



**HAL**  
open science

**Z. Prihar, 1956, Topological Properties of  
Telecommunication Networks. Version bilingue et  
commentée**

Prihar, Z., Laurent Beauguitte

► **To cite this version:**

Prihar, Z., Laurent Beauguitte. Z. Prihar, 1956, Topological Properties of Telecommunication Networks. Version bilingue et commentée. 2021. hal-03214911

**HAL Id: hal-03214911**

**<https://hal.science/hal-03214911v1>**

Submitted on 3 May 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Z. Prihar, 1956, Topological Properties of  
Telecommunication Networks  
Proceedings of the IRE, 1956, p. 927-933  
Version bilingue et commentée

groupe f.m.r.



Avril 2021

*Version traduite et commentée par Laurent Beauguitte, CNRS, UMR Géographie-cités*

## Présentation

Je n'ai aucune information sur la formation et la carrière de l'auteur. Cet article paraît dans les *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, revue mensuelle créée en 1930. L'association professionnelle est plus ancienne (création en 1913) ; elle fusionne en 1963 avec l'*American Institute of Electrical Engineers* (AIEE) et devient alors l'*Institute of Electrical and Electronics Engineers* (IEEE) (source : [worldradiohistory.com](http://worldradiohistory.com)). L'auteur publie dans les années suivantes une poignée d'articles de recherche appliquée relatifs aux réseaux de communication.

Les indicateurs de connectivité proposés par l'auteur ont été repris notamment par le géographe nord-américain William Garrison dans son article de 1960 (cf la [version bilingue disponible](#) dans cette collection).

Les numéros entre crochets dans la version anglaise correspondent à la pagination de l'article paru en 1956. Toutes les notes en bleu dans la traduction française sont du traducteur.

# TOPOLOGICAL PROPERTIES OF TELECOMMUNICATION NETWORKS

Z. PRIHART<sup>1</sup>, SENIOR MEMBER, IRE<sup>2</sup>

Summary - This paper describes a method of matrix analysis, developed by Luce and Perry for the study of sociometric group structures and cliques. These concepts are applied to telecommunication networks. Two new traffic matrices are also suggested which, in combination with the connectivity matrices, yield quantitative indications of the incoming and outgoing traffic. Various useful concepts are pointed out and a number of applications are illustrated by numerical examples.

## GRAPHS AND MATRICES

The general classical graph theory distinguishes two main types of graphs : finite and infinite. These, in turn, can be either of the oriented or nonoriented class, and each of these graphs is completely characterized by its set of links  $p$  terminated at the various vertices  $m$ .

According to this terminology of the graph theory, a telecommunication network would belong to the class of finite oriented graphs. The other corresponding analogical concepts in a telecommunication network would be as follows : a telephone exchange, a radio or relaying station, etc. would belong to a 0-dimensional region ; *i.e.*, a point or vertex  $m$ . A communication link would correspond to a 1-dimensional region ; *i.e.*, a link  $p$ .

Following other concepts of the linear graph theory, a local communication network could be defined as a bounded region and a general country-wide network as an unbounded region. A number of interconnected exchanges would then form a simply-connected structure. This would also apply to a number of interconnected radio or relaying stations, and a main station or exchange, connected to a number of satellite exchanges would form an  $n$ -fold connected structure.

Since topology investigates the nonmetrical aspects of space, and, in particular, the possible connections between different positions, properties of a qualitative nature, it would seem possible to apply usefully these relationships to the study of telecommunication networks.

One of the main problems in planning telecommunication networks is the connectivity between the above defined points  $m$  through certain links  $p$ ; the general problem is to define through what regions the link must run in order that the required communication be attained with the minimum of connectivity.

---

1. RCA International Division, New York, N. Y.

2. Original manuscript received by the IRE, October 20, 1955 ; revised manuscript received January 3, 1956.

Let Fig. 1 represent a simple oriented graph. Any link, say,  $P_1Q_1$ , would be fully defined by its vertex  $m = P_1$  and link  $p =$  from  $P_1$  to  $Q_1$ . A useful application to oriented graphs, expressing the various connections and their relationships, is the logical function of the binary relative  $R$ . The above link from  $P_1$  to  $Q_1$  would thus be defined as  $P_1RQ_1$ . In the case of an antimetry, a one-way link would be :

$$P_1RQ_1 \neq Q_1RP_1;$$

in the case of symmetry, two-way link,

$$P_1RQ_1 = Q_1RP_1.$$

Likewise, a transitivity would correspond to

$$P_2RP_1 + P_1RQ_1 = P_2RQ_2,$$

a connection from  $P_2$  to  $Q_1$  via an intermediate station  $P_1$ .

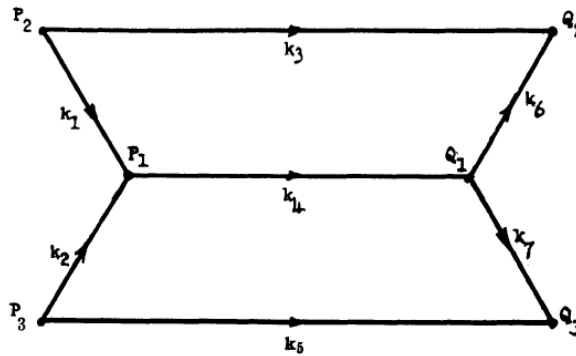


Fig. 1

Another class of the logical function is the relation  $P_1RP_1$ , corresponding to a case of reflexivity ; *i.e.*, a point connected to itself. This class is outside the scope of this paper but it could interpret a case of feedback, for the problem by graph theory treated by Mason.<sup>1</sup>

As Luce and Perry have shown,<sup>2 3</sup> when presenting various relationships in diagram or graph forms, the analysis and presentation of the results may be greatly expedited by using matrix algebra. In their papers, Luce and Perry

1. J. Mason, "Feedback theory -some properties of signal flow graphs," Proc. IRE, vol. 41, p. 1144 ; September, 1953.

2. R. D. Luce, and A. D. Perry, "A method of matrix analysis of group structure," *Psychometrika*, vol. 14, pp. 95-116 ; March, 1949.

3. R. D., Luce, " Connectivity and generalized cliques in sociometric group structure," *Psychometrika*, vol. 15, pp. 169-190 ; June, 1950.

present a matrix method for the study of relationships between individuals and groups; with the aid of certain properties of these matrices they develop various connectivity properties and concepts of  $n$ -chains and cliques. Their mathematical formulation is based on symbolism and nomenclature as used in point-set theory [928] and general topology. The following concepts, as developed by Luce and Perry, will be applied to telecommunication networks. The mathematical formulation, given here in a limited form for a better understanding of the subject, will be made with the standard forms of matrix algebra with which engineers are more familiar.

The matrix of antimetries (one-way links) is formed by the following entries  $x_{ij}$  :

$x_{ij}=1$  if, and only if, there exists a link between  $i$  and  $j$ ,

$x_{ij}=0$  if no link exists between  $i$  and  $j$ .

A matrix of symmetries is formed from the above matrix with entries  $s_{ij}$  defined as follows :

$s_{ij}=1$  if, and only if,  $x_{ij} = x_{ji}$  a two-way link exists between  $i$  and  $j$ .

$s_{ij}=0$  otherwise, no two-way link exists between  $i$  and  $j$ .

To fix ideas, the oriented graph of Fig. 1 will have the following corresponding matrix of antimetries  $X = (x_{ij})$

$$X = (x_{ij}) = \begin{array}{c|cccccc} & P_1 & P_2 & P_3 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ \hline P_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ P_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ P_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Since Fig. 1 network has only one-way links, the corresponding  $S = (s_{ij})$  matrix would have all its entries equal to 0. On the other hand, if all the links of Fig. 1 were two-way, the  $S$  matrix would have the same form as the above  $X$  matrix.

Though it would seem that in modern communication networks all links are always symmetrical; *i.e.*, two-way traffic, it will be shown here, in one numerical example, that in certain radio circuits there are possible antimetries in communication networks.

The application of matrices to graphs is not new. Nor need the entries be confined to a two-valued logic, with only 0 or 1 entries. In the Poincaré-Veblen matrix of a finite oriented graph, as quoted by König<sup>4</sup> if  $P_i$  are the vertices of the graph, with  $i=1, 2, \dots, a_0$  and  $k_j$  its links, with  $j=1, 2, \dots, a_1$ , the  $t_{ij}$  values of the matrix are defined as follows :

$t_{ij} = 1$  if  $P_i$  is the vertex of origin of link  $k_j$ ,

---

4. D. König, "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen," New York, N. Y., Chelsea Publishing Company, p. 141; 1950.

$t_{ij} = -1$  if  $P_i$  is the end vertex of link  $k_j$ , and  
 $t_{ij} = 0$  if  $P_i$  has no link with  $k_j$ .

The matrix thus defined, with a 3-valued logic,

$$T = (t_{ij})(i = 1, 2 \dots a_0; j = 1, 2 \dots a_1)$$

with  $a_0$  rows and  $a_1$  columns, is termed the Incident-matrix of  $G$ ,  $G$  being the finite oriented graph in question. For instance, to fix ideas, the corresponding Poincaré-Veblen matrix for Fig. 1 would have 6 rows corresponding to the six vertices and seven links corresponding to the seven columns  $k_1, \dots, k_7$  and will be of the following form :

$$T = (t_{ij}) = \begin{array}{c|ccccccc} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 \\ \hline P_1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ P_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ Q_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ Q_2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ Q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

As it is seen, each column of the incident-matrix has +1 and one -1 entries and a total sum of 0. The rank of an incident-matrix is always equal to  $a_0 - v$  where  $v$  = number of meshes. Hence, the above matrix for Fig. 1 will have the rank  $6 - 2 = 4$ .

Further applications of matrices and their properties are given by König in his treatment of Poincaré-Veblen matrices and various other general properties and relations of matrices and determinants in their application to graphs are also given by König.<sup>5</sup>

#### APPLICATIONS IN TELECOMMUNICATION NETWORKS

The concepts developed by Luce and Perry have the following possible applications in telecommunication networks : If an  $X^{(2)}$  matrix is formed from the matrix of antimetries  $X$ , its diagonal entries  $x_{ii}^{(2)}$  will indicate at a glance the direct communication channels of station  $i$  with stations  $j$  of the network, with  $j=1, 2, \dots, n$ . The proof that  $x_{ii}^{(2)} = c$  as entry,  $c$  being a real value, if, and only if, there are  $c$  symmetric lines ; *i.e.*, relations, with  $i$  for the  $i$ th entry, is given by the definition of the main diagonal entry of a matrix

$$x_{ii}^{(2)} = \sum_{j=1}^n x_{ij}x_{ji} \quad (i = j = 1, 2, \dots, n)$$

and a two-way connection will exist if  $x_{ij} = x_{ji} = 1$ . Otherwise,  $x_{ij} = x_{ji} = 0$  and their product = 0. Since the summation is for  $j=1$  to all  $n$  entries, the

---

5. König, *ibid.*, p. 237.

above expression will thus yield the total of direct connection between station  $i$  and station  $j$  of the network, with  $j=1,2,\dots,n$ .

[929] If an  $X^{(n)}$  matrix is formed from an  $X$  matrix, its entries  $x_{ij}^{(n)} = h$ , with  $h$  being a real number, will indicate that there are  $h$  possible ways in the network for station  $i$  to reach station  $j$  in  $n$  steps; *i.e.*, links, corresponding to passing through  $n-1$  intermediate stations between  $i$  and  $j$ . Such a matrix would be of interest for the control of traffic flow and diversions in case of partial breakdowns of circuits forming part of the network.

The proof that the  $x_{ij}^{(n)}$  entry of an  $X^{(n)}$  matrix will have a value  $h$  if there are  $h$  distinct chains from  $i$  to  $j$  through  $n$  links or  $n-1$  intermediate stations, can again be obtained from the definition of the matrix

$$x_{ij}^{(n)} = \sum_{q=1}^n \dots \sum_{k=1}^n x_{ik}x_{k1}x_{1m} \dots x_{pq}x_{qj}$$

since only if any of these individual links exist,

$$x_{ik} = x_{k1} = x_{1m} = \dots = x_{pq} + x_{qj} = 1$$

and otherwise 0, each of these chains will be also equal to 1 and their summation will yield the total number of all the distinct  $n$  paths from  $i$  to  $j$  through  $n-1$  intermediate stations. Fig. 2 will make the above clear in the case of simple example of  $x_{ij}^{(2)}$  through one intermediate station. For  $n=2$ ,

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(2)} &= x_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n x_{ik}x_{kj} \\ &= x_{i1}x_{1j} + x_{i2}x_{2j} + \dots + x_{in}x_{nj}. \end{aligned}$$

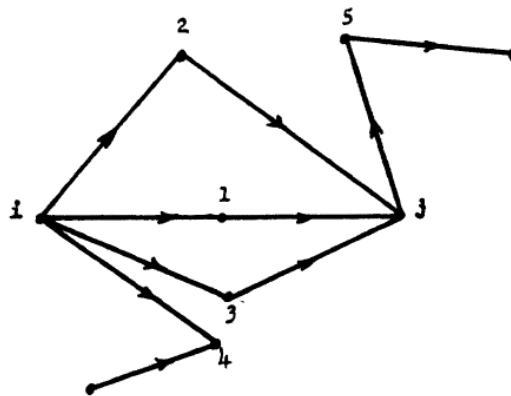


Fig. 2

For Fig. 2,



$$x_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n x_{ik}x_{kj} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 0 = 3$$

Hence, the total number of available connections between  $i$  and  $j$  through an intermediate station will be  $h=3$ . Other numerical examples given later in the paper show the application of this matrix to more complex networks.

A general idea of a network's degree of connectivity and general importance, from the traffic point of view, can be obtained from the matrix

$$A(n) = X + X^{(2)} + X^{(3)} + \dots + X^{(n)}.$$

If all entries of such an  $A(n)$  matrix are filled, the matrix will then indicate that all stations forming the network will be able to intercommunicate in either direct or through 1, 2, or 3, etc. up to  $n - 1$  intermediate stations. 0 entries will show that no direct or indirect connections exist between the given stations. The application and usefulness of this matrix will be made clear by the numerical example given later in the paper.

A measure of connectivity of a network could be obtained by making use of some other concepts of the linear graph theory. If  $p$  = number of links of a network,  $m$  = its number of stations (vertices) then its maximum limit of connectivity, *i.e.*, the maximum possible number of connections of the network will be

$$p_{max} = m(m - 1),$$

its First Betti Number (Cyclomatic index)

$$\mu = p - m + 1,$$

and rank

$$R = m - 1 = p - \mu.$$

Given the actual degree of connectivity of a network, expressed by the number of its links  $p$ ,  $p$  could be related to the maximum and minimum connectivities of the network by the following relations :

degree of maximum connectivity  $p/m(m - 1)$  and  
 degree of minimum connectivity =  $p/(m - 1)$  (for  $\mu = 0$ ).

The relation given by the First Betti Number

$$\mu = p - m + 1 = 0$$

could be used to determine minimal communication networks and would be of particular interest in automatic telephone systems. Before the advent of

automatic telephony, when operation was mostly manual, it was neither feasible nor economical to establish a connection in a zonal network through more than 2-3 exchanges. Consequently, as many direct links as economically possible were provided. The following is a simple typical example. In a manually operated system, Fig. 1 would probably be the network provided for six exchanges. In an automatic system, where connection-paths are not apparent to the user, the probably most economical and sufficient connectivity would be, for the above system of Fig. 1, the network shown in Fig. 3. It will be understood that both, Fig. 1 and Fig. 2, will have two-way-links for this example.

Applying the above suggested measures of connectivity, for Fig. 1,  $p=9$ ;  $m=6$ ; and  $\mu=4$ ; this would correspond to a maximum connectivity ratio of  $9/30$  and a minimum connectivity ratio of  $9/3$ . For Fig. 3  $p=5$ ;  $m=6$ ; and  $\mu=0$ ; the maximum connectivity ratio will be  $5/30=1/6$  and the minimum ratio of connectivity  $=5/5=1$ .

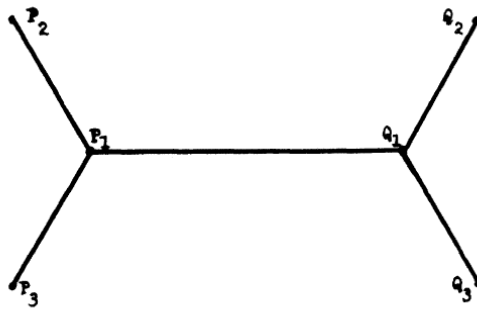


Fig. 3

#### TRAFFIC MATRICES

In the following a new matrix relation is suggested as a possible useful tool in the study of telecommunication networks.

Given a communication network with a connectivity matrix  $X$ , with each existing connectivity between any two stations  $i$  and  $j$  of the network defined in the  $X$  matrix by an entry  $x_{ij}=1$  and an entry  $x_{ij}=0$  if no such connectivity exists, and if each of these connectivities has  $t$  lines or traffic units,  $t$  being a real number, and a matrix  $T$  is formed with the corresponding  $t_{ij}$  entries, where  $t_{ij}$  = number of lines or traffic units between stations  $i$  and  $j$ , then a product of  $X$  and  $T$  matrices will give the following two new matrices :

$$\text{Incoming traffic matrix } P = XT$$

$$\text{Outgoing traffic matrix } Q = TX.$$

The main diagonal entries of matrix  $P$  will indicate the total number of incoming lines or traffic units to the station and the main diagonal entries

of matrix  $Q$  will indicate the total number of outgoing lines or traffic units from the station.

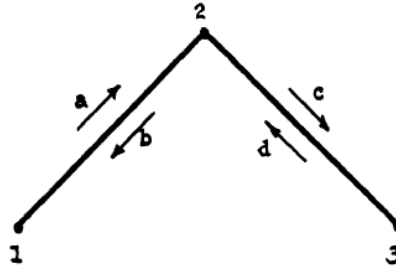


Fig. 4

The following illustration of an application in a simplified case of three exchanges will make the above more clear. Let Fig. 4 represent the connections between the three exchanges 1, 2, and 3 and let  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , and  $d$  be the quantities in real numbers of either lines or traffic units between the three stations in the two directions. The corresponding connectivity matrix  $X$  of Fig. 4 is

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

and the traffic matrix  $T$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

From these two matrices, the incoming traffic matrix  $P$

$$P = XT = \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & (a + d) & 0 \\ b & 0 & c \end{pmatrix}$$

with the main-diagonal entries showing the incoming number of lines to stations 1, 2, and 3. Likewise, the outgoing traffic matrix  $Q$

$$Q = TX = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & (b + c) & 0 \\ d & 0 & d \end{pmatrix}$$

where the main-diagonal entries indicate the outgoing traffic from the three stations.

A proof of the above is obtained from the definition of a product of two matrices. For any two matrices,

$$(x_{ij})(t_{ij}) = \sum_{j=1}^n x_{ij}t_{ij} = p_{ii} = x_{i1}t_{1i} + x_{i2}t_{2i} + \cdots + x_{in}t_{ni},$$

since  $x_{ij}=1$  if, and only if, there is a connectivity between  $i$  and  $j$  and  $x_{ij}=0$  otherwise. Since the summation is for all values of  $j$ , the above expression of  $p_{ii}$ , with  $t_{ij}$  being real numbers, will yield the sum of all incoming lines to station  $i$ . Likewise, for the outgoing traffic.

$$(t_{ij})(x_{ij}) = \sum_{i=1}^n t_{ij}x_{ij} = q_{ij}$$

where again, if  $x_{ij} \neq 0$  it can only be equal to 1. The sum of the member products will give the total number of the stations' outgoing lines, or traffic units, to all other stations of the network with which it has a direct connection.

The off-diagonal entries of the  $P = XT$  and  $Q = XT$  matrices are also of some interest. They are given by the following expressions :

[931]

$$(t_{ij})(t_{jk}) = \sum_{j=1}^n x_{ij}t_{jk}$$

and

$$(t_{jk})(x_{kj}) = \sum_{k=1}^n t_{jk}x_{kj}.$$

The  $P$  matrix off-diagonal entries are  $p_{13} = c$  and  $p_{31} = b$  and those of the  $Q$  matrix  $q_{13} = a$  and  $q_{31} = d$ . This could be interpreted that an extension from 1 to 3 is provided by  $c$  and from 3 to 1 by  $b$ . Likewise, in the opposite direction,  $q_{13}$  indicates an available extension by  $a$  and  $q_{31}$  by  $d$ . These entries would also seem to provide an indication of possible interfering links in a system.

#### ILLUSTRATIVE EXAMPLES

The following is an illustration of a practical application of the above concepts to telecommunication networks. Let Fig. 5 represent the hypothetical network to be examined. Station  $A$  is assumed to be a very powerful radio transmitting station capable of contacting any other station of the network. As the oriented links indicate, while some of the stations would be in a position to respond to  $A$  by direct contacts, others would only be able to reach it

in  $n$ -steps, through relaying stations, due to their transmitters' range limits. Hence, this would represent a case of antimetries (one-way connections) and symmetries (two-way connections).

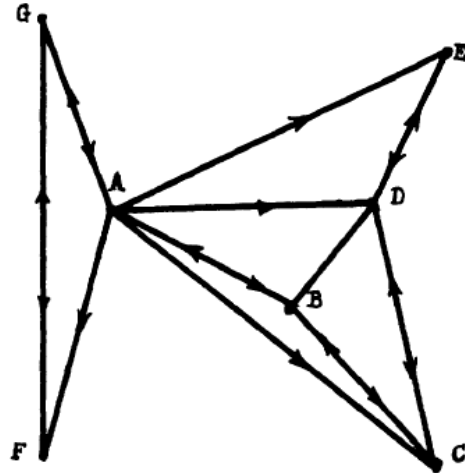


Fig. 5

The following is the  $X$  matrix for Fig. 5 network :

$$X = \begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline A & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 1 & & 1 & 1 & & & \\ C & & 1 & & 1 & & & \\ D & & 1 & 1 & & 1 & & \\ E & & & & 1 & & & \\ F & & & & & & & 1 \\ G & 1 & & & & & 1 & \end{array}$$

The corresponding  $X^{(2)}$  matrix is

$$X^{(2)} = \begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline A & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ B & & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ C & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ D & 1 & 1 & 1 & 3 & & & \\ E & & 1 & 1 & & 1 & & \\ F & 1 & & & & & 1 & \\ G & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

The above matrix, as explained previously, contains the following information about the network : the diagonal entries  $x_{ii}$  indicate the total number of all possible direct two-way communication channels of the stations ; *e.g.*, station  $A$  will have 2, station  $B$  3, etc. up to station  $G$  which will have two direct two-way channels with the other stations of the network. All the other off-diagonal entries of the matrix indicate the number of possible 2-step connections between the stations indicated by the matrix ; *i.e.*, the number of possibilities station  $i$  will have to reach station  $j$  through one relaying station. For instance, station  $A$  will be able to reach station  $D$  through three different stations acting as intermediate relaying stations, whereas station  $D$  will only have one possible 2-step link with station  $A$ .

The  $S$  matrix, derived from the  $X$  matrix, is

$$S = \begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline A & & 1 & & & & & 1 \\ B & 1 & & 1 & 1 & & & \\ C & & 1 & & 1 & & & \\ D & & 1 & 1 & & 1 & & \\ E & & & & 1 & & & \\ F & & & & & & & 1 \\ G & 1 & & & & & 1 & \end{array}$$

The  $S$  matrix indicates all direct two-way communication channels. Hence, the sum of each row will be equal to the diagonal entry of the corresponding row in the  $X^{(2)}$  matrix.

To check whether all stations will be able to intercommunicate in either one or two steps, the  $A(n) = A(2)$  is formed, where  $A(2) = X + X^{(2)}$ .

$$A(2) = X + X^{(2)} = \begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline A & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ B & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ C & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & & \\ D & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & & \\ E & & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ F & 1 & & & & & 1 & 1 \\ G & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

[932] The above  $A(2)$  matrix shows that all stations will be able to intercommunicate in one or two steps with the exception of stations  $C$ ,  $D$  and  $E$ , which will not be able to communicate with stations  $F$  and  $G$ . Also station  $E$  will not be able to communicate with station  $A$  and station  $F$  with stations  $B$ ,  $C$ ,  $D$  and  $E$ .

To check whether all stations will be able to intercommunicate in one, two, or three steps, through two intermediate relaying stations, the matrix  $A(3)$  is formed where

$$A(3) = X + X^{(2)} + X^{(3)}$$

It will first be necessary to determine the  $X^{(3)}$  matrix from the above  $X^{(2)}$  and  $X$  matrices

$$X^{(3)} = \begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline A & 3 & 7 & 7 & 7 & 5 & 3 & 3 \\ B & 4 & 4 & 5 & 7 & 2 & 1 & 1 \\ C & 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ D & 1 & 5 & 5 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ E & 1 & 1 & 1 & 3 & & & \\ F & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ G & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

The off-diagonal entries of this matrix indicate the number of ways any station  $i$  will reach the corresponding station  $j$  in three steps through two intermediate stations. The  $A(3)$  matrix will be

$$A(3) = X + X^{(2)} + X^{(3)} = \begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline A & 5 & 9 & 9 & 10 & 6 & 4 & 3 \\ B & 4 & 7 & 7 & 9 & 4 & 2 & 2 \\ C & 2 & 5 & 5 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ D & 2 & 3 & 5 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ E & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & & \\ F & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ G & 3 & 3 & 3 & 4 & 2 & 3 & 3 \end{array}$$

This matrix indicates that station  $E$  will be the only one unable to communicate with stations  $F$  and  $G$  even in three steps, and an  $A(4)$  matrix will show that all entries have been filled. Hence, station  $E$  will have to use three intermediate stations to reach stations  $F$  and  $G$  or have the power of its transmitter increased.

#### RADIO VS CABLE TELECOMMUNICATION SYSTEMS

The following example illustrates a possible application by which the relative degrees of flexibility of radio and cable systems for a given telecommunication network are compared. The network is to consist of 11 stations. Direct two-way channels are required between all stations. Hence, the corresponding connectivity matrix  $X = S$  will have the maximum number of entries  $m(m - 1)$  with  $m = 11$ . The following will be the matrix

$$X = S = \begin{array}{c|cccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ \hline a & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ g & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ h & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ j & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

The number of the actual traffic channels, two-way, required between the different stations is given by the following traffic matrix  $T$  :

$$T = \begin{array}{c|cccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ \hline a & & 192 & 24 & 12 & 36 & 24 & 12 & 24 & 24 & 24 & 24 \\ b & 192 & & 24 & 24 & 12 & 6 & 4 & 12 & 12 & 6 & 12 \\ c & 24 & 24 & & 12 & 12 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 & 12 \\ d & 12 & 24 & 12 & & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ e & 36 & 12 & 12 & 4 & & 12 & 12 & 4 & 6 & 4 & 4 \\ f & 24 & 6 & 6 & 4 & 12 & & 4 & 12 & 6 & 4 & 12 \\ g & 12 & 4 & 4 & 4 & 12 & 4 & & 4 & 12 & 4 & 4 \\ h & 24 & 12 & 4 & 4 & 4 & 12 & 4 & & & & \\ i & 24 & 12 & 4 & 4 & 6 & 6 & 12 & 12 & & & \\ j & 24 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 12 & 4 & & \\ k & 24 & 12 & 12 & 4 & 4 & 12 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array}$$

Since all channels will carry two-way traffic

$$P = XT = TX = Q$$

and the following are main diagonal entries of the  $P = Q$  matrix

$$P = Q = \begin{array}{c|cccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ \hline a & 396 & & & & & & & & & & & \\ b & & 304 & & & & & & & & & & \\ c & & & 106 & & & & & & & & & \\ d & & & & 76 & & & & & & & & \\ e & & & & & 106 & & & & & & & \\ f & & & & & & 90 & & & & & & \\ g & & & & & & & 64 & & & & & \\ h & & & & & & & & 92 & & & & \\ i & & & & & & & & & 88 & & & \\ j & & & & & & & & & & 70 & & \\ k & & & & & & & & & & & 84 & \end{array}$$



[933] The above are the in- and out-going channels of each of the stations corresponding to the entries  $p_{ii} = q_{ii}$ .

For a cable system, the following will be the connectivity matrix  $X_c = S_c$  of the cable network which would satisfy all the economic and technological requirements at minimum cost ; *i.e.*, minimal network.

$$X_c = S_c = \begin{array}{c|cccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ a & & & & & & & & & & & 1 \\ b & & & & 1 & & & & & & & \\ c & & & & 1 & 1 & & & & & & 1 \\ d & & 1 & 1 & & & & & & & & \\ e & & & 1 & & & & 1 & & & & \\ f & & & & & & & & 1 & & & 1 \\ g & & & & & 1 & & & & & 1 & \\ h & & & & & & 1 & & & & 1 & \\ i & & & & & & & 1 & 1 & & & \\ j & & & & & & & & & 1 & & \\ k & 1 & & 1 & & & 1 & & & & & \end{array}$$

In the case of a radio system, where the distribution, or beamed transmission, need not follow the rigid cable system routing, the following connectivity matrix  $X_r = S_r$  of a network would satisfy the corresponding economic and technological requirements of the system :

$$X_r = S_r = \begin{array}{c|cccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ a & & & & & & 1 & & & & & 1 \\ b & & & & 1 & & & & & & & \\ c & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & 1 \\ d & & 1 & 1 & & & & & & & & \\ e & & & 1 & & & 1 & 1 & & & & 1 \\ f & 1 & & 1 & 1 & & & & 1 & & & 1 \\ g & & & & & 1 & & & & & 1 & \\ h & & & & & & 1 & & & 1 & 1 & \\ i & & & & & & & 1 & 1 & & & \\ j & & & & & & & & & 1 & & \\ k & 1 & & 1 & & & 1 & & & & & \end{array}$$

The corresponding  $X^{(2)} = S^{(2)}$  matrices for the two systems are as follows :

$$X_c^{(2)} = S_c^{(2)} = \begin{array}{c|ccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ \hline a & 1 & & 1 & & & 1 & & & & & \\ b & & 1 & 1 & & & & & & & & \\ c & 1 & 1 & 3 & & & 1 & 1 & & & & \\ d & & & & 2 & 1 & & & & & & 1 \\ e & & & & 1 & 2 & & & & 1 & & 1 \\ f & 1 & & 1 & & & 2 & & & 1 & 1 & \\ g & & & 1 & & & & 2 & 1 & & & \\ h & & & & & & & 1 & 3 & & & 1 \\ i & & & & & 1 & 1 & & & 2 & 1 & \\ j & & & & & & 1 & & & 1 & 1 & \\ k & & & & 1 & 1 & & & 1 & & & 3 \end{array}$$

and

$$X_r^{(2)} = S_r^{(2)} = \begin{array}{c|ccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ \hline a & 2 & & 2 & & 2 & 1 & & 1 & & & 1 \\ b & & 1 & 1 & & & & & & & & \\ c & 2 & 1 & 4 & & 2 & 2 & 1 & 1 & & & 2 \\ d & & & & 2 & 1 & 1 & & & & & 1 \\ e & 2 & & 2 & 1 & 4 & 2 & & 1 & 1 & & 2 \\ f & 1 & & 2 & 1 & 2 & 5 & 1 & & 1 & 1 & 3 \\ g & & & 1 & & & 1 & 2 & 1 & & & 1 \\ h & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & 3 & & & 1 \\ i & & & & & 1 & 1 & & & 2 & 1 & \\ j & & & & & & 1 & & & 1 & 1 & \\ k & 1 & & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & & & 4 \end{array}$$

As it may be seen from the diagonal and the off-diagonal entries of these two matrices, with the radio system the stations will have a greater number of direct and alternative two-step outlets to other stations than with the cable system.

The comparative degrees of flexibility of the two systems, as obtained from the above matrices, are as follows :

	<i>Direct contacts between stations</i>	<i>Two-step contacts between stations</i>
Cable system network	22	28
Radio system network	30	70

#### ACKNOWLEDGMENT

My thanks are due to my former doctoral advisor, Prof. S. B. Littauer and to Prof. L. A. Zadeh, both of Columbia University, for their valuable council which led to my interest in this subject. Thanks are also due to my son, David J. Prihar, for his help in checking the numerical calculations of the matrices.

## PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DES RÉSEAUX DE COMMUNICATION

Z. PRIHART<sup>1</sup>, SENIOR MEMBER, IRE<sup>2</sup>

Résumé - Cet article décrit une méthode d'analyse matricielle développée par Luce et Perry pour l'étude des structures de groupes sociométriques et des cliques. Ces concepts sont appliqués aux réseaux de télécommunication. Deux nouvelles matrices de trafic sont également proposées qui, combinées aux matrices de connectivité, donnent des indications quantitatives sur le trafic entrant et sortant. Divers concepts utiles sont mis en évidence et un certain nombre d'applications sont illustrées par des exemples numériques.

### GRAPHES ET MATRICES

La théorie générale classique des graphes distingue deux types principaux de graphes, finis et infinis<sup>1</sup>. Ces derniers, à leur tour, peuvent appartenir à la classe des graphes orientés ou non orientés, et chacun de ces graphes est complètement caractérisé par son ensemble de liens  $p$  terminés aux différents sommets  $m$ .

Selon la terminologie de la théorie des graphes, un réseau de télécommunication pourrait appartenir à la classe des graphes orientés finis. Les autres concepts analogiques correspondant dans un réseau de télécommunication sont les suivants : un central téléphonique, une station radio ou une station relais appartiendrait à une région de dimension 0 ; *i.e.*, un point ou sommet  $m$ . Un lien de communication correspondrait à une région à une dimension ; *i.e.*, un lien  $p$ .

Selon d'autres concepts de la théorie des graphes linéaires, un réseau de communication local pourrait être défini comme une région délimitée et un réseau général à l'échelle du pays comme une région non délimitée. Un certain nombre d'échanges inter-connectés formerait alors une structure simplement connectée. Cela s'appliquerait également à un certain nombre de stations radio ou de stations relais inter-connectées, et une station ou un central principal, connecté à un certain nombre de stations satellites, formerait une structure  $n$  fois connectée.

La topologie étudiant les aspects non métriques de l'espace et, en particulier, les connexions possibles entre différentes positions, propriétés de nature qualitative, appliquer utilement ces relations à l'étude des réseaux de télécommunication semble possible.

---

1. RCA International Division, New York, N. Y.

2. Manuscrit original reçu le 20 octobre 1955 ; version révisée reçue le 3 janvier 1956.

1. Cette distinction renvoie au manuel de König, cité un peu plus loin, édité en Allemagne en 1936 et réédité - mais non traduit - à New York en 1950.

L'un des principaux problèmes de la planification des réseaux de télécommunication<sup>2</sup> est la connectivité entre les points  $m$  définis ci-dessus par l'intermédiaire de certaines liaisons  $p$ ; le problème général est de définir à travers quelles régions la liaison doit passer pour que la communication requise soit atteinte avec le minimum de connectivité.

La figure 1 représente un graphe orienté simple. Tout lien, par exemple  $P_1Q_1$ , est entièrement défini par son sommet  $m = P_1$ <sup>3</sup> et son lien  $p$  de  $P_1$  à  $Q_1$ . Une application utile aux graphes orientés, exprimant les différentes connexions et leurs relations, est la fonction logique de la relation binaire  $R$ . La liaison ci-dessus de  $P_1$  à  $Q_1$  est ainsi définie comme  $P_1RQ_1$ . Dans le cas d'une antimétrie<sup>4</sup>, une liaison unilatérale serait :

$$P_1RQ_1 \neq Q_1RP_1;$$

en cas de symétrie, on a une liaison bilatérale :

$$P_1RQ_1 = Q_1RP_1.$$

De même, la transitivité correspondrait à

$$P_2RP_1 + P_1RQ_1 = P_2RQ_2,$$

une connexion de  $P_2$  à  $Q_2$  via une station intermédiaire  $P_1$ .

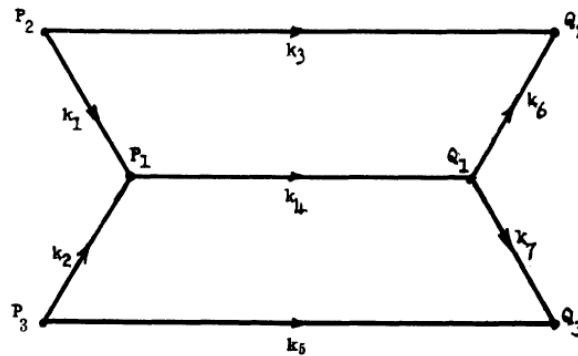


Fig. 1

Une autre classe de la fonction logique est la relation  $P_1RP_1$ , correspondant à un cas de réflexivité ; *i.e.*, un point connecté à lui-même. Cette classe

2. L'aspect applicatif est affirmé; on retrouvera cet aspect notamment dans les travaux relatifs aux réseaux de transport.

3. L'auteur utilise le terme *vertex* qui mêle le singulier *vertex* et le pluriel *vertices*; l'emploi du lexique de la théorie des graphes n'est pas encore totalement normalisé.

4. Le terme *antimetry* est utilisé dans l'étude des réseaux électriques; le graphe étudié ici étant orienté et simple, le terme asymétrique est équivalent.

sort du cadre de cet article mais elle pourrait être considérée comme un cas de réflexivité dans le problème de théorie des graphes traité par Mason.<sup>5</sup>

Comme l'ont montré Luce et Perry,<sup>6 7</sup> lorsqu'on présente diverses relations sous forme de diagrammes ou de graphiques, l'analyse et la présentation des résultats peuvent être grandement améliorées par l'utilisation de l'algèbre matricielle. Dans leurs articles, Luce et Perry présentent une méthode matricielle pour l'étude des relations entre les individus et les groupes ; à l'aide de certaines propriétés de ces matrices, ils proposent différentes propriétés de connectivité ainsi que les concepts de  $n$ -chaînes et de cliques. Leur formulation mathématique est basée sur le symbolisme et la nomenclature utilisés dans la théorie des ensembles de points et la topologie générale<sup>8</sup>. Les concepts développés par Luce et Perry sont appliqués dans cet article aux réseaux de télécommunication. La formulation mathématique, donnée sous une forme réduite pour une meilleure compréhension du sujet, sera faite avec les formes standard d'algèbre matricielle connues des ingénieurs.

La matrice des antimétries (liaisons unilatérale) est formée par les entrées suivantes  $x_{ij}$  :

- $x_{ij}=1$  si et seulement si il existe un lien entre  $i$  et  $j$ ,
- $x_{ij}=0$  si aucun lien n'existe entre  $i$  et  $j$ .

Une matrice de symétries est formée à partir de la matrice ci-dessus avec des entrées  $s_{ij}$  définies comme suit :

- $s_{ij}=1$  si et seulement si  $x_{ij} = x_{ji}$ , un lien bilatéral existe entre  $i$  et  $j$ .
- $s_{ij}=0$  sinon, aucun lien bilatéral n'existe entre  $i$  et  $j$ .

Ainsi, le graphe orienté de la figure 1 a la matrice correspondante suivante d'antimétries  $X = (x_{ij})$ .

$$X = (x_{ij}) = \begin{array}{c|cccccc} & P_1 & P_2 & P_3 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ \hline P_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ P_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ P_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Le réseau de la figure 1 ne comporte que des liaisons unilatérales, la matrice  $S = (s_{ij})$  correspondante a toutes ses entrées égales à 0. En revanche, si

5. J. Mason, "Feedback theory -some properties of signal flow graphs," Proc. IRE, vol. 41, p. 1144 ; septembre, 1953.

6. R. D. Luce, et A. D. Perry, "A method of matrix analysis of group structure," *Psychometrika*, vol. 14, pp. 95-116 ; March, 1949.

7. R. D., Luce, "Connectivity and generalized cliques in sociometric group structure", *Psychometrika*, vol. 15, pp. 169-190 ; June 1950.

8. Les deux termes - *point-set theory* et *general topology* - sont aujourd'hui considérés comme équivalents.

toutes les liaisons de la figure 1 étaient bilatérales, la matrice  $S$  aurait la même forme que la matrice  $X$  ci-dessus.

Bien qu'il semble que dans les réseaux de communication modernes, tous les liens soient toujours symétriques, c'est-à-dire à double sens, on montrera ici, à l'aide d'un exemple numérique, que dans certains circuits radio, il existe des antimétries possibles dans les réseaux de communication.

L'application des matrices aux graphes n'est pas nouvelle. Il n'est pas non plus nécessaire de limiter les entrées à une logique binaire, avec seulement des 0 ou des 1. Dans la matrice de Poincaré-Veblen d'un graphe orienté fini, citée par König<sup>9</sup>, si  $P_i$  sont les sommets du graphe, avec  $i=1, 2, \dots, a_0$  et  $k_j$  ses liens, avec  $j=1, 2, \dots, a_1$ , les valeurs  $t_{ij}$  de la matrice sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} t_{ij} &= 1 \text{ si } P_i \text{ est le sommet d'origine du lien } k_j, \\ t_{ij} &= -1 \text{ si } P_i \text{ est le sommet d'extrémité du lien } k_j, \text{ et} \\ t_{ij} &= 0 \text{ si } P_i \text{ n'a pas de lien avec } k_j. \end{aligned}$$

La matrice ainsi définie, avec une logique à 3 valeurs,

$$T = (t_{ij})(i = 1, 2 \dots a_0; j = 1, 2 \dots a_1)$$

avec  $a_0$  lignes et  $a_1$  colonnes, est appelée la matrice d'incidence de  $G$ ,  $G$  étant le graphe orienté fini considéré. La matrice de Poincaré-Veblen correspondant à la figure 1 a six lignes correspondant aux six sommets et sept liens correspondant aux sept colonnes  $k_1, \dots, k_7$  et a la forme suivante :

$$T = (t_{ij}) = \begin{array}{cccccccc} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 \\ P_1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ P_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ Q_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ Q_2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ Q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

Comme on le voit, chaque colonne de la matrice d'incidence a des entrées +1 et -1 et une somme totale de 0. Le rang d'une matrice d'incidence est toujours égal à  $a_0 - v$  où  $v$  est le nombre de mailles<sup>10</sup>. Par conséquent, la matrice ci-dessus correspondant à la figure 1 a pour rang  $6-2=4$ .

D'autres applications des matrices et de leurs propriétés sont données par König dans son traitement des matrices de Poincaré-Veblen et diverses autres propriétés et relations générales des matrices et des déterminants dans leur application aux graphes sont également données par König.<sup>11</sup>

9. D. König, "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen," New York, N. Y.. Chelsea Publishing Company, p. 141; 1950. Dans la traduction américaine de 1990, ce point est abordé au chapitre *Cycles and stars*, p. 243 et sq.

10. Le terme *mesh* n'est pas défini par l'auteur.

11. König, *ibid.*, p. 237.

Les concepts développés par Luce et Perry ont les applications possibles suivantes dans les réseaux de télécommunication : si une matrice  $X^{(2)}$  est formée à partir de la matrice des antimétries  $X$ , ses entrées diagonales  $x_{ii}^{(2)}$  donnent d'un coup d'œil les canaux de communication directs de la station  $i$  avec les stations  $j$  du réseau, avec  $j = 1, 2, \dots, n$ .  $x_{ii}^{(2)} = c$ ,  $c$  étant une valeur réelle avec  $i$  pour la  $i$ ème entrée, il existe  $c$  relations symétriques. La preuve en est donnée par la définition de la diagonale principale d'une matrice

$$x_{ii}^{(2)} = \sum_{j=1}^n x_{ij}x_{ji} \quad (i = j = 1, 2, \dots, n)$$

et une connexion bilatérale existe si  $x_{ij} = x_{ji} = 1$ <sup>12</sup>. Dans le cas contraire,  $x_{ij} = x_{ji} = 0$  et leur produit 0. Comme la somme se fait pour tous les  $j$  de 1 à  $n$ , l'expression ci-dessus donne donc le total des connexions directes entre la station  $i$  et la station  $j$  du réseau, avec  $j=1,2,\dots,n$ .

Si l'on forme une matrice  $X^{(n)}$  à partir d'une matrice  $X$ , ses entrées  $x_{ij}^{(n)} = h$ , avec  $h$  un nombre réel, indiquent qu'il existe  $h$  chemins possibles dans le réseau pour que la station  $i$  atteigne la station  $j$  en  $n$  étapes; *i.e.*, liens, correspondant au passage par  $n-1$  stations intermédiaires entre  $i$  et  $j$ . Une telle matrice est intéressante pour le contrôle du flux de trafic et des déviations en cas de pannes partielles des circuits du réseau.

La preuve que l'entrée  $x_{ij}^{(n)}$  d'une matrice  $X^{(n)}$  a une valeur  $h$  s'il existe  $h$  chaînes distinctes de  $i$  à  $j$  à travers  $n$  liens ou  $n_1 - 1$  stations intermédiaires, peut encore être obtenue à partir de la définition de la matrice

$$x_{ij}^{(n)} = \sum_{q=1}^n \dots \sum_{k=1}^n x_{ik}x_{k1}x_{1m} \dots x_{pq}x_{qj}$$

puisque si l'un de ces liens individuels existe,

$$x_{ik} = x_{k1} = x_{1m} = \dots = x_{pq} + x_{qj} = 1$$

et sinon 0, chacune de ces chaînes est également égale à 1 et leur somme donne le nombre total de tous les  $n$  chemins distincts de  $i$  à  $j$  à travers  $n-1$  stations intermédiaires. La figure 2 montre clairement ce qui précède dans le cas d'un exemple simple de  $x_{ij}^{(2)}$  à travers une station intermédiaire. Pour  $n=2$ ,

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(n)} &= x_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n x_{ik}x_{kj} \\ &= x_{i1}x_{1j} + x_{i2}x_{2j} + \dots + x_{in}x_{nj}. \end{aligned}$$

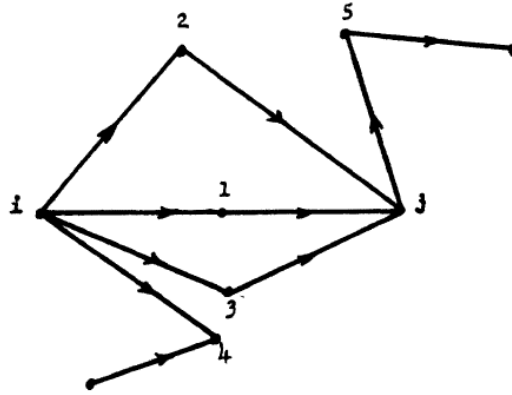


Fig. 2

Pour la figure 2,

$$x_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n x_{ik}x_{kj} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 0 = 3$$

Par conséquent, le nombre total de connexions disponibles entre  $i$  et  $j$  à travers une station intermédiaire est de  $h=3$ . D'autres exemples plus loin dans l'article montrent l'application de cette matrice à des réseaux plus complexes.

Une appréciation générale du degré de connectivité d'un réseau, du point de vue du trafic, peut être obtenue à partir de la matrice suivante

$$A(n) = X + X^{(2)} + X^{(3)} + \dots + X^{(n)}.$$

Si toutes les entrées de la matrice  $A(n)$  sont remplies, alors toutes les stations formant le réseau peuvent communiquer entre elles de manière directe ou par l'intermédiaire de 1, 2, ou 3, etc. jusqu'à  $n-1$  stations intermédiaires. Les entrées 0 montrent qu'aucune connexion directe ou indirecte n'existe entre les stations données.

Une mesure de la connectivité d'un réseau peut être obtenue en utilisant d'autres concepts de la théorie des graphes linéaires. Soit  $p$  le nombre de liens d'un réseau,  $m$  son nombre de stations (sommets), alors sa connectivité maximale, *i.e.*, le nombre maximal de connexions possibles du réseau est

$$p_{max} = m(m - 1),$$

---

12. On attendrait  $x_{ij} = x_{ji} = 1$ . Les liens considérés étant symétriques, la formule donnée est équivalente.



son premier nombre de Betti (indice cyclomatique)

$$\mu = p - m + 1,$$

et son rang

$$R = m - 1 = p - \mu.$$

Étant donné le degré réel de connectivité d'un réseau, exprimé par le nombre de ses liens  $p$ ,  $p$  peut être relié aux connectivités maximale et minimale du réseau par les relations suivantes :

degré de connectivité maximale  $p/m(m-1)$  et  
degré de connectivité minimale  $= p/(m-1)$  (pour  $\mu = 0$ ).  
La relation donnée par le premier nombre de Betti

$$\mu = p - m + 1 = 0$$

peut servir à déterminer les réseaux de communication minimaux et présente un intérêt particulier pour les systèmes téléphoniques automatiques. Avant l'avènement de la téléphonie automatique, lorsque l'exploitation était essentiellement manuelle, il n'était ni faisable ni économique d'établir une connexion dans un réseau zonal avec plus de 2 ou 3 centraux. Par conséquent, on assurait autant de liaisons directes qu'il était économiquement possible. Voici un exemple simple et représentatif. Dans un système à commande manuelle, la figure 1 serait probablement le réseau prévu pour six centraux. Dans un système automatique, où les chemins de connexion ne sont pas apparents pour l'utilisateur, la connectivité probablement la plus économique et suffisante serait, pour le système de la figure 1, le réseau illustré par la figure 3. Dans cet exemple, les figures 1 et 2 ont toutes deux des liaisons bidirectionnelles.

En appliquant les mesures de connectivité suggérées ci-dessus, pour la figure 1,  $p=9$ ;  $m=6$ ; et  $\mu=4$ ; cela correspond à un rapport de connectivité maximum de  $9/30$  et un rapport de connectivité minimum de  $9/3$ . Pour la figure 3,  $p=5$ ;  $m=6$ ; et  $\mu=0$ ; le rapport de connectivité maximum est  $5/30=1/6$  et le rapport de connectivité minimum  $=5/5=1$ .

#### MATRICES DE TRAFIC

Une nouvelle relation matricielle est proposée comme outil pouvant être utile à l'étude des réseaux de télécommunication.

Soit un réseau de communication avec une matrice de connectivité  $X$ , chaque relation existante entre deux stations quelconques  $i$  et  $j$  du réseau est définie dans la matrice  $X$  par  $x_{ij}=1$  et par  $x_{ij}=0$  si une telle relation n'existe pas. Si chacune de ces relations a  $t$  lignes ou unités de trafic,  $t$  étant un nombre réel, et qu'une matrice  $T$  est formée avec les entrées  $t_{ij}$  correspondantes, où  $t_{ij}$  = nombre de lignes ou d'unités de trafic entre les

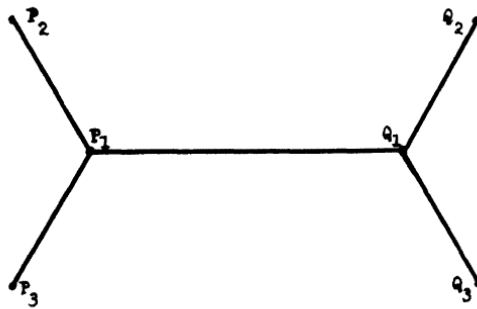


Fig. 3

stations  $i$  et  $j$ , alors un produit des matrices  $X$  et  $T$  donne les deux nouvelles matrices suivantes :

Matrice de trafic entrant  $P = XT$

Matrice de trafic sortant  $Q = TX$ .

Les entrées diagonales principales de la matrice  $P$  indiquent le nombre total de lignes ou d'unités de trafic entrant dans la station et les entrées diagonales principales de la matrice  $Q$  indiquent le nombre total de lignes ou d'unités de trafic sortant de la station.

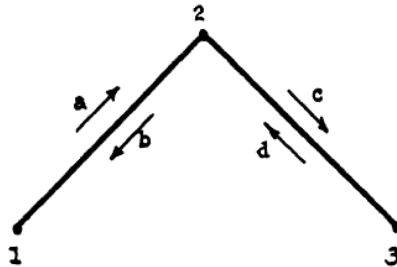


Fig. 4

L'illustration suivante montrant un cas simplifié de trois centraux téléphoniques permet de mieux comprendre ce qui précède. La figure 4 représente les connexions entre les trois centraux 1, 2 et 3 et  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont les quantités en nombres réels de lignes ou d'unités de trafic entre les trois stations dans les deux directions. La matrice de connectivité  $X$  correspondant à la figure 4 est la suivante

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de trafic  $T$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

À partir de ces deux matrices, on obtient la matrice du trafic entrant  $P$ .

$$P = XT = \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & (a+d) & 0 \\ b & 0 & c \end{pmatrix}$$

dont les entrées de la diagonale principale indiquent le nombre de lignes entrant aux stations 1, 2 et 3. De la même manière, la matrice de trafic sortant  $Q$  est la suivante

$$Q = TX = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & (b+c) & 0 \\ d & 0 & d \end{pmatrix}$$

où les entrées de la diagonale principale indiquent le trafic sortant des trois stations.

Une preuve de ce qui précède est obtenue à partir de la définition d'un produit de deux matrices. Pour deux matrices quelconques,

$$(x_{ij})(t_{ij}) = \sum_{j=1}^n x_{ij}t_{ij} = p_{ii} = x_{i1}t_{1i} + x_{i2}t_{2i} + \dots + x_{in}t_{ni},$$

puisque  $x_{ij}=1$  si et seulement si il existe une relation entre  $i$  et  $j$  et  $x_{ij}=0$  sinon. Puisque la somme porte sur toutes les valeurs de  $j$ , l'expression ci-dessus de  $p_{ii}$ , avec  $t_{ij}$  étant des nombres réels, donne la somme de toutes les lignes entrantes vers la station  $i$ . De même, pour le trafic sortant.

$$(t_{ij})(x_{ij}) = \sum_{i=1}^n t_{ij}x_{ij} = q_{ij}$$

où encore une fois, si  $x_{ij} \neq 0$ , il est égal à 1. La somme des produits des membres donne le nombre total de lignes sortant de la station vers toutes les autres stations du réseau avec lesquelles elle a une connexion directe.

Les entrées hors diagonale des matrices  $P = XT$  et  $Q = XT$  présentent également un certain intérêt. Elles sont données par les expressions suivantes :

$$(t_{ij})(t_{jk}) = \sum_{j=1}^n x_{ij}t_{jk}$$

et



$$X = \begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ A & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 1 & & 1 & 1 & & & \\ C & & 1 & & 1 & & & \\ D & & 1 & 1 & & 1 & & \\ E & & & & 1 & & & \\ F & & & & & & & 1 \\ G & 1 & & & & & 1 & \end{array}$$

La matrice  $X^{(2)}$  correspondante est

$$X^{(2)} = \begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ A & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ B & & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ C & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ D & 1 & 1 & 1 & 3 & & & \\ E & & 1 & 1 & & 1 & & \\ F & 1 & & & & & 1 & \\ G & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

La matrice ci-dessus, comme expliqué précédemment, contient les informations suivantes sur le réseau : les entrées diagonales  $x_{ii}$  indiquent le nombre total de tous les canaux de communication bidirectionnels directs possibles des stations ; la station  $A$  en a 2, la station  $B$  3, etc. jusqu'à la station  $G$  qui a deux canaux bidirectionnels directs avec les autres stations du réseau. Toutes les autres entrées hors diagonale de la matrice indiquent le nombre de connexions possibles en 2 étapes entre les stations indiquées par la matrice ; *i.e.*, le nombre de possibilités qu'a la station  $i$  pour atteindre la station  $j$  à travers une station relais. Par exemple, la station  $A$  peut atteindre la station  $D$  par l'intermédiaire de trois stations différentes jouant le rôle de stations relais intermédiaires, alors que la station  $D$  n'a qu'une seule liaison possible en deux étapes avec la station  $A$ .

La matrice  $S$ , dérivée de la matrice  $X$ , est la suivante

$$S = \begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ A & & 1 & & & & & 1 \\ B & 1 & & 1 & 1 & & & \\ C & & 1 & & 1 & & & \\ D & & 1 & 1 & & 1 & & \\ E & & & & 1 & & & \\ F & & & & & & & 1 \\ G & 1 & & & & & 1 & \end{array}$$

La matrice  $S$  indique tous les canaux de communication bidirectionnels directs. Par conséquent, la somme de chaque ligne est égale à l'entrée diagonale de la ligne correspondante dans la matrice  $X^{(2)}$ .

Pour vérifier si toutes les stations sont en mesure de communiquer entre elles en une ou deux étapes, on forme la matrice  $A(n) = A(2)$ , où  $A(2) = X + X^{(2)}$ .

$$A(2) = X + X^{(2)} = \begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline A & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ B & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ C & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & & \\ D & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & & \\ E & & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ F & 1 & & & & & 1 & 1 \\ G & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

La matrice  $A(2)$  ci-dessus montre que toutes les stations peuvent communiquer entre elles en une ou deux étapes, à l'exception des stations  $C$ ,  $D$  et  $E$ , qui ne peuvent pas communiquer avec les stations  $F$  et  $G$ . De même, la station  $E$  ne peut pas communiquer avec la station  $A$  et la station  $F$  avec les stations  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$ .

Pour vérifier si toutes les stations peuvent communiquer entre elles en une, deux ou trois étapes, en passant par deux stations relais intermédiaires, on forme la matrice  $A(3)$  où

$$A(3) = X + X^{(2)} + X^{(3)}$$

Il est nécessaire de d'abord déterminer la matrice  $X^{(3)}$  à partir des matrices  $X^{(2)}$  et  $X$  ci-dessus

$$X^{(3)} = \begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline A & 3 & 7 & 7 & 7 & 5 & 3 & 3 \\ B & 4 & 4 & 5 & 7 & 2 & 1 & 1 \\ C & 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ D & 1 & 5 & 5 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ E & 1 & 1 & 1 & 3 & & & \\ F & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ G & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

Les entrées hors diagonale de cette matrice indiquent le nombre de façons dont une station quelconque  $i$  peut atteindre la station  $j$  en trois étapes à travers deux stations intermédiaires. La matrice  $A(3)$  est la suivante

$$A(3) = X + X^{(2)} + X^{(3)} = \begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline A & 5 & 9 & 9 & 10 & 6 & 4 & 3 \\ B & 4 & 7 & 7 & 9 & 4 & 2 & 2 \\ C & 2 & 5 & 5 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ D & 2 & 3 & 5 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ E & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & & \\ F & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ G & 3 & 3 & 3 & 4 & 2 & 3 & 3 \end{array}$$

Cette matrice indique que la station  $E$  est la seule à ne pas pouvoir communiquer avec les stations  $F$  et  $G$  même en trois étapes, et une matrice  $A(4)$  montre que toutes les entrées sont remplies. Par conséquent, la station  $E$  doit utiliser trois stations intermédiaires pour atteindre les stations  $F$  et  $G$  ou faire augmenter la puissance de son émetteur.

#### SYSTÈMES DE TÉLÉCOMMUNICATION PAR RADIO OU PAR CÂBLE

L'exemple suivant illustre une application possible permettant de comparer les degrés relatifs de flexibilité des systèmes radio et câble pour un réseau de télécommunication donné. Le réseau est composé de 11 stations. Des canaux bidirectionnels directs sont présents entre toutes les stations. Par conséquent, la matrice de connectivité correspondante  $X = S$  a le nombre maximum d'entrées  $m(m - 1)$  avec  $m = 11$ . La matrice est la suivante

$$X = S = \begin{array}{c|ccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ \hline a & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ g & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ h & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ j & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Le nombre de canaux de trafic réels, bidirectionnels, nécessaires entre les différentes stations est donné par la matrice de trafic  $T$  suivante :

$$T = \begin{array}{c|ccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ \hline a & & 192 & 24 & 12 & 36 & 24 & 12 & 24 & 24 & 24 & 24 \\ b & 192 & & 24 & 24 & 12 & 6 & 4 & 12 & 12 & 6 & 12 \\ c & 24 & 24 & & 12 & 12 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 & 12 \\ d & 12 & 24 & 12 & & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ e & 36 & 12 & 12 & 4 & & 12 & 12 & 4 & 6 & 4 & 4 \\ f & 24 & 6 & 6 & 4 & 12 & & 4 & 12 & 6 & 4 & 12 \\ g & 12 & 4 & 4 & 4 & 12 & 4 & & 4 & 12 & 4 & 4 \\ h & 24 & 12 & 4 & 4 & 4 & 12 & 4 & & & & \\ i & 24 & 12 & 4 & 4 & 6 & 6 & 12 & 12 & & & \\ j & 24 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 12 & 4 & & \\ k & 24 & 12 & 12 & 4 & 4 & 12 & 4 & 4 & 4 & 4 & \end{array}$$

Puisque tous les canaux transportent un trafic bidirectionnel

$$P = XT = TX = Q$$

et les éléments suivants sont des entrées diagonales principales de la matrice  $P = Q$

$$P = Q = \begin{array}{c|cccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ \hline a & 396 & & & & & & & & & & \\ b & & 304 & & & & & & & & & \\ c & & & 106 & & & & & & & & \\ d & & & & 76 & & & & & & & \\ e & & & & & 106 & & & & & & \\ f & & & & & & 90 & & & & & \\ g & & & & & & & 64 & & & & \\ h & & & & & & & & 92 & & & \\ i & & & & & & & & & 88 & & \\ j & & & & & & & & & & 70 & \\ k & & & & & & & & & & & 84 \end{array}$$

On a ci-dessus les canaux entrants et sortants de chacune des stations correspondant aux entrées  $p_{ii} = q_{ii}$ .

Dans un système câblé, la matrice suivante est la matrice de connectivité  $X_c = S_c$  du réseau câblé qui satisfait toutes les exigences économiques et technologiques à un coût minimal; *i.e.*, réseau minimal.

$$X_c = S_c = \begin{array}{c|cccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ \hline a & & & & & & & & & & & 1 \\ b & & & & 1 & & & & & & & \\ c & & & & 1 & 1 & & & & & & 1 \\ d & & 1 & 1 & & & & & & & & \\ e & & & 1 & & & & 1 & & & & \\ f & & & & & & & & 1 & & & 1 \\ g & & & & & 1 & & & & & 1 & \\ h & & & & & & 1 & & & & 1 & \\ i & & & & & & & 1 & 1 & & & \\ j & & & & & & & & & 1 & & \\ k & 1 & & 1 & & & 1 & & & & & \end{array}$$

Dans le cas d'un système radio où la distribution, ou la transmission par faisceau, n'a pas besoin de suivre l'itinéraire rigide du système de câbles, la matrice de connectivité suivante  $X_r = S_r$  d'un réseau répond aux exigences économiques et technologiques du système :



$$X_r = S_r = \begin{array}{c|cccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ a & & & & & & 1 & & & & & 1 \\ b & & & & 1 & & & & & & & \\ c & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & 1 \\ d & & 1 & 1 & & & & & & & & \\ e & & & 1 & & & 1 & 1 & & & & 1 \\ f & 1 & & 1 & & 1 & & & 1 & & & 1 \\ g & & & & & 1 & & & & & 1 & \\ h & & & & & & 1 & & & & 1 & 1 \\ i & & & & & & & 1 & 1 & & & \\ j & & & & & & & & 1 & & & \\ k & 1 & & 1 & & & 1 & & & & & \end{array}$$

Les matrices  $X^{(2)} = S^{(2)}$  correspondantes pour les deux systèmes sont les suivantes :

$$X_c^{(2)} = S_c^{(2)} = \begin{array}{c|cccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ a & 1 & & 1 & & & 1 & & & & & \\ b & & 1 & 1 & & & & & & & & \\ c & 1 & 1 & 3 & & & 1 & 1 & & & & \\ d & & & & 2 & 1 & & & & & & 1 \\ e & & & & 1 & 2 & & & & 1 & & 1 \\ f & 1 & & 1 & & & 2 & & & 1 & 1 & \\ g & & & 1 & & & & 2 & 1 & & & \\ h & & & & & & & 1 & 3 & & & 1 \\ i & & & & & 1 & 1 & & & 2 & 1 & \\ j & & & & & & 1 & & & 1 & 1 & \\ k & & & & 1 & 1 & & & 1 & & & 3 \end{array}$$

et

$$X_r^{(2)} = S_r^{(2)} = \begin{array}{c|cccccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k \\ a & 2 & & 2 & & 2 & 1 & & 1 & & & 1 \\ b & & 1 & 1 & & & & & & & & \\ c & 2 & 1 & 4 & & 2 & 2 & 1 & 1 & & & 2 \\ d & & & & 2 & 1 & 1 & & & & & 1 \\ e & 2 & & 2 & 1 & 4 & 2 & & 1 & 1 & & 2 \\ f & 1 & & 2 & 1 & 2 & 5 & 1 & & 1 & 1 & 3 \\ g & & & 1 & & & 1 & 2 & 1 & & & 1 \\ h & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & 3 & & & 1 \\ i & & & & & 1 & 1 & & & 2 & 1 & \\ j & & & & & & 1 & & & 1 & 1 & \\ k & 1 & & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & & & 4 \end{array}$$

Comme on peut le constater à partir des entrées diagonales et hors diagonales de ces deux matrices, avec le système radio, les stations disposent

d'un plus grand nombre de débouchés directs et alternatifs en deux étapes vers d'autres stations qu'avec le système par câble.

Les degrés de flexibilité des deux systèmes, tels qu'ils sont obtenus à partir des matrices ci-dessus, sont les suivants :

	<i>Contacts directs entre stations</i>	<i>Contacts en deux étapes entre stations</i>
Réseau câblé	22	28
Réseau radio	30	70

#### REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont à mon ancien directeur de thèse, le professeur S. B. Littauer et au professeur L. A. Zadeh<sup>13</sup>, tous deux de l'université de Columbia, pour leurs précieux conseils qui ont suscité mon intérêt pour ce sujet. Mes remerciements vont également à mon fils, David J. Prihar, pour son aide dans la vérification des calculs numériques des matrices.

---

13. Peu d'informations sont disponibles en ligne sur S.B. Littauer ; L.A. Zadeh est un mathématicien connu pour ses travaux sur les ensembles flous (source : wikipedia).

groupe f.m.r.



La collection « [textes](#) » du groupe fmr (flux, matrices, réseaux) propose des rééditions bilingues d'articles consacrés à l'analyse de réseaux.

Parus

- L. Beauguitte, P. Beauguitte et P. Gourdon, 2021, « [William L. Garrison, 1960, Connectivity of the Interstate Highway System](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Joseph B. Kruskal, 1956, On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [E.W. Dijkstra, 1959, A Note on Two Problems in Connexion with Graphs](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1951, Application of Matrix Algebra to Communications Nets](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1953, Structural Parameters of Communication Networks](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Z. Prihar, 1956, Topological Properties of Telecommunication Networks](#) ».