[$  telle que  $\liminf_i (\log c_i)/g(L_i) = 0$ , on considère la sous-suite  $\mathcal{L}_0$  de  $\mathcal{L}$  formée des  $L_i \in \mathcal{L}$  dont la fonction zeta s'annule sur l'intervalle  $[1 - c_i, 1[$ . Si la suite  $\mathcal{L}_0$  est infinie, on suppose qu'elle vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Alors la famille  $\mathcal{L}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

*Démonstration.* Posons  $\mathcal{L}_* := \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$  la sous-famille de  $\mathcal{L}$  formée des  $L_i \in \mathcal{L}$  dont la fonction zeta ne s'annule pas sur l'intervalle  $[1 - c_i, 1[$ . Puisque  $\mathcal{L}$  est asymptotiquement exacte, celles des sous-familles  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{L}_*$  qui sont infinies le sont aussi. Pour que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \sqcup \mathcal{L}_*$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé, il suffit que celles des sous-familles  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{L}_*$  qui sont infinies vérifient le théorème de Brauer–Siegel généralisé. D'après l'hypothèse, il reste donc à démontrer que  $\mathcal{L}_*$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé si elle est infinie.

Supposons donc  $\mathcal{L}_*$  infinie et, pour tout  $L_j \in \mathcal{L}_*$ , notons  $\rho(L_j)$  le zéro exceptionnel de  $\zeta_{L_j}(s)$  (voir §2.1). Par construction de  $\mathcal{L}_*$ , on a pour tout  $j$  les inégalités :

$$0 \geq \frac{\log(1 - \rho(L_j))}{g(L_j)} \geq \frac{\log c_j}{g(L_j)}.$$

Puisque  $\liminf_j (\log c_j)/g(L_j) = 0$ , on a  $\liminf_{L_j \in \mathcal{L}_*} \log(1 - \rho(L_j))/g(L_j) = 0$ . L'hypothèse du Lemme 2.3 est ainsi satisfaite par la famille  $\mathcal{L}_*$ . D'où la conclusion.  $\square$

**2.4. Descente des zéros exceptionnels.** – Afin d'appliquer le Lemme 2.5, nous aurons besoin d'arguments de « descente des zéros exceptionnels » à des sous-extensions pour lesquelles le théorème de Brauer–Siegel est vrai. Dans ce paragraphe, nous rappelons ainsi, sous une forme parfois légèrement modifiée, les résultats importants de descente des zéros exceptionnels.

Le théorème suivant est essentiellement dû à Stark (voir [Sta74, Lemma 10]). Dans sa forme originale, il est énoncé pour  $K = \mathbb{Q}$  mais il reste valable (avec la même preuve) dans le cas d'un corps de nombres quelconque.

**Théorème 2.8.** *Soit  $L/K$  une extension finie de corps de nombres qui est galoisienne par pas. On suppose que la fonction zeta  $\zeta_L(s)$  admet un zéro réel  $\rho$  vérifiant*

$$1 - (32g(L))^{-1} \leq \rho < 1.$$

*Alors il existe une sous-extension  $F$  de  $L/K$  avec  $[F : K] \leq 2$  et  $\zeta_F(\rho) = 0$ .*

*Démonstration.* Il s'agit d'un corollaire des Lemma 3 et Theorem 3 de [Sta74]; il se démontre comme le Lemma 10 *loc. cit.* en remplaçant  $\mathbb{Q}$  par  $K$ . (On perd alors le fait que  $F$  est nécessairement une extension quadratique de  $K$  puisqu'il est possible, si  $K \neq \mathbb{Q}$ , que  $\zeta_K(\rho) = 0$ ).  $\square$

Rappelons aussi une forme plus générale du Lemma 8 de [Sta74]. Là encore, l'énoncé de [Sta74] suppose  $K = \mathbb{Q}$  mais le résultat reste valable dans la situation « relative » décrite ici :

**Lemme 2.9.** *Soit  $L/K$  une extension de corps de nombres. On suppose que la fonction  $\zeta_L(s)$  admet un zéro réel  $\rho$  vérifiant*

$$1 - (8g(L) [L : K]!)^{-1} \leq \rho < 1.$$

*Alors il existe une sous-extension  $F$  de  $L/K$  telle que  $[F : K] \leq 2$  avec  $\zeta_F(\rho) = 0$ .*

**Remarque 2.10.** La conjecture d'Artin permet d'obtenir une version très forte du Lemme 2.9. Supposant en effet que les fonctions  $L$  d'Artin sont analytiques sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , on montre (voir [Sta74, Theorem 4]) l'énoncé suivant : Si  $L/K$  est une extension de corps de nombres telle que  $\zeta_L(s)$  admette un zéro réel  $\rho$  dans l'intervalle  $[1 - (8g(L) ([L : K] - 1))^{-1}, 1[$ , alors il existe une sous-extension au plus quadratique  $F$  de  $L/K$  telle que  $\zeta_F(\rho) = 0$ .

Le facteur  $[L : K]!$  du Lemme 2.9 étant remplacé par  $[L : K] - 1$ , on pourrait alors « descendre » des zéros dans un intervalle bien plus grand.

Un autre résultat de descente a été prouvé plus récemment par Murty (voir [Mur01]). Pour tout entier  $n \geq 2$ , on définit  $e(n) = \max_{p^v \parallel n} v$ , le maximum portant sur les nombres premiers divisant  $n$ , et l'on pose

$$E(n) := 3^{1/3} 12^{-1} \cdot (n/12)^{e(n)} (e(n) + 1)^2. \quad (2.4)$$

On a alors (*cf.* Theorem 2.1 de [Mur01]) :

**Théorème 2.11.** *Il existe une constante absolue  $c_2 > 0$  que l'on peut supposer  $\leq 1$  telle que l'énoncé suivant soit vrai. Soit  $K$  un corps de nombres, et  $L/K$  une extension de degré  $n$  dont la clôture galoisienne est résoluble. Supposons que  $\zeta_L(s)$  a un zéro  $\rho$  vérifiant*

$$1 - c_2 (E(n) g(L))^{-1} \leq \rho < 1.$$

*Alors il existe une sous-extension  $F$  de  $L/K$  telle que  $[F : K] \leq 2$  avec  $\zeta_F(\rho) = 0$ .*

Nous aurons besoin plus bas des deux estimations élémentaires suivantes sur la quantité  $E(n)$  :

**Lemme 2.12.** (1) *Il existe une constante  $c_3 > 0$  telle que  $E(n) \geq c_3 n$  pour tout  $n \geq 2$ .*

(2) *Il existe une constante  $c_4 > 0$  telle que  $\log E(n) \leq c_4 (\log n)^2$  pour tout  $n \geq 2$ .*

*Démonstration.* Notons qu'il suffit de démontrer la minoration (1) pour  $n \geq 12$  et d'ajuster la valeur de la constante pour englober le cas où  $n \leq 11$ . Pour  $n \geq 12$ , on a  $E(n) \geq 2 \cdot 3^{1/3} 12^{-2} \cdot n$  (on a en effet  $e(n) \geq 1$  puisqu'un tel  $n$  a au moins un facteur premier), ce qu'il fallait démontrer.

Par définition, on a  $E(n) \leq n^{e(n)} (e(n) + 1)^2$  pour tout  $n \geq 1$ . Il est par ailleurs clair que  $e(n) \leq \log n / \log 2$ . On en déduit que

$$\log E(n) \leq \frac{(\log n)^2}{\log 2} + 2 \log \left( 1 + \frac{\log n}{\log 2} \right) \leq \frac{(\log n)^2 + 2 \log n}{\log 2} \leq \frac{3(\log n)^2}{\log 2},$$

ce qui prouve la seconde assertion.  $\square$

### 3. Théorème général

**3.1. Conditions.** – Introduisons tout d’abord une série de notations pour certaines hypothèses récurrentes sur une suite de corps de nombres, ou une suite d’extensions de corps de nombres.

Étant donnée une suite  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de corps de nombres, on considère les conditions suivantes :

**(H1)** Le genre  $g(K_i)$  reste borné lorsque  $i$  varie.

**(H2)** La quantité  $[K_i : \mathbb{Q}] \log[K_i : \mathbb{Q}] / g(K_i)$  tend vers 0 lorsque  $i \rightarrow \infty$ .

**(H3)** La famille  $(K_i)_i$  est asymptotiquement mauvaise et, pour tout  $i$ , l’extension  $K_i/\mathbb{Q}$  est galoisienne par pas.

Notons que **(H1)** revient à supposer la suite  $(K_i)_i$  finie (c’est-à-dire qu’elle ne prend qu’un nombre fini de valeurs). Remarquons également que **(H2)** impose en particulier que le ratio  $[K_i : \mathbb{Q}] / g(K_i)$  tende vers 0 : la suite  $(K_i)_i$  est alors asymptotiquement mauvaise. Une famille  $(K_i)_i$  satisfaisant l’une de **(H2)** ou **(H3)** vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé d’après [Leb07, Proposition 1(i)] ou [Zyk05, Theorem 1], respectivement.

Si maintenant  $(L_i/K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite d’extensions de corps de nombres, on s’intéresse aux hypothèses suivantes :

**(E1)** pour tout  $i$ , l’extension  $L_i/K_i$  est galoisienne par pas,

**(E2)** pour tout  $i$ , l’extension  $L_i/K_i$  a une clôture galoisienne résoluble,

**(E3)** lorsque  $i$  varie, l’extension  $L_i/K_i$  est de degré borné.

On introduit de plus une condition commode « de descente des zéros exceptionnels » dans  $L_i/K_i$  :

**(DES)** Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , il existe  $c(L_i) \in ]0, 1[$  tel que

(i) si  $\zeta_{L_i}(s)$  admet un zéro  $\rho_i$  vérifiant  $1 - c(L_i) \leq \rho_i < 1$ , il existe une sous-extension  $F_i$  de  $L_i/K_i$  avec  $[F_i : K_i] \leq 2$  telle que  $\zeta_{F_i}(\rho_i) = 0$ ,

(ii) et  $\liminf_i (\log c(L_i)) / g(L_i) = 0$ .

Notons que la condition **(DES)** est trivialement satisfaite si la fonction zeta de  $L_i$  n’a pas de zéro exceptionnel (prendre  $c(L_i) = 1/2$  par exemple). Démontrons incontinent que chacune des hypothèses **(E1)**, **(E2)**, **(E3)** implique la condition **(DES)**.

**Proposition 3.1.** *Soit  $(L_i/K_i)_i$  une suite d’extensions de corps de nombres. Supposons que  $g(L_i) \rightarrow \infty$  et que la suite  $(L_i/K_i)_i$  satisfait l’une des conditions **(E1)**, **(E2)** ou **(E3)**.*

*Alors la suite d’extensions  $(L_i/K_i)_i$  satisfait **(DES)**.*

*Démonstration.* Pour tout  $i$ , posons

$$c(L_i) := \begin{cases} (32g(L_i))^{-1} & \text{si (E1) est satisfaite,} \\ c_2 (E([L_i : K_i]) g(L_i))^{-1} & \text{si (E2) est satisfaite,} \\ (8g(L_i) [L_i : K_i]!)^{-1} & \text{si (E3) est satisfaite.} \end{cases}$$

Dans chacun des cas, la première partie **(DES)(i)** de la condition **(DES)** est vérifiée : ceci suit en effet du Théorème 2.8 (resp. Théorème 2.11, Lemme 2.9) si l’hypothèse **(E1)** (resp. **(E2)**, **(E3)**) est satisfaite. Il reste donc à s’assurer que la suite  $(c(L_i))_i$  ainsi définie vérifie **(DES)(ii)**. C’est clair dans les cas **(E1)** et **(E3)** puisque  $g(L_i) \rightarrow \infty$ . Ne reste à traiter que le cas où la suite  $(L_i/K_i)_i$  vérifie la condition **(E2)**. Il s’agit plus spécifiquement de démontrer que  $\lim_{i \rightarrow \infty} (\log E([L_i : K_i])) / g(L_i) = 0$ . Or, d’après le Lemme 2.12(2), il existe une constante  $c_4 > 0$  telle que

$$\frac{\log E([L_i : K_i])}{g(L_i)} \leq c_4 \cdot \frac{(\log[L_i : \mathbb{Q}])^2}{g(L_i)}.$$

et l’inégalité de Minkowski (1.1) implique que  $(\log[L_i : \mathbb{Q}])^2 / g(L_i)$  tend vers 0. □

**Remarque 3.2.** Il convient de noter que la condition **(DES)** est automatiquement vérifiée si la conjecture d'Artin est vraie. En effet, étant donnée une suite  $(L_i/K_i)_i$  d'extensions de corps de nombres avec  $g(L_i) \rightarrow \infty$ , la Remarque 2.10 indique que l'on peut choisir dans **(DES)(i)** la valeur  $c(L_i) = (8g(L_i) ([L_i : K_i] - 1))^{-1}$ . On observe alors que

$$\frac{|\log c(L_i)|}{g(L_i)} = o(1) + \frac{\log[L_i : K_i]}{g(L_i)} \leq o(1) + \frac{\log[L_i : \mathbb{Q}]}{g(L_i)}.$$

Utilisant l'inégalité de Hermite–Minkowski (1.1), on obtient que cette suite  $c(L_i)$  vérifie **(DES)(ii)**. Modulo la conjecture d'Artin pour les fonctions  $L$  concernées, la suite  $(L_i/K_i)_i$  satisfait donc l'hypothèse **(DES)**.

**3.2. Théorème clé.** – Le théorème ci-dessous constitue l'un des résultats clé du présent article :

**Théorème 3.3.** *Soit  $(L_i/K_i)_i$  une famille d'extensions de corps de nombres où  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  est asymptotiquement exacte (en particulier,  $g(L_i) \rightarrow +\infty$ ). On suppose que la suite des extensions  $L_i/K_i$  vérifie l'hypothèse **(DES)**, et que la suite  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  satisfait l'une de **(H1)**, **(H2)**, **(H3)**. Alors la famille  $\mathcal{L}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé, c'est-à-dire que l'on a*

$$\mathcal{BS}(\mathcal{L}) = \sum_{q \in \mathcal{Q}_0} \phi_q(\mathcal{L}) \log \frac{q}{q-1}. \quad (3.1)$$

**Remarque 3.4.** Ce résultat étant de nature asymptotique, il suffit en fait que les hypothèses soient satisfaites pour  $i$  assez grand pour que la conclusion du théorème soit vraie.

**Remarque 3.5.** Comme on l'a vu à la Remarque 3.2, admettant la véracité de la conjecture d'Artin, la condition **(DES)** est automatiquement vérifiée par toute suite d'extensions  $L_i/K_i$ . Conditionnellement à cette conjecture, le Théorème se réécrit ainsi : Soit une famille asymptotiquement exacte  $\mathcal{L} = (L_i)$  de corps de nombres telle que, pour tout  $i$ ,  $L_i$  est une extension d'un corps de nombres  $K_i$ . Si la suite  $\mathcal{K} = (K_i)$  satisfait l'une de **(H1)**, **(H2)**, **(H3)**, la famille  $\mathcal{L}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Le choix  $\mathcal{K} = (K_i = \mathbb{Q})_i$  (qui satisfait **(H1)**) dans cet énoncé redémontre que, *conditionnellement à la conjecture d'Artin, toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres  $\mathcal{L}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

*Démonstration.* Soit  $(c(L_i))_i$  une suite de  $]0, 1[$  donnée par l'hypothèse **(DES)**. Partitionnons la famille  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  en deux sous-familles  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  comme suit : Soit  $\mathcal{L}_1$  la sous-famille de  $\mathcal{L}$  formée des  $L_i \in \mathcal{L}$  dont la fonction zeta ne s'annule pas sur l'intervalle  $]1 - c(L_i), 1]$ ; et  $\mathcal{L}_2$  la sous-famille de  $\mathcal{L}$  complémentaire de  $\mathcal{L}_1$ . D'après **(DES)(ii)**, on a  $\liminf_i (\log c(L_i))/g(L_i) = 0$ . Avec le Lemme 2.7, il suffit pour conclure de démontrer que la sous-famille  $\mathcal{L}_2$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé lorsqu'elle est infinie.

Supposons donc  $\mathcal{L}_2$  infinie et, pour tout  $L_i \in \mathcal{L}_2$ , notons  $\rho_i$  le zéro de  $\zeta_{L_i}(s)$  dans l'intervalle  $]1 - c(L_i), 1]$ . Par **(DES)(i)**, il existe une sous-extension  $F_i/K_i$  de  $L_i/K_i$  telle que  $[F_i : K_i] \leq 2$  vérifiant  $\zeta_{F_i}(\rho_i) = 0$ .

On note  $\mathcal{F} := (F_i)_i$  la suite de corps ainsi construite. Puisque  $F_i$  est un sous-corps de  $L_i$ , le ratio  $g(F_i)/g(L_i)$  reste borné (par 1) lorsque  $i$  varie. Démontrons de plus que, lorsque la suite  $\mathcal{F}$  n'est pas finie, elle vérifie l'une de **(H2)** ou **(H3)**. Supposons premièrement que  $(K_i)_i$  vérifie **(H1)** ou **(H2)**. Puisque  $F_i/K_i$  est une extension au plus quadratique, on a

$$\frac{[F_i : \mathbb{Q}] \log[F_i : \mathbb{Q}]}{g(F_i)} \leq \frac{2[K_i : \mathbb{Q}] (\log 2 + \log[K_i : \mathbb{Q}])}{g(F_i)}.$$

Si  $(K_i)$  satisfait **(H1)**, le numérateur du ratio sur la droite est borné. Si  $(K_i)$  satisfait **(H2)**, on utilise l'inégalité  $g(F_i) \geq g(K_i)$  pour déduire que

$$\frac{[F_i : \mathbb{Q}] \log[F_i : \mathbb{Q}]}{g(F_i)} \leq \frac{2[K_i : \mathbb{Q}] (\log 2 + \log[K_i : \mathbb{Q}])}{g(K_i)}.$$

La quantité de droite tendant vers 0, il en va de même pour  $[F_i : \mathbb{Q}] \log[F_i : \mathbb{Q}]/g(F_i)$ . Dans les deux cas, la famille  $\mathcal{F}$  satisfait donc **(H2)**. A fortiori, le quotient  $[F_i : \mathbb{Q}]/g(F_i)$  tend vers 0.

Traisons à présent le cas où  $(K_i)$  vérifie **(H3)**. Comme  $F_i/K_i$  est au plus quadratique, il est clair que l'extension  $F_i/\mathbb{Q}$  est alors galoisienne par pas. Comme  $[F_i : \mathbb{Q}]/g(F_i) \leq [K_i : \mathbb{Q}]/g(K_i)$  et que cette dernière quantité tend vers 0 par hypothèse, la famille  $\mathcal{F}$  est asymptotiquement mauvaise. Donc  $\mathcal{F}$  satisfait l'hypothèse **(H3)**. (En particulier, le ratio  $[F_i : \mathbb{Q}]/g(F_i)$  tend vers 0.)

Lorsque la suite  $\mathcal{F}$  est infinie, elle vérifie donc l'une de **(H2)** ou **(H3)**. Ainsi, elle vérifie le théorème de Brauer–Siegel classique, au sens où la limite  $\lim_{i \rightarrow \infty} \log \zeta_{F_i}^*(1)/g(F_i)$  existe et vaut 0. C'est en effet ce que l'on déduit de [Leb07, Proposition 1(i)] pour le cas **(H2)** et de [Zyk05, Theorem 1] pour le cas **(H3)**. On conclut alors en appliquant le Lemme 2.5 dont on vient de voir que les trois hypothèses sont satisfaites.  $\square$

Montrons au passage la Proposition suivante :

**Proposition 3.6.** *Soit  $\mathcal{L} = (L_i)$  une famille de corps de nombres. Pour tout  $i$ , fixons une sous-extension  $K_i$  de  $L_i/\mathbb{Q}$ . Supposons que la suite  $\mathcal{K} = (K_i)$  ainsi formée vérifie l'une des hypothèses **(H1)** ou **(H2)**, et que le degré  $[L_i : K_i]$  reste borné lorsque  $i$  varie (condition **(E3)**). Alors la famille  $\mathcal{L}$  satisfait le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

*Démonstration.* Avec la Proposition 1(i) de [Leb07], il suffit pour conclure de prouver que  $\mathcal{L}$  satisfait l'hypothèse **(H2)**. Si la suite  $\mathcal{K}$  vérifie **(H1)**, elle est finie : comme le degré  $[K_i : \mathbb{Q}]$  reste borné lorsque  $i$  varie, il en est de même pour  $[L_i : \mathbb{Q}]$ . Il est alors clair que  $\mathcal{L}$  satisfait **(H2)**. Si maintenant  $\mathcal{K}$  vérifie **(H2)**, on déduit de l'inégalité  $g(L_i) \geq [L_i : K_i]g(K_i)$  la majoration

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{[L_i : \mathbb{Q}] \log[L_i : \mathbb{Q}]}{g(L_i)} &\leq \frac{[K_i : \mathbb{Q}] (\log[L_i : K_i] + \log[K_i : \mathbb{Q}])}{g(K_i)} \\ &\leq \log \left( \max_j [L_j : K_j] \right) \frac{[K_i : \mathbb{Q}]}{g(K_i)} + \frac{[K_i : \mathbb{Q}] \log[K_i : \mathbb{Q}]}{g(K_i)}. \end{aligned}$$

Comme le membre de droite tend vers 0 lorsque  $i \rightarrow \infty$ , la famille  $\mathcal{L}$  satisfait bien **(H2)**.  $\square$

Combinant la Proposition 3.1 au Théorème 3.3, on obtient par ailleurs :

**Corollaire 3.7.** *Soit  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. Pour tout  $i$ , soit  $K_i$  une sous-extension de  $L_i/\mathbb{Q}$ . On suppose que la suite  $(K_i)_i$  vérifie l'une des hypothèses **(H1)**, **(H2)** ou **(H3)** et, en outre, que la suite des extensions  $(L_i/K_i)_i$  satisfait l'une des conditions **(E1)**, **(E2)** ou **(E3)**. Alors la famille  $\mathcal{L}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel.*

Ce corollaire a été énoncé comme Théorème A dans l'introduction.

**Remarque 3.8.** Notons que ce corollaire s'applique au cas où la suite  $(K_i)_i$  est constante, puisqu'alors  $(K_i)_i$  satisfait l'hypothèse **(H1)**. De plus, remarquons à nouveau qu'il suffit de supposer que les conditions sur la suite  $(K_i)$  et sur la suite  $(L_i/K_i)$  sont satisfaites pour  $i$  assez grand.

## 4. Descente galoisienne par pas ou résoluble

Pour cette section, nous nous plaçons dans la situation suivante. Considérons trois suites de corps de nombres  $\mathcal{K}_0 = (k_i)_i$ ,  $\mathcal{K} = (K_i)_i$  et  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  telles que  $k_i \subset K_i \subset L_i$  pour tout  $i$ . On suppose que la famille  $\mathcal{L}$  est asymptotiquement exacte et que, lorsque  $i$  varie, le degré  $[k_i : \mathbb{Q}]$  est borné. Sous certaines hypothèses sur la suite des extensions  $(L_i/K_i)_i$  et sur la croissance des degrés  $[K_i : k_i]$ , nous démontrons que  $\mathcal{L}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Précisément :

**Théorème 4.1.** *Dans la situation décrite ci-dessus, supposons en outre que la suite des extensions  $(L_i/K_i)_i$  vérifie la condition **(E1)** et que,*

**(C1)** *Pour  $i$  assez grand, on a  $(2[K_i : k_i])! \leq 2[L_i : K_i]$ .*

*Alors  $\mathcal{L}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*



**Théorème 4.2.** *Dans la situation décrite ci-dessus, supposons en outre que la suite des extensions  $(L_i/K_i)_i$  vérifie la condition **(E2)** et que,*

**(C2)** *Pour  $i$  assez grand, on a  $(2[K_i : k_i])! \leq E([L_i : K_i]) \cdot [L_i : K_i]/(16c_2)$ .*

*Alors  $\mathcal{L}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Mis ensemble, ces deux théorèmes donnent l'énoncé du Théorème B de l'introduction.

*Démonstration des Théorèmes 4.1 et 4.2.* Suivant que l'on se trouve sous la paire d'hypothèses **(E1)&(C1)** ou **(E2)&(C2)**, on pose

$$C_i := \begin{cases} (32g(L_i))^{-1} & \text{pour le Théorème 4.1,} \\ c_2(E([L_i : K_i])g(L_i))^{-1} & \text{pour le Théorème 4.2.} \end{cases}$$

On montre, comme dans la preuve de la Proposition 3.1, que  $\liminf_i (\log C_i)/g(L_i) = 0$  dans les deux cas. On partitionne la famille  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  en deux sous-familles  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  : La sous-famille  $\mathcal{L}_1$  est formée des corps  $L_i \in \mathcal{L}$  dont la fonction zeta ne s'annule pas sur l'intervalle  $[1 - C_i, 1[$ ; son complémentaire  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_1$  sera noté  $\mathcal{L}_2$ . D'après le Lemme 2.7, il suffit pour conclure de démontrer que la famille  $\mathcal{L}_2$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé si elle est infinie.

Pour tout  $i$ , la fonction zeta  $\zeta_{L_i}(s)$  de  $L_i \in \mathcal{L}_2$  s'annule en  $\rho_i \in [1 - C_i, 1[$ . Sous les hypothèses du Théorème 4.1, l'extension  $L_i/K_i$  est galoisienne par pas. On déduit du Théorème 2.8 qu'il existe une extension au plus quadratique  $F_i/K_i$ , contenue dans  $L_i$  et telle que  $\zeta_{F_i}(\rho(L_i)) = 0$ . Comme  $K_i \subset F_i \subset L_i$  et que  $[F_i : K_i] \leq 2$ , on a  $g(F_i)[L_i : K_i] \leq 2g(L_i)$ . D'où, par la condition **(C1)**,

$$C_i^{-1} = 32g(L_i) \geq 8g(F_i) \cdot 2[L_i : K_i] \geq 8g(F_i) (2[K_i : k_i])! \geq 8g(F_i) [F_i : k_i]!$$

Sous les hypothèses du Théorème 4.2, comme l'extension  $L_i/K_i$  a clôture galoisienne résoluble, on tire du Théorème 2.11 l'existence d'une sous-extension au plus quadratique  $F_i/K_i$  de  $L_i/K_i$  telle que  $\zeta_{F_i}(\rho(L_i)) = 0$ . Utilisant la condition **(C2)** et le même type d'inégalités que ci-dessus, on déduit que

$$C_i^{-1} = c_2^{-1}E([L_i : K_i])g(L_i) \geq (2c_2)^{-1}E([L_i : K_i])[L_i : K_i]g(F_i) \geq 8g(F_i) [F_i : k_i]!$$

Ainsi, sous l'une ou l'autre des deux paires d'hypothèses **(E1)&(C1)** ou **(E2)&(C2)**,  $\rho_i$  est un zéro réel de  $\zeta_{F_i}(s)$  vérifiant

$$1 - \rho_i \leq C_i \leq (8g(F_i) [F_i : k_i]!)^{-1}.$$

D'après le Lemme 2.9, il existe donc une extension au plus quadratique  $k'_i/k_i$  contenue dans  $F_i$ , et telle que  $\zeta_{k'_i}(\rho_i) = 0$ . Soit  $\mathcal{K}'_0 := (k'_i)_i$  la suite des corps ainsi construits. Remarquons que les  $k'_i$  sont de degré borné sur  $\mathbb{Q}$  : le corps  $k'_i$  est en effet une extension au plus quadratique de  $k_i$ , dont le degré sur  $\mathbb{Q}$  reste, par hypothèse, borné lorsque  $i$  varie.

On applique alors le Lemme 2.5 pour conclure (avec  $\mathcal{M} = \mathcal{L}$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{K}'_0$ ). Vérifions que les hypothèses de celui-ci sont bien satisfaites. Premièrement, on a  $g(k'_i)/g(L_i) \leq 1$  puisque  $k'_i \subset L_i$ . Deuxièmement, si la suite  $\mathcal{K}'_0$  n'est pas finie, le ratio  $[k'_i : \mathbb{Q}]/g(k'_i)$  tend vers 0 puisque  $[k'_i : \mathbb{Q}]$  est borné. Enfin, lorsque la suite  $\mathcal{K}'_0$  est infinie, comme les  $k'_i$  sont de degré borné sur  $\mathbb{Q}$ , on fait directement appel au théorème classique de Brauer–Siegel (voir [Lan94, Chap. XVI, §4, Corollary]) pour voir que  $\lim_i (\log \zeta_{k'_i}^*(1))/g(k'_i) = 0$ . On conclut du Lemme 2.5 que la famille  $\mathcal{L}_2$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.  $\square$

Le Théorème 4.2 ci-dessus implique en particulier le

**Corollaire 4.3.** *Soit  $\mathcal{K}_0 = (k_i)_i$ , une suite de corps de nombres dont les degrés sur  $\mathbb{Q}$  sont bornés. Pour tout  $i$ , soit  $L_i/k_i$  une extension finie dont la clôture galoisienne est résoluble. On suppose que la famille  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  est asymptotiquement exacte. Alors la famille  $\mathcal{L}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

Ce corollaire complète les résultats de [Dix20], qui traite le cas des familles asymptotiquement mauvaises de corps de nombres à clôture galoisienne résoluble sur  $\mathbb{Q}$  (Theorem 3.2 *loc. cit.*), et celui des tours asymptotiquement bonnes de tels corps (Theorem 3.1 *loc. cit.*).

*Démonstration.* Il suffit de choisir, pour tout  $i$ ,  $K_i = k_i$  dans l'énoncé du Théorème 4.2.  $\square$

**Exemple 4.4.** Donnons un exemple de situation où le théorème 4.1 s'applique. Pour tout entier  $i \in \mathbb{N}$ , posons  $k_i = \mathbb{Q}$  et choisissons une extension  $K_i/\mathbb{Q}$  non galoisienne de degré premier  $p_i$ . Soit également, pour tout  $i$ , un polynôme irréductible  $f_i \in K_i[x]$  de degré  $d_i \geq 2p_i$ , et dont l'extension de décomposition  $L_i/K_i$  a pour groupe de Galois le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{d_i}$ . L'extension  $L_i/K_i$  est alors galoisienne de degré  $d_i!$ , avec  $2d_i! \geq d_i! \geq (2p_i)!$ .

D'après le Théorème 4.1, toute sous-famille asymptotiquement exacte de  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

## 5. Compositum et descente

**5.1. Compositum et théorème de Brauer–Siegel.** – Dans les cas connus de la conjecture de Tsfasman–Vladuts, les hypothèses « de type galoisien » sont assez restrictives. En pratique, il arrive qu'il soit plus commode de vérifier ces conditions pour une famille de composita plutôt que pour la famille que l'on souhaite étudier. Dans ce paragraphe, nous donnons deux exemples de situations où des hypothèses sur une suite de composita suffisent à conclure.

**Théorème 5.1.** *Soit  $\mathcal{M} = (M_i)$  une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres, et  $\mathcal{K} = (K_i)_i$  une suite de corps de nombres galoisiens par pas dont les degrés sont bornés. Supposons que la suite  $(K_i \cdot M_i/K_i)_i$  vérifie l'hypothèse (DES) et que la quantité  $[M_i : \mathbb{Q}]g(K_i)/g(M_i)$  est bornée. Alors la famille  $\mathcal{M}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

*Démonstration.* Fixons un majorant  $D \geq 1$  des degrés  $[K_i : \mathbb{Q}]$  et une borne  $B > 0$  sur la quantité  $[M_i : \mathbb{Q}]g(K_i)/g(M_i)$ . Utilisant un fait classique sur le discriminant d'un compositum (voir, par exemple, [Sta74, Lemma 7]), on remarque que

$$\begin{aligned} g(K_i \cdot M_i) &\leq [K_i M_i : M_i]g(M_i) + [K_i M_i : K_i]g(K_i) \leq [K_i : \mathbb{Q}]g(M_i) + [M_i : \mathbb{Q}]g(K_i) \\ &\leq Dg(M_i) + Bg(M_i) \leq (D + B)g(M_i) := B'g(M_i). \end{aligned}$$

En particulier, lorsque  $i$  varie, le quotient  $g(K_i \cdot M_i)/g(M_i)$  reste borné.

Utilisant (DES)(i) pour la suite des extensions  $(K_i \cdot M_i/K_i)_i$ , on construit une suite  $(C_i)_i$  de réels de  $]0, 1[$  vérifiant  $\liminf_i (\log C_i)/g(K_i M_i) = 0$ . Partitionnons, comme précédemment, la famille  $\mathcal{M}$  en deux sous-familles  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  : la première consistant en ceux des corps  $M_i \in \mathcal{M}$  dont les fonctions zeta ne s'annulent pas sur  $[1 - C_i, 1[$ , la seconde en les autres. À nouveau, il suffit de démontrer que la famille  $\mathcal{M}_2$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé si elle est infinie.

Pour tout  $M_i \in \mathcal{M}_2$ , notons  $\rho_i$  le zéro de  $\zeta_{M_i}(s)$  dans l'intervalle  $[1 - C_i, 1[$ . L'extension  $K_i \cdot M_i/M_i$  est galoisienne par pas puisque  $K_i/\mathbb{Q}$  l'est. Dès lors, comme  $\zeta_{M_i}(s)$  s'annule en  $\rho_i$ , le Theorem 1 de [Bra47] implique que  $\zeta_{K_i M_i}(s)$  s'annule également en  $\rho_i$ . Puisque l'on a  $1 - \rho_i \leq C_i$ , l'hypothèse (DES)(i) fournit une sous extension  $F_i$  de  $K_i \cdot M_i/K_i$  telle que  $[F_i : K_i] \leq 2$  et  $\zeta_{F_i}(\rho_i) = 0$ . Notons  $\mathcal{F} = (F_i)_i$  la suite de corps ainsi construite.

En vue d'appliquer le Lemme 2.5, vérifions que ses hypothèses sont satisfaites. Premièrement, puisque  $F_i$  est un sous-corps de  $K_i \cdot M_i$ , on a  $g(F_i)/g(M_i) \leq g(K_i \cdot M_i)/g(M_i) \leq B'$ . Si  $\mathcal{F}$  est infinie, il est clair qu'elle est asymptotiquement mauvaise puisqu'elle est formée de corps de nombres de degré borné sur  $\mathbb{Q}$ . Enfin, lorsque la suite  $\mathcal{F}$  est infinie, on sait pour la même raison qu'elle vérifie le théorème de Brauer–Siegel classique (voir [Lan94, Chap. XVI, §4, Corollary]). C'est-à-dire que l'on a  $\lim_i |\log \zeta_{F_i}^*(1)|/g(F_i) = 0$ . On fait alors appel au Lemme 2.5 pour déduire que la famille  $\mathcal{M}_2$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé, puis au Lemme 2.7 pour conclure.  $\square$

D'après la Proposition 3.1, on peut donner des exemples de situations où les hypothèses du Théorème 5.1 sont satisfaites :

**Corollaire 5.2.** Soit  $\mathcal{M} = (M_i)_i$  une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres, et  $\mathcal{K} = (K_i)_i$  une suite de corps de nombres galoisiens par pas dont les degrés sont bornés. Supposons que la suite  $(K_i \cdot M_i/K_i)_i$  vérifie l'une des hypothèses **(E1)**, **(E2)** ou **(E3)**, et que la quantité  $[M_i : \mathbb{Q}]g(K_i)/g(M_i)$  est bornée. Alors la famille  $\mathcal{M}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Donnons à présent une variante, plus légère en hypothèses, du Théorème 5.1.

**Théorème 5.3.** Soit  $\mathcal{K} = (K_i)$  une suite finie de corps de nombres, et  $\mathcal{M} = (M_i)_i$  une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres. On suppose que, pour tout  $i$ , l'extension  $K_i \cdot M_i/K_i$  est galoisienne par pas ou à clôture galoisienne résoluble. Alors la famille  $\mathcal{M}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Les résultats des Corollaire 5.2 et Théorème 5.3 ci-dessus ont été rassemblés en un énoncé dans l'introduction (Théorème C).

*Démonstration.* Pour tout  $i$ , notons  $K'_i$  la clôture galoisienne de  $K_i$  sur  $\mathbb{Q}$ . La suite  $(K_i)$  étant finie, nous pouvons fixer un majorant  $D \geq 1$  des degrés  $[K_i : \mathbb{Q}]$  et une borne  $G \geq 1$  sur les genres  $g(K'_i)$ . On remarque que  $K'_i$  est de degré au plus  $D!$  sur  $\mathbb{Q}$ . Utilisant à nouveau la borne sur le discriminant d'un compositum (Lemma 7 de [Sta74]), on obtient la majoration suivante sur le genre de  $K'_i \cdot M_i$  :

$$\begin{aligned} g(K'_i \cdot M_i) &\leq [K'_i M_i : K'_i] g(K'_i) + [K'_i M_i : M_i] g(M_i) \leq [M_i : \mathbb{Q}] g(K'_i) + [K'_i : \mathbb{Q}] g(M_i) \\ &\leq G [M_i : \mathbb{Q}] + D! g(M_i) \leq (Gc_0 + D!) g(M_i) =: B' g(M_i), \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $c_0 = 1 + (\log(3/2))^{-1}$ , par l'inégalité de Minkowski (1.1). Il suit d'autre part du Lemme 2.12(2) qu'il y a une constante  $c_4 > 0$  telle que

$$\log E([K'_i M_i : K'_i]) \leq c_4 (\log [K'_i M_i : K_i])^2 \leq c_4 (\log [M_i : \mathbb{Q}])^2 \leq c_4 (\log c_0 g(M_i))^2.$$

Pour tout  $i \geq 1$ , posons  $c'_i := (\max \{32, c_2^{-1} E([K'_i M_i : K'_i])\} g(K'_i \cdot M_i))^{-1}$ , où la constante  $c_2$  est celle dont l'existence est démontrée au Théorème 2.11. Des inégalités ci-dessus, on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{|\log c'_i|}{g(M_i)} &\leq \frac{\log 32}{g(M_i)} + \frac{\log E([K'_i M_i : K'_i])}{\log g(M_i)} + \frac{\log g(K'_i M_i)}{g(M_i)} \\ &\leq \frac{\log 32}{g(M_i)} + \frac{c_4 (\log c_0 g(M_i))^2}{g(M_i)} + \frac{\log (B' g(M_i))}{g(M_i)} = O\left(\frac{(\log g(M_i))^2}{g(M_i)}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, la quantité  $|\log c'_i|/g(M_i)$  tend vers 0 lorsque  $i \rightarrow \infty$ . Le Lemme 2.7 montre qu'il suffit de prouver que la sous-suite  $\mathcal{M}_2$  de  $\mathcal{M}$  formée des  $M_i \in \mathcal{M}$  dont la fonction zeta s'annule sur l'intervalle  $[1 - c'_i, 1[$  vérifie, si elle est infinie, le théorème de Brauer–Siegel généralisé. On peut donc, sans perte de généralité, supposer que  $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$ . Pour tout  $i$ , on note alors  $\rho_i$  le zéro réel de  $\zeta_{M_i}(s)$  dans l'intervalle  $[1 - c'_i, 1[$ . Pour un entier  $i$ , comme la fonction zeta de  $M_i$  s'annule en  $\rho_i$  et que l'extension  $K'_i \cdot M_i/M_i$  est galoisienne, le Theorem 1 de [Bra47] implique que la fonction zeta de  $K'_i \cdot M_i$  s'annule aussi en  $\rho_i$ . Distinguons à présent deux cas :

- Si l'extension  $K_i \cdot M_i/K_i$  est galoisienne par pas. L'extension  $K'_i \cdot M_i/M_i$  est galoisienne, si bien que sa sous-extension  $K'_i \cdot M_i/K_i \cdot M_i$  l'est aussi. Puisque l'on a supposé  $K_i \cdot M_i/K_i$  galoisienne par pas, l'extension  $K'_i \cdot M_i/K'_i$  l'est donc également. Comme le zéro  $\rho_i$  de  $\zeta_{K_i M_i}(s)$  vérifie  $1 - (32g(K'_i \cdot M_i))^{-1} \leq 1 - c'_i \leq \rho_i < 1$ , le Théorème 2.8 de Stark montre qu'il existe une sous-extension  $F_i$  de  $K'_i \cdot M_i/K'_i$  telle que  $[F_i : K'_i] \leq 2$  et  $\zeta_{F_i}(\rho_i) = 0$ .
- Supposons maintenant que l'extension  $K_i \cdot M_i/K_i$  a clôture galoisienne résoluble. Notons  $L_i/K_i$  la clôture galoisienne de  $K_i \cdot M_i/K_i$ , et  $L'_i/K'_i$  celle de l'extension  $K'_i \cdot M_i/K'_i$ . Comme  $L_i/K_i$  est galoisienne, il en est de même de  $L_i \cdot K'_i/K'_i$ . En particulier,  $L'_i$  est contenue dans  $K'_i \cdot L_i$ . Le groupe  $\text{Gal}(L'_i/K'_i)$  est donc un quotient de  $\text{Gal}(K'_i \cdot L_i/K'_i)$ , lui-même un sous-groupe de  $\text{Gal}(L_i/K_i)$ . Ce dernier est résoluble par hypothèse. Par suite,  $\text{Gal}(L'_i/K'_i)$  est

également résoluble en tant que quotient d'un sous-groupe d'un groupe résoluble. Ainsi, l'extension  $K'_i \cdot M_i/K'_i$  est à clôture galoisienne résoluble. Puisque le zéro  $\rho_i$  de  $\zeta_{K_i M_i}(s)$  vérifie

$$1 - c_2(E([K'_i \cdot M_i : K'_i]) g(K'_i \cdot M_i))^{-1} \leq 1 - c'_i \leq \rho_i < 1,$$

le Théorème 2.11 affirme l'existence d'une sous-extension  $F_i$  de  $K'_i \cdot M_i/K'_i$  de degré au plus 2 sur  $K'_i$  telle que  $\zeta_{F_i}(\rho_i) = 0$ .

Nous avons donc construit, pour tout  $i$ , une extension au plus quadratique  $F_i$  de  $K'_i$ , contenue dans  $K'_i \cdot M_i$  et telle que  $\zeta_{F_i}(\rho_i) = 0$ . Soit  $\mathcal{F} = (F_i)_i$  cette suite de corps de nombres. Puisque la suite  $\mathcal{K}$  est finie et que  $\mathcal{F}$  est formée d'extensions au plus quadratiques de la clôture galoisienne d'éléments de  $\mathcal{K}$ , la suite  $\mathcal{F}$  est de degré borné sur  $\mathbb{Q}$ . En particulier, si  $\mathcal{F}$  n'est pas finie, elle vérifie le théorème de Brauer–Siegel classique (voir [Lan94, Chap. XVI, §4, Corollary]). Pour tout  $i$ ,  $F_i$  est contenu dans  $K'_i \cdot M_i$ , de sorte que  $g(F_i) \leq g(K'_i \cdot M_i)$ . Les inégalités (5.1) montrent donc que le ratio  $g(F_i)/g(M_i)$  reste borné lorsque  $i$  varie. Les hypothèses du Lemme 2.5 sont donc satisfaites. De ce lemme, on déduit que la famille  $\mathcal{M}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.  $\square$

## 5.2. Exemples d'applications. –

**Exemple 5.4.** Soient  $\Lambda$  un ensemble fini d'entiers tous  $\geq 2$ , et  $k$  un corps de nombres. Pour tout entier  $i \in \mathbb{N}$ , fixons  $(a_{i,1}, \dots, a_{i,i}) \in \Lambda^i$  et considérons les corps de nombres

$$K_i := k(\zeta_{a_{i,1}}, \dots, \zeta_{a_{i,i}}) \quad \text{et} \quad M_i := k\left(2^{1/a_{i,1}}, 3^{1/a_{i,2}}, \dots, p_i^{1/a_{i,i}}\right),$$

où  $p_i$  désigne le  $i$ -ième nombre premier et les  $\zeta_{a_{i,j}}$  sont des racines primitives  $a_{i,j}$ -ièmes de l'unité. On note  $\mathcal{M} = (M_i)_i$  et  $\mathcal{K} = (K_i)_i$  les deux suites de corps de nombres ainsi définies. Comme  $\Lambda$  est fini, la suite  $\mathcal{K}$  est en fait finie, et donc de degré borné sur  $k$ . Pour tout  $i$ , l'extension  $K_i$  est galoisienne sur  $k$  (c'est un compositum de corps cyclotomiques). Par ailleurs, l'extension  $K_i M_i/K_i$  est galoisienne pour tout  $i$  : la suite de ces extensions vérifie donc l'hypothèse (E1). De plus, comme la suite  $\mathcal{K}$  est finie, l'inégalité (1.1) montre que le ratio  $[M_i : k]g(K_i)/g(M_i)$  reste borné lorsque  $i$  varie.

Par le Corollaire 5.2 ci-dessus, toute sous-famille asymptotiquement exacte  $\mathcal{M}'$  de  $\mathcal{M}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Dans le cas où  $|\Lambda| = 1$ , remarquons que  $\mathcal{M}$  est une tour : elle est alors asymptotiquement exacte (voir §1.3). En général, on pourrait en fait montrer que la famille  $\mathcal{M}$  elle-même est asymptotiquement mauvaise (pour des raisons de ramification).

Cet exemple étend un exemple de Dixit (voir [Dix20, Exemple 3.3]). Tout comme ce dernier, on saurait par d'autres moyens démontrer que  $\mathcal{M}'$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

**Exemple 5.5.** Donnons maintenant un exemple de famille de corps de nombres non galoisiens par pas et à clôture galoisienne non résoluble qui vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Notons  $\mathfrak{S}_5$  le groupe symétrique sur 5 éléments. Pour tout nombre premier impair  $p$ , considérons le morphisme non-trivial de groupes  $\varphi_p : \mathfrak{S}_5 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ , et notons  $G_p$  le produit semi-direct  $G_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi_p} \mathfrak{S}_5$ . Choisissons également un sous-groupe propre  $\mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{S}_5$  que l'on suppose non contenu dans  $\mathfrak{A}_5$ , et notons  $H_p := \{0\} \rtimes_{\varphi_p} \mathfrak{G}_p$  le sous-groupe correspondant de  $G_p$ .

Pour tout nombre premier  $p$  impair, on fixe un corps de nombres  $K_p$  galoisien sur  $\mathbb{Q}$  de groupe de Galois  $\mathfrak{S}_5$  (il en existe). Le Theorem 9.6.6 de [NSW08] affirme l'existence d'une extension  $L_p$  de  $K_p$  qui est galoisienne sur  $\mathbb{Q}$  de groupe de Galois  $\text{Gal}(L_p/\mathbb{Q}) \simeq G_p$ . On note alors  $M_p \subset L_p$  le sous-corps fixé par le sous-groupe  $H_p \subset G_p$ . On considère les suites  $\mathcal{K} = (K_p)_{p \geq 3}$  et  $\mathcal{M} = (M_p)_{p \geq 3}$  indexées par les nombres premiers impairs. On suppose enfin que  $\mathcal{K}$  est une suite finie.

Pour tout nombre premier  $p \geq 3$ , on a  $L_p = K_p \cdot M_p$ . L'extension  $K_p \cdot M_p/K_p$  est donc galoisienne par pas (en fait galoisienne, de groupe de Galois cyclique d'ordre  $p$ ). Ainsi donc, la suite de ces extensions vérifie la condition (E1). Puisque  $\mathcal{K}$  est finie, la quantité  $[M_p : \mathbb{Q}]g(K_p)/g(M_p)$  reste bornée quand  $p$  varie. Toute sous-famille asymptotiquement exacte  $\mathcal{M}'$  de  $\mathcal{M}$  vérifie, d'après le Corollaire 5.2, le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

Nous n'avons pas connaissance d'une autre façon de démontrer ce fait. On montre en effet que les extensions  $M_p/\mathbb{Q}$  ne sont ni galoisiennes par pas, ni à clôture galoisienne résoluble :

- Pour un premier  $p \geq 3$ , si l'extension  $M_p/\mathbb{Q}$  était galoisienne par pas, alors  $L_p/\mathbb{Q}$  admettrait un sous-corps  $N_p$  galoisien sur  $\mathbb{Q}$ , contenu strictement dans  $M_p$  et différent de  $\mathbb{Q}$ . C'est-à-dire que  $G_p$  admettrait un sous-groupe distingué  $H'_p$  contenant  $H_p$ . Comme  $\mathfrak{S}_p$  n'est par hypothèse pas contenu dans  $\mathfrak{A}_5$ , la projection de  $H'_p$  dans  $\mathfrak{S}_5$  ne pourrait être que  $\mathfrak{S}_5$  (car cette projection est distinguée dans  $\mathfrak{S}_5$ ). Le sous-groupe  $H'_p$  contiendrait ainsi  $\{0\} \times \mathfrak{S}_5$  et, puisque  $p$  est premier,  $H'_p$  serait exactement ce sous-groupe. Ainsi, le produit semi-direct  $G_p$  serait en fait direct. Ce qui contredirait notre hypothèse que le morphisme  $\varphi_p$  est non-trivial.
- Pour un premier  $p \geq 3$ , désignons la clôture galoisienne de  $M_p$  sur  $\mathbb{Q}$  par  $M'_p$ . On sait que  $M'_p$  est contenue dans  $L_p$  : c'est donc un corps intermédiaire entre  $M_p$  et  $L_p$ , qui est galoisien sur  $\mathbb{Q}$ . Il y a nécessairement égalité  $M'_p = L_p$ , car  $H_p$  n'est pas distingué dans  $G_p$  (ce qui suit du fait que  $\mathfrak{S}_p$  ne l'est pas dans  $\mathfrak{S}_5$ ). Ainsi, on a  $\text{Gal}(M'_p/\mathbb{Q}) \simeq G_p$ , ce qui prouve que la clôture galoisienne de  $M_p$  n'est pas résoluble.

**5.3. Extensions pro-résolubles.** – Pour un corps de nombres  $K$ , on note  $K^{\text{solv}}$  le compositum de toutes les extensions galoisiennes finies de  $K$  dont le groupe de Galois est résoluble.

**Théorème 5.6.** *Soit  $K$  un corps de nombres. Toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans  $K^{\text{solv}}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

À notre connaissance, ce résultat est nouveau hormis dans le cas où  $K = \mathbb{Q}$  (voir [Dix20]), et seulement pour des familles asymptotiquement mauvaises ou des tours.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{L} = (L_i)$  une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans  $K^{\text{solv}}$ . Pour tout  $i$ , la clôture galoisienne sur  $K$  du compositum  $K \cdot L_i \subset K^{\text{solv}}$  est résoluble. Pour conclure, on applique le Théorème 5.3 à  $\mathcal{L}$ , avec  $K_i = K$  pour tout  $i$ .  $\square$

Si  $K$  est un corps de nombres, une extension galoisienne  $\mathcal{K}/K$  est dite *pro-résoluble* si son groupe de Galois est limite projective de groupes (finis) résolubles.

**Corollaire 5.7.** *Soit  $K_1, \dots, K_r$  des corps de nombres. Pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ , on fixe une extension pro-résoluble  $\mathcal{K}_j$  de  $K_j$ , et l'on note  $\mathcal{K}$  le compositum des  $\mathcal{K}_j$ . Toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans  $\mathcal{K}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{L} = (L_i)$  une famille asymptotiquement exacte de corps contenus dans  $\mathcal{K}$ . On note  $K$  le compositum des  $K_i$ . Pour tout  $i$ , on a  $\mathcal{K}_i \subset K_i^{\text{solv}} \subset K^{\text{solv}}$ , et donc aussi  $\mathcal{K} \subset K^{\text{solv}}$ . En effet, les quotients et produits finis de groupes résolubles le sont aussi. La famille  $\mathcal{L}$  est donc formée de corps de nombres contenus dans  $K^{\text{solv}}$ . La conclusion suit du théorème précédent.  $\square$

## 6. Applications et exemples

Dans cette section, nous montrons que certaines des familles de corps de nombres apparaissant naturellement dans la théorie asymptotique des corps globaux vérifient inconditionnellement le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

**6.1. Corps de Hilbert.** – Commençons par étudier la situation suivante, dite « horizontale » :

**Proposition 6.1.** *Soit  $\mathcal{K} = (K_i)_i$  une famille de corps de nombres satisfaisant l'une des hypothèses (H2) ou (H3). Pour tout  $i$ , on note  $H_i := H(K_i)$  le corps de classes de Hilbert de  $K_i$ . La famille  $\mathcal{H} := (H_i)_i$  ainsi définie vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

*Lorsque  $i \rightarrow \infty$ , on a de plus*

$$\log(h(H_i)R(H_i)) \sim h(K_i)g(K_i) \sim h(K_i) \log(h(K_i)R(K_i)).$$

*Démonstration.* Que la famille  $\mathcal{K}$  satisfasse (H2) ou (H3), elle est asymptotiquement mauvaise (voir §3.1). La famille  $\mathcal{H}$  l'est donc également, par le Lemme 1.1(2). En particulier,  $\mathcal{H}$  est asymptotiquement exacte et la suite des extensions  $H_i/K_i$  vérifie trivialement (E1). On applique à  $\mathcal{H}$  le Corollaire 3.7, montrant qu'elle vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.



Pour tout  $i$ , l'extension  $H_i/K_i$  est non ramifiée de degré  $h(K_i)$ , de sorte que  $g(H_i) = h(K_i)g(K_i)$ . Comme les familles  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  sont asymptotiquement mauvaises, on a  $\log(h(H_i)R(H_i)) \sim g(H_i)$  et  $\log(h(K_i)R(K_i)) \sim g(K_i)$  lorsque  $i \rightarrow \infty$  (c'est le théorème de Brauer–Siegel classique). On tire de ces équivalents les relations asymptotiques souhaitées.  $\square$

Décrivons à présent la situation « verticale » pour les corps de Hilbert. Étant donné un corps de nombres  $K$ , on note  $(H_i)_i$  la *tour de corps de Hilbert construite sur  $K$* , définie inductivement par  $H_0 = K$  et, pour tout  $i \geq 0$ ,  $H_{i+1}$  est le corps de Hilbert de  $H_i$ . On pose alors  $\mathcal{H}_K := \bigcup_{i \geq 0} H_i$ .

**Corollaire 6.2.** *Soit  $K$  un corps de nombres. Toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans  $\mathcal{H}_K$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

*Démonstration.* L'extension  $\mathcal{H}_K/K$  est pro-résoluble (et non-ramifiée). Il suffit donc d'appliquer le Corollaire 5.7 avec  $r = 1$ .  $\square$

**6.2. Sous-extensions de pro- $p$ -extensions.** – On se restreint maintenant au cas des pro- $p$ -extensions de corps de nombres, c'est-à-dire des extensions galoisiennes de groupe de Galois un pro- $p$ -groupe. On a le théorème suivant :

**Théorème 6.3.** *Soit  $K_1, \dots, K_r$  des corps de nombres. On fixe, pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ , un nombre premier  $p_j$  et une pro- $p_j$ -extension  $\mathcal{K}_j$  de  $K_j$ . Soit  $\mathcal{K}$  le compositum des  $\mathcal{K}_j$ . Toute famille asymptotiquement exacte  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  de corps de nombres contenus dans  $\mathcal{K}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

*Démonstration.* Il s'agit d'un cas particulier du Corollaire 5.7 : puisqu'un  $p_j$ -groupe est résoluble, chacune des extensions  $\mathcal{K}_j/K_j$  est pro-résoluble.  $\square$

Le cas où  $r = 1$  de cette proposition s'avère déjà être nouveau et intéressant : il permet en particulier de montrer que les tours de corps de classes qui, conditionnellement à la véracité de la conjecture de Tsfasman–Vladuts, ont les meilleurs ratios de Brauer–Siegel connus vérifient en fait *inconditionnellement* le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Voir la section 6.4 ci-dessous pour plus de détails.

**Exemple 6.4.** Soit  $K$  un corps de nombres, et  $\mathcal{H}_K$  sa tour de Hilbert (définie en 6.1). Pour tout nombre premier  $p$ , on appelle  *$p$ -tour de Hilbert de  $K$* , et l'on note  $\mathcal{H}_{K,p}$ , la pro- $p$ -extension maximale de  $K$  contenue dans  $\mathcal{H}_K$ . Le Théorème ci-dessus montre que toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans  $\mathcal{H}_{K,p}$ .

**6.3. Extensions  $K_S(p)$ .** – Soient  $K$  un corps de nombres,  $p$  un nombre premier et  $S$  un ensemble de places de  $K$ . On considère la pro- $p$ -extension maximale  $K_S(p)$  de  $K$  qui est non ramifiée hors de  $S$ . Lorsque  $S$  est fini et que l'extension  $K_S(p)/K$  est infinie, on dit que le corps  $K$  *admet une  $S$ - $p$ -tour de corps de classes infinie*. Par maximalité, l'extension  $K_S(p)/K$  est galoisienne.

Les extensions infinies asymptotiquement bonnes de corps de nombres sont rares. Elles sont essentiellement construites comme sous-extensions d'extensions  $K_S(p)$  infinies (avec  $S$  fini), dont le groupe de Galois passe le test de Golod–Shafarevich.

Le Théorème 6.3 implique une version plus générale de la Proposition E, comme suit :

**Corollaire 6.5.** *Soit  $K_1, \dots, K_r$  des corps de nombres. Pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , fixons un nombre premier  $p_i$  et un ensemble  $S_i$  de places de  $K_i$ . On note alors  $\mathcal{K}$  le compositum*

$$\mathcal{K} := K_{1,S_1}(p_1) \cdot K_{2,S_2}(p_2) \cdot \dots \cdot K_{r,S_r}(p_r),$$

*que l'on suppose de degré infini sur  $\mathbb{Q}$ . Toute famille asymptotiquement exacte de corps de nombres contenus dans  $\mathcal{K}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.*

*Si de plus, pour tout  $i$ , l'ensemble  $S_i$  est fini et les places de  $K_i$  contenues dans  $S_i$  ne divisent pas  $p_i$ , une telle famille est asymptotiquement bonne.*



*Démonstration.* Soit  $\mathcal{L} = (L_i)_i$  une famille asymptotiquement exacte de corps de nombres tous contenus dans  $\mathcal{K}$ . Le Théorème 6.3 ci-avant montre que  $\mathcal{L}$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Supposons à présent que, pour tout  $i$ ,  $S_i$  est fini et que les places de  $S_i$  ne divisent pas  $p_i$ . On note  $K$  le compositum des  $K_i$ . Sous ces hypothèses, l’extension  $\mathcal{K}/K$  est obtenue par compositum d’extensions modérément ramifiées, et est donc elle-même modérément ramifiée. On note  $S$  l’ensemble des places de  $K$  divisant l’une de celles des  $S_i$ . Pour tout  $i$ , la formule de Riemann–Hurwitz appliquée à l’extension  $K \cdot L_i/K$  montre que l’on a

$$g(K \cdot L_i) \leq [K \cdot L_i : K] \left( g(K) + \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{p} \in S} \log N\mathfrak{p} \right).$$

Il vient alors que

$$\frac{g(L_i)}{[L_i : \mathbb{Q}]} \leq \frac{g(K \cdot L_i)}{[K \cdot L_i : \mathbb{Q}]} \leq \frac{g(K)}{[K : \mathbb{Q}]} + \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in S} \log N\mathfrak{p}}{2[K : \mathbb{Q}]}.$$

Par suite, le ratio  $g(L_i)/[L_i : \mathbb{Q}]$  reste borné lorsque  $i$  varie : son inverse  $[L_i : \mathbb{Q}]/g(L_i)$  ne saurait donc tendre vers 0 lorsque  $i \rightarrow \infty$ . Comme la famille  $\mathcal{L}$  est asymptotiquement exacte, on déduit du Lemme 1.1(1) qu’elle asymptotiquement bonne.  $\square$

Lorsque  $r = 1$ , le Corollaire précédent s’énonce ainsi : *Toutes les extensions infinies  $\mathcal{K}$  contenues dans une  $S$ - $p$ -tour de corps de classes d’un corps de nombres, ainsi que les extensions finies de  $\mathcal{K}$ , vérifient le théorème de Brauer–Siegel généralisé.* Comme tout corps global infini est asymptotiquement exact, on en déduit le dernier point de la Proposition E, à savoir : si  $K$  est un corps de nombres admettant une  $S$ - $p$ -tour de corps de classes infinie, tout corps global infini contenu dans  $K_S(p)$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

**6.4. Exemples explicites.** – Voici quelques illustrations d’applications du Corollaire 6.5, tirées des articles [Mai00], [HM01], [HM02] et [HMR21].

**Exemple 6.6.** Dans [Mai00, §3], Maire construit explicitement des corps de nombres  $M/\mathbb{Q}$  dont la 2-tour de Hilbert  $\mathcal{M}_2$  est de degré infini sur  $M$  (voir §6.1). Les corps globaux infinis  $\mathcal{M}_2$  de [Mai00, §3] vérifient le théorème de Brauer–Siegel généralisé, par le Corollaire 6.5 (notons que ces extensions ne sont pas définies par des extensions galoisiennes par pas sur  $\mathbb{Q}$ ).

Maire utilise ces corps infinis pour produire des exemples de corps de nombres  $K$  dont la tour de Hilbert  $\mathcal{H}_K/K$  est finie mais dont l’extension galoisienne maximale non ramifiée  $\mathcal{K}_\infty/K$  est infinie (voir son théorème 3.1). Comme l’extension  $\mathcal{K}_\infty/K$  est galoisienne sur  $K$ , nos résultats impliquent que  $\mathcal{K}_\infty$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé. On ne peut malheureusement pas prouver la même conclusion pour les familles formées de sous-extensions non galoisiennes par pas de  $\mathcal{K}_\infty/K$ .

**Exemple 6.7.** Dans ce même article [Mai00], Maire construit (voir [Mai00, Theorem 5.1]) également une famille infinie  $(k_i)_i$  de corps quadratiques sur  $\mathbb{Q}$  tels que, pour tout  $i$ , la tour de Hilbert  $\mathcal{H}_{k_i}$  est une extension finie de  $k_i$  bien que  $k_i$  admette une extension non-ramifiée infinie  $\mathcal{K}_i$  de degré surnaturel  $2^\infty$ . Chacun de ces corps globaux infinis  $\mathcal{K}_i$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

**Exemple 6.8.** Dans leurs exemples A1, B1 et C1 de [HM01, §3.2] ainsi que ceux de [HM02, §3], Hajir et Maire construisent explicitement des instances de corps de nombres  $K$  et d’ensembles finis  $T$  de places de  $K$  tels que l’extension  $K_T(2)/K$  est infinie. Dans chacun de ces exemples, notre Corollaire 6.5 montre que l’extension  $K_T(2)$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé.

**Exemple 6.9.** Les exemples de [HM02, §3] ont plus tard été repris par Zykin dans [Zyk05, Thm. 4]. Étant donnée une tour asymptotiquement bonne de corps de nombres  $\mathcal{L} = \bigcup_i L_i$ , notons

$$\mathcal{BS}(\mathcal{L}) := \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(h(L_i) R(L_i))}{g(L_i)},$$

pour peu que cette limite existe. Dans son article [Zyk05], Zykin obtient des exemples de tours asymptotiquement bonnes  $\mathcal{L}_Z$  pour lesquelles  $\mathcal{BS}(\mathcal{L}_Z)$  est, conditionnellement à GRH, exceptionnellement petit. Spécifiquement, Zykin montre que

$$0,56497 \leq \mathcal{BS}(\mathcal{L}_Z) \leq 0,59749.$$

Dans cet encadrement, la minoration de  $\mathcal{BS}(\mathcal{L}_Z)$  reste valable inconditionnellement, seule la majoration nécessite GRH (au travers de l'utilisation de l'inégalité fondamentale de Tsfasman–Vladuts). On peut toutefois dériver une majoration plus faible, mais inconditionnelle, sur  $\mathcal{BS}(\mathcal{L}_Z)$  en utilisant la même méthode de programmation linéaire.

Zykin considère par exemple  $k = \mathbb{Q}(\xi)$ , où  $\xi$  est une racine de  $X^6 + X^4 - 4X^3 - 7X^2 - X + 1$ , et  $K = k\left(\sqrt{-671\xi^5 - 467\xi^4 + 994\xi^3 - 3360\xi^2 - 2314\xi + 961}\right)$ . Le corps  $K$  est alors totalement imaginaire de degré 12 et n'est ni galoisien par pas, ni à clôture galoisienne résoluble sur  $\mathbb{Q}$  (puisque son groupe de Galois admet  $\mathfrak{S}_6$  comme quotient). De plus, le corps  $K$  admet une  $\{\mathfrak{p}\}$ -2-tour de corps de classes infinie modérément ramifiée, où  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de norme 9 (voir [HM02]). Avec notre Corollaire 6.5, on sait à présent que la tour  $\mathcal{L} = K_{\{\mathfrak{p}\}}(2)$  vérifie le théorème de Brauer–Siegel généralisé, que la limite  $\mathcal{BS}(\mathcal{L})$  existe, et que l'on a *inconditionnellement*  $\mathcal{BS}(\mathcal{L}) \geq 0,5649$ .

**Exemple 6.10.** Il suit également du Corollaire 6.5 que les exemples obtenus par « coupe dans  $\text{Gal}(K_S(p)/K)$  » dans le tout récent travail [HMR21] vérifient le théorème de Brauer–Siegel généralisé. Cela suggère de belles perspectives : après avoir donné des versions effectives de leurs résultats, on pourra, avec l'approche de [Zyk05], exhiber des tours de corps de nombres  $\mathcal{L}$  dont les ratios de Brauer–Siegel  $\mathcal{BS}(\mathcal{L})$  sont remarquablement petits. Nous y reviendrons quelque jour.

---

**Remerciements** – Les deux auteurs remercient Stéphane Louboutin et Christian Maire. Le premier auteur a été en partie financé par la Swiss National Science Foundation, au travers de la bourse SNSF #170565 attribuée à Pierre Le Boudec. Il remercie l'Universität Basel et l'Université Clermont-Auvergne pour les excellentes conditions de travail. Les deux auteurs ont été partiellement financés par le projet ANR-17-CE40-0012 “Flair”, le second auteur par le projet GA CROCOCO de la région Bourgogne Franche-Comté.

## Références

- [Bra47] R. BRAUER : On the zeta-functions of algebraic number fields. *Amer. J. Math.*, 69:243–250, 1947. [↑ 1, 15, 16](#)
- [Dix20] A. B. DIXIT : On the generalized Brauer-Siegel theorem for asymptotically exact families with solvable galois closure. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (to appear), 2020. [↑ 2, 3, 5, 15, 17, 18](#)
- [Gri16] R. GRIFFON : *Analogues du théorème de Brauer-Siegel pour quelques familles de courbes elliptiques*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7), 2016. [↑ 1](#)
- [Gri18a] R. GRIFFON : Analogue of the Brauer–Siegel theorem for Legendre elliptic curves. *Journal of Number Theory*, 193:189–212, December 2018. [↑ 1](#)
- [Gri18b] R. GRIFFON : A Brauer-Siegel theorem for Fermat surfaces over finite fields. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 97(3):523–549, 2018. [↑ 1](#)
- [Gri19] R. GRIFFON : Bounds on special values of  $L$ -functions of elliptic curves in an Artin-Schreier family. *Eur. J. Math.*, 5(2):476–517, 2019. [↑ 1](#)
- [Hin19] M. HINDRY : Analogues of Brauer-Siegel theorem in arithmetic geometry. In *Arithmetic geometry : computation and applications*, volume 722 de *Contemp. Math.*, pages 19–41. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2019. [↑ 1](#)
- [HM00] S. HAMDY et B. MÖLLER : Security of cryptosystems based on class groups of imaginary quadratic orders. In *Advances in cryptology—ASIACRYPT 2000 (Kyoto)*, volume 1976 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 234–247. Springer, Berlin, 2000. [↑ 1](#)

- [HM01] F. HAJIR et C. MAIRE : Tamely ramified towers and discriminant bounds for number fields. *Compositio Math.*, 128(1):35–53, 2001. [↑ 4, 20](#)
- [HM02] F. HAJIR et C. MAIRE : Tamely ramified towers and discriminant bounds for number fields. II. *J. Symbolic Comput.*, 33(4):415–423, 2002. [↑ 4, 20, 21](#)
- [HM18] F. HAJIR et C. MAIRE : On the invariant factors of class groups in towers of number fields. *Canad. J. Math.*, 70(1):142–172, 2018. [↑ 1](#)
- [HMR21] F. HAJIR, C. MAIRE et R. RAMAKRISHNA : Cutting towers of number fields. *Annales Mathématiques du Québec*, 45, 321–345, 2021. [↑ 4, 20, 21](#)
- [HP16] M. HINDRY et A. PACHECO : An analogue of the Brauer-Siegel theorem for abelian varieties in positive characteristic. *Mosc. Math. J.*, 16:45–93, 2016. [↑ 1](#)
- [Iva14] A. IVANOV : Reconstructing decomposition subgroups in arithmetic fundamental groups using regulators. *Prépublication ArXiv:1409.4909*, 2014. [↑ 1](#)
- [Lan94] S. LANG : *Algebraic number theory*, volume 110 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2nde édition, 1994. [↑ 4, 14, 15, 17](#)
- [Leb07] P. LEBACQUE : Generalised Mertens and Brauer-Siegel theorems. *Acta Arith.*, 130(4):333–350, 2007. [↑ 2, 3, 6, 7, 11, 13](#)
- [Leb10] P. LEBACQUE : On Tsfasman-Vlăduț invariants of infinite global fields. *Int. J. Number Theory*, 6(6):1419–1448, 2010. [↑ 5](#)
- [Leb15] P. LEBACQUE : Quelques résultats effectifs concernant les invariants de Tsfasman-Vlăduț. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 65(1):63–99, 2015. [↑ 5](#)
- [Lou01] S. LOUBOUTIN : Explicit upper bounds for residues of Dedekind zeta functions and values of  $L$ -functions at  $s = 1$ , and explicit lower bounds for relative class numbers of CM-fields. *Canad. J. Math.*, 53(6):1194–1222, 2001. [↑ 3, 6](#)
- [Mai00] C. MAIRE : On infinite unramified extensions. *Pacific J. Math.*, 192(1):135–142, 2000. [↑ 4, 20](#)
- [Mur01] V. K. MURTY : Class numbers of CM-fields with solvable normal closure. *Compositio Math.*, 127(3):273–287, 2001. [↑ 3, 10](#)
- [NSW08] J. NEUKIRCH, A. SCHMIDT et K. WINGBERG : *Cohomology of number fields*, vol. 323 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 2nde édition, 2008. [↑ 17](#)
- [RT90] M. Y. ROSENBLOOM et M. A. TSFASMAN : Multiplicative lattices in global fields. *Invent. Math.*, 101(3):687–696, 1990. [↑ 1](#)
- [ST96] H. M. STARK et A. A. TERRAS : Zeta functions of finite graphs and coverings. *Adv. Math.*, 121(1):124–165, 1996. [↑ 1](#)
- [Sta74] H. M. STARK : Some effective cases of the Brauer-Siegel theorem. *Invent. Math.*, 23:135–152, 1974. [↑ 2, 6, 7, 9, 10, 15, 16](#)
- [Tsi18] J. TSIMERMAN : The André-Oort conjecture for  $\mathcal{A}_g$ . *Ann. of Math. (2)*, 187(2):379–390, 2018. [↑ 1](#)
- [TV02] M. A. TSFASMAN et S. G. VLĂDUȚ : Infinite global fields and the generalized Brauer-Siegel theorem. volume 2, pages 329–402. 2002. [↑ 2, 5, 6, 8](#)
- [Zyk05] A. ZYKIN : The Brauer-Siegel and Tsfasman-Vlăduț theorems for almost normal extensions of number fields. *Mosc. Math. J.*, 5(4):961–968, 974, 2005. [↑ 2, 4, 5, 6, 11, 13, 20, 21](#)

---

Richard GRIFFON ([richard.griffon@uca.fr](mailto:richard.griffon@uca.fr)) – LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL, UNIVERSITÉ CLERMONT-AUVERGNE. Campus Universitaire des Cézeaux, 3 place Vasarely, TSA 60026 CS 60026, 63178 Aubière Cedex (France).

Philippe LEBACQUE ([philippe.lebacque@univ-fcomte.fr](mailto:philippe.lebacque@univ-fcomte.fr)) – LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE BESANÇON, UNIVERSITÉ BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ. UFR Sciences et Techniques, 16 route de Gray, 25030 Besançon (France).