

Sensors & MEMS - version 1 - 2020/21

Jérôme Juillard

▶ **To cite this version:**

Jérôme Juillard. Sensors & MEMS - version 1 - 2020/21. Engineering school. France. 2020. hal-03214716

HAL Id: hal-03214716
https://hal.science/hal-03214716

Submitted on 2 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Capteurs & MEMS

Métrologie, électronique, physique, etc.

Jérôme Juillard
GEEPS – DEPARTEMENT SYSTEMES ELECTRONIQUES

Table des matières

Préambule 5
1 Notions fondamentales 7
1.1 Notions de métrologie 7
1.2 Eléments constitutifs d'un capteur 10
1.3 Bilan d'erreur 12
1.4 Transducteurs 13
1.4.1 Transducteurs passifs 13
1.4.2 Transducteurs actifs 16
1.5 Références 17
2 Electronique de conditionnement 19
2.1 Ponts et montages potentiométriques 19
2.1.1 Montages potentiométriques 20
2.1.2 Pont de Wheatstone 21
2.2 Frontaux analogiques 22
2.2.1 Transducteurs à sortie en courant 23
2.2.2 Transducteurs à sortie en tension 23
2.3 Non-idéalités de l'électronique 24
2.3.1 Composants passifs 24
2.3.2 Composants actifs 26
2.3.3 Interconnexions 32
2.4 Références 33
3 Accéléromètres et gyroscopes MEMS 35
3.1 Accéléromètres MEMS 35
3.1.1 Sensibilité 36
3.1.2 Bruit 38
3.1.3 Effets dynamiques dans les accéléromètres 39
3.2 Gyroscopes MEMS 41
3.2.1 Sensibilité 42
3.2.2 Bruit 44
3.2.3 Gyroscopes à modes dégénérés 45
3.2.4 Erreur de quadrature 45
3.3 Références 46
4 Physique des MEMS 48
4.1 Introduction 48

4.2 Mécanique des MEMS 48
4.2.1 Principes fondamentaux 48
4.2.2 Poutres et suspensions 50
4.2.3 Plaques et membranes 60
4.3 Transduction électromécanique 61
4.3.1 Généralités 61
4.3.2 Détection 62
4.3.3 Actionnement 68
4.4 Dissipation 78
4.4.1 Généralités 78
4.4.2 Pertes fluidiques 79
4.4.3 Pertes thermoélastiques 84
4.4.4 Pertes d'encastrements 85
4.4.5 Pertes électriques 86
4.4.6 Autres pertes 87
4.5 Références 89
5 Conception et modélisation des MEMS 90
5.1 Introduction 90
5.2 Flot de conception MEMS 91
5.2.1 Sélection des géométries 91
5.2.2 Modélisation haut-niveau 91
5.2.3 Optimisation 92
5.2.4 Modélisation bas-niveau 92
5.3 Co-simulation 93
5.3.1 Modéles électriques équivalents 93
5.3.2 Langages de description matérielle 93
5.4 Références 93
6 Autour des capteurs 94
6.1 Composants 94
6.2 Traitements 94
6.3 Environnement 94
7 Capteurs résonants FM et récupérateurs d'énergie 94
8 Annexes 96
A – DSP, variance et variance d'Allan 96
B - De la loi de Hooke à Euler-Bernoulli 98
B.1 Obtention de l'équation d'Euler-Bernoulli 98

B.2 Condition aux limites 99
C – De la poutre simple à la suspension complexe 101
C.1Poutre en torsion – Fixée en $x = 0$, couple en $x = L$ 101
C.2 Poutre en flexion – Fixée en $x = 0$, force en $x = L$ 101
C.3 Poutre en flexion– Fixée en $x = 0$, couple en $x = L$ 101
C.4 Poutre en flexion – Fixée en $x = 0$, glissante + force en $x = L$ 102
C.5 Poutre en flexion – Ressort en $x = 0$, glissante + force en $x = L$ 102
C.6 Poutre en flexion – Ressort de torsion en $x = 0$, glissante + force en $x = L$ 102
C.7 Modèle général d'une poutre sollicitée à ses extrémités 102
D - Modes propres et réduction d'ordre de modèle 105
D.1 Méthode de Galerkin 105
D.2 Analyse modale d'un résonateur simple 105
D.3 Modèles numériques et analyse modale 111
E – Au-delà des condensateurs plans 114
E.1 Approche analytique 114
E.2 Méthode des éléments frontière en électrostatique 114
F - De Navier-Stokes au squeeze-film damping 117
G - De Fourier à l'amortissement thermoélastique 117
H - Procédés de fabrication 118
I - Résumé propriétés poly-Si / mono-Si / Air 119
J – Travaux dirigés 120
K - Projets 120

Préambule

Ce document a pour vocation de servir de référence aux étudiants suivant les cours de :

- Systèmes Electroniques (**SE**, électif CentraleSupélec 1A)
- Capteurs Intégrés MEMS / Integrated MEMS Sensors (**CIMEMS**, électif CentraleSupélec 2A)
- Capteurs Hautes Performances/ High-Performance Sensors and TRansducers (**HIPSTR**, cours de la mention SCMA, CentraleSupélec 3A, et du M2 Intégration-Circuits-Systèmes de l'UPSaclay)
- Physique et Modélisation des MEMS (**PHYMEMS**, cours du M2 Nanosciences de l'UPSA)

Ces cours sont tous en lien avec mon domaine de recherche propre : la modélisation et la conception des dispositifs MEMS (Micro-electromechanical Systems), en particulier des capteurs résonants et des oscillateurs à base de MEMS.

Même si je dédie une large part de ce document aux MEMS, j'essaye de le faire dans le cadre d'une approche « système », de sorte que les notions et approches qui y sont développées soient transposables à des dispositifs reposant sur d'autres types de transducteurs.

La partie 1 du document est ainsi consacrée à des généralités. Elle est fondamentale pour l'ensemble des cours mentionnés plus haut :

- Notions de métrologie
- Eléments constitutifs d'un capteur
- Bilan d'erreur
- Transducteurs

La partie 2 est consacrée à l'électronique associée aux capteurs. Cette partie, toujours très générique, ne présente qu'un intérêt marginal pour les élèves de PHYMEMS :

- Ponts et montages potentiométriques
- Frontaux analogiques
- Non-idéalités de l'électronique

Dans la partie 3, je décris le fonctionnement de capteurs inertiels courants, avec une physique simplifiée :

- Accéléromètres MEMS
- Gyroscopes MEMS

Certaines caractéristiques métrologiques de ces capteurs sont déterminées, pour illustrer les parties précédentes.

La partie 4 traite à grands traits de la physique des MEMS :

- Mécanique
- Transduction
- Dissipation

La partie 5 est dédiée à leur conception et à leur modélisation :

- Approche de conception descendante

- Analyse modale et réduction d'ordre de modèle
- Techniques de simulation numérique

La partie 6 est consacrée à des considérations plus poussées sur certains traitements propres aux capteurs, et aux composants constituant l'environnement des capteurs :

- Détection synchrone
- Asservissement
- Test, calibration et compensation
- Fusion de données
- Environnement des capteurs (boîtier, horloges, références de tension, etc.)

La partie 7 porte sur les capteurs résonants et les récupérateurs d'énergie MEMS.

1 Notions fondamentales

1.1 Notions de métrologie

Un capteur est un dispositif qui délivre une information sur l'environnement physique dans lequel il évolue. La « sortie » du capteur prend la forme d'un signal électrique, analogique ou numérique, dont l'évolution au cours du temps doit être à l'image de celle d'une grandeur physique donnée, en « entrée » du capteur (Fig. 1.1).

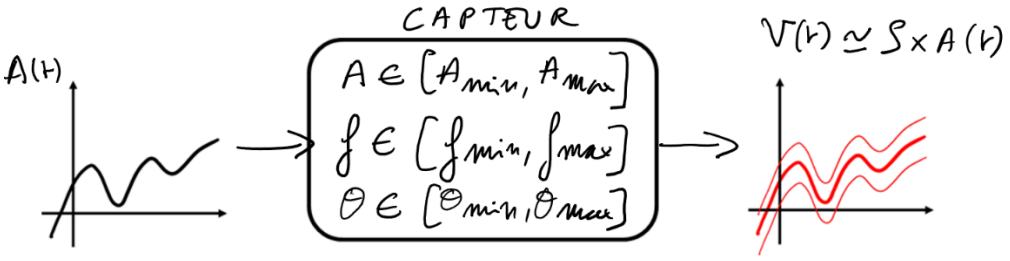


Fig. 1.1 – Un capteur fait correspondre aux variations d'une grandeur physique $A(t)$ les variations d'une tension $V(t)$ selon une relation donnée, sur une certaine gamme, à des erreurs près.

On s'attend à ce qu'il existe une relation linéaire (ou affine) entre l'entrée $A(t)$ et la sortie $V(t)$ du capteur, et que celle-ci soit valable dans la **gamme** du capteur, i.e. :

- sur un certain **intervalle de mesure** (measuring interval).
- dans une certaine **bande-passante** (bandwidth).
- indépendamment de **grandeurs d'influence** (influence quantities) affectant l'environnement du capteur.

à des **erreurs**, **systématiques** ou **stochastiques**, près, dont les valeurs typiques sont spécifiées sur cette gamme.

L'**intervalle de mesure** correspond à l'ensemble des valeurs de $A(t)$ mesurables par le dispositif, i.e. $[A_{min}, A_{max}]$. Une notion connexe est celle d'**étendue** (ou dynamique) de mesure correspondant à $A_{max} - A_{min}$.

Exemples :

1 – L'intervalle de mesure typique d'un thermomètre médical est de $[34\,°C, 43\,°C]$. *Certains thermomètres industriels ont des étendues de mesure supérieures à* $1000\,°C$.

2 – Un intervalle de mesure de $[-100\,G, 100\,G]$ $(1\,G = 9.81\,m/s^2)$ *est typique d'un accéléromètre MEMS utilisé comme capteur de crash, un intervalle de* $[-10\,G, 10\,G]$ *d'un accéléromètre utilisé dans un contrôleur de jeux, un intervalle de* $[-1g, 1g]$ *d'un inclinomètre.*

La **bande-passante** correspond à la plage de fréquences $[f_{min}, f_{max}]$ pour laquelle la sortie du capteur est une image « fidèle » de l'entrée. En vocabulaire automaticien, la fonction de transfert entre l'entrée et la sortie du capteur est « constante » sur cette bande de fréquences. La bande-passante détermine ainsi les vitesses de variation minimales et maximales de $A(t)$ que le capteur est capable de transcrire. Plus la bande-passante d'un capteur est étroite, plus son **temps de réponse** est long.

Exemples :

1 – Le temps de réponse d'un thermomètre médical au mercure est de l'ordre de quelques dizaines de secondes, ce qui correspond à une bande-passante de quelques dizaines de mHz. Les thermomètres infra-rouges permettent d'atteindre des bandes-passantes nettement supérieures (de l'ordre du kHz), et donc des temps de réponse beaucoup plus brefs.

2 – Un capteur de crash doit mesurer des changements d'accélération beaucoup plus soudains qu'un capteur pour manette de jeux, il exige donc une bande-passante plus élevée.

La valeur en sortie du capteur est susceptible d'être affectée par d'autres grandeurs physiques que celle que l'on cherche à mesurer. Ces grandeurs sont dites **grandeurs d'influence**. Pour une application capteur donnée, il est essentiel de connaître les grandeurs d'influence principales, et en quoi celles-ci affectent les performances métrologiques du dispositif.

Exemples :

1 – La distance entre le capteur et la cible est une grandeur d'influence des thermomètres à infra-rouge. Pour un thermomètre médical au mercure, c'est la surface de contact qui sera la grandeur principale d'influence (sur le temps de réponse, notamment).

2 – La température est la grandeur d'influence principale de la plupart des capteurs qui ne sont pas des thermomètres. Ceci est particulièrement vrai pour les capteurs inertiels MEMS (les propriétés mécaniques de l'élément sensible varient avec la température).

3 - De nombreux capteurs délivrent un signal proportionnel à une tension d'alimentation de référence, qui est alors une grandeur d'influence à prendre en compte.

Ces trois aspects déterminent la **gamme** d'utilisation du capteur, à l'intérieur de laquelle son comportement est souvent (mais pas toujours) modélisé par

$$V(t) = V_{ref} + S \times \big(A(t) - A_{ref}\big) + v_{sys} + v_{sto}(t) \qquad (1.1)$$

où A_{ref} est la valeur de référence de $A(t)$ (typiquement le centre de l'intervalle de mesure) et V_{ref} la tension correspondante en sortie du capteur, S est la **sensibilité** du capteur (en V par « unités de A »), v_{sys} un terme d'**erreur systématique** (en V) et v_{sto} un terme d'**erreur stochastique** (du « bruit », en V également). Dans la suite de cette partie, on supposera sans perte de généralité que V_{ref} et A_{ref} sont nuls, de sorte que le comportement du capteur est modélisé par

$$V(t) = S \times A(t) + v_{sys} + v_{sto}(t) \qquad (1.2)$$

ou encore par

$$V(t) = S \times \Big(A(t) + a_{sys} + a_{sto}(t)\Big) \qquad (1.3)$$

où $a_{sys} = v_{sys}/S$ et $a_{sto} = v_{sto}/S$.

Cette factorisation de la sensibilité opérée, les erreurs systématiques et stochastiques s'expriment en « unités de A » : a_{sys} et a_{sto} sont les erreurs **rapportées à l'entrée**, tandis que v_{sys} et v_{sto} sont les erreurs **rapportées à la sortie**. Pour que le capteur soit « précis » (ce terme nécessitant d'être … précisé), il faut que les termes d'erreur rapportée à l'entrée soient petits devant l'étendue de mesure du capteur.

L'**erreur stochastique** est une grandeur aléatoire : la sortie du capteur n'a pas exactement la même valeur lorsqu'on répète une mesure dans des conditions de fonctionnement données (grandeur d'entrée et grandeurs d'influence). L'erreur stochastique est couramment caractérisée par son spectre fréquentiel, ou par sa variance d'Allan (cf. annexe A). La **résolution**

du capteur, qui est la plus petite variation de $A(t)$ que l'on puisse mesurer, est d'autant meilleure que l'erreur stochastique est faible. Un capteur dont l'erreur stochastique est faible est dit « **fidèle** ».

Remarque :

Il est possible, dans certaines limites, d'améliorer la résolution d'un capteur :

- *en multipliant le nombre de capteurs et en moyennant leurs sorties à un instant donné. Cette solution « onéreuse » (en coût, encombrement, consommation…) suppose évidemment que les capteurs sont strictement identiques et soumis aux mêmes stimuli.*
- *en utilisant un seul capteur, et en moyennant les mesures effectuées à des instants successifs. Si l'erreur $v_{sto}(t)$ est un bruit « blanc » (de spectre plat), moyenner N échantillons successifs permet d'améliorer la résolution d'un facteur $\sqrt{N}$, mais réduit la bande-passante (augmente le temps de réponse) d'un facteur N. C'est le **compromis résolution-bande-passante**, limité par la « fréquence de coin » du bruit (en dessous de laquelle l'erreur stochastique n'est plus blanche).*

Pour un capteur donné, l'**erreur systématique** est une grandeur déterministe, dans le sens où elle est répétable. Ainsi, sa valeur ne change pas si les conditions de fonctionnement du capteur ne changent pas. Elle inclut l'**erreur de biais**, **l'erreur de sensibilité** et **l'erreur de non-linéarité**. Ces trois quantités caractérisent l'écart entre le modèle linéaire idéal

$$V(t) = S \times A(t) \qquad (1.4)$$

et le comportement réel du capteur. L'**erreur de biais** (rapportée à la sortie) correspond à la valeur de V lue lorsque la grandeur d'entrée A est nulle. Rapportée à l'entrée, elle correspond à la valeur de A qui annule la sortie du capteur. L'**erreur de sensibilité** (ou de facteur d'échelle) résulte d'un écart entre la sensibilité nominale du capteur et sa sensibilité réelle. Enfin l'**erreur de non-linéarité** regroupe toutes les déviations du comportement du capteur d'une caractéristique affine. Ces trois types d'erreurs sont illustrées à la Fig. 1.2. Un capteur dont l'erreur systématique est faible est dit « **juste** ».

Les notions de « justesse » (liée à l'erreur systématique) et de « fidélité » (liée à l'erreur stochastique) sont classiquement illustrées à la Fig. 1.3.

Remarque :

On peut bien évidemment complexifier le modèle idéal du capteur à souhait, par exemple en tenant compte d'effets dynamiques (la sensibilité est alors modélisée comme une fonction de transfert), ou de non-linéarités éventuelles (on remplacerait (1.4) par un modèle polynomial, par exemple).

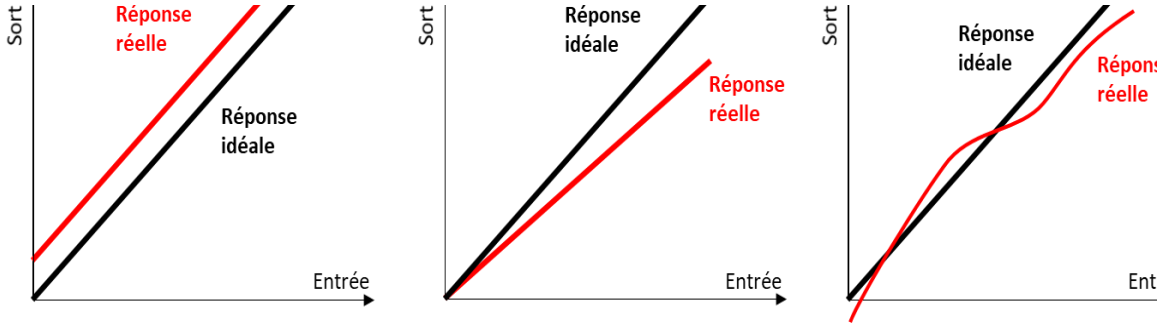


Fig. 1.2 - Erreurs systématiques. De gauche à droite : effets d'une erreur de biais, d'une erreur de sensibilité et d'une erreur de non-linéarité.

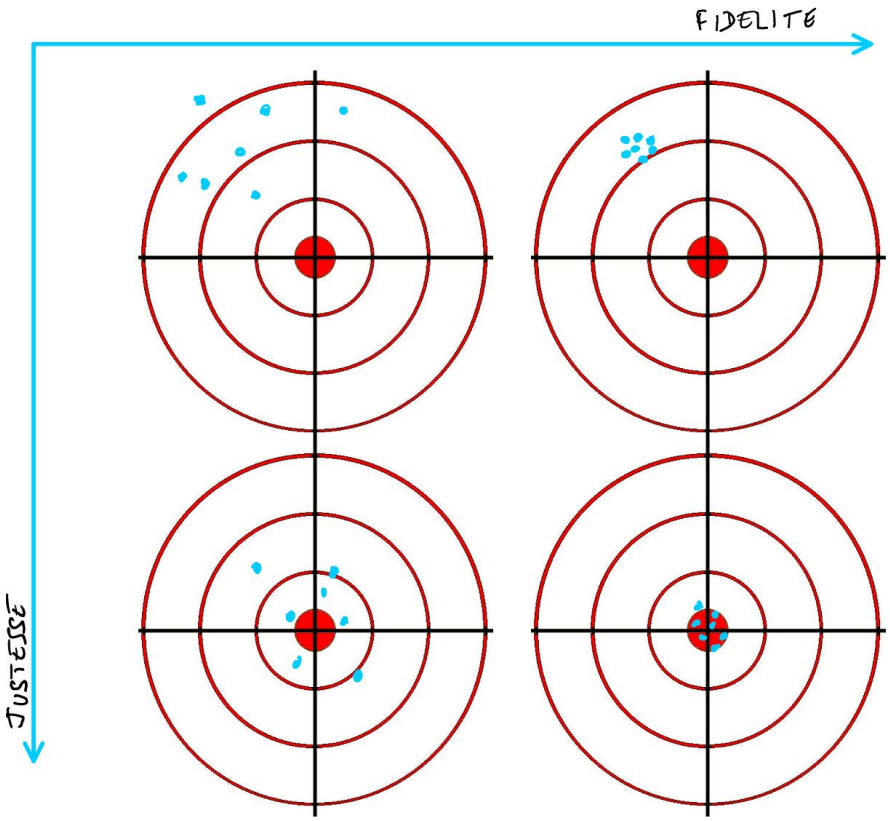


Fig. 1.3 - Justesse et fidélité.

Exercice :

Faire le lien entre les notions abstraites présentées ci-dessus et la datasheet d'un capteur du commerce. La datatasheet de l'accéléromètre ADXL 1001, par exemple, permet d'identifier l'étendue de mesure et la bande-passante du capteur, de quantifier l'impact des grandeurs d'influence que sont la température et la tension d'alimentation sur les caractéristiques du capteur, et de déterminer la résolution du capteur sur une bande-passante donnée.

1.2 Eléments constitutifs d'un capteur

Pour choisir et utiliser un capteur du commerce dans une application donnée, il est somme toute suffisant de bien maîtriser les notions présentées à la section précédente, et d'inclure à la réflexion d'autres éléments tels que les contraintes de coût, de consommation… Pour développer un nouveau capteur (plus « optimal » que ceux du commerce), il est nécessaire de descendre à un niveau inférieur et de s'intéresser aux éléments constitutifs plus fondamentaux des capteurs. L'objectif de l'ingénieur sera alors de choisir et d'assembler ces sous-systèmes de manière à répondre à des spécifications, métrologiques notamment. A cette fin, il lui sera essentiel de comprendre comment les non-idéalités de chacun des sous-systèmes se répercutent sur l'erreur (systématique ou stochastique) du capteur global.

Tout d'abord, un capteur comporte au moins deux parties distinctes : un **transducteur**, et une électronique de **conditionnement**, qui délivre $V(t)$ – on parle alors de capteur **analogique**.

Un **transducteur** est un dispositif physique permettant la conversion d'un type d'énergie (par exemple : élastique, cinétique, thermique) en un autre, dans notre cas : électrique, l'information pouvant être codée en tension ou en courant. Du point de vue électrique, on pourra modéliser un transducteur comme une source de courant ou de tension, dont l'intensité varie en fonction de la grandeur physique à mesurer. La dernière section de cette partie est entièrement dédiée à des exemples de transducteurs communs.

Remarques :

1 – Les phénomènes de transduction sont souvent réversibles. Ils peuvent être mis en œuvre au sein de capteurs, mais aussi au sein d'actionneurs (positionneurs piézoélectriques, afficheurs LED, modules Peltier).

2 – Les transducteurs sont également essentiels dans les applications de récupération d'énergie, où l'on cherche à convertir une énergie « ambiante » (des vibrations, un gradient de température) en énergie électrique.

La principale fonction de l'électronique de **conditionnement** associée au transducteur est de transformer la sortie de celui-ci en une tension électrique $V(t)$ dont la pleine échelle (de V_{ss} à V_{dd}) corresponde à l'étendue de mesure du capteur (de A_{min} à A_{max}). Ceci nécessite généralement une **amplification** : l'électronique de conditionnement d'un transducteur est donc **active**.

Exemple :

On souhaite utiliser un thermocouple pour réaliser une mesure de température sur une large étendue ($1000°C$*). La sensibilité du thermocouple est de* $10\mu V/°C$*. Ainsi, la tension en sortie du transducteur ne varie que de* $10mV$ *lorsque la température parcourt l'intervalle de mesure. Pour ramener cette excursion de tension à 5V (tension d'alimentation de nombreux circuits actifs), il faut que l'électronique de conditionnement soit capable d'amplifier ces* $10mV$ *d'un facteur* 500*.*

Les capteurs du commerce incluent au minimum ces deux blocs. Les capteurs **numériques** comportent aussi des **convertisseurs analogique-numérique** dont la fonction est d'échantillonner $V(t)$ à des instants réguliers et de quantifier chaque échantillon sur un certain nombre de bits.

Enfin, notons qu'un capteur peut également comporter

- des blocs, le plus souvent numériques, permettant des traitements intégrés de l'information (filtrage, correction des non-idéalités, self-test, auto-calibration, extraction de caractéristiques).
- des blocs numériques de transmission de l'information selon des protocoles prédéfinis (I2C, SPI…).
- des blocs de gestion de l'alimentation, des horloges, d'autres capteurs (pour minimiser l'impact de grandeurs d'influence, par exemple, ou fusionner des mesures d'une manière ou d'une autre)…

1.3 Bilan d'erreur

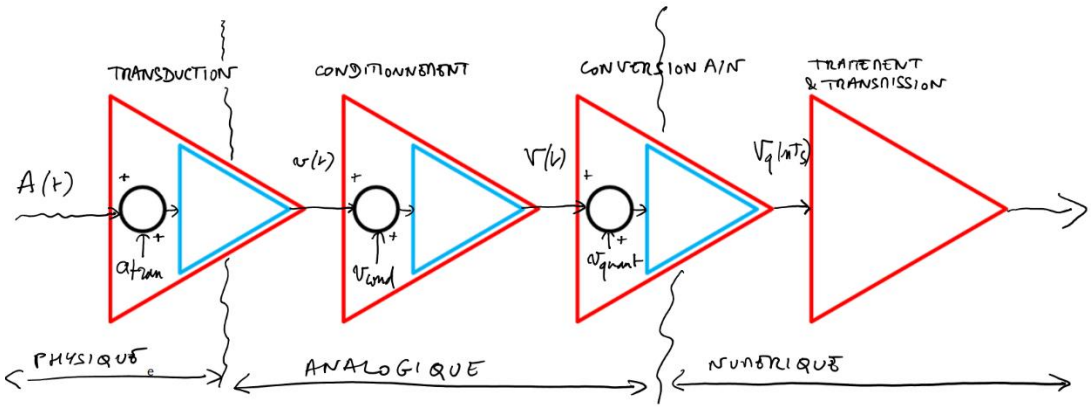


Fig. 1.4 - Chaîne de traitement de l'information dans un capteur.

La Fig. 1.4 représente la chaîne de traitement de l'information à l'intérieur d'un capteur de manière symbolique. Lorsqu'on conçoit un capteur, il est généralement important de quantifier l'impact des imperfections de chacune des parties sur la précision globale de la mesure. Pour cela, on peut considérer que seuls les étages de la partie analogique ont un impact sur la précision du capteur, que ce soit en termes de justesse ou de fidélité. Si chacun de ces étages est caractérisé par une erreur qu'on peut rapporter à son entrée et qu'on néglige tous les effets dynamiques, on a, en partant du convertisseur A/N :

$$V_q = V + v_{quant} \qquad (1.5)$$

où V_q est la tension quantifiée et échantillonnée, et v_{quant} représente l'erreur de quantification (résultant d'erreurs d'arrondi et de non-idéalités diverses du convertisseur), puis, par exemple,

$$V = G_{cond} \times (v + v_{cond}) \qquad (1.6)$$

où G_{cond} est le gain de l'électronique de conditionnement, v la tension en sortie du transducteur et v_{cond} l'erreur liée à l'électronique, et enfin

$$v(t) = S_{tran} \times (A + a_{tran}) \qquad (1.7)$$

où S_{tran} est la sensibilité du transducteur et a_{tran} son erreur intrinsèque, rapportée à son entrée. Il est utile d'écrire ces relations sous une forme plus synthétique :

$$V_q = G_{cond} \times S_{tran} \times \left(A + a_{tran} + \frac{v_{cond}}{S_{tran}} + \frac{v_{quant}}{S_{tran} G_{cond}}\right) \qquad (1.8)$$

de manière à rapporter l'ensemble des erreurs à l'entrée du capteur. Ceci permet de comparer les contributions de chacun des éléments à l'erreur totale (exprimée dans la dimension de la grandeur physique d'intérêt), et ainsi de dimensionner l'ensemble des éléments de la chaîne de manière raisonnée.

Remarque :

Le même raisonnement s'applique évidemment lorsque la sortie du transducteur est un courant ou une charge, comme dans le cas des transducteurs piézoélectriques ou capacitifs. L'erreur rapportée à l'entrée de l'étage de conditionnement s'exprime alors en ampères ou en coulombs.

Cette approche est également utile pour comprendre un principe important concernant l'électronique de conditionnement du capteur, lorsque celle-ci nécessite plusieurs étages d'amplification pour atteindre le gain G_{cond} requis. Supposons par exemple qu'on essaye de

réaliser le gain G_{cond} avec 2 étages d'amplification, de gains G_{cond1} et G_{cond2}, comme représenté à la Fig. 1.5, et d'erreurs v_{cond1} et v_{cond2}. On peut alors écrire

$$V = G_{cond1} \times G_{cond2} \times \left(v + v_{cond1} + \frac{v_{cond2}}{G_{cond1}}\right) \quad (1.9)$$

Ainsi, la contribution à l'erreur totale du deuxième étage d'amplification est d'autant plus faible que le gain du premier étage est important. Ce premier étage d'amplification (dit **frontal analogique**, ou **AFE** pour « analog front-end ») joue donc un rôle crucial dans le bilan d'erreur du capteur : c'est celui dont la conception nécessite le plus d'attention. Il est classiquement dimensionné pour avoir un gain important et une erreur « faible » (i.e. une erreur qui, rapportée à l'entrée du transducteur sera si possible, petite par rapport à a_{tran}).

On verra à la partie 2 comment ces notions de haut-niveau se traduisent en termes d'électronique.

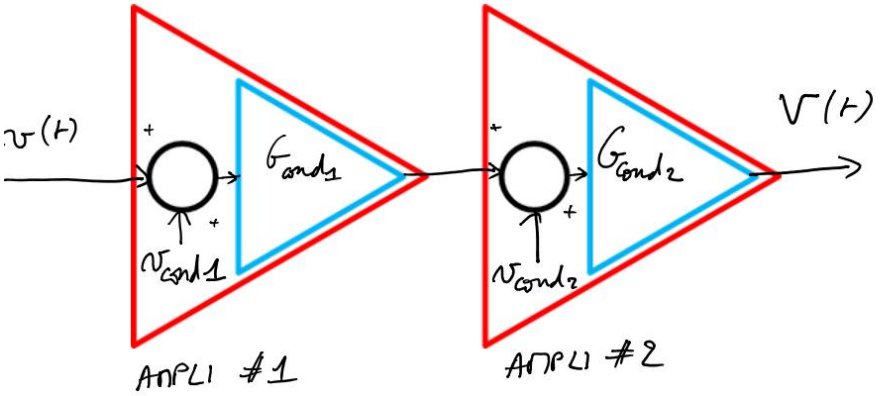


Fig. 1.5 – Réalisation d'un gain $G_{cond} = G_{cond1} \times G_{cond2}$ à partir de blocs non idéaux.

1.4 Transducteurs

On fait généralement la distinction entre deux types de transducteurs :

- les transducteurs **actifs**, ne nécessitant pas d'apport d'énergie externe pour convertir la grandeur d'entrée en signal électrique.
- les transducteurs **passifs**, qui nécessitent un apport en énergie externe.

On distingue également les transducteurs **simples** des transducteurs **composites**, ces derniers nécessitant plusieurs étapes de transduction pour passer de la grandeur physique d'intérêt à une grandeur électrique.

Remarque :

La distinction entre transducteurs actifs et passifs est universelle, mais « au signe près »… Certains auteurs considèrent en effet comme actifs les transducteurs nécessitant un apport d'énergie externe (à l'instar des circuits électroniques) et les autres comme passifs.

1.4.1 Transducteurs passifs

Les transducteurs passifs simples sont les plus aisément « accessibles » : ce sont des dispositifs assimilables à des dipôles électriques dont l'impédance Z varie en fonction de la grandeur physique à mesurer. Nombre d'entre eux se résument à des résistances ou à des capacités variables. En leur appliquant une tension donnée, on obtient un courant électrique dont les variations reflètent celles de Z. En imposant le courant qui les traverse, on obtient une tension dont les variations reflètent celles de Z.

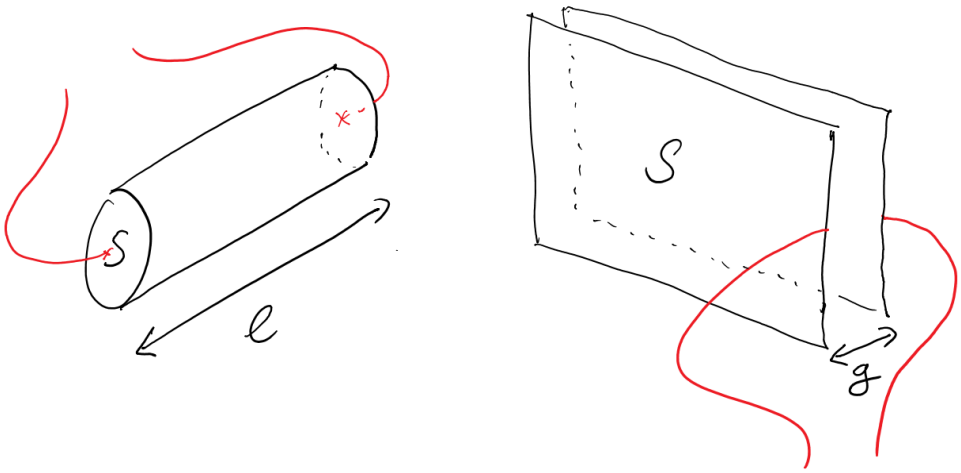


Fig. 1.6 – Notations dans le cas des transducteurs résistifs (à gauche) et capacitifs (à droite).

Considérons par exemple un élément linéique d'un conducteur caractérisé par une résistivité ρ, une section S et une longueur l (Fig. 1.6). Sa résistance est donnée par :

$$R = \rho l / S \qquad (1.10)$$

Ainsi, il est apparent que toute variation avec la grandeur d'entrée A des dimensions (l, S) ou de ρ entraînera une variation de R selon la formule :

$$\frac{dR}{dA} = \frac{\partial R}{\partial \rho} \times \frac{d\rho}{dA} + \frac{\partial R}{\partial S} \times \frac{dS}{dA} + \frac{\partial R}{\partial l} \times \frac{dl}{dA} = \frac{l}{S} \times \frac{d\rho}{dA} - \frac{\rho l}{S^2} \times \frac{dS}{dA} + \frac{\rho}{S} \times \frac{dl}{dA} \qquad (1.11)$$

ou encore, pour mettre en lumière la variation relative de R avec A :

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dA} = \frac{1}{\rho} \times \frac{d\rho}{dA} - \frac{1}{S} \times \frac{dS}{dA} + \frac{1}{l} \times \frac{dl}{dA} \qquad (1.12)$$

Exemples

*1 – Les **RTD** (Resistive Temperature Detectors) sont un exemple typique d'un transducteur résistif simple. Il s'agit de résistances constituées d'un métal noble (typiquement, du platine) dont la variation de résistivité avec la température θ est parfaitement connue, et quasi-linéaire sur une très grande étendue (environ 1000°C). De même, pour le coefficient d'expansion, qui régit $dS/d\theta$ et $dl/d\theta$.*

*2 – Le même principe physique est mis en œuvre dans les **thermistors**, qui sont des céramiques dont la variation relative de résistivité avec la température est bien plus importante que celle des métaux nobles. En revanche, la caractéristique $\rho(\theta)$ est assez fortement non-linéaire, ce qui limite l'étendue d'utilisation de ces dispositifs.*

*3 – L'autre exemple typique de transducteur résistif simple est la **jauge de contrainte** ou jauge de déformation. Une jauge de contrainte est un fil conducteur collé fermement à la surface d'un solide dont on souhaite mesurer la déformation en un point. Lorsque le solide se déforme, le fil se déforme également (sa longueur augmente et sa section diminue, ou sa longueur diminue et sa section augmente), ce qui se traduit par une variation de la résistance du fil. Les jauges de contraintes les plus sensibles sont constituées de matériaux **piézorésistifs** (présentés plus en détail à la partie 4), dont la variation de résistivité avec la déformation est 1 à 2 ordres de grandeur plus importante que les effets géométriques.*

4 – Les jauges de contraintes sont souvent utilisées au sein de transducteurs composites, où la grandeur physique d'intérêt est transformée en déformation, avant d'être traduite en variation de résistance par la jauge. Ainsi, de nombreux capteurs de pression reposent sur un transducteur composé d'une membrane séparant la pression à mesurer d'une pression de référence. Des jauges de contraintes sont disposées sur le pourtour de la membrane, aux endroits où la déformation induite par le différentiel de pression est la plus importante. Ainsi, on traduit les variations de pression en variations de résistance.

Remarque :

Tous les capteurs résistifs sont sujets à des pertes ohmiques, qui aboutissent à un échauffement du transducteur. Si on n'y prend pas garde, la variation de résistance provoquée par cet auto-échauffement peut devenir une source d'erreur importante.

La transduction capacitive est également très répandue, en particulier dans le domaine des MEMS. Par exemple, la capacité C entre deux conducteurs plans parallèles de surface S, séparés d'une distance g par un milieu de permittivité ϵ (Fig. 1.6) vaut

$$C = \epsilon S/g \qquad (1.13)$$

et la variation relative avec une grandeur d'entrée A s'écrit donc :

$$\frac{1}{C}\frac{dC}{dA} = \frac{1}{\epsilon} \times \frac{d\epsilon}{dA} - \frac{1}{g} \times \frac{dg}{dA} + \frac{1}{S} \times \frac{dS}{dA} \qquad (1.14)$$

Ce principe est mis en œuvre pour réaliser des capteurs de déplacement ou de position, notamment.

Exemples :

1 – De nombreuses technologies d'écran tactile reposent sur une matrice de capacités dont la valeur est affectée en fonction de la proximité d'un doigt ou d'un stylet. Dans ces cas, les capacités servent de transducteurs simples.

*2 – Dans un **accéléromètre** MEMS, une masse d'épreuve M (suspendue à un « ressort ») se déplace sous l'effet de l'accélération $\vec{A}$ ressentie ($\vec{F}_{Inertie} = -M\vec{A}$). Ceci entraîne une variation de la capacité existant entre la masse mobile et la partie fixe de la structure. Si une tension est appliquée à cette capacité, un courant « motionnel » est généré, dont on peut déduire l'accélération.*

*3 – Les **gyroscopes** sont des dispositifs permettant de mesurer une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$. Les gyroscopes MEMS reposent sur la conversion de la vitesse angulaire en force de Coriolis, ce qui nécessite de faire vibrer la masse d'épreuve M avec une certaine vitesse $\vec{v}$ ($\vec{F}_{Coriolis} = -2M\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$). Sous l'effet de cette force, la masse se déplace, perpendiculairement à $\vec{\Omega}$ et $\vec{v}$, ce qui résulte en une variation de capacité qu'on peut traduire en variation de courant. Notons que, dans ce cas, on apporte de l'énergie au système à deux endroits, non seulement pour convertir la variation de capacité en grandeur électrique, mais aussi pour le mettre en oscillation avec une vitesse $\vec{v}$. De ce point de vue, l'ensemble des capteurs dits « résonants », qui nécessitent la mise en oscillation (mécanique ou pas) d'un corps d'épreuve sont considérés comme « passifs », même lorsqu'ils reposent sur des phénomènes de transduction actifs.*

4 – Les capteurs de pression capacitifs sont une alternative courante aux capteurs de pression piézorésistifs décrits plus hauts. Dans ce cas, on forme une capacité entre la membrane et une électrode fixe en regard. Lorsque la membrane se déforme, la distance inter-électrodes varie, ce qui résulte en une variation de capacité.

Remarques :

1 – Contrairement aux transducteurs résistifs, les transducteurs capacitifs ne sont pas sujets à l'auto-échauffement. De plus, ne dissipant pas d'énergie, ils sont intrinsèquement compatibles avec des applications « basse-consommation » et « faible bruit ». Ces raisons, entre autres, ont motivé l'abandon progressif des capteurs inertiels piézorésistifs (e.g. un accéléromètre dont l'allongement du ressort est mesurée à l'aide d'une jauge de contrainte) au profit des capteurs inertiels capacitifs.

2 – La transduction capacitive est un phénomène réversible : lorsqu'on applique une tension entre deux armatures d'un condensateur, celles-ci tendent à s'attirer. Ce phénomène est notamment exploité dans les gyroscopes MEMS décrits plus hauts, pour donner une vitesse $\vec{v}$ à la structure. Il est également exploité pour générer des stimuli de test dans les accéléromètres, les asservir en position, etc.

1.4.2 Transducteurs actifs

Les transducteurs actifs mettent souvent en œuvre des « effets » dont la compréhension nécessite une bonne maîtrise de la physique : effet thermoélectrique, effet piézoélectrique, effet photoélectrique, etc. Il n'est pas question ici d'en dresser l'inventaire exhaustif mais plutôt d'en donner quelques exemples « classiques ».

Exemples :

*1 – Un **thermocouple** est réalisé à partir d'une jonction entre deux conducteurs différents. Du fait de l'effet Seebeck (effet thermoélectrique), une force électromotrice apparaît entre les extrémités libres du thermocouple. La tension qui en résulte est, au premier ordre, proportionnelle à la différence de température entre la jonction (point dont on cherche à mesurer la température) et les extrémités libres des deux conducteurs (supposément régulés à une température de référence). Les thermocouples ont généralement une moins bonne linéarité que les RTD, mais un temps de réponse un peu plus rapide et une étendue de mesure plus importante.*

*2 – Certains matériaux cristallins sont dits **piézoélectriques**. Ceci signifie qu'ils sont susceptibles de se polariser lorsqu'ils sont déformés (effet « direct ») et, vice-versa, qu'ils se déforment sous l'effet d'un champ électrique (effet « inverse »). Une lame de matériau piézoélectrique entre deux électrodes constitue ainsi un transducteur actif, générant une force-électro-motrice qui est fonction de la déformation subie. On peut mettre en œuvre ce type de transducteur dans le même type de circonstances que les jauges de contraintes (piézo-)résistives vues plus haut, avec de nombreux avantages (pas besoin d'alimentation, linéarité, stabilité en température) mais pour un prix plus élevé. Dans le domaine des capteurs inertiels et des oscillateurs (bases de temps) miniatures, les technologies piézoélectrique / quartz ont longtemps été les seules à pouvoir adresser des applications de mesure de grande précision (notamment en aéronautique). Elles sont désormais concurrencées par les technologies MEMS / silicium (et transduction capacitive) pouvant offrir un niveau de performance comparable pour un prix moindre.*

*3 – L'effet photoélectrique est mis en œuvre dans les **photodiodes**, qui émettent un courant proportionnel à l'intensité lumineuse à laquelle elles sont soumises. Les imageurs actuels sont composés de matrices de photodiodes et de leur électronique de conditionnement associée.*

Exercices :

1 – Qu'est-ce qu'un capteur à effet Hall ? L'effet Hall est-il un phénomène de transduction passif ou actif ?

2 – Donner des exemples d'utilisation de l'effet thermoélectrique / piézoélectrique / photoélectrique inverse.

1.5 Références

La métrologie est la science de l'exactitude, et le vocabulaire de la métrologie se doit donc d'être particulièrement exact. Pour toucher du doigt l'extrême rigueur qui est de mise en ce domaine, il est intéressant de consulter le glossaire suivant (en accès libre sur Internet) :

[1] "International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM), 3rd edition ", JCGM, 2012

Il faut néanmoins être conscient qu'il existe un fossé immense entre la définition formelle des caractéristiques d'une mesure et les informations disponibles dans les datasheets des capteurs du commerce (allez consulter celles des accéléromètres Bosch, STMicroelectronics ou Analog Devices)… et également avec les notions de métrologie que j'ai présentées dans cette partie. À cet égard, un conseil assez général lorsqu'on hésite entre deux capteurs est de choisir celui dont la fiche technique est la plus complète.

Concernant les différents types de transducteurs, les références abondent. Pour approfondir sa connaissance d'un type de transducteur en particulier, il pourra être utile de se référer en premier lieu aux articles « généralistes » des Techniques de l'Ingénieur (accessibles via la bibliothèque de CentraleSupélec).

2 Electronique de conditionnement

2.1 Ponts et montages potentiométriques

Les transducteurs passifs reposent sur la variation d'une impédance Z avec la grandeur A qu'on souhaite mesurer. Lorsque A varie de δA, Z varie de δZ qui est souvent faible devant Z, mais qui porte seul de l'information sur A. Ceci justifie l'emploi des montages particuliers que sont les ponts pour conditionner les transducteurs passifs.

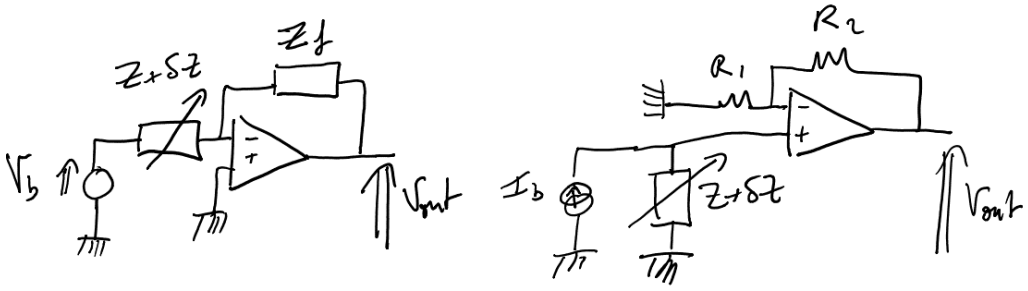


Fig. 2-1 – Deux idées naïves. La flèche symbolise que l'impédance est variable (avec la grandeur A).

Par exemple, considérons les deux idées naïves représentées à la Fig. 2.1. Dans un cas, on alimente le transducteur avec une tension V_b et on mesure le courant qui le traverse à l'aide d'un ampli à transimpédance. La sortie de ce circuit est :

$$V_{out} = -\frac{Z_f}{Z+\delta Z} \times V_b \approx -\frac{Z_f}{Z} \times \left(1 - \frac{\delta Z}{Z}\right) \times V_b \qquad (2.1)$$

Dans l'autre cas, on alimente le transducteur avec un courant I_b et on mesure la tension à ses bornes avec un ampli non-inverseur. La sortie du circuit s'exprime alors comme suit

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \times (Z + \delta Z) \times I_b \qquad (2.2)$$

Dans un cas comme dans l'autre, la sortie de l'amplificateur est (ou peut être approximée comme) la somme de deux termes : un terme dit « de mode commun », qui ne porte pas d'information sur A, et un terme dit « utile » portant l'information, d'autant plus petit par rapport au mode commun qu'on cherche à détecter de faibles variations d'impédance. L'amplification qu'on peut apporter au signal utile est donc limitée par la saturation de l'ampli du fait du signal de mode commun.

Ce problème est essentiellement propre aux transducteurs passifs ; les transducteurs actifs délivrent généralement un signal utile qui n'est pas masqué par un signal de mode commun. Pour le résoudre, on a recours à des ponts d'impédances, comme le **pont de Wheatstone**, ou à des **montages potentiométriques**.

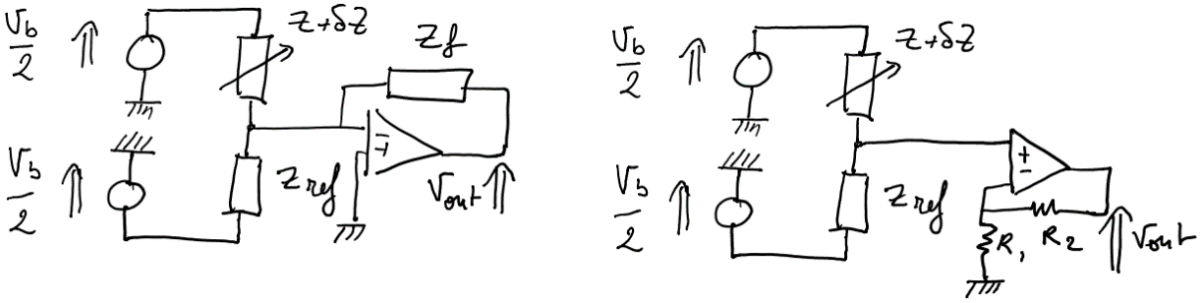


Fig. 2.2 – Exemples de montages potentiométriques à sortie en courant (gauche) ou en tension (droite).

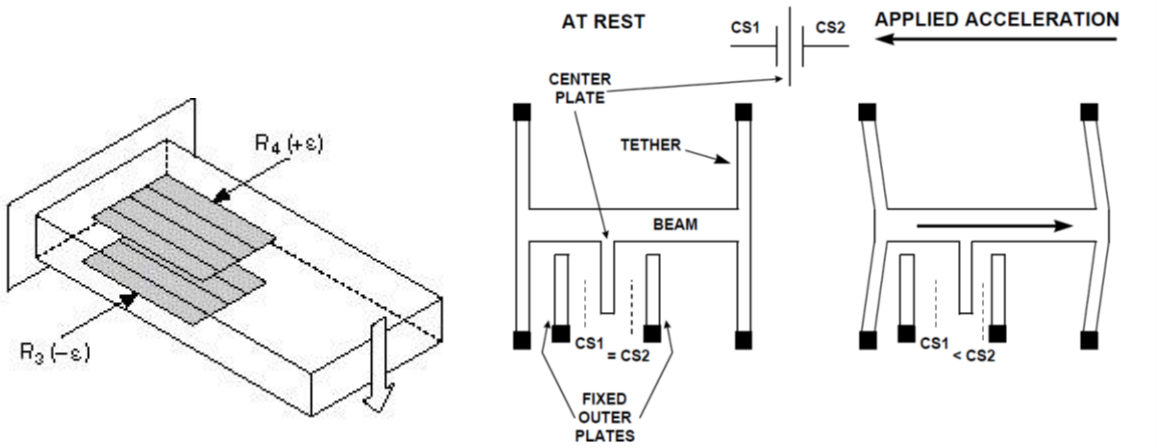


Fig. 2.3 – Montage différentiel de jauges de contrainte (à gauche) et détection capacitive différentielle (à droite). Images tirées des sites National Instruments et Analog Devices.

2.1.1 Montages potentiométriques

Considérons en premier lieu le cas du montage potentiométrique. Celui-ci exige l'utilisation de deux sources de tension de même valeur $V_b/2$ et d'une impédance de référence Z_{ref} dont la valeur est égale à l'impédance nominale du transducteur. La grandeur de sortie est prise au point milieu des deux impédances. Il peut s'agir d'une tension ou d'un courant, comme illustré à la Fig. 2.2. Dans un cas comme dans l'autre, le mode commun est éliminé à l'entrée de l'ampli.

Une variante (parmi d'autres) de ce montage, dite « différentielle », consiste à remplacer Z_{ref} par un transducteur identique au premier, qui est affecté par la grandeur A avec un signe opposé, de sorte que $Z_{ref} = Z - \delta Z$. La Fig. 2.3 donne des illustrations pratiques de ceci dans les cas de jauges de contraintes et de la transduction capacitive. Cette solution, qui n'est pas toujours faisable, a l'avantage de présenter une meilleure linéarité que la précédente, d'être 2 fois plus sensible au mesurande et d'être beaucoup moins sensible aux grandeurs d'influences.

Dans le cas du montage potentiométrique différentiel à sortie en tension (Fig. 2.2), la tension V_{in} vue par l'AFE est donc

$$V_{in} = \frac{V_b}{2} \times \frac{(Z-\delta Z)-(Z+\delta Z)}{(Z-\delta Z)+(Z+\delta Z)} = -\frac{V_b}{2} \times \frac{\delta Z}{Z} \quad (2.3)$$

Dans le cas d'une sortie en courant, le courant I_{in} s'écrit :

$$I_{in} = \frac{V_b}{2} \times \frac{(Z-\delta Z)-(Z+\delta Z)}{(Z-\delta Z)(Z+\delta Z)} = -\frac{V_b}{2} \times \frac{2\delta Z}{Z^2-\delta Z^2} \quad (2.4)$$

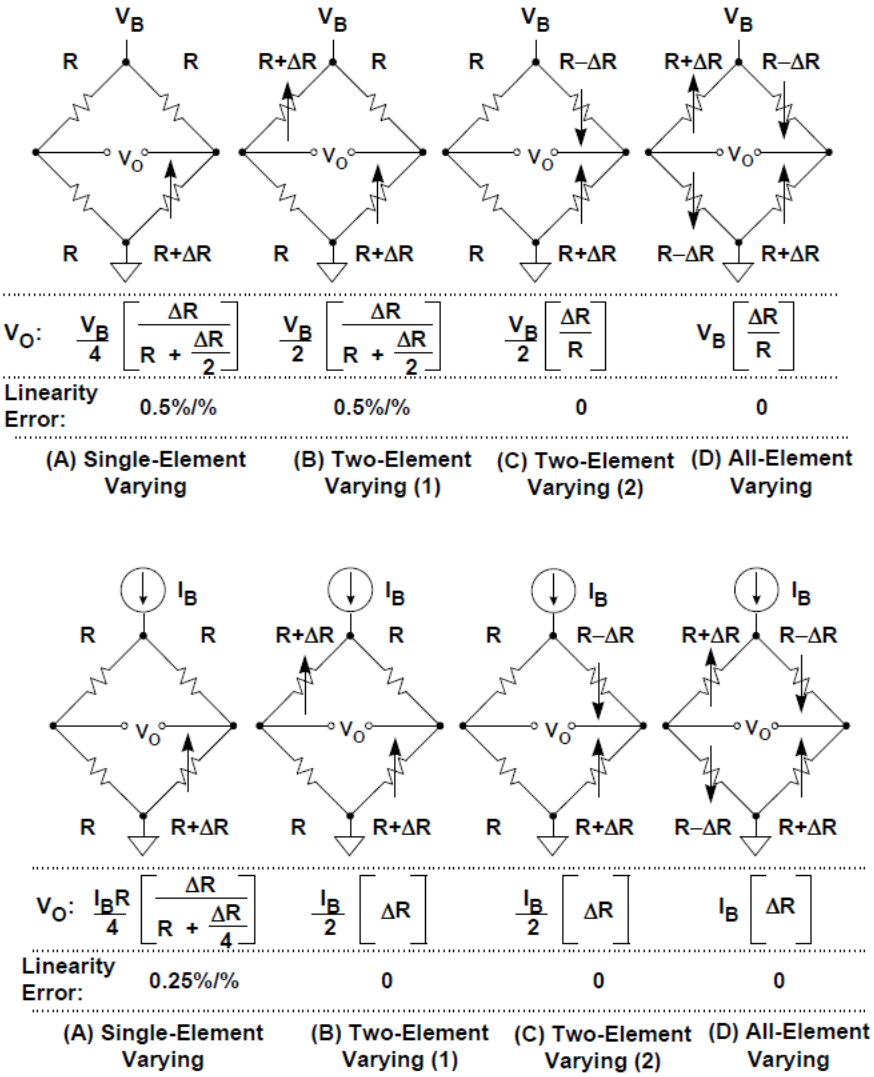


Fig. 2.4 – Configurations quart-de-pont, demi-pont et pont complet d'un pont de Wheatstone alimenté en tension (haut) ou en courant (bas). Illustrations tirées de [1].

2.1.2 Pont de Wheatstone

Un pont de Wheatstone nécessite quatre impédances de même nature (dont au moins une est un transducteur) au lieu de deux, mais ne nécessite qu'une source (de tension V_b ou de courant I_b). Le montage est dit « quart-de-pont », « demi-pont » ou « pont complet » selon que le nombre de transducteurs est un, deux ou quatre. Le principe consiste à mesurer (et donc à amplifier) la différence de potentiel entre les points milieux des deux branches du pont. Celle-ci est nulle lorsque le pont est équilibré, i.e. lorsque toutes les impédances sont égales ($\delta Z = 0$). Autrement, elle est proportionnelle à δZ au premier ordre (on donne à la Fig. 2.4 son expression dans 8 configurations possibles). La solution « pont complet », qui nécessite 4 transducteurs, a l'avantage d'être parfaitement linéaire, est 4 fois plus sensible au mesurande que la solution « quart-de-pont » et est beaucoup moins sensible aux grandeurs d'influences.

Remarques :

1 – Le montage potentiométrique différentiel avec sortie en tension est linéaire en δZ, contrairement à celui avec sortie en courant.

2 – Le demi-pont de Wheatstone alimenté en courant est linéaire en δZ, contrairement à celui alimenté en tension.

3 –En augmentant la tension (ou le courant) de polarisation, on augmente la sensibilité de tous ces montages. Cette approche est néanmoins limitée par de nombreuses raisons pratiques : consommation, auto-échauffement, limitations propres à la technologie d'intégration…

4 – Toute fluctuation de V_b (ou I_b) entraîne une fluctuation de la sortie du capteur, décorrélée de la valeur du mesurande. La tension (ou le courant) de polarisation est donc une grandeur d'influence à prendre en compte, susceptible de provoquer une erreur de sensibilité.

5 – La difficulté majeure dans la réalisation pratique de ces montages est « l'appariement » des différents éléments les constituant, en termes de sensibilité aux grandeurs d'influence. Par exemple, considérons un montage « quart de pont » utilisé pour réaliser une mesure de déformation, consistant en une jauge de contrainte et 3 résistances « passives ». Si la jauge et les résistances n'ont pas précisément la même sensibilité à la température, toute variation de cette quantité résultera en une variation de la sortie du montage, sans lien avec la déformation qu'on cherche à mesurer. Dans un montage potentiométrique, l'appariement entre les sources de tension est également important.

6 – Nous n'avons pas fait d'hypothèse particulière concernant V_b (ou I_b). Si la simplicité veut que cette source soit choisie constante (DC), il existe de nombreuses raisons pour lesquelles ce choix n'est pas obligatoirement optimal :

a – les transducteurs capacitifs ont une impédance DC infinie, ce qui interdit de les polariser avec une source constante (hormis dans le cas particulier des transducteurs résonants).

b – utiliser une source AC revient à moduler en amplitude la variation d'impédance δZ. L'information utile, portée par δZ, se trouve donc transposée à une fréquence plus élevée, ce qui réduit l'impact des bruits basse-fréquence (flicker, dérives) sur la précision de la mesure.

c – la consommation peut être fortement réduite si la source n'a pas de composante continue.

En revanche, le choix d'une source AC requiert l'implémentation d'une horloge/d'un oscillateur local, nécessite qu'une démodulation soit réalisée après l'étage d'amplification et impose des contraintes sur l'AFE (de nombreuses caractéristiques des ampli-ops se dégradant avec la fréquence).

2.2 Frontaux analogiques

Comme souligné à la partie 1, l'AFE doit fournir la majeure partie du gain requis par l'application, et introduire aussi peu d'erreurs que possible. Ces erreurs sont étroitement liées aux non-idéalités des composants passifs et des ampli-ops, qui sont présentées à la section 2.3.

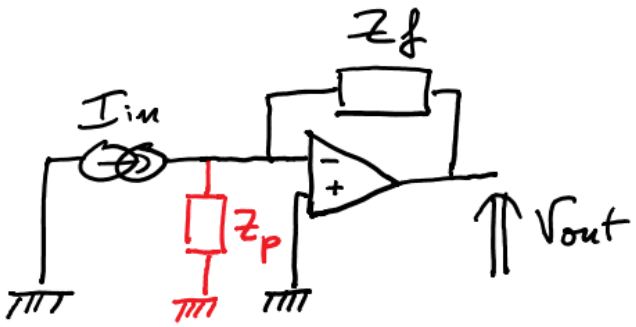


Fig. 2.5 –Montage à transimpédance pour la conversion courant-tension. L'impédance Z_p modélise l'interconnexion entre le transducteur (la source de courant) et l'électronique.

2.2.1 Transducteurs à sortie en courant

Lorsqu'un transducteur a une sortie en courant (ou en charge), l'ampli de prédilection est l'ampli à transimpédance (Fig. 2.5). Sa caractéristique (en considérant un ampli-op idéal) est

$$V_{out} = -Z_f I_{in} \quad (2.6)$$

L'impédance Z_f consiste souvent en une résistance R_f en parallèle d'une capacité C_f, de sorte que

$$Z_f = \frac{R_f}{1+jR_fC_f\omega} \quad (2.7)$$

Les valeurs de R_f et C_f sont dimensionnées différemment selon qu'on souhaite intégrer le courant I_{in} (on choisit alors $R_f \gg 1/C_f\omega$, de sorte que le courant I_{in} traverse de manière privilégiée la capacité plutôt que la résistance) ou pas.

Remarque :

Un autre intérêt d'un ampli à transimpédance est qu'il fixe à zéro (via la masse virtuelle) la tension du nœud que le courant traverse. Ainsi, quelle que soit l'impédance parasite Z_p de l'interconnexion entre le transducteur et l'AFE (en rouge sur la Fig. 2.5), dans la limite de l'hypothèse $V_+ = V_-$, la caractéristique (2.6) est inchangée. Cette propriété est particulièrement avantageuse dans les applications où le transducteur et l'AFE ne sont pas physiquement proches.

2.2.2 Transducteurs à sortie en tension

Un simple ampli non-inverseur peut convenir pour un transducteur dont la sortie est une tension « utile », qui ne soit pas masquée par un signal de mode commun. Cette solution est simple et présente l'intérêt d'avoir, en théorie, une impédance d'entrée infinie.

Dans le cas d'un montage en pont, c'est l'ampli d'instrumentation (Fig. 2.6) qui est privilégié. D'un point de vue « macroscopique », on peut simplement considérer un ampli d'instrumentation comme un ampli différentiel, dont l'impédance d'entrée est infinie. Lorsque $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, la sortie du circuit est idéalement :

$$V_{out} = \left(1 + 2\frac{R}{R_g}\right) \times \delta V \qquad (2.8)$$

où R_g est externe à l'amplificateur, pour que l'utilisateur puisse régler le gain comme il le souhaite.

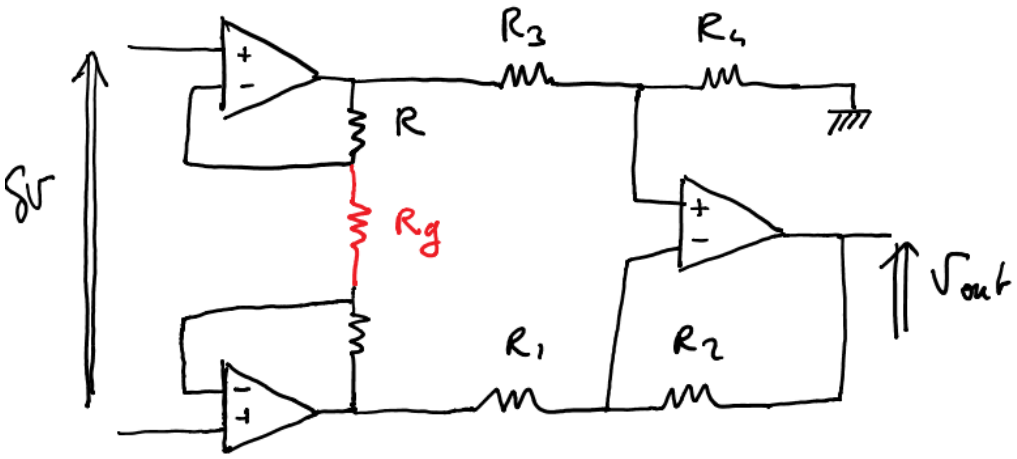


Fig. 2.6 – Ampli d'instrumentation. La résistance R_g fixe le gain du montage, les résistances R_1, R_2, R_3 et R_4 sont nominalement égales.

Remarque :

Les amplis d'instrumentation ne sont que rarement réalisés à partir de composants discrets individuels. La raison principale est que le bon fonctionnement du circuit dépend du strict appariement des composants (ampli-ops, résistances) de la branche du haut avec ceux de la branche du bas. Par exemple, si les valeurs de R_1, R_2, R_3 et R_4 (Fig. 2.6) ne sont pas rigoureusement identiques, on a

$$V_{out} = \left(1 + 2\frac{R}{R_g}\right) \times \delta V + \left(\frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_3/R_4} - \frac{R_2}{R_1}\right) \times \frac{V_b}{2}$$

Le signal utile sera donc entaché d'une erreur de mode commun proportionnelle à la polarisation du pont (d'autant plus importante que les mésappariements sont importants) et sera de plus susceptible de dériver avec la température. Les amplis d'instrumentation du commerce sont donc conçus à partir de composants intégrés, « trimmés » au laser pour assurer une aussi bonne réjection du mode commun que possible.

2.3 Non-idéalités de l'électronique

Cette partie, non exhaustive, recense les principales causes susceptibles d'affecter l'écart entre le comportement nominal d'une chaîne de conditionnement et son comportement réel. De ce fait, ces non-idéalités ont toutes un impact sur l'erreur, systématique ou stochastique, d'un capteur donné ou sur la répétabilité des mesures d'un capteur à un autre.

2.3.1 Composants passifs

2.3.1.1 Variabilité

La valeur nominale des composants passifs électroniques, discrets ou intégrés, est variable d'un composant à un autre. Ceci résulte des inévitables dispersions des processus de fabrication de ces composants. Les autres caractéristiques de ces composants (bruit intrinsèque, coefficient de température, etc.) qui dépendent de cette valeur nominale sont donc variables également.

Pour ce qui est des composants discrets, on trouve des résistances « de précision » présentant des **tolérances** (erreur relative par rapport à la valeur nominale) de 0.005%, alors que la tolérance des capacités de précision est de l'ordre de 1%.

2.3.1.2 Dérives

Le terme de dérive s'applique généralement à toute fluctuation lente de la sortie d'un capteur sans lien avec la grandeur mesurée. Il couvre à la fois les effets du vieillissement (fluctuation très lente, donc) et les effets des grandeurs d'influence environnementales, comme la température, l'humidité, etc. qui affectent la valeur nominale des composants passifs.

Les valeurs typiques des **coefficients de température** (TC) des résistances et capacités discrètes sont de 10-100ppm/°C (à comparer par exemple à la sensibilité relative des RTD Pt100, de 3850ppm/°C).

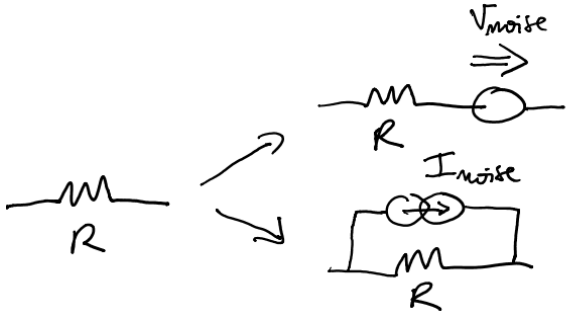


Fig. 2.7 – Modélisation du bruit thermique dans les résistances.

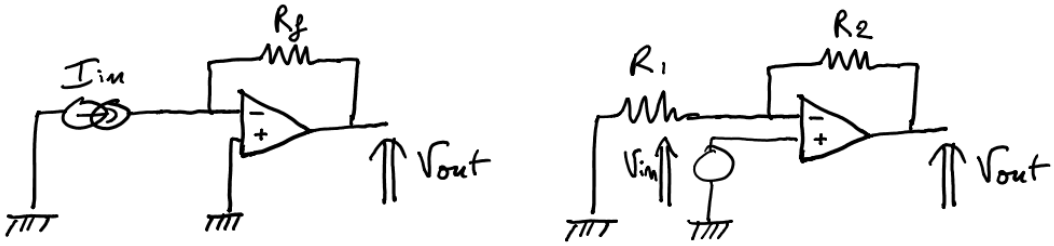


Fig. 2.8 – Exemples pour le calcul de bruit.

2.3.1.3 Bruit

Tous les dispositifs dissipant de l'énergie sont des sources de bruit. De manière qualitative, c'est ainsi qu'on peut résumer le théorème de fluctuation-dissipation. Alors que les capacités (et les inductances) sont des systèmes essentiellement conservatifs, les résistances dissipent de l'énergie (sous forme de chaleur) lorsqu'elles sont parcourues par un courant. Ainsi, toute résistance figurant dans un circuit de conditionnement contribue à l'erreur stochastique du capteur.

Ce bruit, dit **bruit de Nyquist-Johnson** ou bruit thermique, peut être modélisé comme résultant d'une source de tension aléatoire en série avec la résistance, ou comme une source de courant aléatoire en parallèle de la résistance (Fig. 2.7). Il est classiquement décrit comme « blanc » (de spectre uniforme), gaussien, et de densité

$$S_{V_{noise}}(f) = 4k_B T \times R \ [\mathrm{V^2/Hz}] \qquad (2.9)$$

ou

$$S_{I_{noise}}(f) = 4k_B T/R \ [\mathrm{A^2/Hz}] \quad (2.10)$$

où $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K est la constante de Boltzmann, T la température et R la résistance.

Pour obtenir la densité résultant d'une source de bruit en un autre point du circuit, il suffit de multiplier (2.9) ou (2.10) par le module au carré de la fonction de transfert correspondante. Pour obtenir la variance du bruit en ce point sur une bande-passante $[f_0, f_0 + \Delta f]$ donnée, il faut

intégrer la densité de bruit en ce point entre f_0 et $f_0 + \Delta f$ (ce qui revient à multiplier la densité par Δf, si elle est uniforme). Enfin, la variance (ou la densité) du bruit résultant de plusieurs sources de bruit indépendantes est égale à la somme des variances (ou densités) des contributions des sources en ce point.

Exemple :

On considère l'ampli à transimpédance de la Fig. 2. 8. On cherche la contribution au bruit rapporté à l'entrée ou à la sortie de la résistance R_f, sur une bande Δf. Dans ce cas, le plus simple est de considérer R_f comme ayant une source de courant en parallèle, dont la densité est donnée par (2.10). Cette source de courant ne peut s'écouler que dans l'impédance complexe Z_f formée de R_f et C_f en parallèle. Ainsi, le bruit rapporté à la sortie a pour densité :

$$S_{V_{out}}(f) = |Z_f|^2 \times \frac{4k_B T}{R_f}$$

et le bruit rapporté à l'entrée :

$$S_{I_{in}}(f) = \frac{4k_B T}{R_f}$$

La variance du bruit rapporté à la sortie est :

$$\overline{V_{out}^2} = \int_{f_0}^{f_0+\Delta f} S_{V_{out}}(f) df = \frac{4k_B T}{R_f} \times \int_{f_0}^{f_0+\Delta f} |Z_f|^2 df$$

celle du bruit rapporté à l'entrée :

$$\overline{I_{in}^2} = \int_{f_0}^{f_0+\Delta f} S_{I_{in}}(f) df = \frac{4k_B T}{R_f} \Delta f$$

Le bruit de Nyquist-Johnson est un phénomène **universel**, qui affecte **tous** les systèmes dissipatifs, que ceux-ci soient « électroniques » ou non ; c'est par exemple le cas des transducteurs résistifs, des transducteurs MEMS (dont l'énergie cinétique est dissipée dans le fluide ambiant), etc.

Exercice :

Déterminer la contribution des résistances au bruit rapporté à l'entrée de l'ampli non-inverseur de la Fig. 2.8.

2.3.2 Composants actifs

On s'intéresse ici aux défauts des ampli-ops, vus de manière « macroscopique » comme des composants discrets. Les tutoriels disponibles sur le site d'Analog Devices seront une véritable mine d'information pour quiconque souhaitera approfondir ces questions.

2.3.2.1 Variabilité et dérives

Au même titre que les composants passifs, les ampli-ops sont sujets aux dérives et aux dispersions. Les valeurs nominales de leurs caractéristiques sont donc susceptibles de varier d'un ampli à l'autre, dans le temps ou avec les conditions de fonctionnement.

2.3.2.2 Gain et bande-passante

Un ampli-op idéal possède un gain de boucle ouverte G_{OL} et une bande-passante infinis, il peut donc en théorie amplifier un signal avec un gain arbitrairement grand, quelle que soit la fréquence de celui-ci. C'est ce gain infini qui impose que $V_+ = V_-$ pour un ampli-op idéal fonctionnant en régime linéaire.

En réalité, le gain de boucle ouverte :

- est fini.
- décroît avec la fréquence.

On peut approximer le gain d'un ampli-op comme ayant une caractéristique passe-bas du premier ordre :

$$G_{OL}(f) = \frac{G_{OLmax}}{\left|1+j\frac{f}{f_c}\right|} \qquad (2.11)$$

où G_{OLmax} est la valeur maximale du gain boucle-ouverte, et f_c est une fréquence de coupure au-delà de laquelle G_{OL} diminue. On remarque que, pour $f \gg f_c$, le **produit-gain-bande** (GBP, exprimé en Hz) $G_{OL} \times f$ est constant et égal à $G_{OLmax} \times f_c$. On utilise donc cette grandeur pour caractériser les ampli-ops : elle correspond à la fréquence pour laquelle $G_{OL} = 1$.

Cette caractéristique limite par exemple la fréquence maximale à laquelle polariser un pont ou un montage potentiométrique, pour la mesure d'une transducteur passif.

Exercice :

On souhaite réaliser un ampli non-inverseur de gain 100 à partir d'un ampli-op dont le produit gain-bande vaut 100MHz. Dans quelle bande-passante aura-t-on effectivement un gain de 100 (à 3dB près) ?

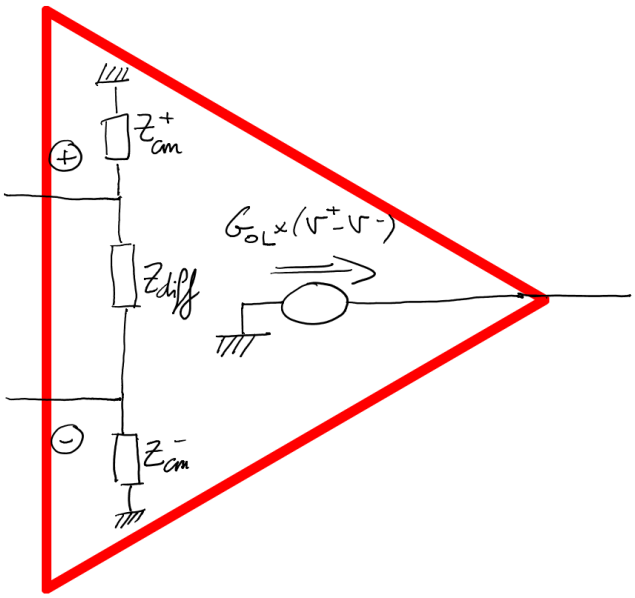


Fig. 2.9 – Modèle d'ampli-op tenant compte d'un gain et d'une impédance d'entrée finis.

2.3.2.3 Impédance d'entrée

L'impédance d'entrée d'un ampli-op idéal est infinie et, en conséquence, les courants I_+ et I_- sont théoriquement nuls. L'impédance d'entrée d'un ampli-op réel :

- est finie.
- n'est pas purement résistive et décroît avec la fréquence.

On modélise cette impédance comme à la Fig. 2.9, par une impédance « différentielle » entre les entrées + et – de l'ampli-op et deux impédances « de mode commun » entre les entrées de l'ampli et la masse. Chacune de ces impédances est constituée d'une branche résistive et d'une branche capacitive. Dans les applications basse fréquence (i.e. pour un produit $RC\omega \ll 1$), la

branche capacitive ne joue aucun rôle et l'impédance d'entrée est donc purement résistive. A haute fréquence, au contraire, c'est la composante capacitive qui domine.

Le fait que l'impédance d'entrée soit finie se répercute notamment sur la sensibilité du capteur, et ce d'autant plus que la valeur du gain en boucle ouverte de l'ampli-op est faible. Par exemple, si G_{OL} est infini, alors $V_+ = V_-$ et aucun courant ne circule dans la partie différentielle de l'impédance d'entrée (celle-ci pourrait donc prendre en théorie une valeur arbitrairement petite).

La composante résistive de l'impédance d'entrée des ampli-ops du commerce a des valeurs typiques de $10^6\Omega$ à $10^{12}\Omega$. La composante capacitive est de l'ordre du pF.

Exercices :

1 – Calculer la tension en sortie d'un ampli à transimpédance, dans le cas gain fini / impédance d'entrée finie. Montrer que la valeur maximale du gain du montage est limitée par ces deux quantités.

2 – Montrer que la sortie d'un ampli non inverseur n'est pas affectée par la valeur de l'impédance d'entrée si le gain de l'ampli-op est infini. Qu'est-ce qui change ?

Remarque :

Aux impédances d'entrée intrinsèques à l'ampli-op s'ajoutent celles des interconnexions entre composants, dont on parlera plus longuement plus loin.

2.3.2.4 Taux de réjection du mode commun

La tension en sortie d'un ampli-op réel s'écrit :

$$V_{out} = G_{OL} \times (V_+ - V_-) + G_{cmn} \times (V_+ + V_-)/2 \qquad (2.12)$$

où G_{cmn} est le gain de mode commun. Cette quantité est idéalement nulle et le **taux de réjection du mode commun** (CMRR) de l'ampli :

$$CMRR = \frac{G_{OL}}{G_{cmn}} \qquad (2.13)$$

est théoriquement infini (en pratique, cette quantité est de l'ordre de 10^4 à 10^7 dans les composants du commerce). Cette non-idéalité peut par exemple résulter en une erreur de biais, comme lorsque les signaux à l'entrée de l'ampli sont des tensions « utiles » superposées à une tension de mode commun constante.

De même que G_{OL} ou que l'impédance d'entrée, le CMRR d'un ampli-op décroît avec la fréquence.

Remarque :

D'autres « taux de réjection » (PSRR, ripple rejection) caractéristiques des ampli-ops représentent leur capacité à fournir une tension de sortie indépendante des fluctuations de leurs tensions d'alimentation.

Pour un capteur, la stabilité des tensions d'alimentation, de polarisation, ou de référence des différents éléments doit faire l'objet d'un soin particulier. Il existe de nombreuses méthodes pour « stabiliser » dans une certaine mesure des sources de tension, comme l'utilisation de capacités de découplage ou de régulateurs actifs de tension (LDO).

Toutes les caractéristiques des ampli-ops évoquées ci-dessus se dégradent avec la fréquence. Cependant, plusieurs autres non-idéalités, décrites ci-dessous, limitent aussi l'utilisation des ampli-ops conventionnels à basse fréquence.

2.3.2.5 Tension d'offset et courants de polarisation

La tension d'offset (en bon français, tension de biais ou de décalage) et les courants de polarisation sont des non-idéalités purement statiques. On peut modéliser ces non-idéalités comme illustré à la Fig. 2.10.

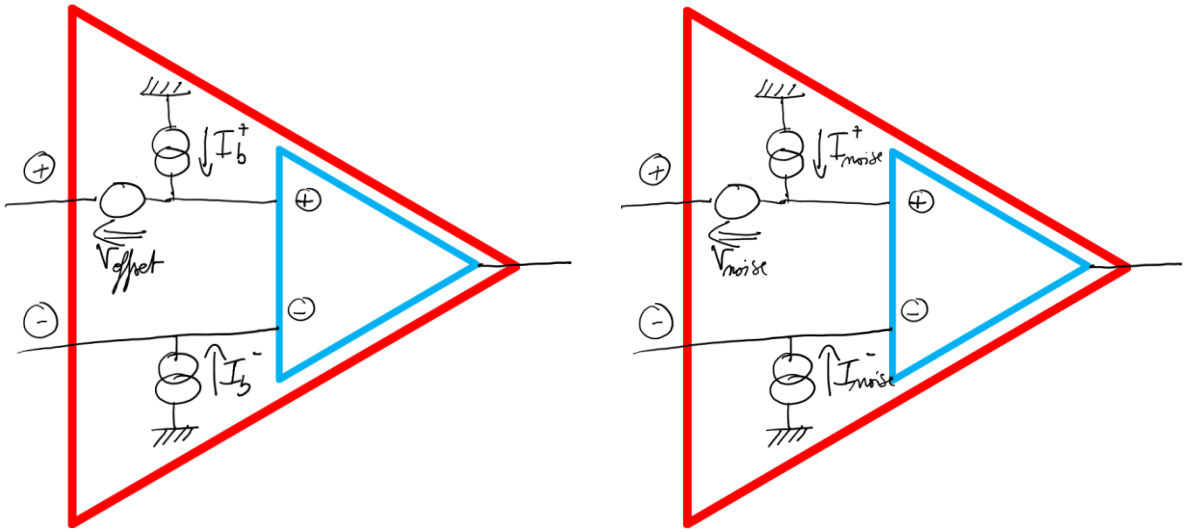


Fig. 2.10 – Modèle de la tension d'offset et des courants de polarisation dans un ampli-op réel (à gauche), et des bruits de tension et de courant (à droite). Seuls changent la nature (déterministe ou stochastique) des sources et leur contenu fréquentiel.

La tension d'offset est la tension DC qu'il faut appliquer entre les entrées + et - pour que la sortie de l'ampli-op soit rigoureusement nulle. Elle résulte de mésappariements dans le premier étage de l'architecture interne de l'ampli-op (classiquement, une « paire différentielle »). Le terme d'ampli-op « de précision » désigne un ampli-op dont la valeur typique de la tension d'offset est inférieure au mV (et de faible bruit, cf. ci-après).

Les courants de polarisation sont des courants DC, dont l'intensité peut varier du fA au nA selon la technologie (bipolaire, FET, etc.) de l'ampli-op. Ces courants sont nécessaires au bon fonctionnement du circuit : ils doivent donc pouvoir s'écouler vers la masse ou vers une source de tension idéale (y compris la sortie de l'ampli-op). Ces courants résultent en des chutes de tension dans les résistances qu'ils traversent, et donc en des erreurs de biais.

De nombreuses techniques existent pour mitiger ces deux défauts. Par exemple, pour un ampli-op donné, le choix de résistances de compensation adéquates peut atténuer l'erreur introduite par les courants de polarisation.

Exercice :

Déterminer l'expression de la contribution à l'erreur rapportée à l'entrée des courants de polarisation et de la tension d'offset pour l'ampli à transimpédance et l'ampli non-inverseur de la Fig. 2.8.

2.3.2.6 Bruit en tension et bruit en courant

La tension différentielle et les courants d'entrée d'un ampli-op réel comportent, en plus de la composante statique décrite ci-dessus, une composante aléatoire (Fig. 2.10). Du point de vue d'un capteur, cette composante aléatoire entraîne une erreur stochastique, de la même manière que la composante DC entraîne une erreur systématique.

La prise en compte de ces bruits, indépendants les uns des autres, dans un bilan d'erreur suit le même schéma que dans le cas des composants passifs :

- déterminer la fonction de transfert entre la source de bruit et le point où l'on cherche à déterminer l'erreur,
- calculer la densité de bruit en ce point en multipliant la densité de la source par le module au carré de la fonction de transfert,
- intégrer la densité sur la bande passante d'intérêt pour obtenir la variance correspondant à chacune des composantes aléatoires,
- sommer ces variances pour obtenir la variance totale.

La seule vraie particularité des sources de bruit associées à l'ampli-op concerne leur spectre, qui n'est généralement pas blanc. Le passage de densité à variance nécessite donc un tout petit peu plus d'efforts que dans le cas du bruit de Nyquist-Johnson dans les résistances.

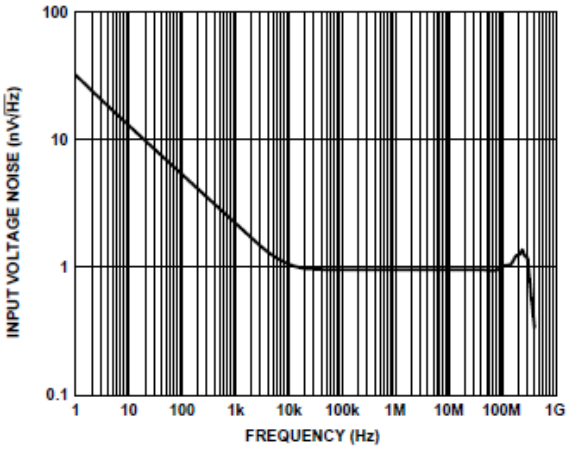


Figure 49. Input Voltage Noise vs. Frequency

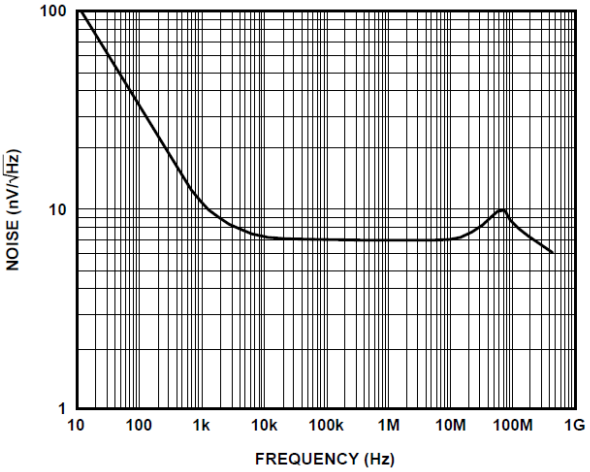


Figure 21. Voltage Noise

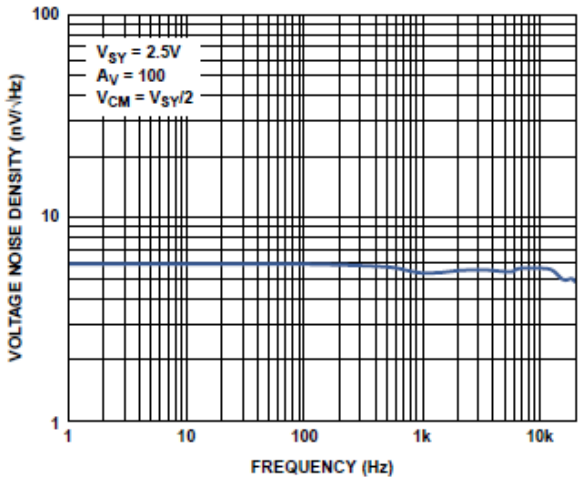


Figure 51. Voltage Noise Density vs. Frequency

Fig. 2.11 – Caractéristiques de bruit en tension pour trois amplis Analog Devices : AD8099 (en haut à gauche, ampli à étage d'entrée bipolaire), AD8065 (en haut à droite, ampli à étage d'entrée FET) et ADA4528 (en bas, ampli à auto-zéro). ***Attention aux unités des axes !***

Ainsi le bruit de tension des ampli-ops comporte (sauf dans des cas particuliers évoqués plus bas) une composante de **flicker** (ou encore de bruit de **scintillement**, bruit **rose** ou bruit en **1/f**), comme illustré à la Fig. 2.11. La densité du bruit de flicker est inversement proportionnelle à la fréquence. Les applications basse-fréquence y sont donc particulièrement sensibles. On caractérise généralement ce bruit par sa **fréquence de coin** f_c, pour laquelle les composantes roses et blanches du bruit ont la même amplitude, qui varie fortement d'un modèle d'ampli-op à

un autre. La composante blanche du bruit de tension résulte de la dissipation interne à l'ampli-op (il s'agit donc en partie de bruit de Nyquist-Johnson) et d'autres phénomènes (bruit de grenaille, par exemple). Le bruit de flicker peut avoir diverses origines physiques, la plus courante étant la co-existence de plusieurs phénomènes aléatoires indépendants ayant des temps de relaxation différents.

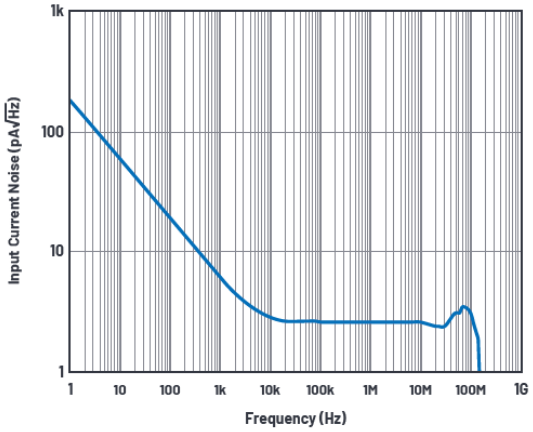


Figure 1. Current noise of AD8099, a bipolar input amplifier.

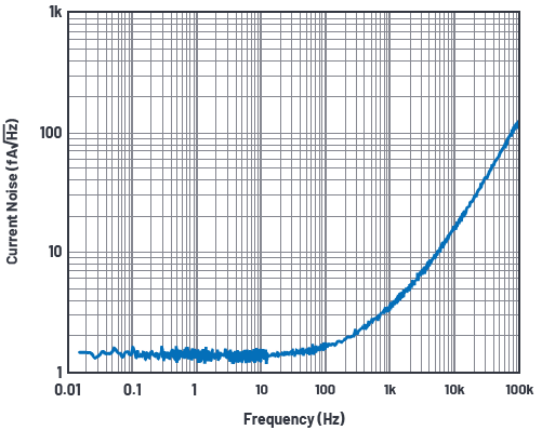


Figure 2. Current noise of AD8065, a FET input amplifier.

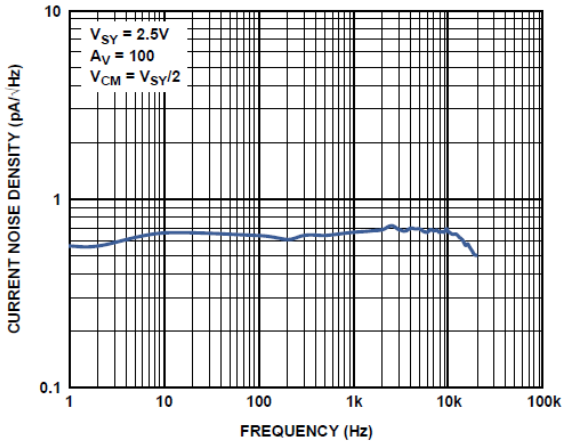


Figure 52. Current Noise Density vs. Frequency

Fig. 2.12 – Caractéristiques de bruit en courant pour trois amplis Analog Devices : AD8099 (en haut à gauche, ampli à étage d'entrée bipolaire), AD8065 (en haut à droite, ampli à étage d'entrée FET) et ADA4528 (en bas, ampli à auto-zéro). ***Attention aux unités des axes !***

Le spectre du bruit de courant des ampli-ops peut également avoir une composante de flicker (caractérisé par une fréquence de coin pas nécessairement identique à celle du bruit de tension), mais ce n'est pas obligatoirement le cas. Les caractéristiques de bruit de courant de différents ampli-ops du commerce sont tracées à la Fig. 2.12.

Enfin, certaines architectures d'ampli-ops, dites « à auto-zéro » ou « à hachage » (« chopper-stabilized ») permettent d'annuler l'effet du bruit de flicker et celui de la tension d'offset, au prix d'une bande-passante limitée à quelques dizaines de kHz.

Remarque :

Toutes les caractéristiques mentionnées dans cette section sont évidemment dépendantes de la température ambiante.

2.3.3 Interconnexions

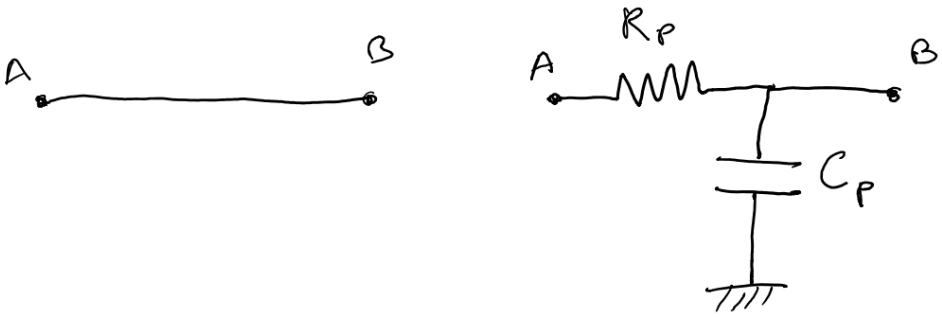


Fig. 2.13 – Interconnexion idéale (gauche) vs. interconnexion réelle (droite).

Une chaîne de conditionnement est constituée d'éléments passifs et d'éléments actifs… reliés entre eux par des fils, ou des pistes dans le cas de circuits imprimés / intégrés. Ces interconnexions peuvent impacter de manière significative la performance d'un capteur.

Pour des applications à relativement basse fréquence, on peut modéliser les interconnexions par des résistances et capacités parasites, comme illustré à la Fig. 2.13. Les interconnexions les plus critiques sont celles situées le plus en amont de la chaîne de conditionnement, i.e. celles entre le transducteur et l'AFE.

La prise en compte des résistances d'interconnexion transducteur-AFE est particulièrement importante pour les transducteurs dont la résistance intrinsèque est faible (e.g. thermocouple, RTD) et/ou montés en ponts. Dans ce dernier cas, par exemple, les résistances d'interconnexion influent sur le biais et la sensibilité du capteur. Dans le cas des transducteurs passifs, l'interconnexion entre la source (de courant ou de tension) de polarisation et le transducteur est également une interconnexion critique.

Les capacités d'interconnexion ont une influence d'autant plus marquée que la fréquence est élevée. Selon la méthode d'intégration utilisée, la capacité transducteur-AFE peut être beaucoup plus élevée que la capacité d'entrée de l'ampli-op, ce qui diminue en conséquence l'impédance d'entrée du circuit (cf. supra). La minimisation des capacités parasites (dues aux interconnexions, mais pas seulement) par des procédés technologiques, leur compensation par des techniques passives ou actives (bootstrap), leur modélisation et leur calibration font partie des préoccupations de tous les ingénieurs « électroniciens ». La Fig. 2.14 représente par exemple l'ensemble des capacités parasites environnant un capteur inertiel MEMS.

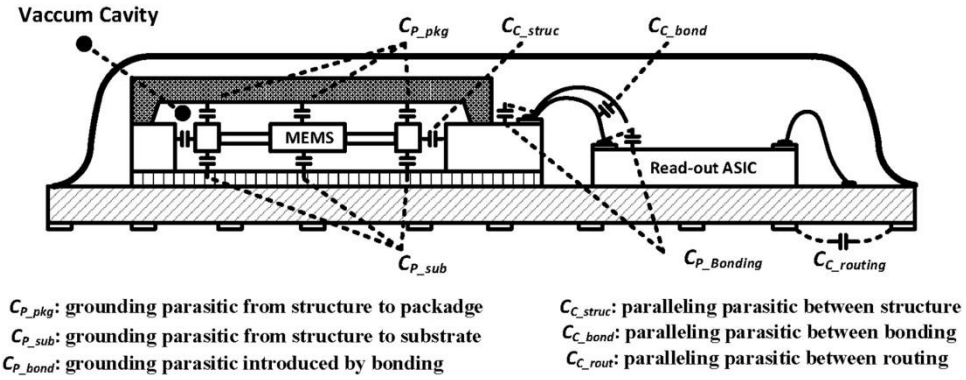


Fig. 2.14 – Vue en coupe du boîtier d'un capteur MEMS (prise de https://doi.org/10.1016/j.sna.2020.112159). Le transducteur est à gauche, l'électronique associée à droite.

2.4 Références

Si ces sujets vous intéressent, le site du fabricant de composants Analog Devices est une vraie mine !

https://www.analog.com/en/education/education-library/tutorials.html

Deux livres (un peu anciens, mais n'ayant pas pris une ride) de la section « Technical Books » sont particulièrement utiles pour approfondir sa connaissance des AFE et des ampli-ops en général :

[1] W. Kester, "Practical design techniques for sensor signal conditioning", Analog Devices, 1999

[2] W. G. Jung, "Op Amp Applications", Analog Devices, 2002

Enfin, la section « Analog Electronics » des tutoriels contient de nombreuses « fiches » courtes (typiquement 5-6 pages) dédiées à des sujets spécifiques en lien avec les ampli-ops et leurs applications. J'en recopie ici quelques-unes :

Operational Amplifiers:

1. Ideal Voltage Feedback (VFB) Op Amp (MT-032)
   I. Inverting Amplifier (MT-213)
   II. Inverting Summing Amplifier (MT-214)
   III. Half Wave Rectifier (MT-212)
   IV. Full Wave Rectifier (MT-211)
2. Current Feedback (CFB) Op Amps (MT-034)
3. Voltage Feedback Op Amp Gain and Bandwidth (MT-033)
4. Open Loop Gain and Open Loop Gain Nonlinearity (MT-044)
5. Bandwidth and Bandwidth Flatness (MT-045)
6. Settling Time (MT-046)
7. High Speed Voltage Feedback Op Amps (MT-056)
8. Input Offset Voltage (MT-037)
9. Total Output Offset Voltage Calculations (MT-039)
10. Chopper Stabilized (Auto-Zero) Precision Op Amps (MT-055)
11. Input Bias Current (MT-038)
12. Input Impedance (MT-040)
13. Power Supply Rejection Ratio (PSRR) and Supply Voltages (MT-043)
14. Input and Output Common-Mode and Differential Voltage Range (MT-041)
15. Common-Mode Rejection Ratio (CMRR) (MT-042)
16. Outputs, Single-Supply, and Rail-to-Rail Topics (MT-035)
17. Output Phase-Reversal and Input Over-Voltage Protection (MT-036)

Using Op Amps

1. Choosing Between Voltage Feedback and Current Feedback Op Amps (MT-060)
2. Compensating for the Effects of Input Capacitance on VFB and CFB Op Amps Used in Current-to-Voltage Converters (MT-059)
3. Effects of Feedback Capacitance on VFB and CFB Op Amps (MT-058)
4. Op Amp Distortion: HD, THD, THD + N, IMD, SFDR, MTPR (MT-053)
5. Op Amp Noise (MT-047)
6. Op Amp Noise Figure: Don't Be Mislead (MT-052)
7. Op Amp Total Output Noise Calculations for Second-Order System (MT-050)
8. Op Amp Total Output Noise Calculations for Single-Pole System (MT-049)
9. Op Amp Noise Relationships: 1/f Noise, RMS Noise, and Equivalent Noise Bandwidth (MT-048)

Instrumentation Amplifiers

1. Basic Two Op Amp In-Amp Configuration (MT-062)
2. Basic Three Op Amp In-Amp Configuration (MT-063)
3. In-Amp DC Error Sources (MT-064)
4. Auto-Zero In Amps (MT-067)
5. In-Amp Noise (MT-065)
6. In-Amp Bridge Circuit Error Budget Analysis (MT-066)
7. Difference and Current Sense Amplifiers (MT-068)
8. In-Amp Input Overvoltage Protection (MT-069)
9. In-Amp Input Radio Frequency Interference Protection (MT-070)
10. A Deeper Look into Difference Amplifiers

3 Accéléromètres et gyroscopes MEMS

Avant d'aborder la physique des MEMS, il me semble intéressant de brosser un portrait « haut-niveau » du principe de fonctionnement et des caractéristiques métrologiques des deux capteurs inertiels MEMS les plus courants : les accéléromètres, qui permettent de mesurer des accélérations, et les gyromètres (ou, par abus de langage, « gyroscopes »), qui permettent de mesurer des vitesses angulaires. Sans rentrer dans un excès de détail, ceci permettra d'illustrer certaines des notions mentionnées dans les parties précédentes et de justifier les principaux développements des parties suivantes.

Les accéléromètres et gyroscopes interviennent dans une multitude d'applications, dans des domaines extrêmement variés : détection de mouvement, de vibration, de choc, d'inclinaison, pour des applications de grande consommation (e.g. retourner l'image du smartphone en fonction de l'orientation de celui-ci), pour la sécurité automobile (e.g. déclencher les airbags en cas de chocs, stabiliser l'assiette d'un véhicule), pour la surveillance d'ouvrages d'art ou du corps humain (détection de chute, régulation de pacemaker), par exemple. Ces applications exigent des performances très diverses de la part des capteurs inertiels, que ce soit du point de vue métrologique (étendue de mesure, bande passante, erreur), mais aussi du point de vue du prix, de la consommation, et de l'encombrement du capteur. Les applications de navigation aux instruments ("dead reckoning") sont les plus exigeantes en termes d'erreur. En effet, la position d'un "véhicule" (voiture autonome, missile, tête de forage) peut théoriquement être calculée en intégrant les mesures d'accélération deux fois dans le temps, et son orientation en intégrant la vitesse angulaire une fois dans le temps. Mais les erreurs de mesure sont également intégrées, de sorte que, par exemple, une erreur de biais d'accélération entraîne une erreur de position qui augmente comme t^2… D'autres mesures, comme celles issues de magnétomètres, de vélocimètres, de capteurs de pression barométrique, du GPS, etc. sont nécessaires pour « recaler » un tel système régulièrement.

Dans ce qui suit, on s'intéresse principalement à la sensibilité et au bruit dans les capteurs MEMS inertiels (mono-axe), et au lien entre ces quantités et les paramètres de la structure mécanique et de l'architecture électronique les constituant.

3.1 Accéléromètres MEMS

On peut distinguer dans un accéléromètre MEMS deux blocs fonctionnels essentiels : un transducteur qui convertit l'accélération en une variation d'impédance, une électronique de conditionnement qui transforme cette variation d'impédance en un signal électrique utile. De nos jours, la très grande majorité des accéléromètres MEMS commerciaux repose sur une transduction capacitive, c'est donc sur ce cas qu'on se penche.

Comme évoqué à la partie 1, la transduction capacitive permet de convertir un déplacement en variation d'impédance. Un préalable nécessaire pour faire un accéléromètre capacitif est donc de convertir l'accélération en déplacement.

De manière macroscopique, ceci peut se faire très simplement avec un dynamomètre, ou peson, (Fig. 3.1) dont l'élongation permet de déterminer le poids (i.e. le produit masse par accélération) suspendu au crochet. Habituellement, on utilise un peson pour mesurer une masse inconnue en supposant l'accélération (la gravité) constante et connue. Mais on peut tout aussi bien raisonner à masse constante et connue et utiliser l'élongation du ressort comme mesure de l'accélération subie.

Les accéléromètres MEMS « 1-axe » reposent sur ce même principe. Ils consistent en une masse *M* suspendue par une structure élastique conçue pour être souple selon une direction, selon laquelle on détecte l'accélération, et rigide selon les autres.

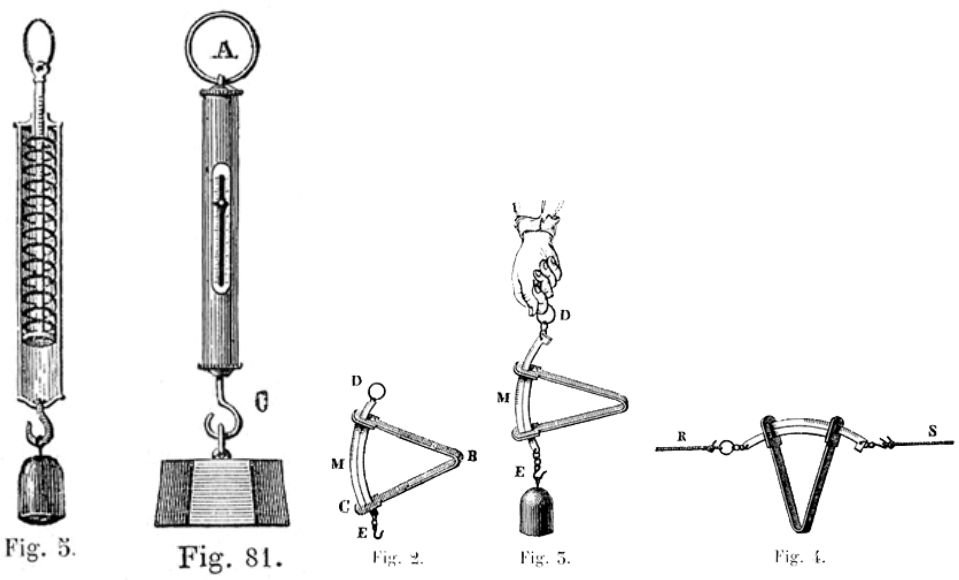


Fig. 3.1 – Exemples de pesons, tirés du site http://www.lecompendium.com, pris du « Traité de Physique Elémentaire » (Drion et Fernet, 1885) et du « Dictionnaire de l'Industrie et des Arts Industriels » (E.O. Lami, 1887).

3.1.1 Sensibilité

Sous l'effet d'une accélération *constante* A dans la direction d'intérêt, la masse se déplace de

$$X = -\frac{M}{K} \times A \quad (3.1)$$

où K est la raideur mécanique du transducteur. On peut considérer une accélération comme « constante » si son spectre est limité à une bande-passante $[0, \Delta f]$, où Δf est petit devant la fréquence de résonance de la structure :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (3.2)$$

C'est cette fréquence de résonance mécanique qui fixe la bande-passante maximale d'un l'accéléromètre.

Lorsque X varie (en réponse à une accélération), la capacité entre la masse mobile et la partie fixe du dispositif varie également. Si possible, la géométrie de la structure est conçue pour qu'une capacité augmente avec X et une autre diminue avec X dans les mêmes proportions (cf. Fig. 2.3), de manière à réaliser un montage potentiométrique différentiel. C'est par exemple le cas de l'accéléromètre de la Fig. 3.2 pour lequel on a

$$C^+ = N \times \frac{\epsilon_0 S}{g+X} = C_0 \times \frac{1}{1+X/g} \quad (3.3a)$$

$$C^- = N \times \frac{\epsilon_0 S}{g-X} = C_0 \times \frac{1}{1-X/g} \quad (3.3b)$$

où N est le nombre de « doigts » de la structure (on considère ici que les capacités sont composées de N condensateurs plans) et C_0 la capacité en l'absence d'accélération.

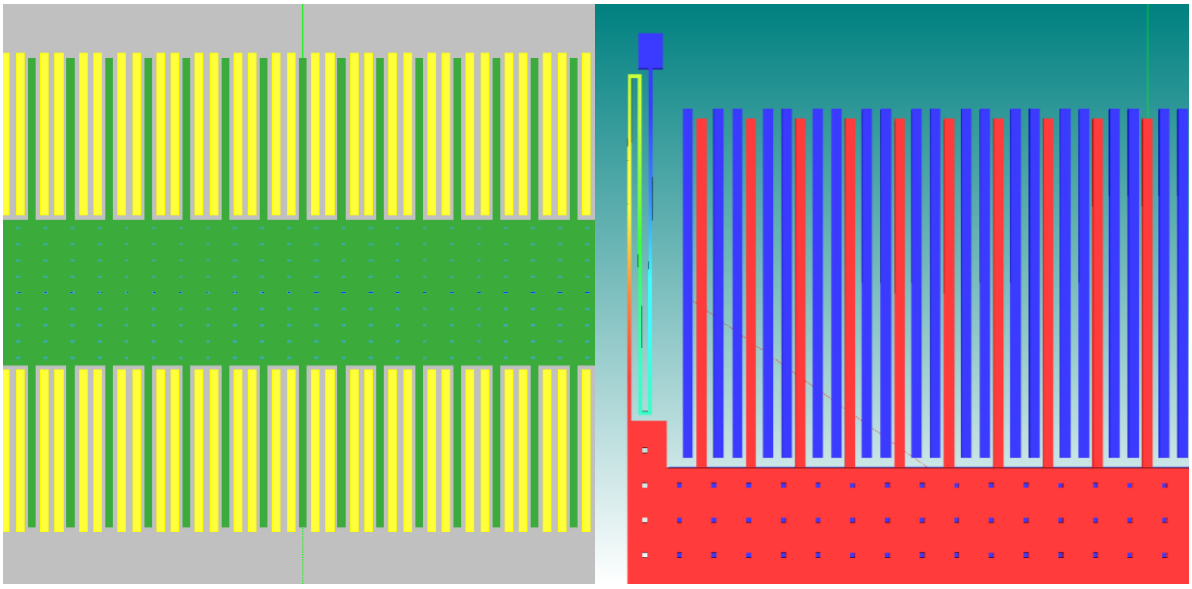


Fig. 3.2 – Simulation d'un accéléromètre MEMS capacitif à l'aide du logiciel MEMS+. A gauche, vue d'ensemble de la structure : parties mobiles (masse) et déformables (suspensions / ressorts) en vert, parties fixes (ancrages, électrodes) en jaune. A droite, simulation d'une accélération dirigée vers la droite (résultant en un déplacement vers la gauche). La capacité formée entre les doigts mobiles et les électrodes de gauche augmente, celle formée avec les électrodes de droite diminue.

Le montage potentiométrique est polarisé avec une tension V_b de fréquence f_b, comme illustré à la Fig. 2.2, de sorte que la variation quasi-statique de capacité se trouve modulée autour de f_b. Dans le cas du montage potentiométrique différentiel à sortie en tension, la tension V_{in} vue par l'AFE est

$$V_{in} = -\frac{V_b}{2} \times \frac{X}{g} \qquad (3.4)$$

et la tension en sortie d'un ampli non-inverseur

$$V_{out} = -\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \times \frac{V_b}{2} \times \frac{X}{g} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \times \frac{V_b}{2} \times \frac{M}{Kg} \times A \quad (3.5)$$

Dans le cas d'une sortie en courant, le courant I_{in} s'écrit :

$$I_{in} = -C_0 \times \frac{dV_b}{dt} \times \frac{\frac{X}{g}}{1-\frac{X^2}{g^2}} \approx -C_0 \times \frac{dV_b}{dt} \times \frac{X}{g} \qquad (3.6)$$

où l'approximation est valable si $|X^2| \ll g^2$. Si on intégrait ce courant dans une capacité C_f à l'aide d'un ampli à transimpédance, on aurait alors :

$$V_{out} \approx \frac{C_0}{C_f} \times V_b \times \frac{X}{g} = \frac{C_0}{C_f} \times V_b \times \frac{M}{Kg} \times A \qquad (3.7)$$

Remarques :

1 – Les relations (3.1) et (3.2) illustrent un premier compromis de conception des accéléromètres, entre forte sensibilité (grand M/K) et large bande-passante (grand K/M).

2 – Comme le mettent en lumière (3.5) et (3.7), la sensibilité du capteur, en $V/(m/s^2)$, dépend de paramètres qui sont propres au transducteur, et d'autres qui sont propres à l'électronique. Du point de vue d'un concepteur de capteur, ces expressions sont très utiles. Par exemple, pour maximiser la sensibilité dans le cas d'une sortie en courant, il faut trouver un compromis entre M et C_0, ces deux quantités ne pouvant être maximisées simultanément à surface de transducteur donnée.

3 – La capacité nominale n'intervient pas dans (3.5), ce qui suggère que l'accéléromètre fonctionnerait aussi bien avec $N = 1$ doigt qu'avec $N = 100$ doigts. Attention, ceci n'est vrai que dans la limite des modèles idéaux (d'ampli-op et d'interconnexions) sous-jacents aux expressions établies !

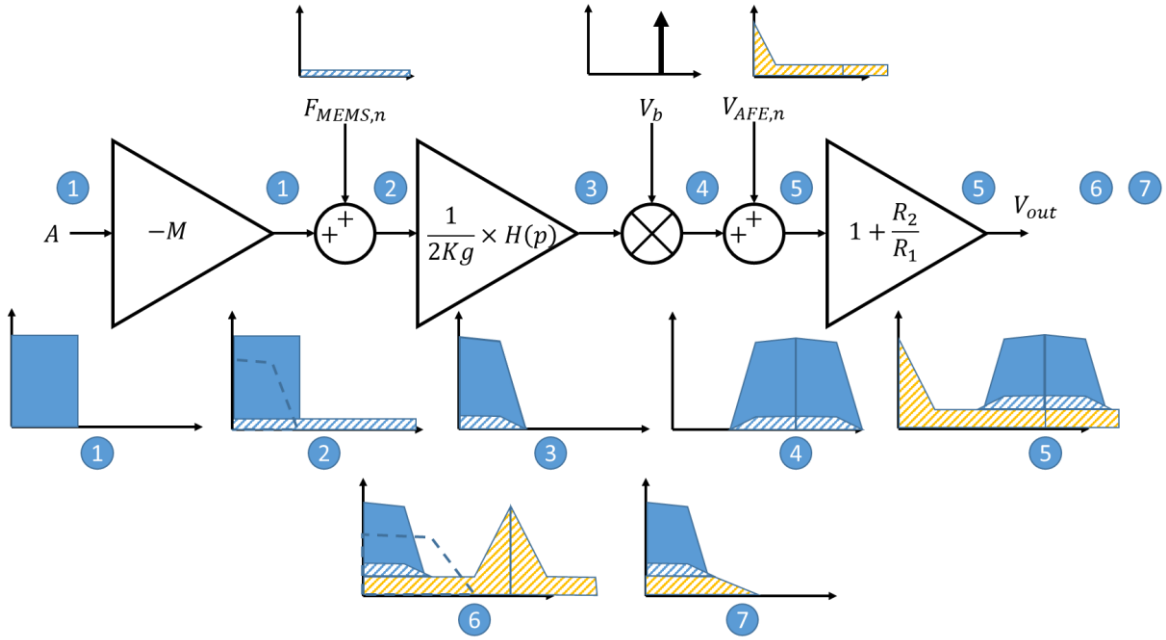


Fig. 3.3 – Représentation haut-niveau de la chaîne de transduction et de conditionnement d'un accéléromètre. Les spectres repérés par des numéros correspondent à différents endroits de la chaîne : (1) accélération ou force d'inertie, (2) force totale (inertie + thermomécanique) agissant sur la structure, (3) déplacement ou variation de capacité (limités par la fréquence de résonance f_0), (4) tension en sortie de pont (les variations de capacité sont modulées autour de la fréquence f_b, (5) tension en entrée d'AFE (et à sa sortie en assimilant l'ampli-op à un gain statique), (6) V_{out} après démodulation, (7) sortie filtrée du capteur.

3.1.2 Bruit

Pour faciliter la compréhension de cette section, on pourra se référer à la Fig. 3.3.

Comme évoqué à la partie 2, le bruit de Nyquist-Johnson affecte tous les systèmes dissipatifs, y compris mécaniques (on parle aussi de bruit thermomécanique, dans ce contexte). Si un système est sujet à une force visqueuse $F_{diss} = -B\dot{X}$, caractérisé par un coefficient de dissipation B, on peut montrer qu'il est nécessairement le siège d'une force aléatoire $F_{MEMS,n}$ de densité uniforme (« blanche ») donnée par

$$S_{F_{MEMS,n}} = 4k_B T \times B \ [\mathrm{N}^2/\mathrm{Hz}] \quad (3.8)$$

Dans le cas des accéléromètres MEMS, la principale cause de dissipation est le frottement de la masse mobile dans le fluide ambiant.

Ce bruit se répercute évidemment sur le mouvement de la masse et sur la détection de l'accélération (sur la « fidélité » de la mesure). Dans la bande-passante Δf (qu'on a supposée petite devant f_0), on peut écrire

$$X = -\frac{M}{K} \times A + \frac{F_{MEMS,n}}{K} = -\frac{M}{K} \times \left(A - \frac{F_{MEMS,n}}{M}\right) \qquad (3.9)$$

ce qui met en évidence que le déplacement est la superposition d'un terme dépendant de l'accélération et d'un terme d'erreur stochastique. Le terme $F_{MEMS,n}/M$, homogène à une accélération, correspond au bruit thermomécanique « rapporté à l'entrée » du système. Sa variance est égale à

$$\overline{A^2_{MEMS,n}} = 4k_B T \times \frac{B}{M^2} \times \Delta f \ [(\mathrm{m/s^2})^2] \qquad (3.10)$$

Le « plancher de bruit » de l'accéléromètre fixé par (3.10) est intrinsèque au transducteur ; il ne peut être amélioré qu'en augmentant la masse du dispositif, en diminuant les frottements (par exemple en faisant le vide dans le boîtier du transducteur) ou en réduisant la bande-passante.

Les bruits dus à la partie électronique du système s'ajoutent à ce bruit intrinsèque. Par exemple, dans le cas d'un montage potentiométrique à sortie en tension, on aura

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \times \left(\frac{V_b}{2} \times \frac{M}{Kg} \times \left(A - \frac{F_{MEMS,n}}{M}\right) + V_{AFE,n}\right) \qquad (3.11)$$

où $V_{AFE,n}$ est le bruit de tension dû à l'électronique (composants passifs et actifs), rapporté à l'entrée de l'AFE. On peut rapporter ce bruit à l'entrée du système comme un bruit d'accélération de variance :

$$\overline{A^2_{AFE,n}} = \frac{1}{\left(\frac{V_{b,1}}{2} \times \frac{M}{Kg}\right)^2} \times \overline{V^2_{AFE,n}} \ [(\mathrm{m/s^2})^2] \qquad (3.12)$$

où $V_{b,1}$ est l'amplitude de la première harmonique de V_b (qui peut être harmonique, carré, etc.) et $\overline{V^2_{AFE,n}}$ la variance de $V_{AFE,n}$ calculée sur la bande $[f_b - \Delta f, f_b + \Delta f]$. Comme évoqué à la partie 1 du polycopié, on peut réduire la contribution de l'AFE à l'erreur stochastique du capteur en augmentant le « gain » (i.e. la sensibilité) de l'étage précédant l'AFE (i.e. le transducteur). De même, on réduirait la contribution d'un deuxième étage d'amplification en augmentant le gain du transducteur ou celui de l'AFE, i.e.

$$\overline{A^2_{2^{nd}\ stage,n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{V_{b,1}}{2} \times \frac{M}{Kg}\right)^2} \times \overline{V^2_{2^{nd}\ stage,n}} \ [(\mathrm{m/s^2})^2] \qquad (3.13)$$

La résolution de la plupart des accéléromètres MEMS du commerce est limitée par le bruit de l'AFE, pas par le bruit intrinsèque au transducteur, i.e. $\overline{A^2_{MEMS,n}} \ll \overline{A^2_{AFE,n}}$.

3.1.3 Effets dynamiques dans les accéléromètres

Pour rendre compte de l'effet d'accélérations large bande (e.g. chocs et vibrations), un modèle dynamique du transducteur est nécessaire :

$$KX + B\dot{X} + M\ddot{X} = -MA \Leftrightarrow X = -\frac{M}{K} \times H(p) \times A \qquad (3.14\text{-a})$$

$$H(p) = \frac{1}{1+\frac{B}{K}p+\frac{M}{K}p^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{Q\omega_0}p+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}. \qquad (3\text{-}14\text{-b})$$

qui remplace alors (3.1). Dans (3.14), p est le paramètre de Laplace, $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{K/M}$ est la pulsation de résonance de la structure et $Q = \sqrt{KM}/B$ son facteur de qualité. Comme le montre (3.14-b), au-delà de f_0, qui est typiquement comprise entre 100 Hz et 10 kHz, la structure répond

de moins en moins à l'accélération. La fonction de transfert $H(p)$ est tracée à la Fig 3.4 pour différentes valeurs de Q, ainsi que la réponse du transducteur à un échelon d'accélération. En toute rigueur, il faut tenir compte des effets dynamiques dans l'ensemble des calculs de bruits.

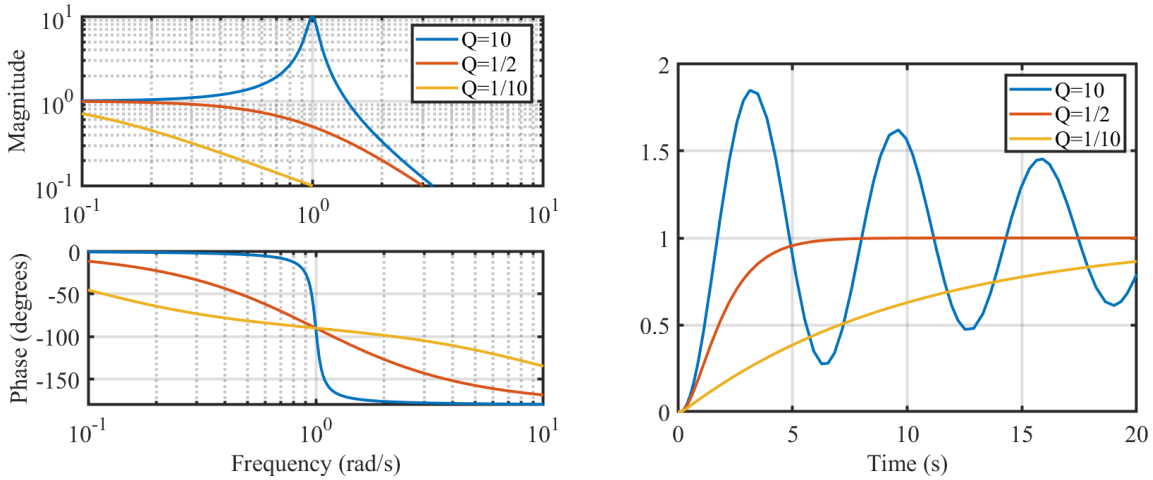


Fig. 3.4 – Réponse en fréquence (à gauche) et réponse indicielle de $H(p)$ pour $\omega_0 = 1$ et différents facteurs de qualité.

La valeur $Q = 1/2$ est optimale pour ce qui est du temps de réponse sans dépassement. De nombreux paramètres physiques permettent de jouer sur le coefficient d'amortissement B, et donc sur Q (essentiellement viscosité du gaz ambiant et dimensions des films de gaz formés entre les électrodes fixes et mobiles). Cependant, augmenter B signifie également augmenter le plancher de bruit (3.10). Cela n'est pas forcément problématique, tant que le bruit électronique domine. On peut également utiliser un une rétroaction pour forcer le système à atteindre son régime permanent plus rapidement que le temps de réponse dicté par un grand Q. Cette solution, qui présente l'avantage de ne pas élever le plancher de bruit de l'accéléromètre, rend néanmoins la conception du système plus complexe. Elle nécessite essentiellement deux étapes, qu'on peut réaliser plus simplement dans le domaine numérique :

- une « estimation d'état », qui consiste à déterminer, à partir des signaux numérisés, des estimations $\hat{X}$ et $\hat{\dot{X}}$ de la position et de la vitesse de la masse mobile. Cette opération est plus ou moins complexe selon le degré de connaissance *a priori* sur le système à asservir.
- la génération d'une commande C en fonction de l'état estimé. Celle-ci peut être aussi simple que

$$C = a\hat{X} + b\hat{\dot{X}}$$

auquel cas on joue sur la raideur et l'amortissement effectifs du transducteur (via les coefficients a et b respectivement). Une alternative consiste à utiliser une commande proportionnelle-intégrale-dérivée

$$C = \alpha\left(\hat{X} - X_{ref}\right) + \beta \int \left(\hat{X} - X_{ref}\right)dt + \gamma \frac{d}{dt}\left(\hat{X} - X_{ref}\right)$$

Du fait du terme intégral, la commande devient d'autant plus forte que $\hat{X}$ et X_{ref} sont éloignés longtemps Cette commande permet en pratique d'asservir la masse mobile à la position X_{ref}. Ceci est vrai sur une certaine bande-passante, pour laquelle on peut considérer que la force d'inertie agissant sur la masse mobile est exactement compensée par la force résultant de la commande.

La commande doit évidemment être « traduite » en force pour agir sur la masse mobile. Ceci nécessite non seulement un CNA lorsque le contrôleur est numérique, mais aussi des électrodes

spécifiques pour actionner la masse mobile, ou un schéma de multiplexage temporel pour réaliser l'actionnement et la détection avec les mêmes électrodes. Un schéma haut-niveau d'un tel système est représenté à la Fig. 3.5.

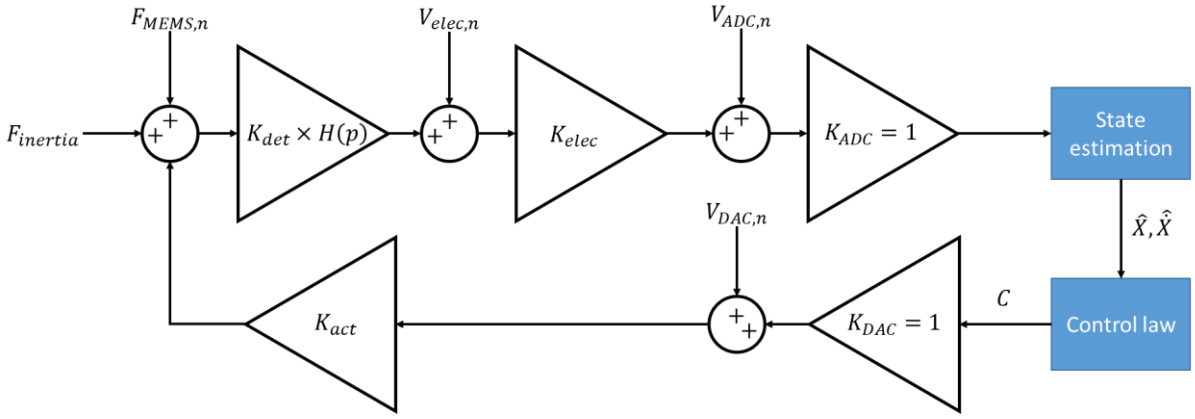


Fig. 3.5 – Schéma simplifié d'un accéléromètre asservi.

Exercices :

1 – Dans le cas d'un accéléromètre non asservi, en quoi la valeur de $\overline{A^2_{MEMS,n}}$ *est-elle affectée par la prise en compte de la fonction de transfert* $H(p)$ *? Et celle de* $\overline{A^2_{AFE,n}}$ *?*

2 – Etablir l'expression de la fonction de transfert entre la force d'inertie et la commande C*, dans le cas d'une commande proportionnelle-intégrale (*$\gamma = 0$*). On prendra* $\hat{X}$ *proportionnel à la sortie du convertisseur analogique-numérique et* $X_{ref} = 0$ *de sorte qu'on pourra écrire :*

$$C = \left(\alpha + \frac{\beta}{p}\right)\hat{X}$$

Quelle est la bande-passante du capteur ainsi obtenu ? Quel est le bruit rapporté à l'entrée du capteur ?

3.2 Gyroscopes MEMS

Au sens propre, un gyroscope est un capteur permettant de mesurer un angle, et un gyromètre est un capteur permettant de mesurer une vitesse angulaire. A ma connaissance, l'ensemble des capteurs MEMS commercialisés sous le nom de « gyroscope » sont en fait des gyromètres. Ceux-ci ne permettent donc de mesurer un angle qu'en intégrant dans le temps le résultat d'une mesure de vitesse angulaire, ce qui n'est pas sans risque puisque cette mesure est entachée d'erreurs, comme déjà mentionné dans l'introduction de cette partie. Dans ce qui suit (et dans le reste de cet ouvrage), on commettra ce même abus de langage et on précisera « gyroscope vrai » lorsqu'il sera question d'un… vrai gyroscope.

Les gyroscopes MEMS reposent sur la force de Coriolis qui s'exerce sur une masse en mouvement lorsque son référentiel subit une rotation :

$$\vec{F}_{Coriolis} = -2M\vec{\Omega} \wedge \vec{V}, \qquad (3.15)$$

où M est la masse du dispositif, $\vec{V}$ sa vitesse et $\vec{\Omega}$ la vitesse angulaire à laquelle se produit la rotation. La détection de cette force suit peu ou prou le même principe que la détection de la force d'inertie due à une accélération, dans le cas de l'accéléromètre : la force est convertie en déplacement, le déplacement en variation de capacité, la variation de capacité en courant ou en tension.

Il existe cependant de multiples différences entre gyroscopes et accéléromètres. Pour ne citer que les plus évidentes :

- la transduction de la vitesse angulaire en force de Coriolis (3.15) est une transduction passive, dans le sens où elle nécessite un apport d'énergie (cinétique) extérieur. En l'absence de cette « vitesse de polarisation », il n'y a pas de force de Coriolis. En pratique, on actionne la structure à l'aide de forces électrostatiques (voir partie 4) pour la faire vibrer de manière harmonique dans une direction donnée, dite direction de « drive » (direction de pilotage), à la fréquence f_d.
- la force de Coriolis est orthogonale à $\vec{V}$. Il faut donc que la structure puisse se déplacer dans cette direction de « sense » (direction de détection), comme dans la direction de « drive ». Du simple point de vue mécanique, cela rend la conception des gyroscopes plus complexe que celle des accéléromètres.
- dans le cas de l'accéléromètre, les déplacements et les variations de capacités ont le même support spectral que l'accélération qu'on cherche à mesurer. Dans le cas du gyroscope, les déplacements résultant de la force de Coriolis, et les variations de capacité conséquentes, sont centrés autour de la fréquence f_d (l'information sur la vitesse angulaire est modulée à cette fréquence).

3.2.1 Sensibilité

La Fig. 3.6 représente une géométrie de gyroscope MEMS à un axe à laquelle on pourra se référer comme illustration de cette section.

On peut décrire de manière *simplifiée* le comportement d'un gyroscope à l'aide de deux équations couplées, une pour le mode de drive, une pour le mode de sense

$$K_d X + B_d \dot{X} + M\ddot{X} = F_d \qquad \text{(3.16-a)}$$

$$K_s Y + B_s \dot{Y} + M\ddot{Y} = -2M\Omega\dot{X} \qquad \text{(3.16-b)}$$

où X est le déplacement de la masse M dans la direction de drive, Y son déplacement dans la direction de sense, Ω la vitesse angulaire (autour de la normale au plan XY). Ce modèle est valable lorsque $\Omega \ll \omega_d$, où $\omega_d = \sqrt{K_d/M} = 2\pi f_d$. Par ailleurs, on pose $\omega_s = \sqrt{K_s/M} = 2\pi f_s$, $Q_d = \sqrt{K_d M}/B_d \gg 1$ et $Q_s = \sqrt{K_s M}/B_s \gg 1$. La structure est actionnée dans la direction de « drive » par une force $F_d = F \times \sin \omega_d t$ générée à l'aide d'un oscillateur.

Comme le mode de drive est excité à sa fréquence naturelle f_d, on peut approximer (3.16-a) par :

$$B_d \dot{X} = F_d \qquad (3.17)$$

de sorte que (3.16-b) devient

$$K_s Y + B_s \dot{Y} + M\ddot{Y} = -2M\frac{F_d}{B_d}\Omega \quad (3.18)$$

Enfin, si $f_d < f_s$ (on parle de gyroscope à « modes séparés ») et que la bande-passante Δf de Ω est petite devant $f_s - f_d$, le terme de droite de (3.18) peut être considéré comme variant lentement. Alors, (3.18) se simplifie en

$$Y = -2M\frac{F_d}{K_s B_d}\Omega \qquad (3.19)$$

Le déplacement Y peut donc être décrit comme un signal harmonique à la fréquence f_d, modulé par Ω, en phase avec F_d, et en quadrature avec X, de sorte que le centre de gravité de la masse décrit une ellipse, plus ou moins aplatie selon Ω.

En formant des capacités ad hoc entre les parties fixes du dispositif et la partie mobile, on peut réaliser une transduction capacitive du déplacement Y de sorte que

$$C^+ = C_0 \times \frac{1}{1+Y/g} \qquad \text{(3.20-a)}$$

$$C^- = C_0 \times \frac{1}{1-Y/g} \qquad \text{(3.20-b)}$$

où l'on suppose une détection via la variation du gap g de condensateurs plans.

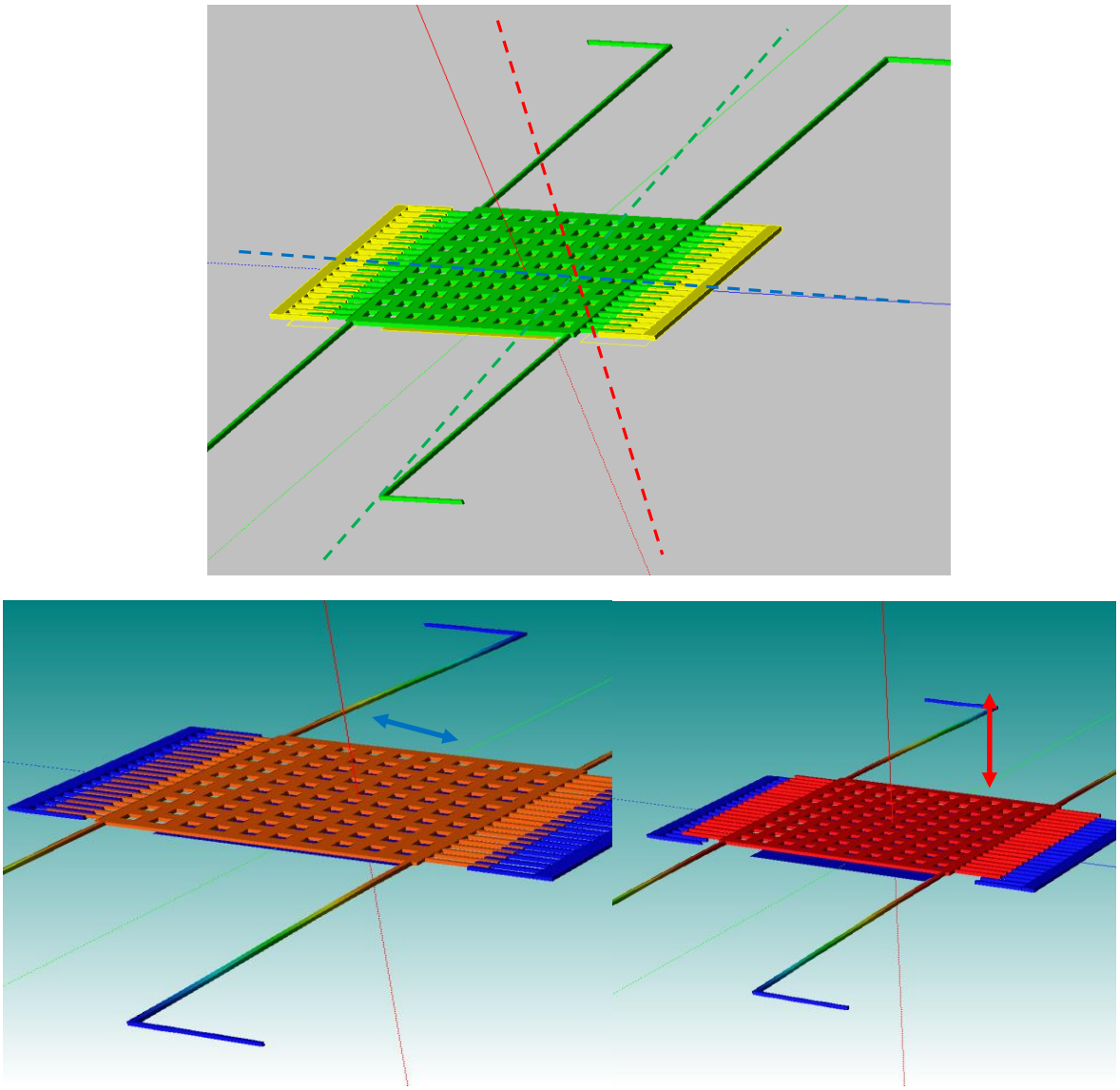


Fig 3.6 – Simulation d'un gyroscope MEMS capacitif à l'aide du logiciel MEMS+. En haut, géométrie de la structure consistant en une masse centrale (partie perforée) suspendue par quatre poutres permettant le mouvement selon X (axe bleu) et Y (axe rouge), pour détecter les rotations selon Z (axe vert). Le mode de « drive » (en bas à gauche) est excité au moyen des peignes d'électrodes situés de part et d'autre de la structure. La force de Coriolis entraîne une oscillation du mode de « sense » (en bas à droite), ce qui résulte en une variation de la capacité formée entre la masse mobile et l'électrode située sous la masse.

Pour convertir ces variations de capacité en signal électrique, on polarise les capacités variables à l'aide d'un montage potentiométrique. La différence principale avec le cas de l'accéléromètre est qu'on peut ici polariser le montage avec une tension constante, puisque C^+ et C^- sont modulés autour de la fréquence f_d. Dans le cas d'une sortie en tension, on trouve :

$$V_{in} = -\frac{V_b}{2} \times \frac{Y}{g} \quad (3.21)$$

et pour une sortie en courant :

$$I_{in} = -C_0 V_b \frac{d}{dt}\left(\frac{Y/g}{1-Y^2/g^2}\right) \approx -C_0 V_b \times \frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{g}\right) \quad (3.22)$$

Remarques :

1 – La sensibilité d'un gyroscope à modes séparés dépend non seulement de la masse et de la raideur du mode de « sense » (comme un accéléromètre classique), mais également de la force d'excitation et du coefficient de dissipation du mode de « drive ».

2 – L'excitation à la résonance du mode de « drive » peut être réalisée avec un oscillateur dont la fréquence est contrôlée en tension (VCO, pour « voltage-controlled oscillator ») pour que la phase entre la force F_d (à la sortie de l'oscillateur) et le déplacement X mesuré soit de 90° (ce qui correspond à la résonance, cf. Fig. 3.4). Ceci nécessite évidemment une transduction supplémentaire, pour convertir X en tension.

3 – Une détection capacitive différentielle n'est évidemment pas possible avec la seule structure (simpliste) de la Fig. 3.6. Une solution pour y parvenir consisterait à fabriquer deux structures similaires côte à côte, et à les piloter en opposition de phase. De la sorte, les deux structures verraient la même force de Coriolis, mais au signe près. Par conséquent, les déplacements selon Y et les variations de capacité correspondantes des deux structures seraient aussi égales au signe près.

3.2.2 Bruit

On peut appliquer aux gyroscopes le même schéma d'analyse que pour les accéléromètres. C'est le bruit thermique du mode de « sense » qui détermine le plancher de bruit, mais le bruit de l'électronique est souvent quelques ordres de grandeur au-dessus de cette limite, du moins pour les gyroscopes à modes séparés. C'est donc le bruit électronique qui fixe la résolution du capteur.

En tenant compte du bruit thermomécanique, le déplacement Y s'écrit

$$Y = -2M \frac{F_d}{K_s B_d} \Omega + \frac{F_{MEMS,n}}{K_s} \quad (3.23)$$

ce qui signifie que, sur la bande passante Δf d'intérêt, on a

$$\overline{\Omega^2_{MEMS,n}} = 2k_B T \times \frac{B_s}{M^2} \times \frac{B_d^2}{F^2} \times \Delta f \ [(\text{rad/s})^2] \quad (3.24)$$

La contribution du bruit de l'AFE dans le cas d'une sortie en tension est

$$\overline{\Omega^2_{AFE,n}} = \frac{1}{\left(\frac{V_b}{2g} \times \frac{2M}{K_s} \times \frac{F}{B_d}\right)^2} \times \overline{V^2_{AFE,n}} \ [(\text{rad/s})^2] \quad (3.25)$$

où $\overline{V^2_{AFE,n}}$ est le bruit de tension à l'entrée de l'AFE sur la bande de fréquence $[f_d - \Delta f, f_d + \Delta f]$. Pour une sortie en courant, on trouve

$$\overline{\Omega^2_{AFE,n}} = \frac{1}{\left(C_0 \omega_d \times \frac{V_b}{g} \times \frac{2M}{K_s} \times \frac{F}{B_d}\right)^2} \times \overline{I^2_{AFE,n}} \ [(\text{rad/s})^2] \quad (3.26)$$

où $\overline{I^2_{AFE,n}}$ est le bruit de courant à l'entrée de l'AFE sur la bande de fréquence $[f_d - \Delta f, f_d + \Delta f]$.

Remarques :

1 – Le mode de « drive » est également sujet à des bruits : bruit thermomécanique, mais aussi électronique (généré dans la boucle d'auto-oscillation du mode), qui se répercutent évidemment sur les performances du gyroscope.

2 – Le mode de détection d'un gyroscope peut être asservi pour améliorer son temps de réponse et/ou augmenter son étendue de mesure, comme dans le cas des accéléromètres.

3.2.3 Gyroscopes à modes dégénérés

Certains gyroscopes de pointe reposent sur l'utilisation de deux modes de même fréquence de résonance. On parle de gyroscopes à « modes dégénérés » ou « accordés en mode ». Dans ce cas, (3.19) peut être remplacée par

$$\dot{Y} = -2M\frac{F_d}{B_s B_d}\Omega \qquad (3.27)$$

Ceci permet d'avoir une amplitude de déplacement Y qui soit $Q_s \gg 1$ fois plus grande que dans le cas « modes séparés ».

Les modes peuvent être considérés dégénérés si on n'arrive pas à les résoudre spectralement, i.e. $|f_s - f_d| \ll f_s/Q_s$. Cette condition est très difficile à réaliser en pratique : les fréquences des modes de vibration doivent non seulement avoir la même valeur, mais aussi la même dépendance en température, ou bien des stratégies de compensation active des dérives doivent être mises en place (à nouveau, une forme d'asservissement). Par ailleurs, l'utilisation de modes dégénérés restreint la bande-passante de Ω à f_s/Q_s, contre $f_s - f_d$ dans le cas « modes séparés ». C'est à nouveau une forme de compromis sensibilité / bande-passante.

Si le gyroscope est à modes dégénérés, on vérifie que la variance du bruit thermomécanique rapporté à l'entrée est toujours donnée par (3.24). Du point de vue du plancher de bruit, il n'y a donc pas de différence entre gyroscope à modes séparés ou dégénérés. En revanche, la variance du bruit dû à l'électronique est réduite d'un facteur Q_s^2 par rapport à (3.25) ou (3.26).

3.2.4 Erreur de quadrature

Une difficulté majeure rencontrée lors de la conception des gyroscopes (à modes séparés ou non) est l'existence d'une erreur dite « de quadrature ». Cette erreur résulte d'une oscillation parasite à la fréquence f_d du mode de « sense » en l'absence de rotation ($\Omega = 0$). Cette oscillation découle elle-même d'un couplage entre les directions de « drive » et de « sense » (anisoélasticité) lié à des défauts de fabrication ou de conception.

En présence de tels défauts, (3.16b) s'écrit :

$$K_s(Y + \eta X) + B_s\dot{Y} + M\ddot{Y} = -2M\Omega\dot{X} \quad (3.28)$$

En l'absence de rotation, le signal d'erreur (dans le cas « modes séparés ») s'écrit

$$Y_{err} = -\eta X \qquad (3.29)$$

à comparer au déplacement dû à la force de Coriolis, donné par (3.19), qu'on réécrit ici sous la forme :

$$Y_{Coriolis} = -2\frac{M}{K_s}\dot{X}\Omega \quad (3.30)$$

On constate d'une part que les deux termes $Y_{Coriolis}$ et Y_{err} sont en quadrature, ce qui, en théorie, est suffisant pour discriminer par une démodulation le signal utile du signal d'erreur. Ceci est aisé tant que l'amplitude du signal d'erreur Y_{err} est inférieure à celle du plus grand signal $Y_{Coriolis}$ qu'on cherche à mesurer (les deux signaux devant traverser la même chaîne d'amplification). On a, à partir de (3.29) et (3.30) :

$$\frac{|Y_{err}|}{|Y_{Coriolis}|} = \frac{\eta|X|}{2\frac{M}{K_s}\omega_d|X|\Omega} = \frac{\eta}{2}\frac{\omega_s^2}{\omega_d\Omega} \quad (3.31)$$

ce qui signifie que le coefficient d'anisoélasticité doit au moins vérifier

$$\eta \leq 2\frac{\Omega}{\omega_d} \times \frac{\omega_d^2}{\omega_{s^2}} \quad (3.32)$$

En pratique, le coefficient η peut être ajusté post-fabrication par des techniques de « trimming » ou via l'application de forces électrostatiques qui « redresseront » la structure.

Exercices

1 – Reprendre l'étude de l'erreur de quadrature dans le cas « modes dégénérés ». Le problème est-il le même ? est-il pire ? moindre ?

2 – Quel est l'accéléromètre d'Analog Devices présentant le bruit le plus faible ? Sur quelle gamme (d'accélération, de fréquence et de température) fonctionne-t-il ? Comment la température joue-t-elle sur les performances métrologiques ? Combien coûte ce composant ?

3 – Reprendre la même étude pour les accéléromètres de STMicroelectronics et ceux de Bosch.

4 – Reprendre la même étude pour les gyroscopes de ces trois entreprises.

3.3 Références

Un traitement similaire des accéléromètres et des gyroscopes MEMS peut être trouvé dans :

[1] V. Kaajakari, « Practical MEMS », Small Gear Publishing, 2009

Les gyroscopes en particulier sont traités en détail dans

[2] C. Akar, A. Shkel, « MEMS Vibratory Gyroscopes. Structural Approaches to Improve Robustness », Springer, 2009

4 Physique des MEMS

4.1 Introduction

L'approche développée en partie 3 permet de traduire des spécifications exprimées au niveau « applicatif » en termes de performances (sensibilité, étendue, temps de réponse, résolution) en spécifications au niveau « système », exprimées en termes de gains, de bruits de tension ou de courant et de non-idéalités diverses (pour la partie électronique), en termes de raideurs, de coefficients d'amortissement, de masse, de capacités, de forces (pour la partie « électromécanique »).

Un concepteur de capteurs intégrés doit être en mesure de traduire ces spécifications « système » en termes « physiques » : par exemple, quelle géométrie donner à une structure MEMS pour parvenir à une certaine raideur, à un certain coefficient d'amortissement, à une certaine fréquence de résonance ? Le même type de travail est évidemment nécessaire pour la conception de la partie électronique, mais ceci sort très largement du cadre de ce cours, dédié plus spécifiquement au transducteur MEMS qu'à son électronique associée.

La conception d'un transducteur MEMS est complexe pour de nombreuses raisons. Tout d'abord, parce que les MEMS sont des dispositifs multi-physiques, qui obligent à manipuler notamment mécanique, électrostatique, fluidique et thermique. Les phénomènes physiques sont couplés, plus ou moins fortement, ce qui oblige à des compromis de conception : par exemple, réduire les gaps entre la partie mobile et la partie fixe d'une structure MEMS permet d'augmenter l'efficacité de la transduction capacitive, mais accentue l'influence du film d'air inter-électrodes sur le coefficient d'amortissement du système. De même, la géométrie des suspensions d'un gyroscope doit permettre le déplacement d'une masse dans deux directions orthogonales, tout en minimisant les pertes thermoélastiques ou par radiation aux points d'ancrage.

Le concepteur doit également avoir une bonne connaissance des technologies à sa disposition pour fabriquer le transducteur : évidemment des contraintes qu'elles imposent sur les dimensions minimales des structures ou des gaps, mais aussi des dispersions et autres non-idéalités (contraintes résiduelles, gradients de contrainte, etc.) susceptibles d'affecter les caractéristiques de la structure post-fabrication. Le boîtier qui accueille le transducteur a également une influence considérable sur le comportement des structures MEMS, tant statique que dynamique, et il est tout particulièrement crucial pour leur comportement à long terme. Ces aspects technologiques sortent de mon domaine de compétence et ne sont donc pas traités en détail dans ce polycopié.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à la physique des MEMS vue sous un jour idéalisé, i.e. en oubliant dans un premier temps la plupart des imperfections dues à la technologie. Ce prédicat de conception permet effectivement de traduire les spécifications « système » en spécifications « physiques » ou « géométriques ». Une fois cette étape franchie, il sera possible de valider la conception du transducteur au moyen d'outils de simulation numérique à un niveau d'abstraction plus bas (par exemple, éléments finis). Ceci permettra de confirmer (ou d'infirmer) les hypothèses simplificatrices faites pour arriver aux spécifications « physiques » et de vérifier, par simulation, l'influence du procédé technologique de fabrication, et de l'encapsulation, sur les performances du dispositif. Ces outils numériques sont présentés à la Partie 5.

4.2 Mécanique des MEMS

4.2.1 Principes fondamentaux

La plupart des structures MEMS sont constituées de silicium, suffisamment dopé pour être considéré comme conducteur. Le silicium est un matériau qui est presque parfaitement élastique jusqu'à sa limite de rupture, c'est-à-dire qu'il existe une relation linéaire entre les déformations

géométriques du milieu, décrites par le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$, partie symétrique du gradient de déplacement, et les efforts internes, ou contraintes, décrites par le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$.

Cette relation, connue sous le nom de loi de Hooke, s'écrit pour un milieu isotrope :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} Tr(\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{I}\right) \qquad (4.1)$$

où E est le module d'Young ($E \approx 160$GPa pour Si) et ν le coefficient de Poisson ($\nu \approx 0.22$ pour Si). La loi de Hooke se simplifie en

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} \qquad (4.2\text{-a})$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\nu\epsilon_{xx} \qquad (4.2\text{-b})$$

dans le cas où le milieu est sujet à une contrainte uni-axiale selon la direction x (Fig. 4.1). L'équation (4.2-b) décrit la dilatation latérale du matériau lorsqu'il est comprimé selon x, ou son amincissement lorsqu'il est étiré. L'équation (4.2-a) traduit un comportement de type « ressort », $F = -K_{axial}X$, où

$$K_{axial} = \frac{ES}{L} \qquad (4.3)$$

avec L la dimension selon laquelle s'exerce la contrainte et S la surface où elle s'exerce (Fig. 4.1).

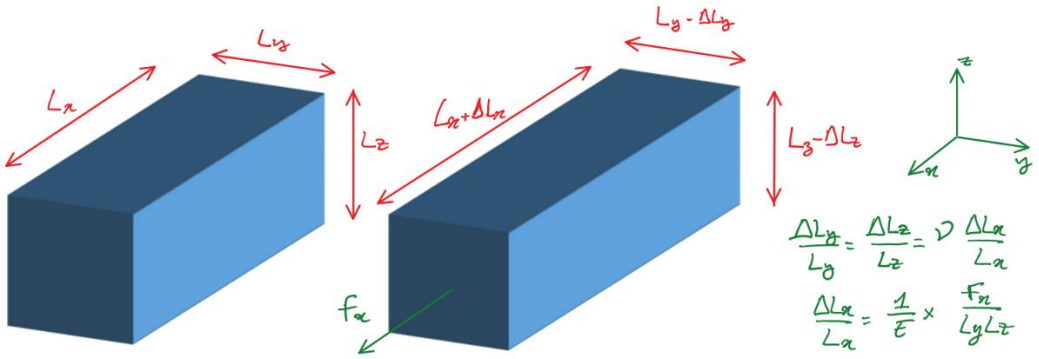


Fig. 4.1 – Déformation uni-axiale d'un matériau élastique (la force F_x s'applique de part et d'autre).

En écrivant la relation fondamentale de la dynamique dans le milieu

$$div(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{f} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \qquad (4.4)$$

où $\boldsymbol{u}$ est le champ de déplacements (dont dérivent les déformations), $\boldsymbol{f}$ une force volumique et ρ la densité du matériau ($\rho = 2330$kg/m^3 pour Si), et en combinant avec (4.1), on obtient l'équation de Navier :

$$\frac{1}{2}\frac{E}{1+\nu}\left(\Delta\boldsymbol{u} + \frac{1}{1-2\nu} grad(div(\boldsymbol{u}))\right) + \boldsymbol{f} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}. \quad (4.5)$$

Celle-ci constitue un bon point de départ pour une validation numérique d'un choix de géométrie d'un transducteur MEMS, par la méthode des éléments finis par exemple. Cependant, cette formulation est bien trop générale (et les outils de résolution qu'elle nécessite bien trop coûteux) pour servir efficacement à la conception et au dimensionnement d'une structure MEMS. Dans une première approche, il est plus intéressant de concevoir un dispositif MEMS en le réduisant à un ensemble de composants simples dont le comportement est plus aisément modélisable : masses rigides (comme dans les capteurs inertiels), membranes (comme dans les capteurs de pression ou les microphones), suspensions (de capteurs inertiels) et poutres (jauges de force résonantes, par exemple).

Remarques :

1 – L'influence de la température T sur le comportement des structures MEMS peut être prise en compte en modifiant (4.1) comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{\epsilon} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu}Tr(\boldsymbol{\epsilon}) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha(T-T_0)\right)\boldsymbol{I}\right) \qquad (4.6)$$

où T_0 est une température de référence et α le coefficient de dilatation linéique du matériau ($\alpha \approx 2.6 ppm/K$ pour le silicium).

2 - Sous cette forme, la loi de Hooke permet par exemple de tenir compte d'une variation de la température globale de la structure (comme celui dû à un changement de la température ambiante) : une augmentation de la température résulte ainsi en une dilatation de la structure si elle est libre de se déformer, ou en une augmentation de son état de contrainte dans le cas contraire.

3 - Elle permet aussi de rendre compte des variations locales de température résultant des déformations et des pertes thermoélastiques que celles-ci engendrent.

4 – Les valeurs de E et ν données plus haut sont valables pour du polysilicium, qu'on peut considérer comme un matériau isotrope. Le silicium monocristallin, en revanche, est anisotrope. Son module d'Young varie typiquement entre $130 GPa$ et $170 GPa$ selon l'orientation considérée.

4.2.2 Poutres et suspensions

Une poutre est un solide quasi-monodimensionnel, dont une dimension (la longueur L) est très grande devant les deux autres (la largeur b, la hauteur h). On restreint cette section au cas des poutres rectilignes à section rectangulaire sous certains types de sollicitations, comme représenté à la Fig. 4.2.

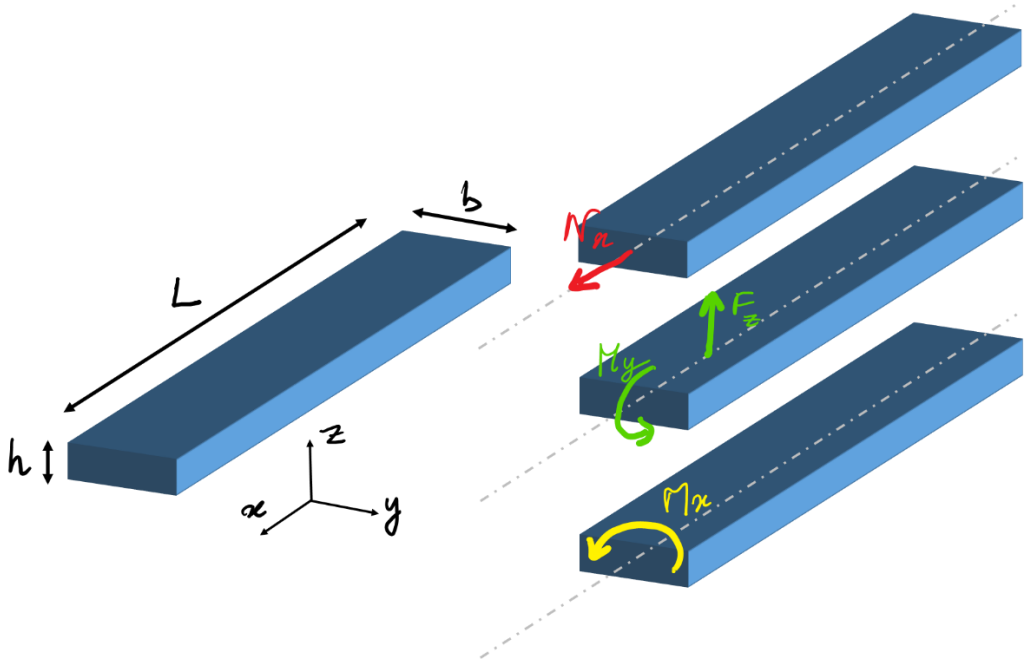


Fig. 4.2 – Géométrie de la poutre (à gauche) et chargements étudiés (à droite). De haut en bas : traction pure, flexion pure et torsion pure.

Remarque :

On évite dans cette partie de parler « d'épaisseur ». L'épaisseur est un paramètre technologique désignant l'épaisseur de la couche structurelle dans laquelle la structure MEMS est fabriquée (dans le cas du micro-usinage de surface). Une structure MEMS peut fléchir selon son épaisseur (hors du plan) ou perpendiculairement à celle-ci (dans le plan).

4.2.2.1 Flexion des poutres

Sous l'effet d'un couple de force autour de l'axe y, ou sous l'effet d'une force selon z, la poutre fléchit. Cette flexion est régie par la théorie d'Euler-Bernoulli, valable pour les faibles déformations des poutres élancées.

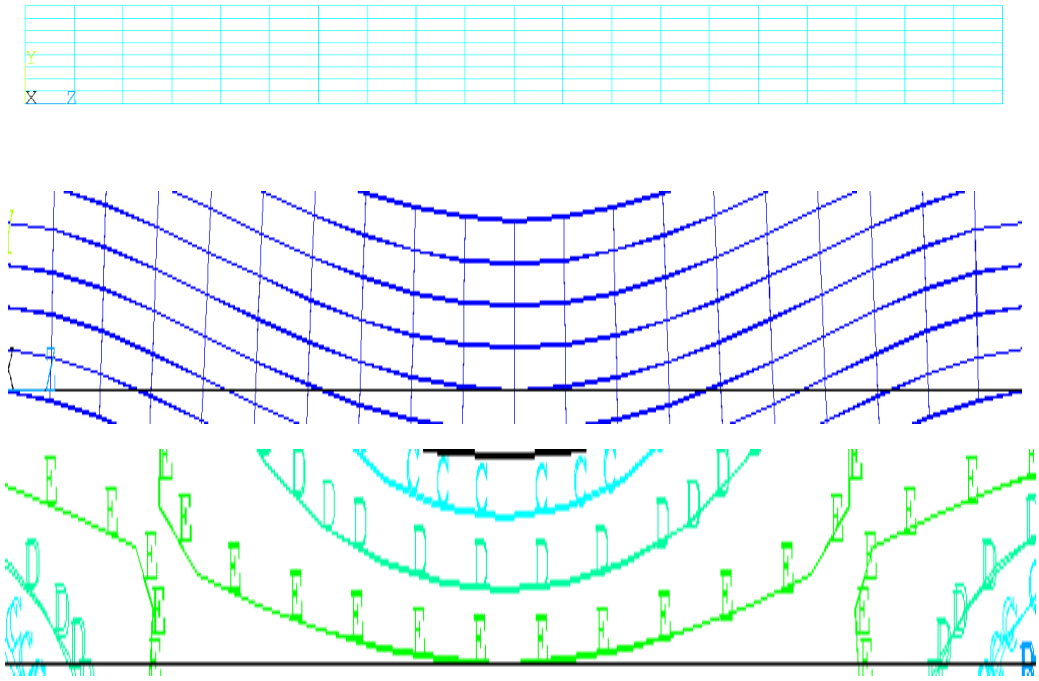


Fig. 4.3 – Simulation éléments finis de la flexion d'une poutre fixée à ses deux bouts (pont). En haut, maillage initial de la poutre sans sollicitation. Au milieu, déformation de la poutre sous l'effet d'une force uniforme appliquée sur la face supérieure. En bas, courbes de niveau des déformations de la poutre (rouge = élongation, bleu = raccourcissement).

La théorie d'Euler-Bernoulli repose sur l'hypothèse cinématique que les sections droites et perpendiculaires à l'axe de la poutre restent droites et perpendiculaires lors de la flexion. En conséquence, une flexion se traduit par des déformations (et des contraintes) dans la direction x qui varient linéairement selon z, de signes opposés de part et d'autre de l'axe de la poutre (Fig. 4.3, voir aussi l'annexe B). Dans ce cadre, la forme de la poutre est entièrement déterminée par la forme $w(x,t)$ prise par son axe. Celle-ci est obtenue en écrivant l'équilibre entre les forces et les moments externes appliqués à la poutre et les forces et moments internes, résultant des contraintes ou de l'inertie. De manière très générale, on a :

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f + \sum_i F_i \delta\left(x_{F_i}\right) + \sum_j M_j \delta^{(1)}\left(x_{M_j}\right) \qquad (4.7)$$

où $I = bh^3/12$ est le moment d'inertie de la poutre, $S = bh$ sa section, N l'effort « normal », selon l'axe de la poutre, $f(x,t)$ la densité linéique de force, selon z, s'exerçant le long de la poutre, les F_i sont des forces concentrées aux points x_{F_i}, les M_j des couples concentrés aux points x_{M_j}.

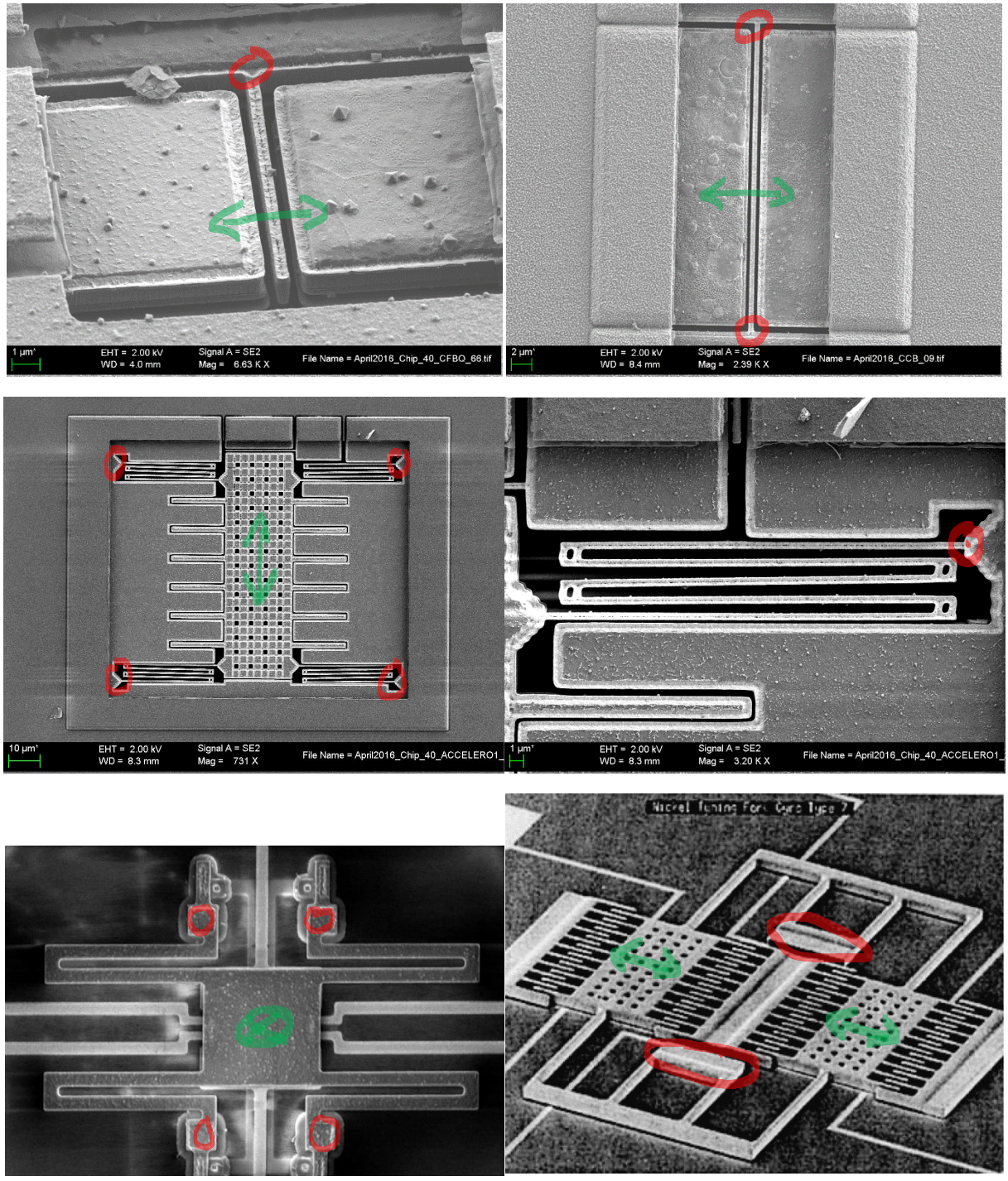


Fig. 4.4 – Exemples de structures MEMS mettant en œuvre poutres et suspensions fonctionnant en flexion. Les points d'ancrage sont entourés en rouge, la direction principale du mouvement est indiquée en vert. En haut : cantilever (à gauche) et pont (à droite). Au milieu : accéléromètre suspendu par 4 serpentins (à gauche) et détail d'un serpentin (à droite). En bas : micro-interrupteur SEMATECH suspendu par quatre serpentins (à gauche) et gyroscope à masse double de Draper Labs, suspendu par des « folded-beams » (à droite).

Quelques conditions aux limites qu'on peut associer à (4.7) sont

$$w = 0 \quad \text{(4.8-a)}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \text{(4.8-b)},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ (4.8-c)}, \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \qquad \text{(4.8-d)}$$

qui correspondent respectivement à la nullité du déplacement, de la pente, du couple selon y ou de la force selon z à l'une ou l'autre des extrémités de la poutre. Trois conditions aux limites courantes sont :

- extrémité fixée : déplacement nul (4.8-a) et pente nulle (4.8-b). On parle de « pont » pour décrire une poutre fixée à ses deux extrémités.
- extrémité libre : moment nul (4.8-c) et force nulle (4.8-d). Une poutre fixée à une extrémité et libre à l'autre est dite « cantilever ».
- extrémité glissante : pente nulle (4.8-b) et force nulle (4.8-d). Les suspensions des capteurs inertiels peuvent être modélisées comme des assemblages de poutres fixées à un bout, glissantes à l'autre.

Des exemples de poutres et de suspensions MEMS sont représentés à la Fig. 4.4. Un aperçu plus complet des conditions aux limites se trouve à l'annexe B.

4.2.2.1.1 Suspensions

Les suspensions des structures MEMS, tels que les accéléromètres ou les gyroscopes, sont souvent composées de segments droits, assimilables à des poutres travaillant essentiellement en flexion, connectés à leurs extrémités par des segments rigides (Fig. 4.4). On trouvera à l'annexe C des éléments de calcul de poutres permettant d'aller un peu plus loin que cette première approximation.

L'utilisation de suspensions en « serpentins » plutôt que droites permet non seulement de gagner en compacité du design, mais également de minimiser l'influence de l'effort normal, qu'il est difficile de contrôler pratiquement, sur la raideur de la structure. Par exemple, une élévation de température ambiante se traduirait en l'apparition d'un effort normal compressif dans les suspensions droites de la structure de la Fig. 4.5-a (les poutres cherchant à se dilater, mais n'étant pas libres de se déformer), et donc en une variation de raideur. Au contraire, une géométrie en serpentin, comme à la Fig. 4.5-b, permet à la suspension de se déformer et limite l'apparition d'un effort normal lié à la température. De plus, la surface occupée par la structure de la Fig. 4.5-b est moindre, pour une raideur équivalente.

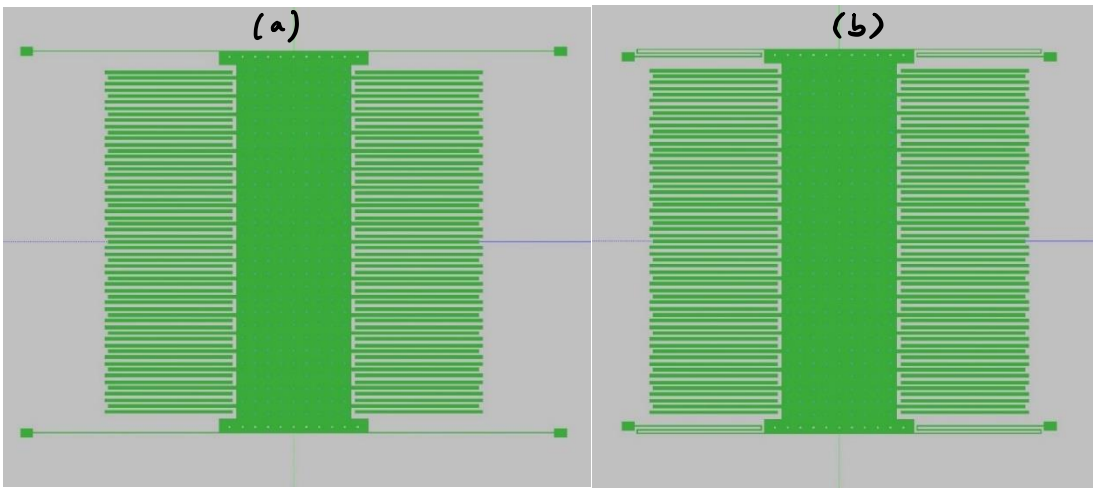


Fig. 4.5 – Deux designs d'accéléromètres de sensibilité identique.

Comme l'inertie de ces suspensions est négligeable par rapport à celle de la masse qu'elles soutiennent, on peut se contenter de les représenter à l'aide d'un modèle statique. Chacun des segments est assimilé à une poutre fixée-glissante sujette à une force à son extrémité. Ainsi, la forme prise par chaque segment est solution de :

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = F\delta(L) \qquad (4.9\text{-a})$$

$$w(0) = 0 \qquad (4.9\text{-b}), \qquad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0 \qquad (4.9\text{-c}),$$

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=L} = 0 \ (4.9\text{-d}), \qquad \left.\frac{d^3w}{dx^3}\right|_{x=L} = 0 \qquad (4.9\text{-e})$$

On trouve que le déplacement $w(L)$ à l'extrémité libre du segment est donné par $F = K_{segment} \times w(L)$ où

$$K_{segment} = 12\frac{EI}{L^3} \qquad (4.10)$$

est la raideur du segment. La raideur $K_{suspension}$ de chaque suspension est obtenue en considérant que les segments individuels sont des ressorts mis « en série », bout à bout :

$$\frac{1}{K_{suspension}} = \sum_i \frac{1}{K_{segment_i}} \qquad (4.11)$$

Enfin, la raideur totale de la structure (dans la direction où on considère la flexion) K_{totale} est la somme des raideurs de chaque suspension (souvent 4, parfois 2) :

$$K_{totale} = \sum_j K_{suspension_j} \qquad (4.12)$$

4.2.2.1.2 Cantilevers

Pour un cantilever dont on peut négliger l'inertie propre, soumis à une force à son extrémité, l'équation d'Euler Bernoulli s'écrit

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = F\delta(L) \qquad (4.13\text{-a})$$

$$w(0) = 0 \qquad (4.13\text{-b}), \qquad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0 \qquad (4.13\text{-c}),$$

$$\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=L} = 0 \ (4.13\text{-d}), \ \left.\frac{d^3w}{dx^3}\right|_{x=L} = 0 \qquad (4.13\text{-e})$$

ce qui aboutit à une raideur équivalente égale à

$$K_{cantilever} = 3\frac{EI}{L^3} \qquad (4.14)$$

Notons qu'une poutre fixée-glissante de longueur L peut être vue comme deux cantilevers de longueur $L/2$ mis bout à bout, ce qui permet de déduire simplement (4.10) de (4.14), et vice-versa.

D'un point de vue pratique, ce modèle statique peut être utile pour la conception de certains accéléromètres (ceux réalisés à l'aide de techniques de micro-usinage de volume) ou récupérateurs d'énergie, dont on peut approximer les suspensions comme des cantilevers soutenant une masse importante. L'élément sensible d'un microscope à force atomique en mode « contact » peut également se modéliser de cette manière.

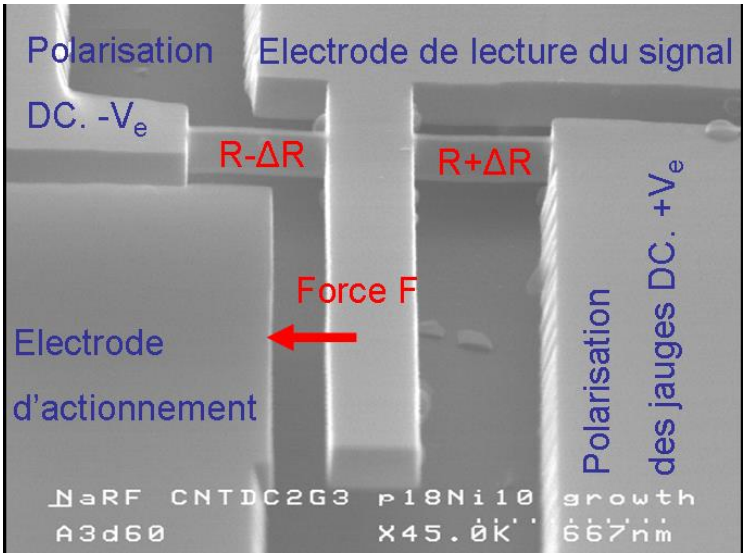


Fig. 4.6 – Cantilever « NEMS » pour la mesure de masse fabriqué par le CEA-LETI (pris de la thèse de S. Labarthe). La mise en oscillation se fait au moyen de forces électrostatiques. Les deux poutres de part et d'autre de la base du cantilever travaillent en traction/compression. Il s'agit en fait de nano-jauges piézo-résistives permettant la détection du mouvement.

C'est le comportement résonant des cantilevers qui est le plus souvent mis en œuvre. Par exemple, certains capteurs de masse reposent sur des cantilevers qui ont été « fonctionnalisés » pour que s'y adsorbent les molécules qu'on cherche à détecter (Fig. 4.6). Ceci résulte en une variation de la densité du cantilever, et donc de sa fréquence de résonance. Cette fréquence de résonance peut être mesurée en réalisant un oscillateur dont le cantilever est l'élément résonant (cf. partie 3 et mode de « drive » des gyroscopes). La poutre, sujette à une force de « drive » généralement répartie sur sa longueur et à sa propre inertie, est régie par

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (4.15)$$

où f est la densité linéique de force (à la fois celle du « drive », mais également celle exercée par le fluide environnant). La fréquence de résonance fondamentale d'un tel système correspond à celle du premier mode propre de la poutre (cf. Annexe D)

$$\omega_{cantilever} \approx 1.015 \times \sqrt{\frac{E}{\rho}} \times \frac{h}{L^2} \quad (4.16)$$

La variation relative de la fréquence du cantilever est donc liée à celle de la densité et à celle de la masse par

$$\frac{\Delta\omega_{cantilever}}{\omega_{cantilever}} = -\frac{1}{2} \times \frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{1}{2} \times \frac{\Delta m}{m} \quad (4.17)$$

Ainsi, la sensibilité de ce type de capteur est d'autant plus élevée que la masse nominale du résonateur est faible. Cette possibilité de réaliser des capteurs de gaz ultra-sensibles a largement motivé l'engouement pour les technologies NEMS.

Les cantilevers sont également utilisés dans diverses techniques de microscopie, comme la microscopie à force atomique (en mode « non-contact »).

4.2.2.1.3 Ponts

Bien que les ponts soient rarement utilisés en tant que suspensions, il est intéressant d'étudier à partir d'un tel exemple l'influence de l'effort normal sur le comportement des structures. La déformation d'un pont soumis à un chargement statique en son centre et à un effort normal N est régie par

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} - N\frac{d^2w}{dx^2} = F\delta\left(\frac{L}{2}\right) \qquad (4.18\text{-a})$$

$$w(0) = 0 \qquad (4.18\text{-b}), \qquad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0 \qquad (4.18\text{-c}),$$

$$w(L) = 0 \qquad (4.18\text{-d}), \qquad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0 \qquad (4.18\text{-e}),$$

En supposant que l'effort normal est faible, i.e. $NL^2/EI \ll 1$, on peut chercher une solution approchée à (4.18) sous la forme

$$w \approx w_{flex} + \frac{NL^2}{EI}w_{corr} \quad (4.19)$$

où w_{flex} et w_{corr} vérifient les conditions aux limites (4.18-b,c,d,e) et

$$EI\frac{d^4w_{flex}}{dx^4} = F\delta\left(\frac{L}{2}\right) \qquad (4.20\text{-a})$$

$$\frac{d^4w_{corr}}{dx^4} = \frac{1}{L^2} \times \frac{d^2w_{flex}}{dx^2} \quad (4.20\text{-b})$$

On parvient ainsi à une raideur égale à

$$K_{pont} = 192\frac{EI}{L^3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{40}\frac{NL^2}{EI}} \qquad (4.21)$$

Le cas $N = 0$ correspond à une flexion « pure » : on obtient la même solution que si on considère un pont de longueur L comme deux « segments » fixés-glissants de longueur $L/2$ chargés à leur extrémité (4.10). Lorsque $N > 0$ (effort de traction), la raideur effective du pont augmente. Elle diminue si $N < 0$ (effort en compression).

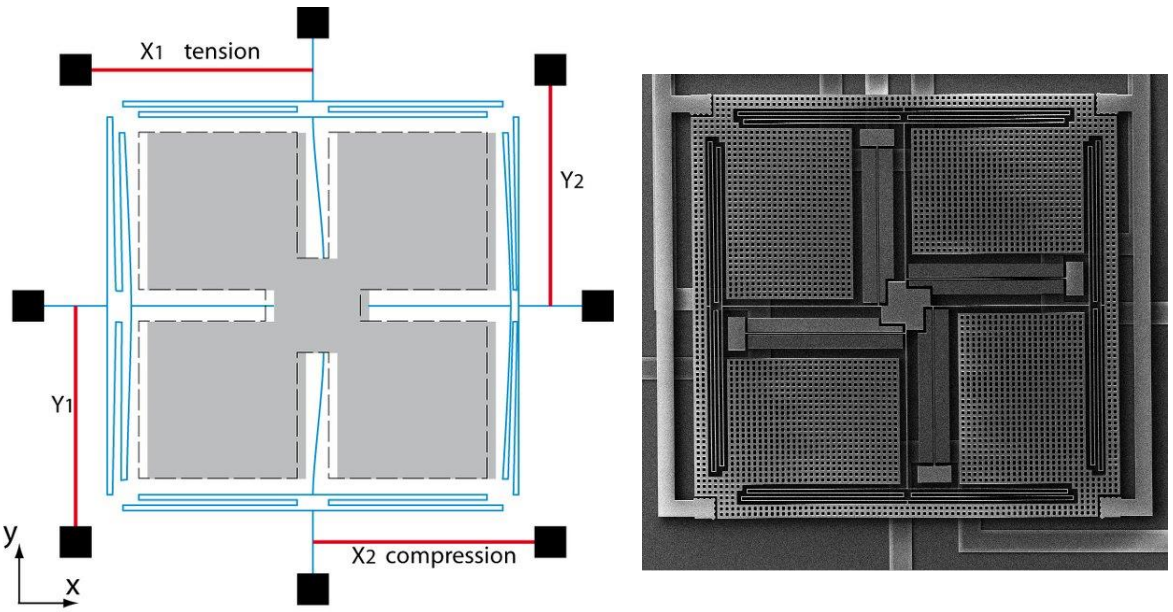


Fig. 4.7 – Schéma de principe d'un accéléromètre 2 axes résonant (à gauche) et réalisation pratique (à droite). Quelles sont les différences ? Travaux réalisés à Politecnico di Milano en collaboration avec ST.

Cette sensibilité à l'effort normal de la raideur des ponts est mise à profit pour réaliser des capteurs résonants. La Fig. 4.7 représente le schéma de principe d'un accéléromètre résonant : sous l'effet d'une accélération, la masse se déplace. Ceci engendre des efforts normaux

(proportionnels à l'accélération) de signes opposés dans les résonateurs, qu'on peut modéliser comme des ponts, et donc une variation de leur raideur, et de leur fréquence de résonance. Chaque pont, sujet à une force de « drive » généralement répartie sur sa longueur et à sa propre inertie, est régi par

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (4.22)$$

où f est la densité linéique de force (à la fois celle du « drive », mais également celle exercée par le fluide environnant). La fréquence de résonance fondamentale du pont est donnée par (cf. Annexe D)

$$\omega_{pont} \approx 6.459 \times \sqrt{\frac{E}{\rho} \times \left(1 + 0.0246\frac{NL^2}{EI}\right)} \times \frac{h}{L^2} \qquad (4.23)$$

La variation relative de la fréquence du pont est donc donnée par

$$\frac{\Delta\omega_{pont}}{\omega_{pont}} \approx 0.0123 \times \frac{NL^2}{EI} \quad (4.24)$$

Notons qu'il faut être capable de discriminer les variations de fréquence dues aux variations de la grandeur physique qu'on souhaite mesurer (e.g. l'accélération) de celles dues à la température. Par exemple, l'échauffement d'un pont résulte en l'apparition d'un effort normal égal à

$$N = -ES \times \alpha(T - T_0) \quad (4.25)$$

s'opposant exactement (sous l'hypothèse d'ancrages parfaitement rigides) à sa dilatation dans la direction x. Cet effort normal dû à la dilatation thermique justifie le choix d'une mesure différentielle pour l'accéléromètre de la Fig. 4.7.

Remarques :

1 –Les procédés de fabrication des dispositifs MEMS aboutissent à des structures dans lesquelles des contraintes (dite « contraintes résiduelles ») subsistent après la libération. Lorsque les contraintes sont positives, les dispositifs sont plus raides que prévu (c'est le cas du pont de la Fig. 4.4 dont la fréquence de résonance était 33% plus élevée que d'après le modèle en flexion pure). Lorsqu'elles sont négatives, les dispositifs sont moins raides, ce qui peut éventuellement aller jusqu'au flambage. Le flambage est l'effondrement « catastrophique » d'une structure élancée sous l'effet d'un effort normal compressif. Le point de flambage est atteint lorsque la fréquence de résonance fondamentale du pont est nulle ($\omega_{pont} = 0$), i.e.

$$N \approx -40.72 \times \frac{EI}{L^2} \qquad (4.26)$$

d'après (4.23). Un calcul exact donne comme valeur critique de l'effort normal $N = -4\pi^2 \times EI/L^2$, ce qui est très proche de (4.26).

2 – Une des causes principales de l'existence des contraintes résiduelles est la différence des coefficients de dilatation des couches de matériaux déposées lors de la fabrication du dispositif. Pour apprécier quantitativement l'influence de la température sur le comportement mécanique d'un dispositif MEMS (y compris post-fabrication), il convient donc de tenir compte du comportement thermomécanique de tout son environnement (boîtier compris). De ce point de vue, (4.25) qui suppose des ancrages « parfaitement rigides » doit être prise avec prudence.

3 – Un pont qui fléchit voit sa longueur augmenter (le plus court chemin entre les deux extrémités du pont étant la ligne droite…). Ainsi, toute flexion d'un pont est accompagnée d'une élongation, et donc en une augmentation de l'effort normal. En utilisant la loi de Hooke, on a

$$N \approx \frac{ES}{2L}\int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (4.27)$$

En conséquence, plus un pont se déforme, plus il devient raide et résiste à la déformation. Ce phénomène de « durcissement » se traduit par un comportement de ressort non-linéaire ($F = -K \times (1 + \gamma X^2) \times X, \gamma > 0$).

4 – Ces contraintes (résiduelles, thermiques, d'élongation) affectent, dans une certaine mesure, toutes les structures MEMS qui sont géométriquement assimilables à un pont. De nombreuses techniques de conception mécanique permettent de réduire leur impact, comme l'utilisation de poutres en angle droit (« crab-leg », comme à la Fig. 3.6), en serpentin ou « box » ou la fabrication de la structure autour d'un unique point d'ancrage (Fig. 4.9).

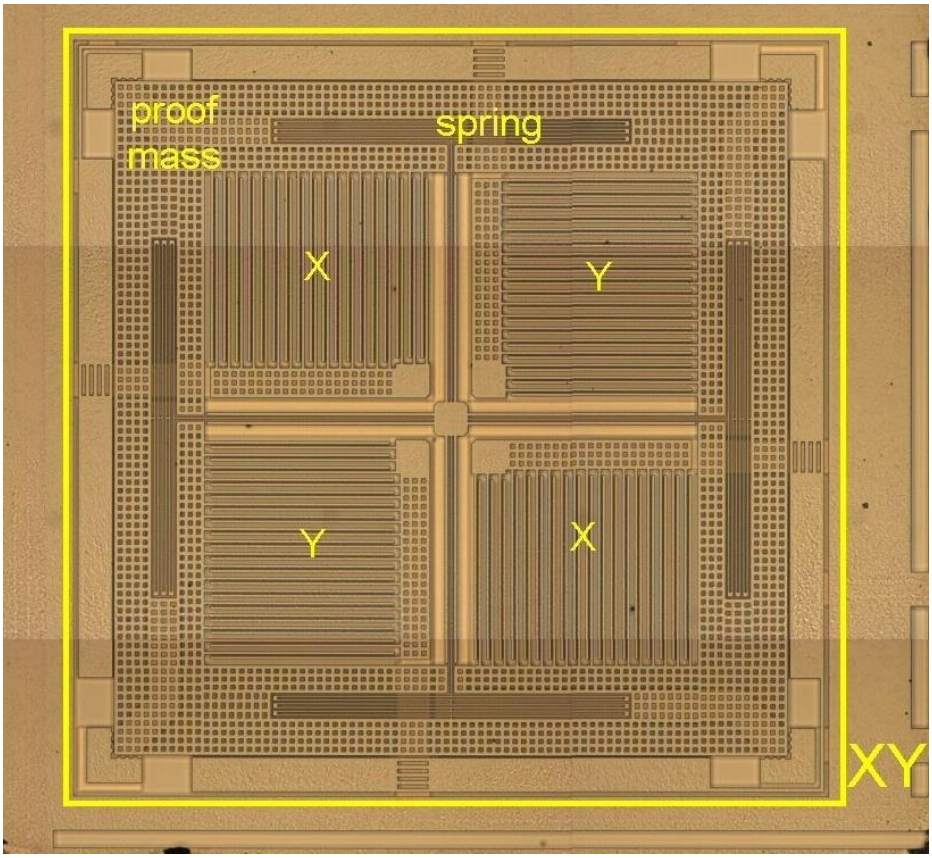


Fig. 4.9 – Accéléromètre 2-axes ST à transduction capacitive, reposant sur un unique point d'ancrage (au centre). La similitude avec la structure de la Fig. 4.7 est frappante. Cet accéléromètre équipait les IPhone 4 (image prise de MEMS Journal).

5 – Les structures géométriquement assimilables à des cantilevers (à point d'ancrage unique, donc) sont sensibles au gradient de contrainte existant dans l'épaisseur du matériau. Si un tel gradient existe, la structure après libération est fléchie hors du plan (Fig. 4.10).

6 – Indépendamment des conditions aux limites, la raideur d'une poutre en flexion est proportionnelle à son moment d'inertie $I = bh^3/12$ et inversement proportionnelle à L^3 (4.10) (4.14) (4.21). Pour minimiser la raideur d'une poutre, il suffit donc en théorie de la réaliser aussi longue et aussi fine que le permet le procédé de fabrication. De nombreuses considérations pratiques, dont certaines, comme la compacité, ont déjà été évoquées, limitent ce raisonnement simpliste :

- *les dispositifs de dimensions minimales sont plus sujets aux dispersions de fabrication (écart entre la dimension prévue et la dimension fabriquée réellement, qui varie aléatoirement d'un dispositif à un autre). Ceci n'est évidemment pas souhaitable si on souhaite garantir l'uniformité des performances des capteurs.*
- *une poutre fine et longue a une sensibilité accrue à l'effort normal (4.21) (4.23), et donc à la température (notamment).*
- *enfin, certains mécanismes de dissipation (tels que les pertes surfaciques) sont d'autant plus marqués que les parties souples de la structure sont minces.*

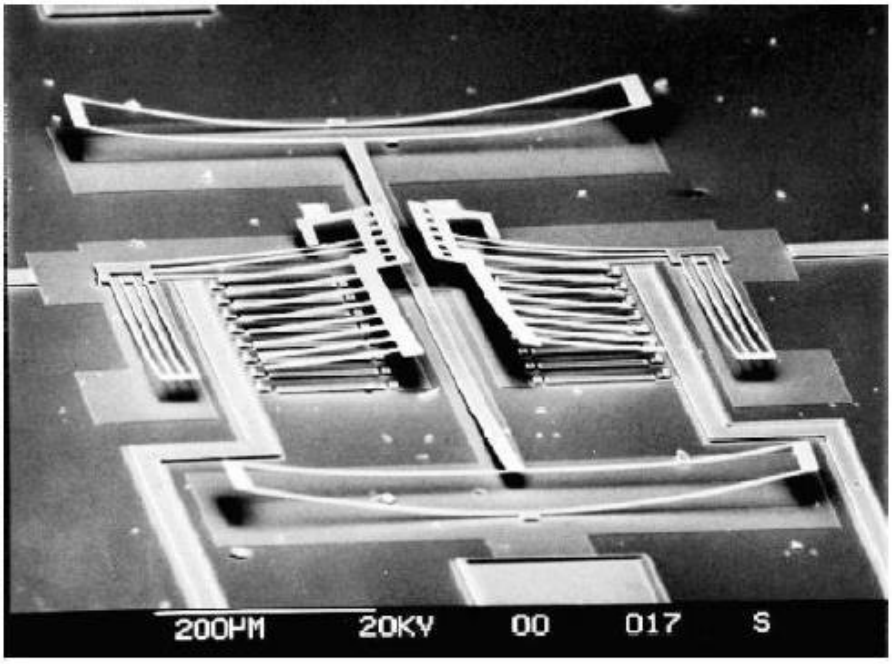


Fig. 4-10 – Conséquence d'un gradient de contrainte dans une structure MEMS.

4.2.2.2 Traction et torsion

La raideur d'une poutre en traction/compression (sujette à un effort normal seul et se déformant dans la direction de cet effort) est donnée directement par la loi de Hooke

$$K_{axial} = \frac{ES}{L} \qquad (4.28)$$

Enfin, la formule suivante donne la raideur angulaire d'une poutre utilisée comme un ressort de torsion, fixée à une extrémité, soumise à un couple à l'autre

$$C_{torsion} = \frac{GJ}{L}. \quad (4.29)$$

où $G = E/2(1+\nu)$ est le module de torsion du matériau, et J le moment de torsion de la poutre autour de l'axe x. Pour une poutre de section rectangulaire, on a

$$J = Dd^3 \times \left(\frac{1}{3} - 0.21\frac{d}{D}\left(1 - \frac{1}{12}\frac{d^4}{D^4}\right)\right) \quad (4.30)$$

où $D = \max(b, h)$ est la plus grande des dimensions latérales et $d = \min(b, h)$ la plus petite.

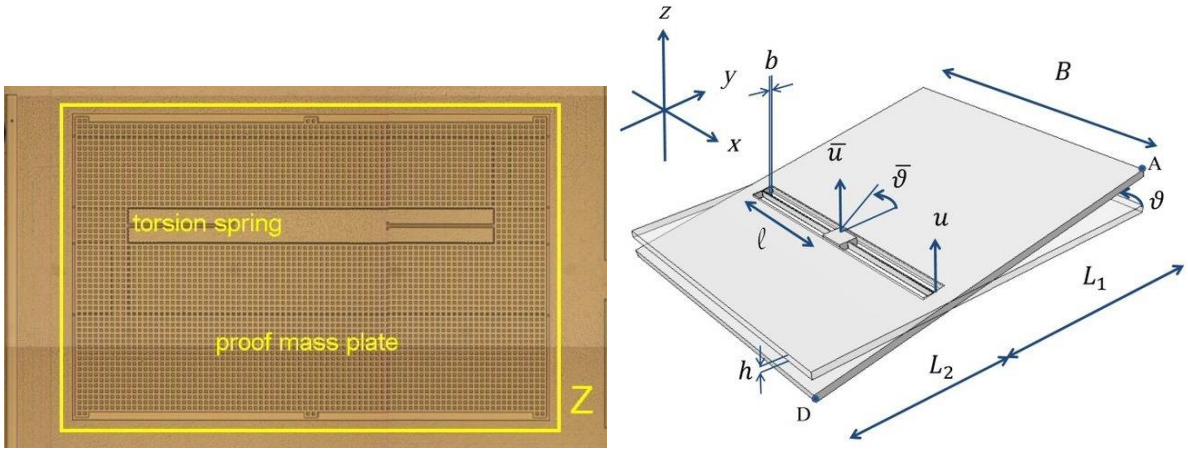


Fig. 4.11 – Accéléromètre 1 axe ST à transduction capacitive (à gauche, même source que la Fig. 4.9) et principe de fonctionnement (Politecnico di Milano).

Remarque

Dans de rares contextes, il peut être nécessaire de prendre en compte l'inertie d'une poutre travaillant en traction ou en torsion, ou l'existence d'efforts distribués le long de celle-ci. On pourra alors recourir aux modèles suivants

$$ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = \rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.31)$$

pour une poutre en traction/compression (les déplacements u et forces f sont selon x) et

$$GJ\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + m = \rho S\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (4.32)$$

pour une poutre en torsion (les angles θ et les moments m sont autour de x).

4.2.2.3 Combinaisons de poutres et suspensions complexes

On se réfèrera à l'annexe C de ce document.

4.2.3 Plaques et membranes

A compléter (plaques, membranes, Von Karman, optique adaptative, capteur pression, microphone).

4.3 Transduction électromécanique

4.3.1 Généralités

On s'intéresse dans les sections suivantes à la transduction électromécanique à l'échelle des MEMS : comment convertir un mouvement en signal électrique ? Comment générer électriquement des forces pour mettre en mouvement une structure MEMS (ou atténuer le mouvement d'une structure MEMS) ? De manière simpliste, la détection du mouvement ou de la déformation d'une structure est utile pour des applications de type « capteur » (accéléromètre, capteur de pression), la génération de forces pour des applications de type « actionneur » (e.g. micro-switchs, micro-miroirs, DMD Fig. 4.12). Cependant, il n'est pas rare de combiner détection et actionnement au sein d'une même application, comme dans les exemples ci-après.

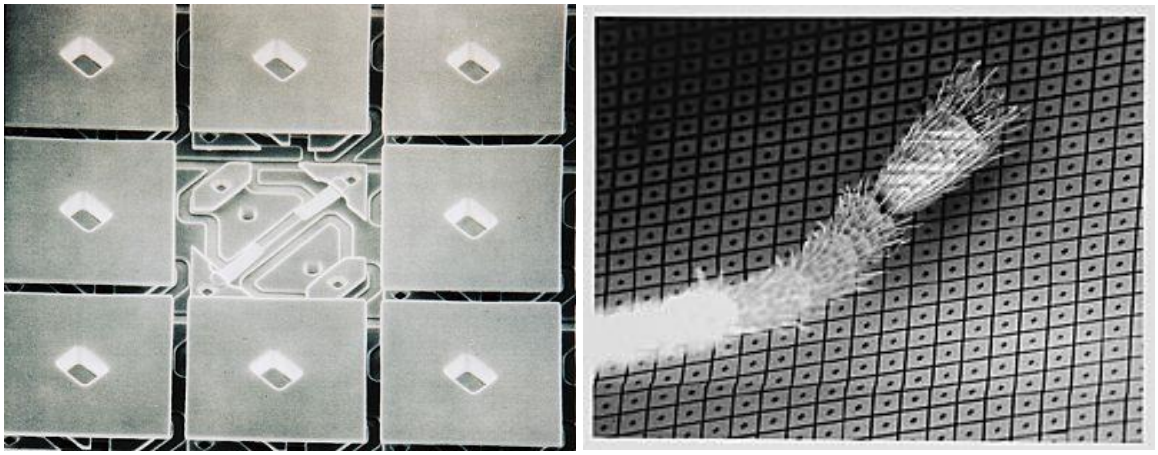


Fig. 4.12 – Digital Mirror Display (DMD) de Texas Instruments, à différents niveaux de grossissement. Les pixels (qui reposent sur des barres de torsion) sont allumés ou éteints au moyen de forces électrostatiques.

Test - La plupart des capteurs inertiels MEMS commercialisés disposent d'une fonction de « self-test » intégrée, visant à vérifier leur fonctionnalité tout au long de leur durée de vie. Ce test consiste à appliquer à l'élément sensible un stimulus pré-déterminé à l'aide d'une force générée de manière électromécanique. Si certaines caractéristiques de la réponse dévient des spécifications, on peut alors rejeter les mesures faites par ce capteur, ou les corriger en fonction des résultats du test. Un test typique pour un capteur inertiel consiste à lui appliquer un échelon de force pour déterminer, d'après la réponse indicielle de la structure, sa raideur K et son coefficient d'amortissement B (la masse M étant peu susceptible de varier dans le temps). Ceci permet de vérifier l'étanchéité du boîtier au cours du temps, ou l'usure de la structure.

Asservissement - Pour augmenter l'étendue de mesure d'un capteur et améliorer son comportement dynamique ou sa linéarité, il est parfois essentiel d'utiliser des techniques d'asservissement. En l'absence d'asservissement, l'étendue de mesure d'un accéléromètre capacitif, de masse M, de raideur K et de gap g, est strictement limitée à $\pm Kg/M$, valeur de l'accélération pour laquelle la masse rentrerait en contact avec les électrodes en vis-à-vis. Dans un accéléromètre asservi, on exerce sur la masse une force F de manière à la maintenir à une position de référence, typiquement $X = 0$. De cette manière, F s'oppose exactement à la force d'inertie (et en fournit donc une mesure). L'étendue de mesure est alors limitée à $\pm F_{max}/M$, où F_{max} est la valeur maximale de la force qu'on est capable d'appliquer à la structure. Ceci est intéressant dans la mesure où $F_{max} > Kg$, ce qui est un objectif de conception facilement atteint à l'échelle des MEMS, par exemple au moyen d'un actionnement électrostatique.

Oscillateurs et capteurs résonants - Enfin, les oscillateurs micromécaniques, tels que les bases de temps (Fig. 4.13) et l'ensemble des capteurs « résonants » au sens large (gyroscopes modulés en amplitude, comme vus à la partie 3, capteurs de masse ou accéléromètres résonants modulés en fréquence, comme vus dans les sections précédentes), sont des dispositifs qui

combinent intrinsèquement détection et actionnement. En effet, pour mettre en oscillation à la résonance une structure mécanique, il est nécessaire d'appliquer à celle-ci une force de « drive » en quadrature avec son déplacement. Ainsi, on doit pouvoir détecter le mouvement de la structure, d'une part, et générer une force en fonction d'une certaine loi de commande, d'autre part.

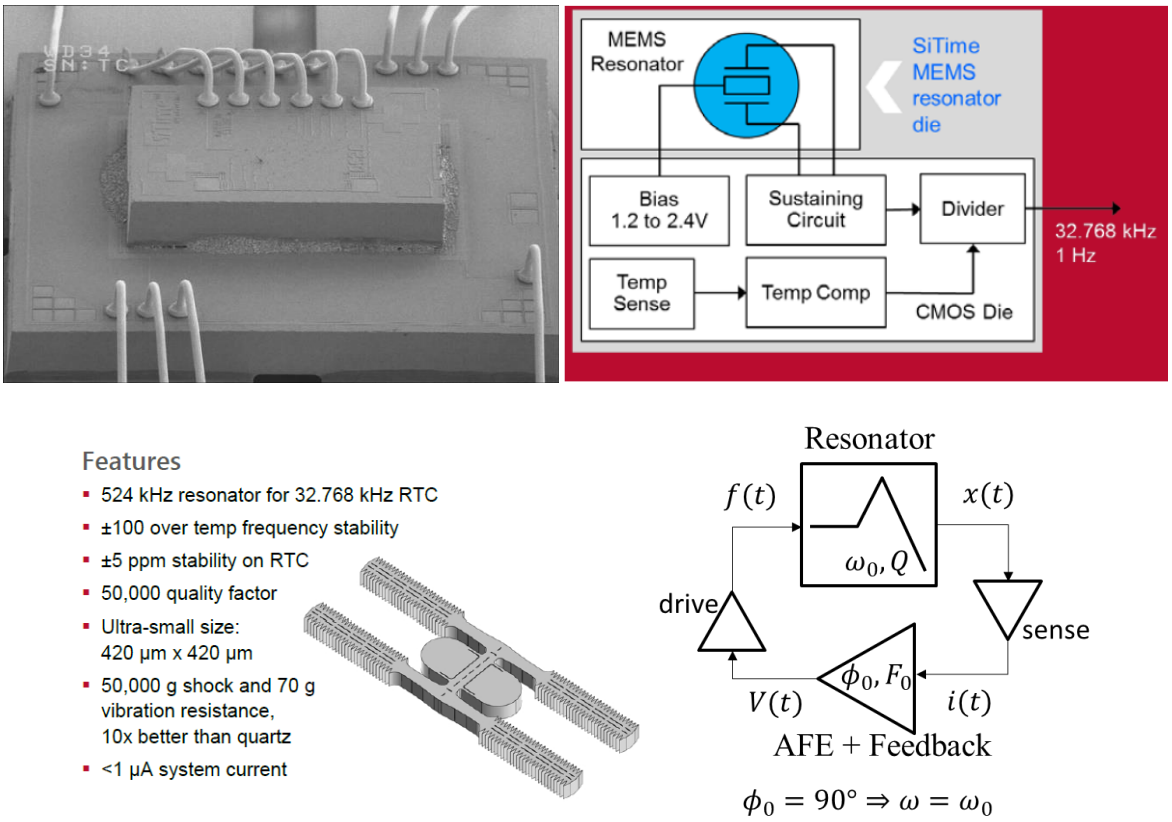


Fig. 4.13 – Les résonateurs silicium de SiTime concurrencent de plus en plus les résonateurs quartz, dont les dimensions et le coût unitaire sont plus importants, pour la génération de signaux d'horloge ultra-stables. Images et caractéristiques prises du site de SiTime. En bas à droite, schéma de principe de l'oscillateur MEMS.

4.3.2 Détection

On a déjà traité dans la partie 2 la détection capacitive et la détection résistive d'un point de vue électronique. Dans les deux prochaines sections, on s'intéresse à leur implémentation dans le domaine spécifique des MEMS.

4.3.2.1 Détection capacitive

La détection capacitive est le principe de détection le plus couramment mis en œuvre dans les dispositifs MEMS. Elle nécessite la réalisation d'une électrode fixe à proximité de la structure dont on veut mesurer le mouvement. L'électrode et la structure peuvent être réalisées dans la même étape du procédé de fabrication, ce qui fait de la détection capacitive une méthode « bon marché », en sus d'être efficace. On pourra par exemple comparer la complexité relative des procédés SOIMUMPS et PiezoMUMPS, de MEMSCAP, en annexe H, adaptés respectivement à la détection et à l'actionnement capacitifs et piézoélectriques.

L'approximation du condensateur plan est à l'électrostatique des MEMS ce que la théorie des poutres est à la mécanique des MEMS : un point de départ extrêmement utile pour un premier dimensionnement d'un système à l'aide d'une approche analytique, à raffiner dans une phase de validation par des modèles plus précis (analytiques ou numériques, cf. annexe E).

Pour une capacité plane, rectangulaire, de dimensions latérales L_1 et L_2 et de gap g, avec $L_{1,2} \gg g$, on a

$$C = \epsilon_0 \frac{L_1 L_2}{g} \qquad (4.33)$$

Du fait que $L_{1,2} \gg g$, la valeur de la capacité est principalement sensible aux variations de g, beaucoup moins à celles de L_1 et L_2. Mathématiquement, on peut écrire

$$\delta C \approx \left(\epsilon_0 \frac{L_2}{g} \delta L_1 + \epsilon_0 \frac{L_1}{g} \delta L_2 - \epsilon_0 \frac{L_1 L_2}{g^2} \delta g\right) = C \times \left(\frac{\delta L_1}{L_1} + \frac{\delta L_2}{L_2} - \frac{\delta g}{g}\right) \qquad (4.34)$$

Ainsi, un déplacement X de l'électrode mobile aura un impact sur la valeur de C beaucoup plus important s'il se fait dans la direction du gap ($\delta g = X$) que dans les directions latérales ($\delta L_{1,2} = X$), puisque $X/g \gg X/L_{1,2}$. En revanche, le déplacement maximal est limité dans un cas à g, dans l'autre à L_1 ou L_2, ce qui est encore une forme de compromis sensibilité / étendue de mesure (qu'on pourra dépasser par des techniques d'asservissement, dans certains cas). En conséquence, on privilégie la détection capacitive à variation de gap pour traduire des petits déplacements en signaux électriques, celle à variation de surface pour traduire des grands déplacements.

Dans le cas des accéléromètres, par exemple, on peut justifier que la détection à variation de gap soit très largement utilisée par le fait que les déplacements à détecter sont très faibles. Il en va de même pour la détection du mode de « sense » des gyroscopes. Dans les deux cas, les déplacements sont proportionnels à la masse du dispositif, donc à la surface occupée par le dispositif, qu'on souhaite généralement aussi faible que possible pour réduire le coût unitaire du capteur.

La détection par variation de surface est essentiellement utilisée dans le cadre d'applications résonantes. Par exemple, on a vu dans la partie 3 qu'un gyroscope est d'autant plus sensible qu'il oscille avec une amplitude importante selon la direction de « drive ». Ce déplacement d'amplitude importante devant être traduit en signal électrique (pour la mise en oscillation à la résonance de la structure), la détection à variation de surface est adaptée. Par ailleurs, les applications résonantes tirent généralement parti d'un faible coefficient de dissipation. Or un film d'air « cisaillé » dissipe beaucoup moins d'énergie par cycle qu'un film d'air « comprimé » (cf. « slide-film » et « squeeze-film » dans la section 4.4), ce qui privilégie donc la détection par variation de surface.

Remarques :

1 – Pour augmenter la sensibilité de la capacité au déplacement, des structures en « peignes » sont couramment employées (Fig. 4.4 pour un exemple – en bas à droite – à variation de surface, Fig 4.9 et Fig. 4.14 pour des exemples à variation de gap). Pour une surface donnée, le nombre de « doigts » d'un peigne est limité en premier lieu par la finesse du procédé de fabrication (qui déterminera le gap minimal entre doigts fixes et doigts mobiles, ainsi que la largeur minimale des doigts).

2 – De nombreux compromis de conception entrent en jeu pour déterminer les paramètres d'une structure en peigne. Notamment, toute surface occupée par des peignes résulte en une diminution de la masse utile du dispositif, ce qui est préjudiciable à la mesure inertielle. Par ailleurs, un compromis doit également être trouvé entre la le nombre de doigts par unité de longueur et la raideur de ceux-ci (leur fréquence de résonance doit être suffisamment élevée par rapport à celle de la structure à laquelle elles sont attachées).

3 – Globalement, un procédé de fabrication est d'autant plus adapté à la détection capacitive qu'il permet de réaliser des dispositifs possédant des gaps étroits et des dimensions latérales $L_{1,2}$ grandes.

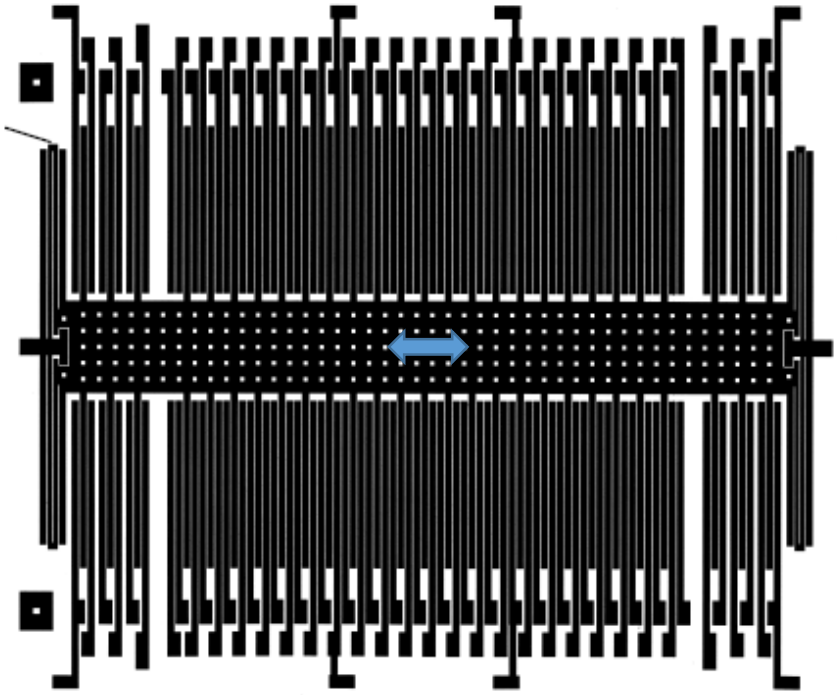


Fig. 4.14 – Masque d'un accéléromètre Analog Devices. La structure se déplace latéralement sous l'effet d'une accélération, comme indiqué par la double flèche. Les peignes centraux servent à la détection du mouvement de la structure par variation différentielle de gap. Ceux sur les côtés permettent de générer des stimuli de test.

4.3.2.2 Détection piézorésistive

A l'échelle des MEMS, la détection résistive – au contraire de la détection capacitive – ne repose pas (ou peu) sur des effets géométriques. En effet, le silicium possède des propriétés piézorésistives assez marquées : sa résistivité varie avec son état de contrainte beaucoup plus que sa géométrie. On pourra se plonger dans le livre de M.H. Bao pour une description précise du phénomène et le calcul des coefficients de piézorésistivité. Ici, on se contente d'une description plus fonctionnelle du phénomène, empruntée de l'ouvrage de V. Kaajakari.

	n-type			p-type		
	[100]	[110]	[111]	[100]	[110]	[111]
π_l $[10^{-11}\mathrm{Pa}^{-1}]$	-102.2	-31.2	-7.5	6.6	71.8	93.5
π_t $[10^{-11}\mathrm{Pa}^{-1}]$	53.4	-17.6	6.1	-1.1	-66.3	44.6

Tableau 4. 1 – Coefficients de piézorésistivité du silicium faiblement dopé (concentration de dopant inférieure à $10^{17} cm^{-3}$). Extrait de Kaajakari.

Les coefficients de piézorésistivité π_l et π_t (longitudinal et transverse) relient la variation de résistivité ρ dans une direction et les contraintes σ_l et σ_t, respectivement selon la direction considérée et perpendiculairement à la direction considérée

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \pi_l\sigma_l + \pi_t\sigma_t \qquad (4.35)$$

Les coefficients de piézorésistance (en Pa^{-1}) sont donnés dans le tableau 4.1 pour des orientations cristallographiques courantes, dans le cas d'un dopage n ou d'un dopage p du silicium.

Selon (4.35) et la loi de Hooke (4.1), une jauge piézorésistive de longueur l et de dimensions latérales L_1 et L_2 en traction pure (selon sa longueur) subissant une contrainte σ (et donc une déformation longitudinale $\epsilon = \sigma/E$) verra donc sa résistance

$$R = \rho \frac{l}{L_1 L_2} \qquad (4.36)$$

varier de

$$\delta R = R \times \left(\frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{\delta l}{l} - \frac{\delta L_1}{L_1} - \frac{\delta L_2}{L_2}\right) = R \times (\pi_l \times E + 1 + 2\nu) \times \epsilon \quad (4.37)$$

On peut vérifier que, pour les valeurs de π_l données au tableau 4.1, le facteur de jauge

$$GF = \pi_l \times E + 1 + 2\nu \approx \pi_l \times E \qquad (4.38)$$

est très largement supérieur à 1.

Remarques

1 - Cette méthode de détection a une importance « historique », dans le sens où elle a été supplantée par la détection capacitive dans nombre d'applications (inertielles notamment). Les raisons en sont multiples :

- *la température affecte non seulement les coefficients de piézorésistivité du silicium, mais également sa résistivité. Sans une stratégie de compensation rigoureuse de la température, les mesures de capteurs MEMS piézorésistifs ne sont pas exploitables. Cette contrainte est beaucoup moins forte pour la détection capacitive, qui n'est essentiellement affectée que par les effets géométriques des variations de température.*
- *la formation de jauges piézorésistives (par implantation locale de porteurs de charge p dans dans un silicium dopé n, par exemple, ou vice-versa) nécessite typiquement quelques étapes de fabrication spécifiques, rendant la fabrication plus longue (et plus coûteuse). Au contraire, les électrodes mobiles et fixes nécessaires à la détection capacitive sont réalisées dans une seule étape du procédé de fabrication (au moins pour ce qui est des structures se déformant dans le plan).*
- *comme souligné à la partie 2, les résistances sont sources de bruit. Il en va de même pour les piézorésistances. Celles-ci génèrent non seulement du bruit blanc (bruit de Nyquist-Johnson), mais également du bruit de flicker (dit bruit de Hooge, dans le cas des piézorésistances). Celui-ci est d'autant plus élevé que la tension aux bornes de la piézorésistance est élevée. Il n'est donc pas possible de réduire son influence en augmentant la polarisation des résistances. Au contraire, une capacité est intrinsèquement non bruyante.*

2 – Néanmoins, la détection piézorésistive est encore utilisée pour la réalisation de capteurs dont la structure se déforme hors du plan, principalement des capteurs de pression, comme à la Fig. 4.15. Le CEA-LETI a également développé une technique de détection piézorésistive pour les mouvements dans le plan, particulièrement adaptée pour des jauges à l'échelle nanométrique (cf. capteur de masse de la Fig. 4.6).

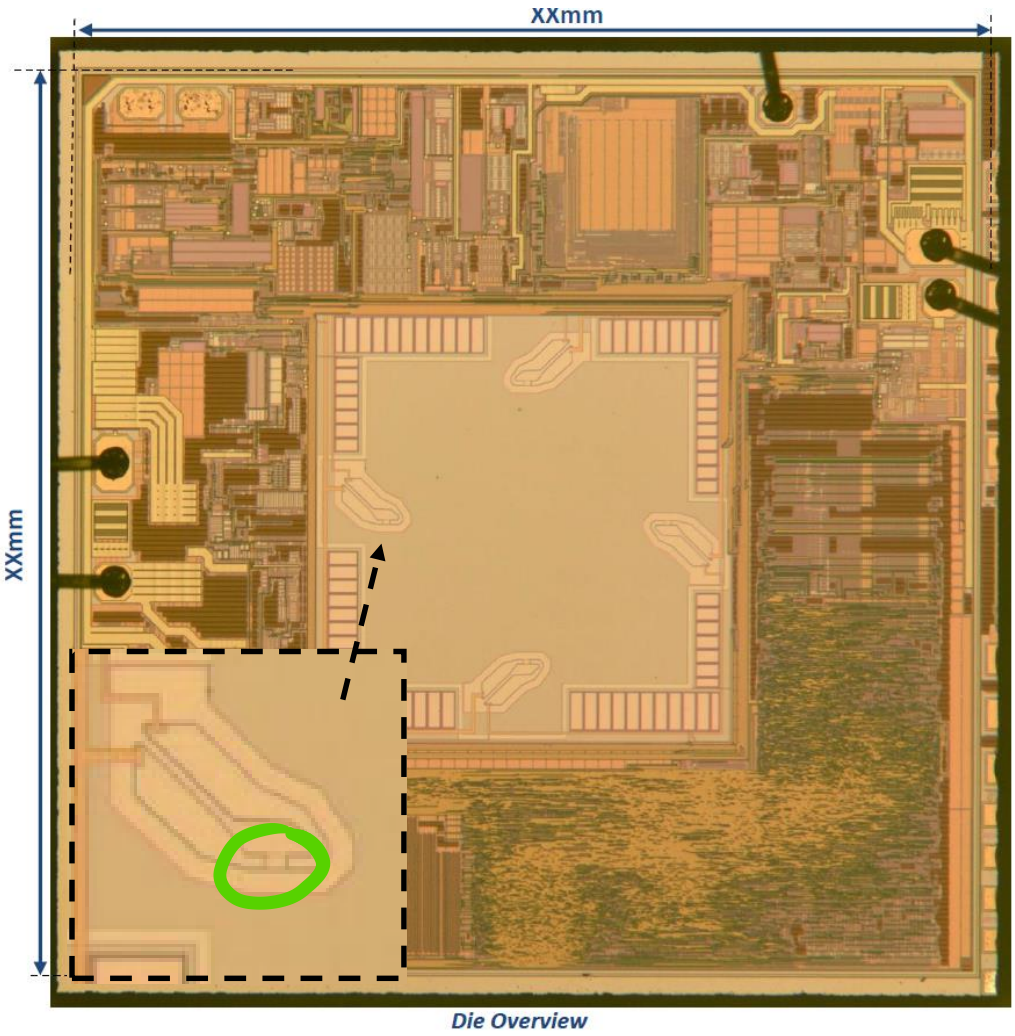


Fig. 4. 15 – Capteur de pression Melexis (image tirée du site de SystemPlus). La membrane carrée au centre fléchit sous l'effet de la pression. Cette déformation est mesurée à l'aide deurre 4 jauges piézorésistives. Celles à gauche et à droite sont disposées de sorte qu'elles soient soumises à une déformation longitudinale (dans le sens du courant), celles en haut et en bas à une déformation transverse au sens du courant. On a mis en évidence une des jauges dans l'insert en bas à gauche.

4.3.2.3 Autres méthodes de détection

D'autres principes de détection peuvent être mis en œuvre à l'échelle MEMS pour traduire un déplacement en signal électrique :

- détection piézoélectrique : généralement en utilisant le silicium comme matériau structurel et des jauges de matériau piézoélectrique pour détecter les mouvements de celle-ci (par exemple, procédé PiezoMUMPS de MEMSCAP). Elle présente plusieurs avantages (linéarité, faible bruit intrinsèque, pas besoin de polarisation) par rapport à la détection piézorésistive et/ou capacitive, mais est généralement plus onéreuse (du fait du plus grand nombre d'étapes de fabrication) et est limitée à la détection de certains types de mouvements. Il est également possible d'utiliser un matériau piézoélectrique plutôt que le silicium comme matériau structurel. Le quartz, par exemple, permet de réaliser des dispositifs, généralement résonants (capteurs inertiels, comme à l'ONERA, horloges…) ayant une bien meilleure stabilité en température que le silicium, mais de dimensions plus importantes et dont le coût unitaire est (donc) bien plus élevé.
- détection FET (Field-Effect Transistor) : c'est une variante de la détection capacitive, où la structure MEMS forme la grille mobile d'un transistor, de sorte qu'un déplacement de la

structure module le courant traversant le canal de celui-ci. Le tout premier MEMS (« resonant gate transistor », Nathanson, Fig. 4.16) repose sur ce principe, qui n'est que peu utilisé commercialement – à nouveau, essentiellement du fait de la complexité et du coût des procédés de fabrication requis.

- détection optomécanique : dans ce cas, on couple un résonateur MEMS avec un résonateur optique, dont les propriétés sont modulées par le mouvement de la structure MEMS (Fig. 4.17). Ce type de dispositif est utilisé en laboratoire pour la caractérisation fine des matériaux ou la mesure de masse.

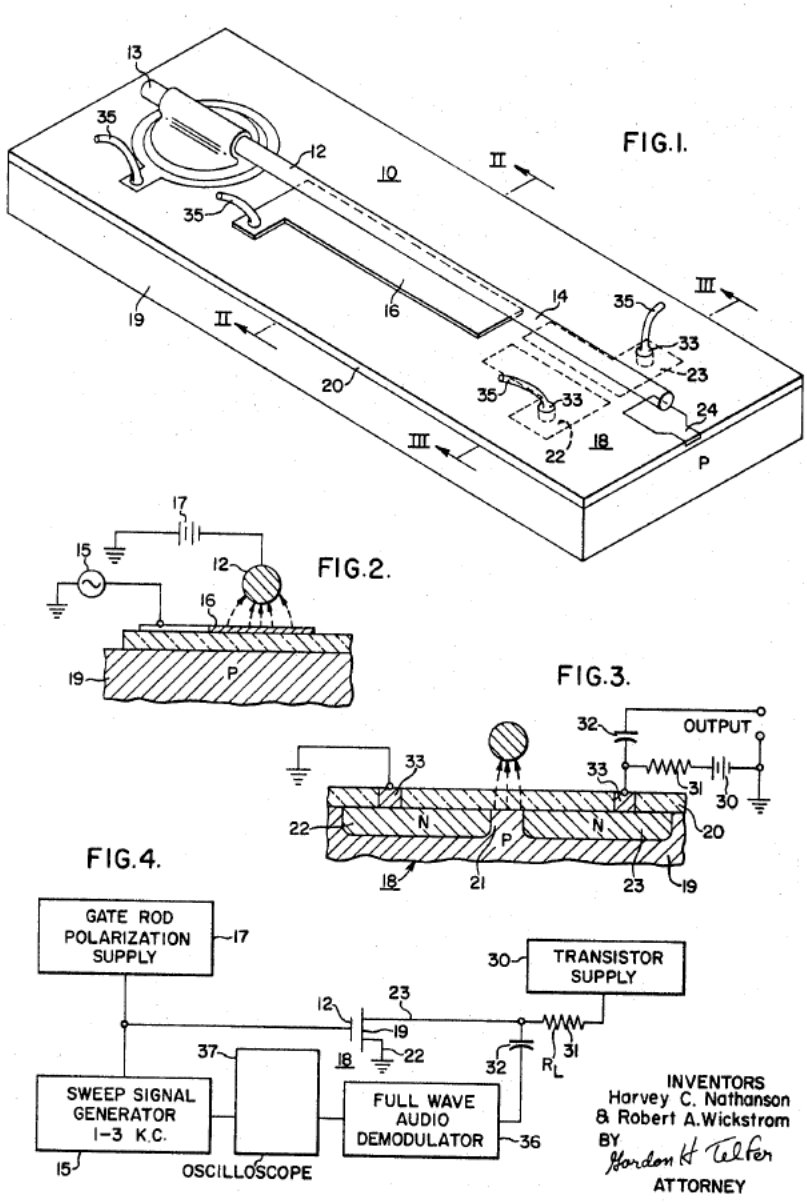


Fig. 4.16 – Le tout premier MEMS consiste en fait en une « antenne vibrante » : lorsque la longueur d'onde de l'onde incidente est accordée à la longueur de la poutre, celle-ci entre en résonance mécanique, ce qui module le courant circulant dans le canal du transistor à l'extrémité. Image tirée du brevet US3413573A.

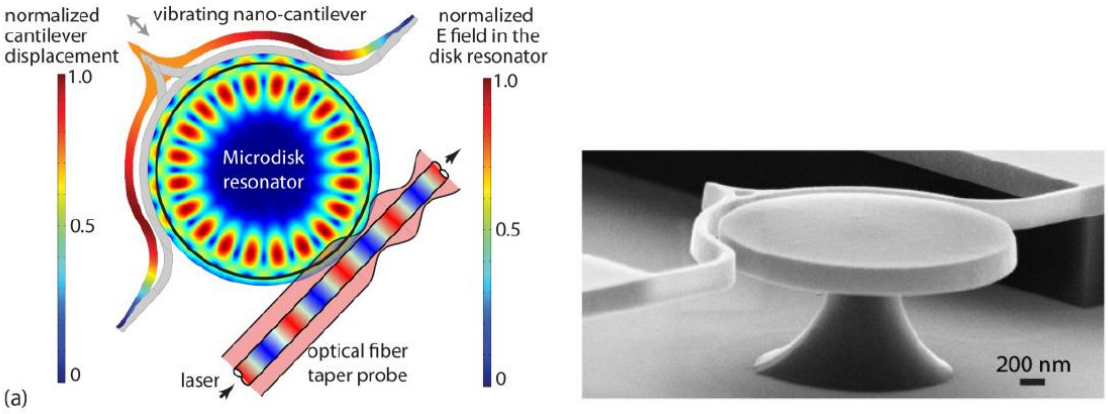


Fig. 4.17 – Principe d'un AFM optomécanique : le déplacement du « cantilever » module l'indice effectif du disque (couplage optomécanique), et ainsi ses fréquences propres ; il en résulte une variation du coefficient de couplage optique entre le disque et la fibre, et ainsi de l'intensité optique en sortie de fibre. Travaux réalisés au NIST et à U. Maryland. Images prises de DOI: 10.1364/OE.20.018268.

4.3.3 Actionnement

La physique des MEMS est particulière en cela que les phénomènes surfaciques y jouent un rôle bien plus important qu'à l'échelle macroscopique : en réduisant toutes les dimensions d'un objet d'un ordre de grandeur, on divise l'effet des forces volumiques de trois ordres de grandeur, celui des forces surfaciques seulement de deux. Ces effets d'échelle expliquent en partie pourquoi l'apparence des capteurs MEMS est si singulière par rapport à celle de leurs équivalents macroscopiques.

L'actionnement capacitif (ou actionnement électrostatique) est la principale méthode utilisée pour appliquer des forces de manière contrôlée aux structures MEMS, et ainsi les mettre en mouvement, asservir leur position, etc. Du fait de son caractère « surfacique » (il tire parti de la pression électrostatique s'exerçant en surface des conducteurs chargés), il est adapté à l'échelle microscopique. De plus, il est peu onéreux à mettre en œuvre, ne nécessitant pas d'étape de fabrication particulière, ce qui explique sa très grande popularité. L'essentiel de cette section lui est consacré.

4.3.3.1 Actionnement capacitif

4.3.3.1.1 Principe

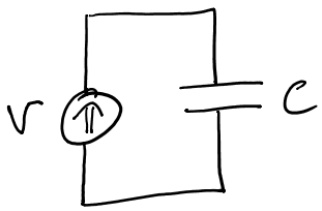


Fig. 4. 18 – Système fermé consistant en une source idéale de tension et une capacité.

La manière la plus intuitive d'appréhender les forces électrostatiques consiste à partir du système de la Fig. 4.18, décrivant une capacité C à laquelle est appliquée une tension V. L'énergie potentielle du système s'écrit

$$E_{pot} = E_{source} + E_{capacité} = -QV + \frac{1}{2}CV^2 \qquad (4.39)$$

où Q est la charge fournie par la source. Comme $Q = CV$, l'énergie potentielle s'écrit

$$E_{pot} = -\frac{1}{2}CV^2 \qquad (4.40)$$

Supposons à présent que l'une des armatures de la capacité puisse se déplacer librement dans une direction X, de sorte que la capacité C dépende de X. En l'absence de tension, $E_{pot}(X) = 0$ et toutes les positions sont équivalentes. En revanche, si $V \neq 0$ (et indépendamment du signe de V), le système évolue vers un minimum de $E_{pot}(X)$, c'est à dire vers un maximum de $C(X)$.

Physiquement, ceci traduit l'existence d'une force électrostatique s'exerçant dans la direction X, dérivant de $E_{pot}(X)$ selon

$$F_{elec} = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial X} = \frac{1}{2}\frac{\partial C}{\partial X}V^2 \qquad (4.41)$$

Deux configurations, à variation de gap ou à variation de surface (appelée également « comb-drive »), sont particulièrement utilisées.

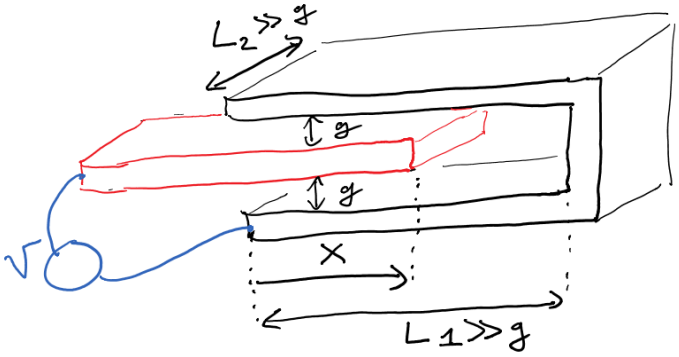


Fig. 4.19 – Géométrie d'un « comb-drive ». L'électrode rouge est attirée à l'intérieur de l'électrode noire.

La géométrie type d'un « comb-drive » est illustrée à la Fig. 4.19. En utilisant l'approximation du condensateur plan, on peut écrire

$$C = 2\epsilon_0 \frac{XL_2}{g} \qquad (4.42)$$

En utilisant (4.41), on en déduit

$$F_{comb-drive} = \epsilon_0 \frac{L_2}{g} V^2 \quad (4.43)$$

Dans cette configuration, on génère donc une force attirant les doigts mobiles entre les doigts fixes. Il est remarquable que cette force est indépendante de X. Ceci est vrai tant que l'hypothèse du condensateur plan est vérifiée, c'est à dire ni en début ($X = 0$), ni en fin de course ($X = L_1$) et, évidemment, à condition que V soit indépendante de X.

Un actionnement de type « comb-drive » est par exemple utilisé pour le gyroscope de la Fig. 4.4.

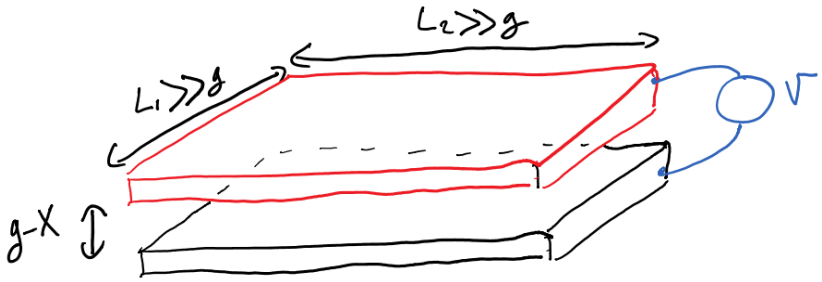


Fig. 4.20 – Géométrie « gap-closing ». L'électrode rouge est attirée vers l'électrode noire.

La géométrie « gap-closing » est illustrée à la Fig. 4.20. On a

$$C = \epsilon_0 \frac{L_1 L_2}{g - X} \qquad (4.44)$$

dont on déduit

$$F_{gap-closing} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{L_1 L_2}{(g-X)^2} V^2 \qquad (4.45)$$

A nouveau on génère une force attractive, mais celle-ci dépend fortement de la position X, au point de tendre vers l'infini en fin de course ($X = g$). Cette dépendance à la position peut être avantageuse ou pas, selon le contexte.

Les électrodes de test de l'accéléromètre de la Fig. 4.14 sont des actionneurs capacitifs de type gap-closing.

Remarques :

1 – Un compromis force / amplitude de déplacement existe pour l'actionnement capacitif, tout comme il existe un compromis sensibilité / amplitude de déplacement pour la détection capacitive. On a effectivement

$$\frac{F_{gap-closing}}{F_{comb-drive}} \approx \frac{L_1}{2g} \gg 1 \qquad (4.46)$$

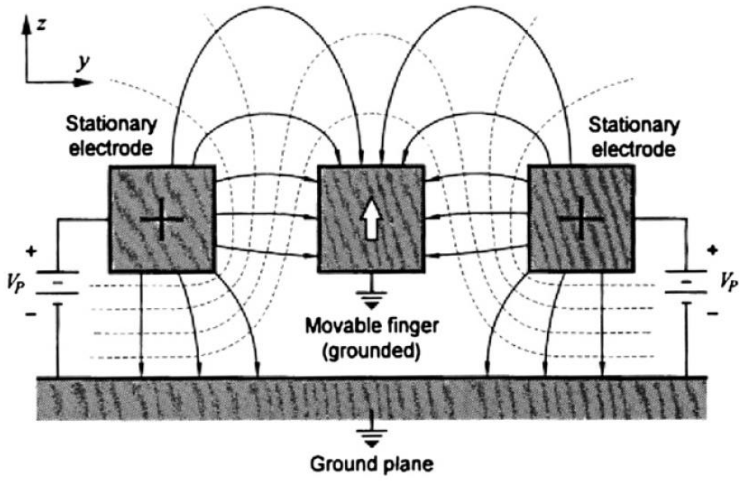


Fig. 4.21 – Configuration d'électrodes propice à la lévitation électrostatique. Image tirée de doi.org/10.1016/j.elstat.2008.03.005

2 – Même si les forces électrostatiques sont souvent attractives, celles-ci peuvent également être répulsives. Notamment, la géométrie présentée à la Fig. 4.21, qu'on retrouve dans nombre de structures en peigne, est propice à une « lévitation » électrostatique plus ou moins marquée : la structure s'élève lorsqu'une tension est appliquée aux électrodes. Cet effet est d'autant moins marqué que l'on est proche de l'hypothèse du condensateur plan.

3 – La détection capacitive nécessite qu'une polarisation soit appliquée de part et d'autre d'au moins une paire d'électrodes. Ceci génère donc une force électrostatique et (selon la configuration des électrodes de détection) un déplacement et/ou un ramollissement de la structure, que la polarisation soit continue (cas des résonateurs MEMS) ou AC (cas des accéléromètres). Dans le cas d'une polarisation AC à la pulsation ω, la force a non seulement une composante continue, mais aussi une composante à 2ω. Celle-ci peut notamment provoquer une oscillation de la structure si ω n'est pas convenablement choisie.

4.3.3.1.2 Ramollissement électrostatique et pull-in

Comme la force électrostatique est conservative et dépend généralement de X, il est d'usage de la comparer à la force de rappel d'un ressort en définissant sa « raideur électrostatique »

$$K_{elec}(X) = -\frac{\partial F_{elec}}{\partial X} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial X^2}V^2 \qquad (4.47)$$

Pour un actionnement à variation de gap, la raideur électrostatique vaut, lorsque $X \ll g$

$$K_{elec-gap-closing}(0) = -2\epsilon_0 \frac{L_1 L_2}{g^3}V^2 \quad (4.48)$$

Comme la raideur électrostatique est négative, ce phénomène est décrit comme un « ramollissement électrostatique ». La raideur effective d'une structure sujette au ramollissement électrostatique est $K + K_{elec}$, où K est la raideur mécanique. La raideur effective d'une structure MEMS – et ainsi sa fréquence de résonance – peut donc être ajustée en jouant sur la tension appliquée à la structure. Ce phénomène de ramollissement offre un moyen puissant pour ajuster post-fabrication la fréquence de résonance d'une structure MEMS.

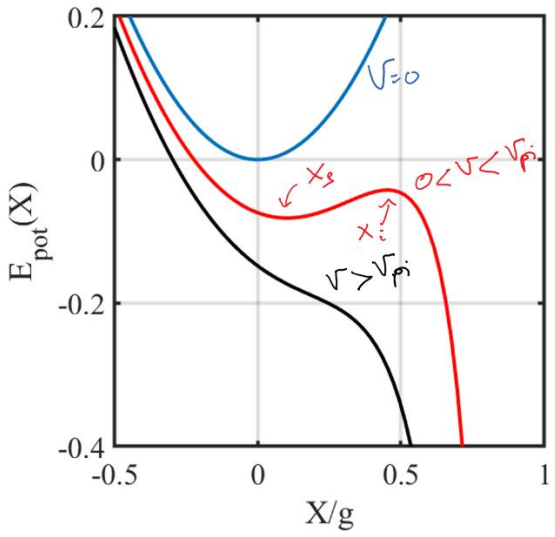


Fig. 4.22 – Energie potentielle d'une structure actionnée en « gap-closing » sujette à une force de rappel élastique.

Un phénomène indissociable du ramollissement électrostatique est celui du « pull-in ». Le pull-in correspond à un « effondrement » de l'électrode mobile sur l'électrode fixe, au-delà d'une certaine valeur du déplacement X. Il résulte généralement en un endommagement irrémédiable des électrodes et de la structure. La Fig. 4.22 permet une compréhension qualitative du phénomène (en négligeant tous les effets dynamiques) : on y représente l'énergie potentielle d'une structure sujette à une force de rappel élastique ($F = -KX$) et actionnée en « gap-closing », pour différentes valeurs de V. Pour

$$V < V_{pi} = \sqrt{\frac{8}{27}\frac{KG^3}{\epsilon_0 S}} \qquad (4.49)$$

il existe deux positions d'équilibre, solutions de

$$-KX + \frac{\epsilon_0}{2}\frac{S}{(g-X)^2}V^2 = 0 \qquad (4.50)$$

où S est la surface de la capacité. L'une, X_s, est stable (de raideur effective positive), l'autre, X_i, est instable (de raideur effective négative). L'amplitude de déplacement de la structure est alors limitée par X_i, au-delà de laquelle la structure s'effondre. Lorsque la tension atteint V_{pi}, on a

$$X_i = X_s = g/3 \qquad (4.51)$$

et la raideur effective est nulle à cette position. Pour $V \geq V_{pi}$, il n'existe tout simplement plus de position d'équilibre stable.

Pour un « comb-drive », d'après (4.43) et (4.47), la raideur électrostatique est nulle. Il n'y a donc ni ramollissement électrostatique, ni pull-in dans la direction X. Cependant, la structure a forcément une raideur finie dans la direction Y (qu'il s'agisse des suspensions ou des doigts des peignes), selon laquelle il peut y avoir pull-in.

Remarque :

Les micro-interrupteurs MEMS (Fig. 4.23) sont des interrupteurs mécaniques à l'échelle microscopique. Leur intérêt par rapport aux interrupteurs électroniques est la qualité de l'isolation qu'ils apportent à l'état ouvert. Ils sont en revanche beaucoup plus lents, même s'ils tirent parti du phénomène de pull-in pour provoquer un effondrement brusque de la structure. Ces dispositifs ne sont largement commercialisés que depuis peu, alors qu'ils sont à l'étude depuis plus de 40 ans. La principale difficulté est de limiter l'usure (mécanique, électrique, thermique…) de la structure qui subit des commutations répétées, pour garantir la répétabilité de l'opération de commutation sur un nombre de cycles importants.

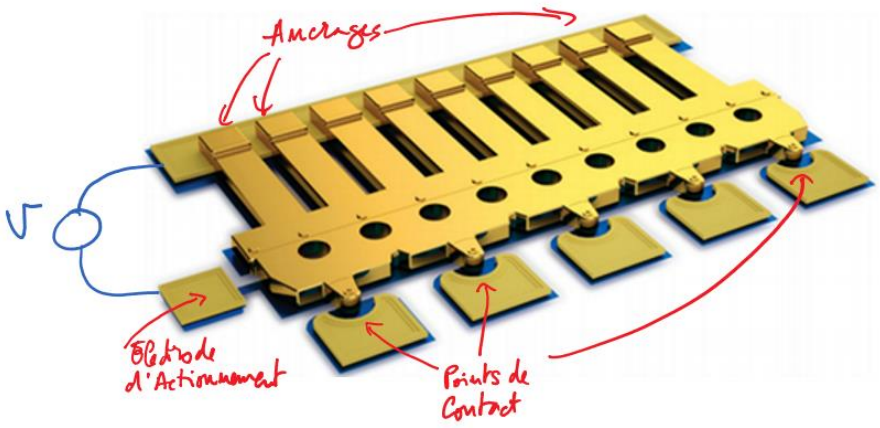


Fig. 4.23 – Micro-interrupteur MEMS d'Analog Devices (image extraite de leur site).

4.3.3.1.3 Linéarisation en tension

Il existe plusieurs manières de linéariser la relation entre la force électrostatique et la commande dynamique qu'on souhaite à appliquer à la structure. Celles-ci sont très dépendantes du type de structure (résonante ou pas), de la commande qu'on souhaite appliquer (large-bande ou pas, pour asservir la structure à une certaine position ou générer une oscillation) et de l'amplitude des déplacements qu'on souhaite obtenir. On se contente ici d'en décrire quelques principes, dans le cas où le ramollissement électrostatique est négligeable.

La solution la plus immédiate, au niveau électronique, est de travailler autour d'un point de polarisation en tension, i.e. choisir $V = V_{bias} + V_{ctrl}$ où V_{ctrl} est proportionnelle à la commande et $V_{bias} \gg V_{ctrl}$ est une tension de polarisation, généralement continue. On a alors $F_{elec} \propto V_{bias}^2 + 2V_{bias}V_{ctrl}$. La force électrostatique est donc la somme d'un terme constant et d'un terme proportionnel à la commande. Si le déplacement statique dû au terme constant n'est pas gênant, on atteint ainsi l'objectif de linéarité recherché.

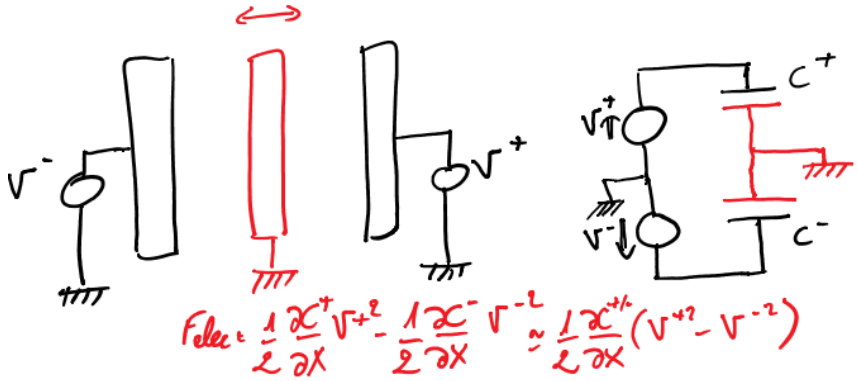


Fig. 4.24 – Actionnement capacitif différentiel.

Pour que la composante statique de la force soit nulle, il est nécessaire d'agir au niveau géométrie. On peut ainsi réaliser un actionnement différentiel en utilisant des électrodes situées de part et d'autre de la structure, comme représenté à la Fig. 4.24. Chaque électrode peut alors « tirer » la structure dans sa direction. Par exemple, en appliquant une tension $V_+ = V_{bias} + V_{ctrl}$ d'un côté et $V_- = V_{bias} - V_{ctrl}$ de l'autre, on obtient $F_{elec} \propto 4V_{bias}V_{ctrl}$.

Enfin, utiliser une commande sur deux niveaux « logiques » permet de passer outre la non-linéarité en V^2. Il est ainsi possible de traduire une commande « analogique » en « train de bits » au moyen d'un modulateur ΣΔ (Fig. 4.25) ou PWM ou d'utiliser une commande « tout-ou-rien ». De même, l'utilisation d'un créneau de tension ou d'un train d'impulsions (Fig. 4.25) sera tout aussi efficace qu'une excitation harmonique pour mettre une structure à la résonance.

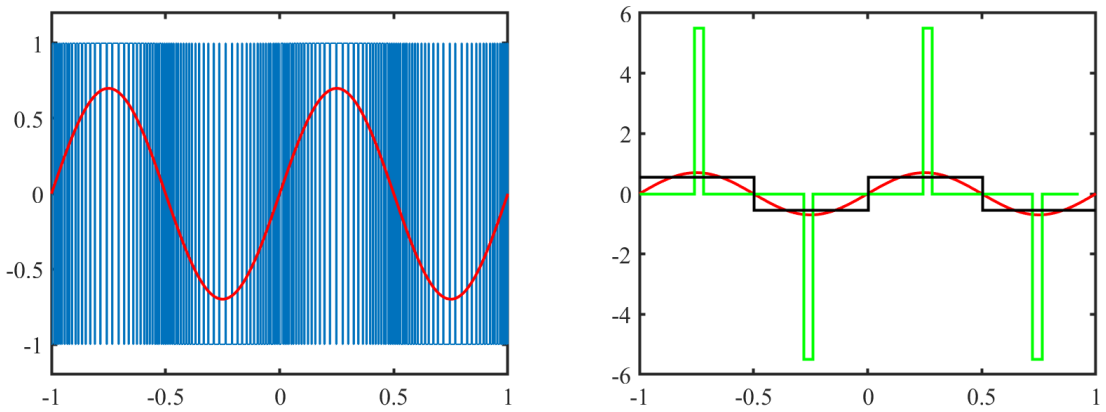


Fig. 4.25 – A gauche, modulation ΣΔ d'un signal analogique (sinus) en train d'impulsions binaire. Localement, les valeurs moyennes des deux signaux sont égales. A droite, les amplitudes des premières harmoniques des trois signaux sont les mêmes.

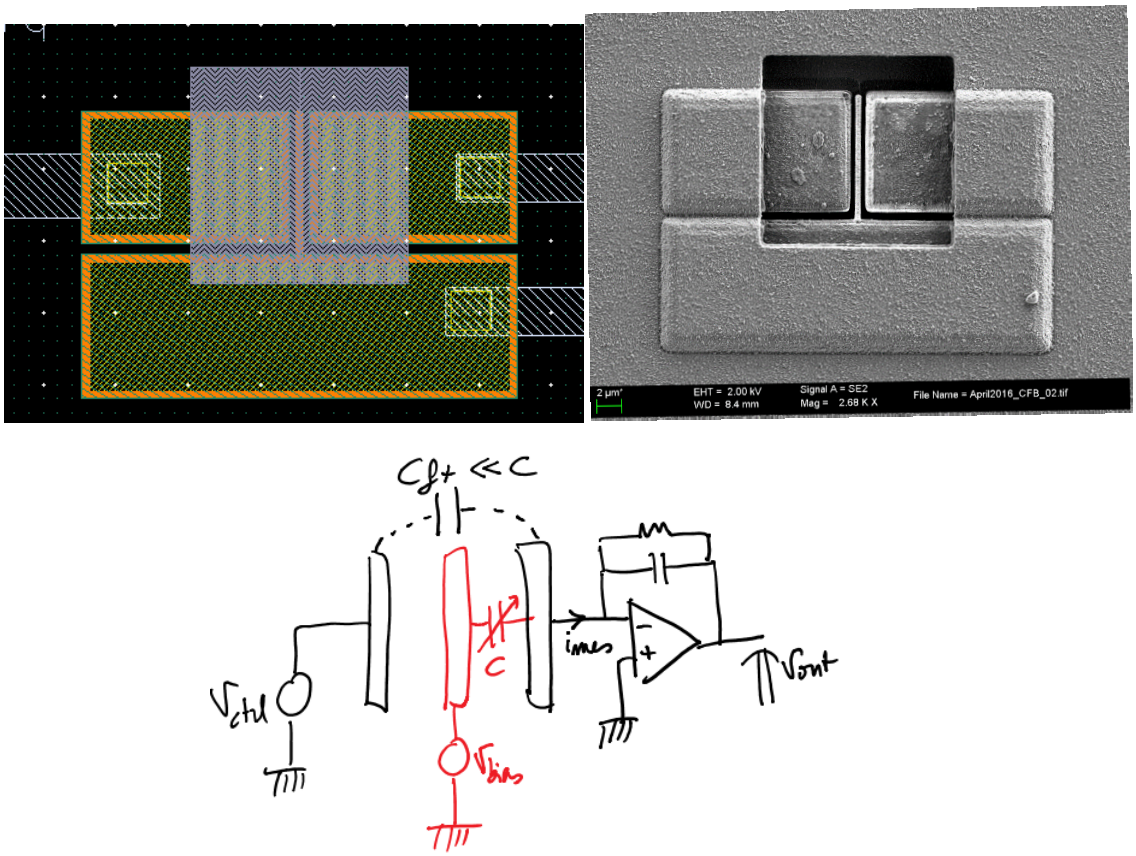


Fig. 4.26 – Avant et après la fabrication (thèse de Pierre Prache). A gauche, dessin du masque d'un cantilever à actionnement et détection capacitifs à variation de gap. Le cantilever et ses électrodes (vert à frontière marron) sont définis dans la même couche de métal d'un procédé CMOS standard. Une « fenêtre » (grisée) est définie dans la couche supérieure du procédé. Une attaque acide (HF) permet de ronger l'oxyde (noir) situé sous la fenêtre et, simultanément, de libérer le cantilever et les électrodes. A droite, résultat obtenu. En bas, schéma électrique équivalent.

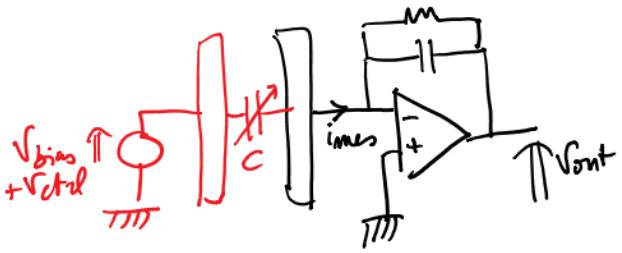


Fig. 4.27 – Configuration à 1 port pour l'actionnement et la détection capacitifs simultanés.

4.3.3.1.4 Actionnement et détection simultanés

Lorsqu'il est nécessaire de mettre en œuvre actionnement et détection capacitifs simultanément, la solution la plus simple consiste à utiliser des jeux différents d'électrodes. C'est le cas pour le cantilever de la Fig. 4.26 ou le pont de la Fig. 4.14 : la poutre porte une tension continue V_{bias}, l'électrode de gauche actionne la structure à la résonance avec une tension AC $V_{ctrl} \ll V_{bias}$ et l'électrode de droite est à une masse virtuelle, étant reliée à un ampli à transimpédance. En négligeant le couplage capacitif direct (« feedthrough ») entre l'électrode de gauche et l'électrode de droite, on a :

$$i_{mes} = \frac{d}{dt}(C(X) \times V_{bias}) = \frac{dC}{dt}V_{bias} = \frac{\partial C}{\partial X}V_{bias} \times \dot{X} = i_{mot} \qquad (4.52)$$

Le courant mesuré est ainsi égal au courant motionnel, et proportionnel à la vitesse de la structure.

Il est également possible (et peut-être souhaitable pour la compacité du design) d'utiliser les mêmes électrodes pour réaliser la détection et l'actionnement. Dans ce cas, une difficulté est de séparer dans les signaux mesurés la composante motionnelle de la composante parasite, résultant du feedthrough. Dans la configuration, dite à « 1 port », représentée à la Fig. 4.27, par exemple, lorsque la tension V_{bias} est continue, le courant mesuré s'écrit

$$i_{mes} = \frac{d}{dt}(C(V_{bias} + V_{ctrl})) \approx \frac{dC}{dt}V_{bias} + C\frac{dV_{ctrl}}{dt} = i_{mot} + i_{feedthrough} \qquad (4.53)$$

Lorsque cela est possible, augmenter V_{bias} est la manière la plus simple d'obtenir un bon rapport entre le signal utile et le signal parasite. Une autre solution consiste aussi à séparer temporellement les phases d'actionnement des phases de détection.

Remarque :

Seul le calcul exact des capacités entre les différents conducteurs constituant le MEMS permet de quantifier précisément ces phénomènes. C'est une étape essentielle de la validation d'un nouveau design.

4.3.3.1.5 Illustration

Un gyroscope 3 axes (pouvant détecter une rotation orientée de manière arbitraire) de ST Microelectronics est représenté à la Fig. 4.28. En étudiant la géométrie des suspensions, et armés de vos connaissances sur l'actionnement et la détection capacitifs, essayez d'interpréter le fonctionnement de cette structure à partir des éléments indiqués.

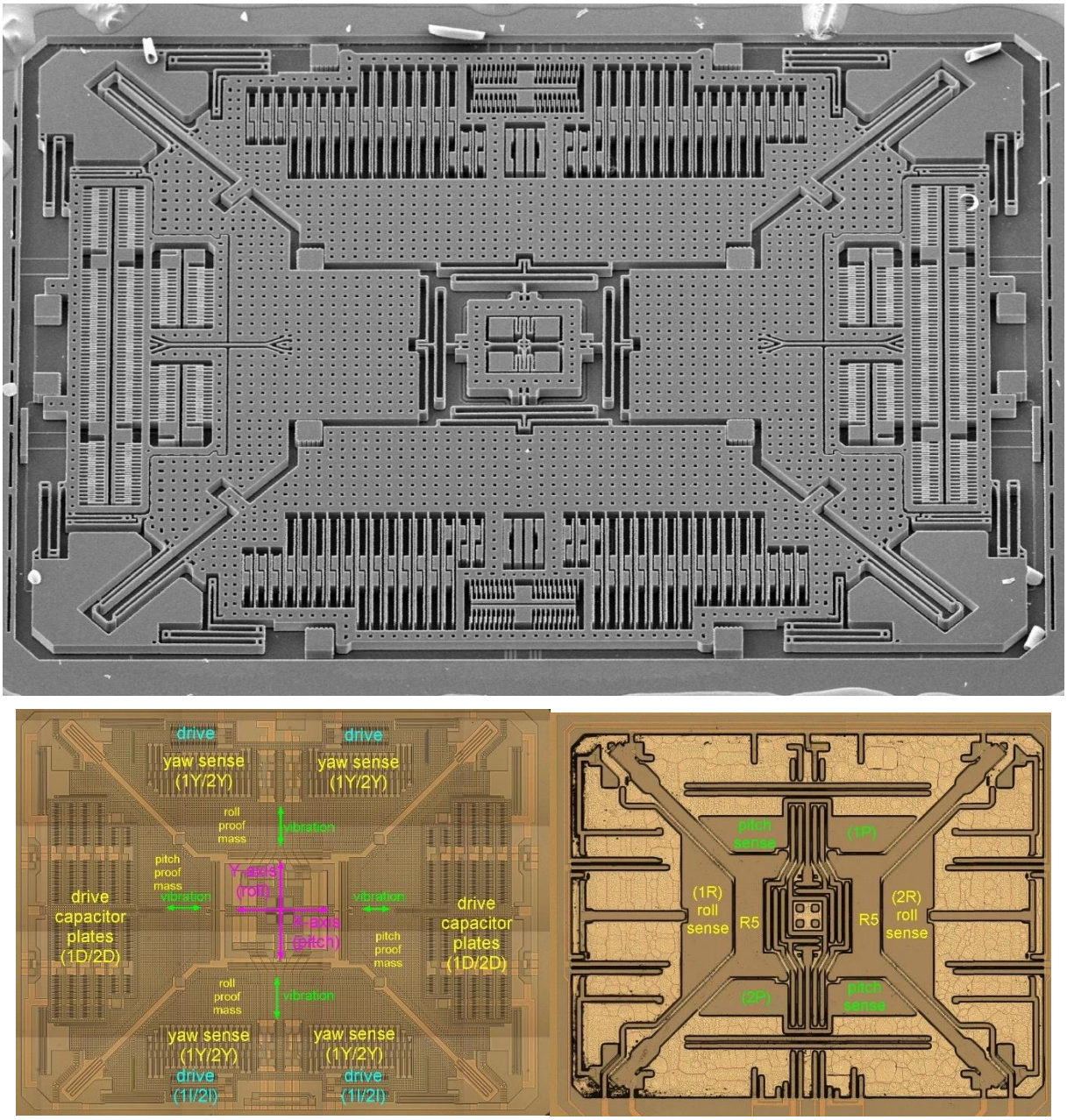


Fig. 4.28 – Vue d'un gyroscope 3 axes de ST Microelectronics au microscope à balayage (en haut, pris du compte Twitter Nanographs), au microscope optique (en dessous, tiré du site MEMSJournal).

4.3.3.2 Autres principes d'actionnement

La piézoélectricité est un phénomène réversible qui peut être mis en œuvre aussi bien pour détecter le mouvement d'une structure MEMS que pour le contrôler. L'actionnement piézoélectrique a essentiellement les mêmes avantages et les mêmes limitations que la détection piézoélectrique décrite plus haut.

On a représenté à la Fig. 4.29 quelques principes d'actionneurs électro-thermomécaniques, qui tirent profit de l'expansion thermique pour provoquer la déformation d'une structure. L'échauffement est obtenu par effet Joule, lorsque la structure est traversée par un courant. L'intérêt de cette technique d'actionnement est qu'elle permet d'engendrer des déplacements ou des forces très importants, mais qu'elle ne nécessite pas forcément d'étape de fabrication particulière. Ses principaux défauts sont liés à son caractère « résistif » (consommation, bruit…)

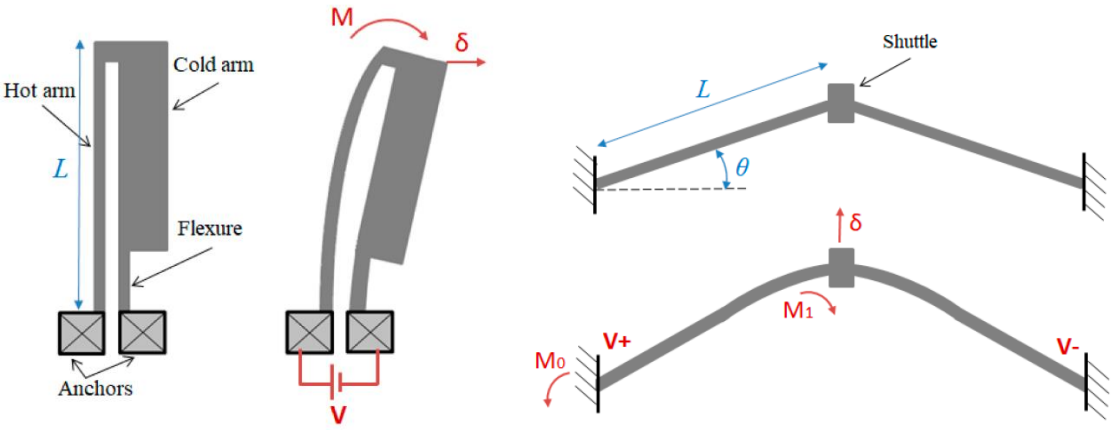


Fig. 4.29 – Deux géométries d'actionneurs électro-thermomécaniques (images tirées de doi:10.3390/act8040069) pouvant générer des mouvements dans le plan. A gauche, géométrie dite « Guckel » : le bras mince chauffe davantage que le bras large, du fait de la différence de résistance, ce qui résulte en un mouvement de flexion de la structure, dans la direction du bras froid. A droite, géométrie dite « chevron » : la structure n'étant pas libre de se dilater à droite et à gauche se déforme vers le haut.

4.4 Dissipation

4.4.1 Généralités

La détermination quantitative *a priori* de la dissipation est sans doute la partie la plus difficile de la conception d'un dispositif MEMS. D'une part, du fait du très grand nombre de phénomènes physiques responsables de cette dissipation : fluidiques, électriques, thermiques, acoustiques, etc. D'autre part, du fait que les modèles analytiques de ces phénomènes sont limités à des géométries simplistes de dispositifs ou à des hypothèses pas toujours vérifiées en pratique. Aussi, il convient d'être particulièrement circonspect vis-à-vis des estimations fournies par les quelques modèles présentés dans cette partie : des références plus complètes sont données en fin de chapitre, auxquelles il pourra être utile de se rapporter le cas échéant.

La première cause de dissipation à l'échelle microscopique est la viscosité du fluide environnant le dispositif. L'effet de la viscosité est accentué dans les films minces de fluide, comme ceux pouvant être formés par les armatures des électrodes utilisées pour l'actionnement et la détection capacitifs. Pour une géométrie donnée, l'amortissement fluidique devient progressivement moins marqué à mesure que l'on diminue la pression du fluide environnant, jusqu'à ce que d'autres phénomènes dissipatifs deviennent prépondérants : pertes électriques, pertes thermoélastiques, pertes dans les encastrements, etc. Ultimement, la dissipation est limitée par des pertes intrinsèques au matériau utilisé.

Dans certaines limites, on peut modéliser l'influence de la dissipation sur la dynamique d'un dispositif par une force de frottement visqueux

$$F = -B\dot{X} \qquad (4.54)$$

où le coefficient B résulte de la superposition des différents phénomènes dissipatifs, selon

$$B = B_{fluide} + B_{electrique} + B_{thermoélastique} + \cdots + B_{matériau} \quad (4.55)$$

ou encore

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{fluide}} + \frac{1}{Q_{electrique}} + \frac{1}{Q_{thermoélastique}} + \cdots + \frac{1}{Q_{matériau}} \qquad (4.56)$$

Différents objectifs de conception peuvent être poursuivis, selon le type de transducteur considéré. Dans le cas des transducteurs résonants, comme les gyroscopes, un grand facteur de qualité Q, i.e. une faible dissipation B, est souhaitable. Dans le cas des transducteurs non résonants comme les accéléromètres capacitifs, un facteur de qualité modéré est préférable ($Q = 1/2$ étant optimal du point de vue du temps de réponse). Ceci nécessite donc de se focaliser essentiellement sur les phénomènes fluidiques dans le cas non résonant, alors que l'ensemble des phénomènes est important dans le cas résonant. D'un point de vue pratique, ceci signifie aussi qu'il existe des différences importantes au niveau du packaging – et donc du coût – de ces deux types de transducteurs : étanche pour les transducteurs non résonants, étanche *et* sous vide pour les transducteurs résonants.

Enfin rappelons que la dissipation résulte aussi en une force aléatoire F_n qu'on peut traiter comme un bruit blanc de densité

$$S_{F_n} = 4k_B T \times B \ [\mathrm{N}^2/\mathrm{Hz}] \qquad (4.57)$$

qui limite de manière fondamentale la précision des transducteurs MEMS.

4.4.2 Pertes fluidiques

4.4.2.1 Equations de Navier-Stokes

La relation constitutive décrivant le comportement d'un fluide visqueux est connue sous le nom de relation de Stokes. Elle lie la valeur du champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ (efforts internes) du fluide à son taux de déformation $\boldsymbol{e}$ (partie symétrique du gradient de la vitesse $\boldsymbol{v}$) et à la pression P

$$\boldsymbol{\sigma}_{visc} = 2\mu\boldsymbol{e} + (\lambda Tr(\boldsymbol{e}) - P)\boldsymbol{I} \quad (4.58)$$

via les coefficients de viscosité μ et λ. Notons qu'à l'échelle microscopique, ou à basse pression, la description de l'air comme un milieu continu, et donc la notion de viscosité, n'est pas nécessairement appropriée. Ce point est abordé à la section suivante.

Dans un milieu fluide, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit sous une forme légèrement différente de (4.4), pour tenir compte des effets de convection

$$div(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{f} = \frac{\mathrm{D}(\rho\boldsymbol{v})}{\mathrm{D}t} = \rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\boldsymbol{grad}(\boldsymbol{v}) \qquad (4.59)$$

où ρ est la densité du fluide et $\boldsymbol{f}$ un champ de force volumique. En combinant (4.58) et (4.59), on obtient les équations de Navier-Stokes

$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{grad}\big(div(\boldsymbol{v})\big) + \mu\boldsymbol{\Delta v} + \boldsymbol{f} - \boldsymbol{grad}(P) = \rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\boldsymbol{grad}(\boldsymbol{v}) \quad (4.60)$$

qui, couplées à la conservation de la masse

$$div(\rho\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (4.61)$$

et à la loi des gaz parfaits

$$\frac{P}{\rho} = C^{te} \qquad (4.62)$$

sont nécessaires pour décrire un écoulement (isotherme) d'air dans une géométrie quelconque. Les dimensions et géométries particulières des MEMS permettent généralement de faire des hypothèses simplificatrices pour rendre ces équations plus parlantes, comme cela est expliqué plus loin dans le cas des films d'air. La validité de ces hypothèses devra évidemment être vérifiée, voire éprouvée par simulation numérique.

4.4.2.2 Du régime continu au régime moléculaire libre

L'hypothèse que l'air est un milieu continu est mise à mal à petite échelle et/ou à basse pression. On peut en rendre compte via le nombre de Knudsen

$$Kn = \frac{\Lambda}{D} \qquad (4.63)$$

où Λ est le libre parcours moyen des molécules d'air, i.e. la distance moyenne qu'elles parcourent entre deux interactions, et D une dimension caractéristique de l'écoulement (typiquement la distance inter-électrode). Si D est grande par rapport à Λ ($Kn \ll 1$), on peut considérer l'air comme un milieu continu. Au contraire, lorsque $Kn \gg 1$, les molécules d'air n'interagissent plus entre elles à l'échelle de l'écoulement (régime « moléculaire libre ») et la viscosité effective du fluide est nulle.

Le libre parcours moyen Λ vaut $\Lambda_0 = 64$ nm à pression atmosphérique $P_0 = 1$ bar et il est inversement proportionnel à la pression

$$\Lambda = \Lambda_0 \times \frac{P_0}{P} \qquad (4.64)$$

Tant que le nombre de Knudsen n'est pas trop élevé, on peut recourir à des modèles continus dans lesquels la viscosité μ est remplacée par une viscosité effective μ_{eff} qui dépend de Kn et de la géométrie de l'écoulement. Pour un film d'air comprimé (« squeeze-film damping »), on a

$$\mu_{eff}(Kn) \approx \frac{\mu}{1+6Kn} \qquad (4.65)$$

alors que pour un film d'air cisaillé (« slide-film damping ») on a

$$\mu_{eff}(Kn) \approx \frac{\mu}{1+2Kn} \qquad (4.66)$$

Ces expressions sont valables pour $Kn \leq 1$. On pourra se référer aux articles de Bao et Frangi pour les cas où $Kn > 1$.

4.4.2.3 "Slide-film damping"

Le « slide-film damping » correspond au cas où un film d'air est cisaillé entre deux surfaces se déplaçant parallèlement l'une à l'autre (comme dans un « comb-drive »). Lorsque les dimensions latérales des surfaces sont grandes par rapport au gap les séparant (Fig. 4.30), et à condition qu'on puisse considérer l'écoulement comme extrêmement laminaire (on parle d'écoulement de Couette), i.e. $Re \ll 1$ (où

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \qquad (4.67)$$

est le nombre de Reynolds, qui fait intervenir une vitesse V et une distance D caractéristiques de l'écoulement), les équations de Navier-Stokes se résument à

$$\frac{\partial^2 v_X}{\partial z^2} = 0 \qquad (4.68)$$

Le profil de vitesse dans le film est donc linéaire en fonction de la hauteur z et, en vertu de (4.58), il s'exerce une force purement visqueuse sur la surface en mouvement

$$F_{slide} = -\mu_{eff} \frac{S}{g} \dot{X} \qquad (4.69)$$

où S est la superficie de la surface et g le gap.

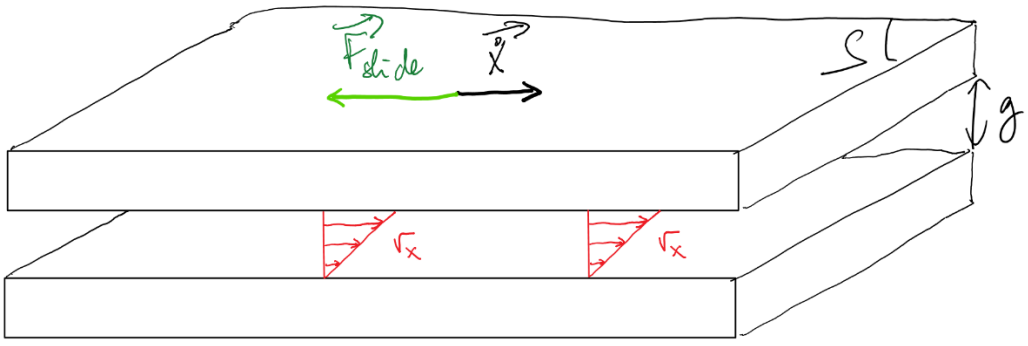


Fig. 4.30 – « Slide-fim damping ».

En relaxant l'hypothèse selon laquelle $Re \ll 1$ et en prenant en compte les effets d'inertie (écoulement de Stokes), on aboutit à une loi de comportement plus complexe

$$\mu_{eff}\frac{\partial^2 v_X}{\partial z^2} = \rho\frac{\partial v_X}{\partial t} \qquad (4.70)$$

Le profil de vitesse dans le film n'est plus linéaire et la force agissant sur la surface en mouvement vérifie

$$F_{slide} + \tau_F \dot{F}_{slide} = -\mu_{eff}\frac{S}{g}\left(\dot{X} + \tau_{\dot{X}}\ddot{X}\right) (4.71)$$

où $\tau_F < \tau_{\dot{X}}$, ces deux quantités étant proportionnelles à $\rho g^2/\mu_{eff}$. A fréquence intermédiaire, c'est un comportement de « ressort dynamique » ($\dot{F}_{slide} \propto \dot{X}$) qui prévaut. A haute fréquence, on retrouve un comportement purement visqueux, comme à basse fréquence.

4.4.2.4 *"Squeeze-film damping"*

Le « squeeze-film damping » correspond au cas où un mince film d'air est comprimé entre deux surfaces se déplaçant perpendiculairement l'une à l'autre (Fig. 4.31). Il est largement associé à l'actionnement et à la détection « gap-closing ». Les phénomènes fluidiques, comme les phénomènes électrostatiques, sont plus complexes dans cette configuration.

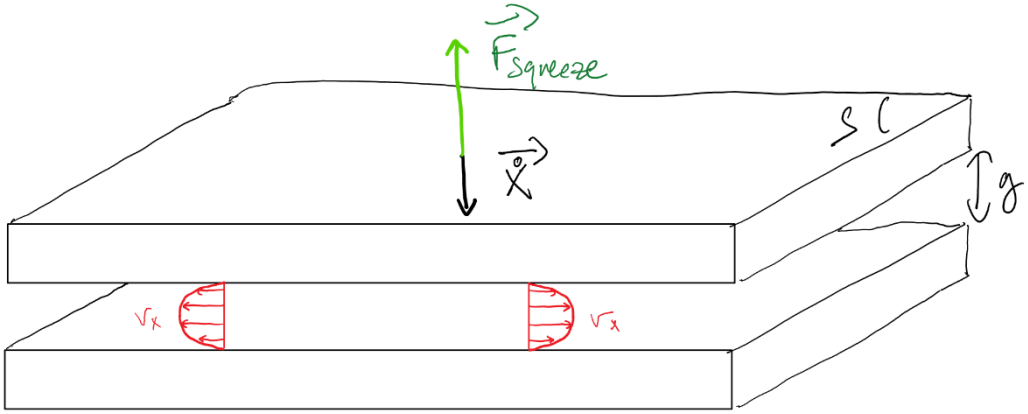


Fig. 4.31 – « Squeeze-film damping ».

Sous les mêmes hypothèses que précédemment ($Re \ll 1$, dimensions latérales grandes par rapport à g), on montre que le profil de vitesse dans le film d'air est parabolique (écoulement de Poiseuille). En tirant parti de (4.61) et (4.62), en supposant que les surfaces en regards restent parallèles, que les déplacements X sont petits par rapport à g, que les variations de pression p sont faibles par rapport à la pression ambiante P_{amb}, et que p est uniforme dans l'épaisseur du film d'air, on aboutit à l'équation de Reynolds linéarisée

$$\Delta p - \frac{12\mu_{eff}}{g^2 P_{amb}}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{12\mu_{eff}}{g^3}\dot{X} \qquad (4.72)$$

dont la solution exacte dépend de la géométrie des surfaces et de leurs conditions aux limites ($p = 0$ sur les bords libres, $\partial p/\partial \boldsymbol{n} = 0$ si l'air ne peut pas s'échapper). Indépendamment de la géométrie exacte, lorsque le nombre de squeeze σ est faible,

$$\sigma = 12\frac{\mu_{eff}\omega D^2}{P_{amb} g^2} \qquad (4.73)$$

où D est une dimension caractéristique de l'extension latérale des surfaces, le comportement est purement visqueux. Lorsque $\sigma \gg 1$, le terme en Δp peut être négligé dans (4.72), et c'est à nouveau un comportement de ressort dynamique qui peut être mis en évidence. On pourra écrire, lorsque $\sigma \ll 1$

$$F_{squeeze} = -\mu_{eff}\frac{S}{g}\dot{X} \times \frac{D^2}{g^2} \qquad (4.74)$$

et, plus généralement, pour les plus grandes valeurs de σ

$$F_{squeeze} + \tau_F \dot{F}_{squeeze} = -\mu_{eff}\frac{S}{g}\dot{X} \times \frac{D^2}{g^2} \qquad (4.75)$$

où $\tau_F \propto \mu_{eff} D^2 / P_{amb} g^2$.

Par exemple, dans le cas d'une surface plane $S = b \times L$, avec $b \ll L$ (doigt d'un peigne), on peut choisir $D = b$ dans les expressions ci-dessus.

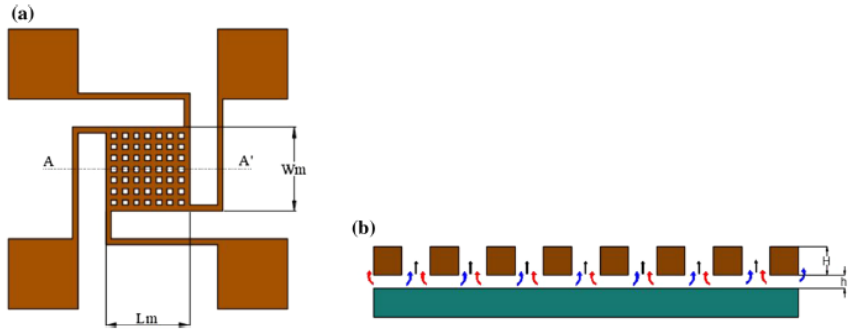


Fig. 2 Schematic diagram of perforated proof mass **a** top view **b** cross-sectional view

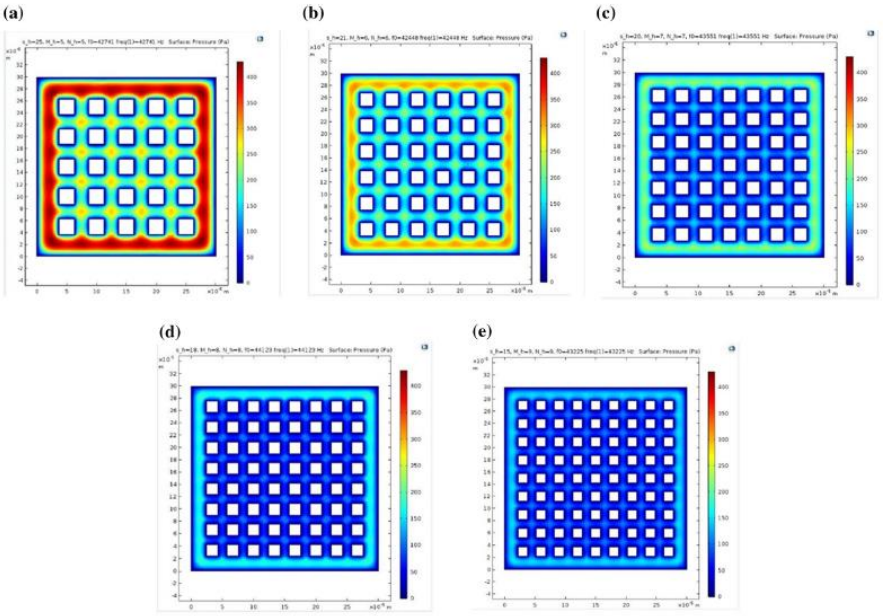


Fig. 4 Pressure distribution in the air gap under the proof mass for different structures

Fig. 4.32 – Optimisation de la taille des perforations d'un dispositif devant se déplacer hors du plan (images prises de https://doi.org/10.1007/s10470-019-01560-5).

Remarques

1 – D'après (4.69) et (4.74), comme $D \gg g$, il est clair que les forces de « squeeze-film » sont nettement supérieures aux forces de « slide-film » lorsque les écoulements ont des géométries semblables.

2 – Le fait que

$$\frac{F_{squeeze}}{F_{slide}} = \frac{D^2}{g^2} \gg 1 \qquad (4.76)$$

est à rapprocher de (4.46). Le prix à payer pour générer des forces électrostatiques importantes est donc un amortissement important – à moins évidemment que le vide soit fait autour de la structure. Dans le cas du « squeeze-film », des compromis de conception entre forte capacité et forte dissipation peuvent aussi être trouvés en jouant sur la distance caractéristique D, par exemple à l'aide de perforations pour les mouvements hors plan (Fig. 4.32), ou d'électrodes non planes pour les mouvements dans le plan (Fig. 4.33).

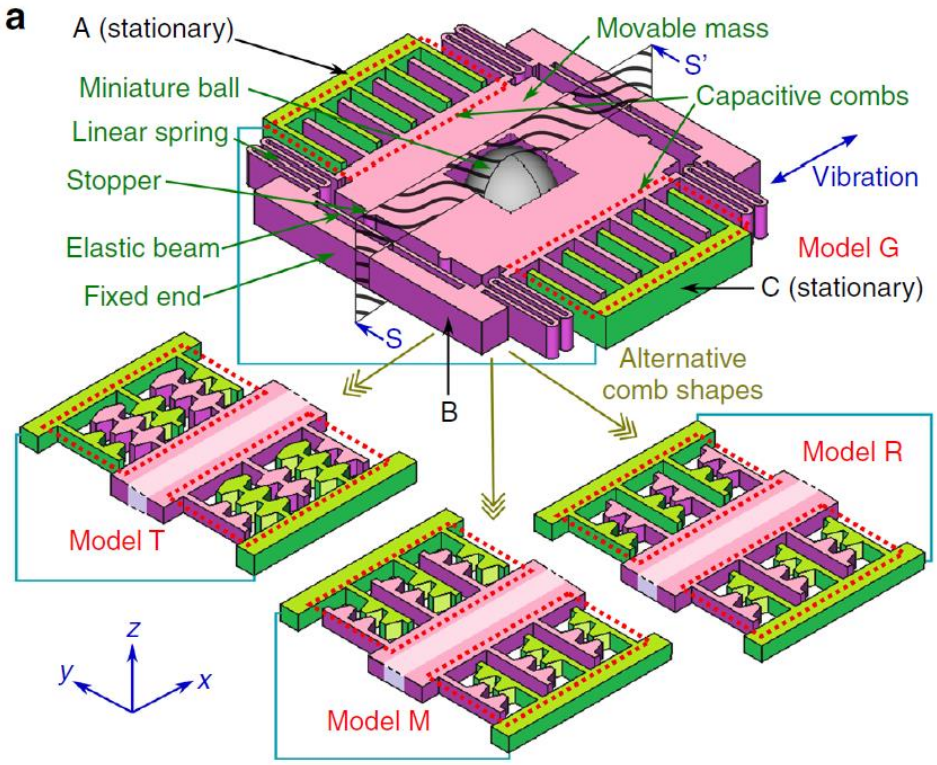


Fig. 4.33 – Optimisation de la géométrie des doigts d'un récupérateur d'énergie cinétique (dispositif convertissant les vibrations ambiantes en énergie électrique – la dissipation doit être minimisée, mais pas au détriment de la capacité). Image tirée de DOI 10.1038/s41378-018-0025-2.

3 – Il est notable que le « squeeze-film damping » est un phénomène fortement non-linéaire (au même titre que l'actionnement « gap-closing »), le coefficient d'amortissement ayant en fait une dépendance non triviale à X. Ceci est masqué dans les expressions ci-dessus par l'hypothèse que $X \ll g$.

4 – Les expressions (4.69) et (4.74) indiquent une dépendance en $1/g^3$ pour le coefficient de « squeeze-film », en $1/g$ pour celui de « slide-film ». Ceci est vrai pour de faibles Knudsen, mais il faut garder à l'esprit que μ_{eff} dépend également du gap (4.65) (4.66). Ainsi, à Knudsen modéré ou fort, le coefficient de « slide-film » ne dépend plus de g. Le coefficient de « squeeze-film »varie en $1/g^2$ pour les Knudsen modérés, en $1/g$ pour les Knudsen importants.

5 – On représente classiquement la relation entre le facteur de qualité d'un dispositif et le nombre de Knudsen d'une manière idéalisée, comme à la Fig. 4.34. Pour un Knudsen suffisamment élevé, l'amortissement fluidique n'est plus la source prépondérante de dissipation et nombre d'autres phénomènes, décrits ci-après, doivent être pris en compte. L'article de Mohanty et Imboden, spécialement dédié au cas des résonateurs NEMS, constitue un bon point de départ sur le sujet.

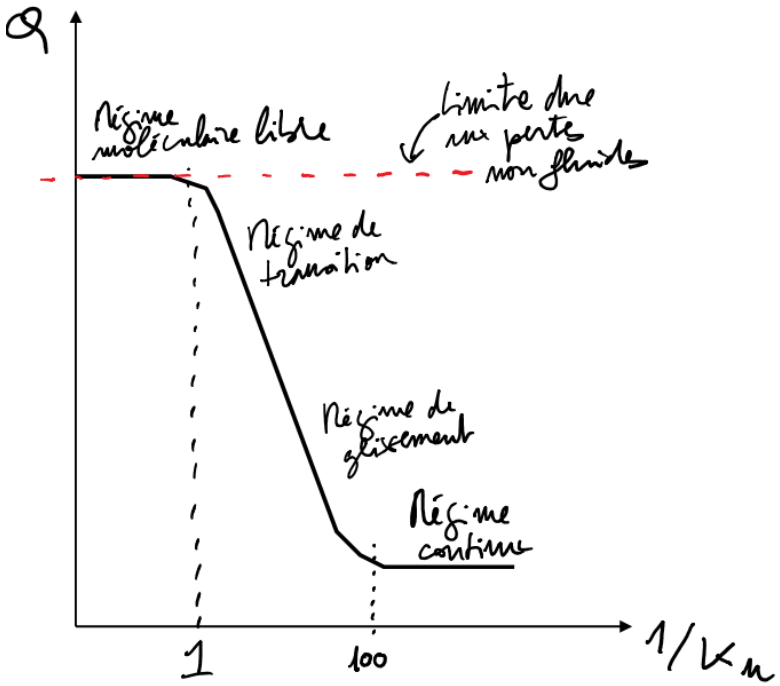


Fig. 4.34 – Comportement qualitatif du facteur de qualité d'une structure MEMS en fonction du nombre de Knudsen. Pour un Knudsen suffisamment élevé, Q n'est plus fixé par la dissipation visqueuse.

4.4.3 Pertes thermoélastiques

Lorsqu'un résonateur mécanique se déforme, certaines de ses parties se dilatent, alors que d'autres se contractent (voir par exemple la Fig. 4.3). Ces déformations locales sont autant de sources de chaleur

$$q(x,y,z,t) \propto \frac{\partial}{\partial t}\left(Tr(\boldsymbol{\epsilon})\right) \qquad (4.77)$$

qui diffusent au sein du résonateur, selon l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T + q \quad (4.78)$$

Les déformations locales résultent donc en un champ de température non uniforme, en phase ou en quadrature avec les déformations, selon que celles-ci sont rapides ou non par rapport à la constante de temps caractéristique des échanges de chaleur (proportionnelle à D^2/χ où D est une dimension caractéristique du résonateur, typiquement sa largeur vibrante h dans le cas d'un résonateur en flexion).

En vertu de (4.6), ces variations de températures donnent naissance à un champ de contraintes thermiques s'opposant au mouvement du résonateur, en phase ou en quadrature avec celui-ci. On retrouve qualitativement le même comportement que dans les exemples précédents : à basse fréquence, un fonctionnement de type « amortisseur », à haute fréquence, un fonctionnement de « ressort dynamique ». Ce dernier type de comportement est évidemment plus favorable lorsqu'on vise un facteur de qualité important.

Une approche ingénieuse pour limiter la dissipation thermoélastique consiste à réduire la diffusivité thermique effective du matériau en définissant des fentes dans le résonateur qui freinent les échanges de chaleur entre ses parties chaudes et froides (Fig. 4.35).

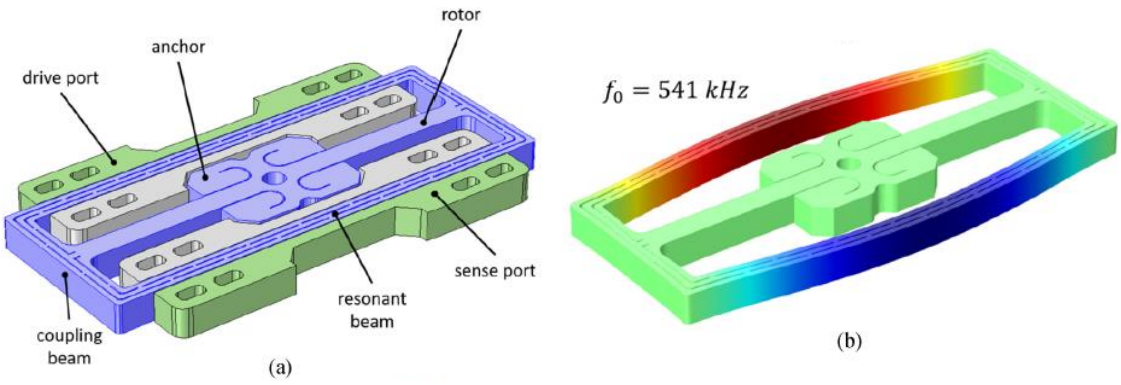


Fig. 2. Computer-aided-design view of the designed resonator. (a) Modal shape-function of the flexural mode of the resonator under study. (b) Drive and sense ports have been hidden for the sake of clarity. The contour of the displacement field is shown in colour.

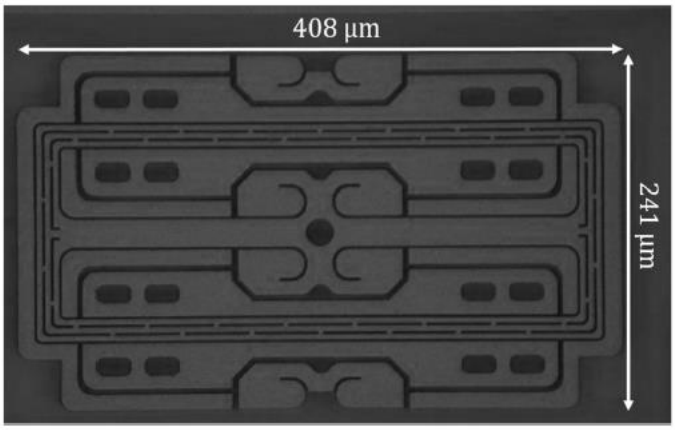


Fig. 3. SEM image of the designed resonator. The actuated slotted beams are 351 μm long and 15 μm wide.

Fig. 4.35 – Base de temps MEMS, travaux de PoliMi et ST Microelectronics. Principe de fonctionnement (a), mode de vibration utilisé (b) et vue SEM (c). Le résonateur est fendu sur toute sa longueur pour limiter les pertes thermoélastiques (images tirées de DOI 10.1109/TIE.2019.2938465). On peut distinguer le même type de motif sur le résonateur SiTime de la Fig. 4.14.

4.4.4 Pertes d'encastrements

Lorsque les pertes fluidiques peuvent être ignorées, le rayonnement acoustique aux encastrements des résonateurs est généralement une cause importante de dissipation. Ces pertes d'encastrement dépendent de l'adaptation d'impédance acoustique entre le mode d'oscillation du résonateur et ce qui trouve de « l'autre côté » du ou des points d'ancrage, i.e. le support du résonateur. L'énergie sortant du résonateur peut être rayonnée et perdue dans le support, au détriment du facteur de qualité du résonateur, ou bien réfléchie et confinée dans le résonateur.

On peut aboutir à une expression analytique du coefficient de dissipation en faisant l'hypothèse d'une géométrie simpliste pour le support (demi-espace infini, etc., cf. article de Hao), auquel on suppose que le résonateur est couplé faiblement. Ce type de modèle aboutit à la conclusion générale que pour limiter la dissipation dans l'ancrage, le résonateur doit présenter un facteur d'aspect (rapport longueur sur épaisseur vibrante) important. En d'autres mots, plus la

longueur d'onde d'oscillation est grande par rapport à la dimension caractéristique du point d'ancrage, moins le résonateur dissipe d'énergie à l'encastrement.

Plusieurs approches existent pour limiter ce phénomène, comme par exemple l'utilisation de réflecteurs acoustiques au point d'ancrage (Fig. 4.36), celle de résonateurs doubles oscillant en opposition de phase de sorte que la force totale vue par le support soit nulle (principe du diapason, auquel les résonateurs des Fig. 4.13 et 4.35 sont apparentés), ou plus généralement celle de résonateurs ancrés à leurs points nodaux.

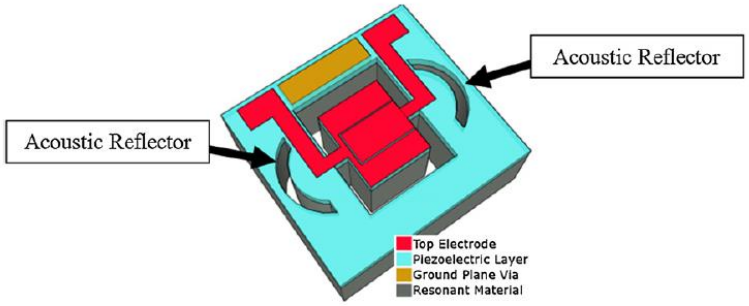


Figure 1. 3D model of a thin-film piezoelectric-on-silicon (TPoS) resonator with acoustic reflectors.

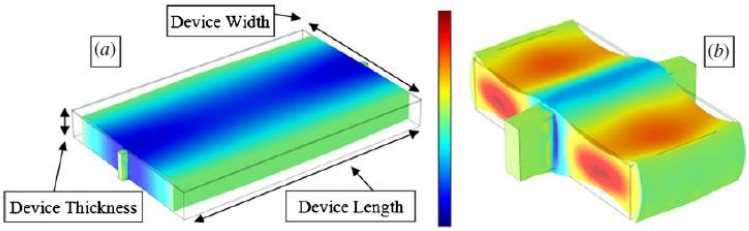


Figure 2. First (*a*) and third harmonic (*b*) mode shapes for a lateral-mode resonator. The color in the pictures denotes changes in strain along the axis of movement (width). Blue signifies compressive strain while red denotes tensile strain.

Fig. 4.36 – Utilisation de « réflecteurs acoustiques » permettant de confiner l'énergie au résonateur (piézoélectrique). Vue 3D du résonateur (en haut) et modes étudiés (en bas). Images tirées de DOI 10.1088/0960-1317/21/8/085021)

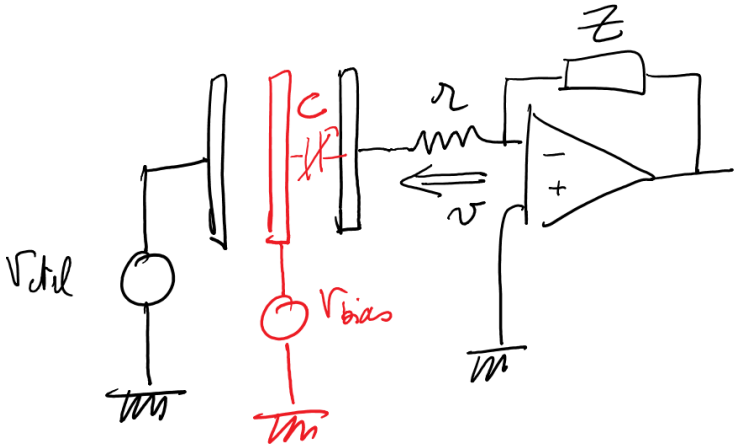


Fig. 4.37 – Modélisation de la conductivité finie d'un résonateur par une résistance parasite r.

4.4.5 Pertes électriques

Les pertes ohmiques peuvent également être un facteur de dissipation notable dans les résonateurs MEMS. Celles-ci peuvent découler non seulement de la conductivité finie de la structure MEMS, mais également des imperfections de l'électronique associée au résonateur, comme le gain fini d'un ampli-op.

Par exemple, à la Fig. 4.37, on a repris le schéma de la Fig. 4.26, en y ajoutant une petite résistance r entre le résonateur et l'entrée du circuit, représentant la conductivité finie du résonateur et des interconnexions avec l'électronique. En conséquence, la tension aux bornes de la capacité variable C n'est plus égale à V_{bias} mais à $V_{bias} - v$, où $v \ll V_{bias}$. En négligeant le ramollissement électrostatique, la force s'exerçant sur le résonateur vérifie

$$F_{elec} \propto (V_{bias} - v)^2 - (V_{bias} - V_{ctrl})^2 \approx 2V_{bias}V_{ctrl} - 2V_{bias}v \qquad (4.79)$$

La force totale est donc la somme d'un terme de « drive » et d'un terme ohmique dû à la résistance r. On montre aisément que

$$v \approx r \times \frac{\partial C}{\partial X} V_{bias} \times \dot{X} \quad (4.80)$$

de sorte que le terme ohmique de la force électrostatique se comporte comme un frottement visqueux, dont le coefficient de dissipation est proportionnel à V_{bias}^2.

Le même type de comportement peut être imputé aux imperfections de l'AFE. Par exemple, si on tient compte du gain fini A de l'ampli du montage à transimpédance de la Fig. 4.38, on montre que

$$v = V_- = -\frac{V_{out}}{A} \approx \frac{Z}{A} \times \frac{\partial C}{\partial X} V_{bias} \times \dot{X} \qquad (4.81)$$

ou encore

$$v + R_f C_f \dot{v} \approx \frac{R_f}{A} \times \frac{\partial C}{\partial X} V_{bias} \times \dot{X} \, (4.82)$$

Ainsi, on a un comportement visqueux en dessous de la fréquence de coupure du montage, un comportement de ressort dynamique au-dessus.

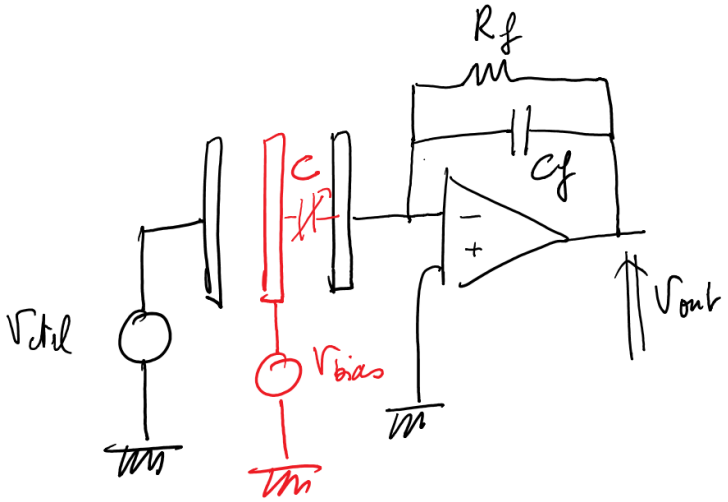


Fig. 4.38 – Montage à transimpédance. Les pertes ohmiques dans R_f se répercutent sur le facteur de qualité du résonateur du fait du gain fini de l'ampli-op.

4.4.6 Autres pertes

Lorsqu'un phénomène de dissipation est minimisé, c'est un autre qui prend le relais et devient prépondérant. Ainsi, de l'énergie peut-elle être dissipée du fait de la rugosité de la surface du résonateur (pertes « surfaciques », d'autant plus marquées que les dimensions caractéristiques diminuent et que le rapport surface / volume augmente), du fait d'irrégularités de la structure cristalline (pertes « volumiques », d'autant plus marquées que le réseau cristallin a des défauts), du fait de phénomènes quantiques (interactions phonon-phonon ou « effet Akhiezer »).

Remarques

1 – Une figure de mérite couramment employée pour comparer différents résonateurs est le produit $Q \times f$, i.e. le produit entre le facteur de qualité du résonateur et sa fréquence de résonance. Ce produit $Q \times f$ est naturellement majoré par le rapport entre la rigidité intrinsèque du matériau et sa dissipation intrinsèque, i.e.

$$Q \times f \leq \frac{1}{2\pi} \times \left(\frac{K}{B}\right)_{max} \quad (4.83)$$

Pour le silicium (monocristallin), on trouve un produit $Q \times f$ maximum de l'ordre de $3 \times 10^{13} Hz$, limité par l'effet Akhiezer. Les résonateurs flexuraux MEMS typiques ont des produits $Q \times f$ bien inférieurs à cette valeur limite. Ceci s'explique par la prépondérance des phénomènes de perte décrits plus haut.

2 – Comme souligné précédemment, hormis dans le cas de géométries simples de résonateurs, il est difficile de prévoir le coefficient de dissipation d'un résonateur MEMS de manière précise à l'aide de seules approches analytiques. Le recours à des modèles numériques des phénomènes de dissipation peut évidemment être utile pour adapter les paramètres des modèles analytiques à des géométries plus complexes.

3 – Une approche semi-empirique des phénomènes d'amortissement consiste à utiliser le modèle de Rayleigh (ou le modèle de Caughey, qui en est une généralisation). Cette approche consiste à postuler que la dissipation a des causes structurelles/intrinsèques, d'une part, et inertielles/extrinsèques, d'autre part, ce qu'on traduit par la relation

$$B_i = \alpha K_i + \beta M_i \quad (4.84)$$

où les K_i, B_i et M_i sont respectivement les coefficients de raideur, de dissipation et de masse du $i^{ème}$ mode de la structure (cf. annexe D), et α et β sont les coefficients de Rayleigh (communs à tous les modes donc). On détermine ces coefficients de manière empirique en mesurant les fréquences de résonance et facteurs de qualité des différents modes et en « fittant » au mieux les coefficients α et β à ces mesures. Ceci n'a effectivement de sens que si on soupçonne que ce sont les mêmes phénomènes de dissipation qui sont à l'œuvre pour les modes considérés. On peut supposer que ces coefficients varient peu si la géométrie qu'on étudie est proche de la géométrie sur laquelle on a effectué les mesures, et donc réutiliser les coefficients estimés empiriquement dans les modèles utilisés pour la conception. Cette démarche relève de l'acte de foi si elle n'est pas éclairée par une bonne connaissance de la physique des dispositifs étudiés, mais elle peut s'avérer très utile.

4.5 Références

Le calcul de suspensions MEMS classiques est abordé en détail dans la thèse de Gary Fedder qui constitue un ouvrage de référence en la matière. Elle est disponible ici :

[1]G. Fedder, « Simulation of microelectromechanical systems », ECE Berkeley, 1994 https://users.ece.cmu.edu/~fedder/phd_thesis/

Ces structures sont mises en regard d'applications du type gyroscope dans le livre d'Andrei Shkel, cité au chapitre précédent. Un formulaire de calcul de poutres « complexes » est également disponible à l'annexe C de ce polycopié.

Concernant les méthodes de transduction à l'échelle MEMS, des ouvrages assez anciens, mais utiles, sont

[2] G. Kovacs, « Micromachined transducers sourcebook », McGraw Hill, 1998

[3] M.H. Bao, « Micromechanical transducers: pressure sensors, accelerometers, and gyroscopes », Elsevier, 2000

De bons points de départ pour appréhender les phénomènes de dissipation affectant MEMS et NEMS sont

[4] M. Imboden, P. Mohanty, « Dissipation in nanoelectromechanical systems », Physics Reports, vol. 534, 2014

[5] M.H. Bao, H. Yang, « Squeeze film air damping in MEMS », Sensors and Actuators A, vol. 136, 2007

[6] A. Frangi, et al., « Near vacuum gas damping in MEMS: simplified modeling », vol. 26, 2017

[7] R. Lifschitz, M.L. Roukes, « Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems », Physical Review B, vol. 61, 2000

[8] Z. Hao, A. Erbil, and F. Ayazi, « An analytical model for support loss in micromachined beam resonators with in-plane flexural vibrations », Sensors and Actuators A, vol. 109, 2003

Il suffira d'ouvrir un exemplaire récent du Journal of Microelectromechanical Systems (IEEE/ASME), du Sensors Journal (IEEE), de Sensors and Actuators (Elsevier) ou du Journal of Micromechanics and Microengineering (IOP) pour découvrir les « tendances » et l'état de l'art du domaine, qui évoluent au gré de progrès réalisés en microfabrication. Actuellement, les équipes de T. Kenny (Stanford U.) et G. Langfelder (PoliMi) produisent des travaux nombreux, souvent originaux et dignes d'intérêt, sur les MEMS, en particuliers sur les résonateurs.

5 Conception et modélisation des MEMS

5.1 Introduction

Dans l'industrie, la conception d'un système électronique intégré suit généralement une approche descendante (« top-down »), du plus haut niveau, celui des spécifications systèmes, au plus bas niveau : dessin des masques, fabrication, assemblage et packaging (Fig. 5.1). Dans le cas d'un capteur, une difficulté majeure réside dans la nécessité de faire dialoguer la conception électronique et la conception du transducteur (mécanique / multiphysique), qui font appel à des outils, à des champs de connaissance et à des procédés technologiques différents. Du fait de la dichotomie entre électronique et transduction, le flot de conception est généralement séparé en deux, la co-simulation des deux parties ne pouvant être réalisée qu'à un niveau élevé.

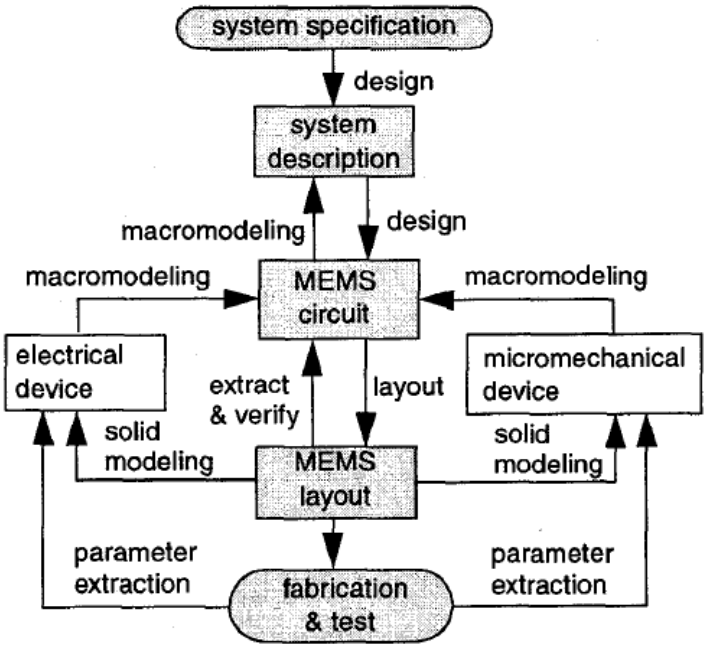


Fig. 5.1 – Conception « structurée » d'un capteur intégré MEMS. Image tirée des travaux de Gary Fedder (10.1109/MEMSYS.1999.746742).

Dans le flot de conception *idéalisé* représenté à la Fig. 5.1, figurent, au niveau le plus élevé, les spécifications du capteur. A partir de ces spécifications, l'*architecture* du système est décrite, sous forme de sous-blocs réalisant chacun une *fonction* (transduction, amplification, filtrage, modulation, conversion A/N, etc.). Les entrées et sorties de chacun des blocs étant définies et leurs performances spécifiées, les blocs peuvent être conçus au niveau *circuit*, où sont opérés des choix de structures, et au niveau des *composants* de ces structures. Une fois l'ensemble des éléments actifs (transistors) ou passifs (résistances, capacités, masses, suspensions) dimensionné, les *masques* peuvent être dessinés avant d'être envoyés en fabrication. A mesure que l'on descend dans le flot de conception, la description du système est de plus en plus fine, et les outils mis en œuvre, en particulier les modèles utilisés, sont de plus en plus précis et complexes. Bien que globalement descendante, la conception comprend également des phases localement ascendantes (« bottom-up »), permettant le recalage des outils et modèles utilisés aux niveaux supérieurs, une réévaluation des choix de conception, voire des spécifications.

Pour ce qui est de la partie électronique, on peut généralement se conformer à cette approche très hiérarchisée de la conception, les effets de la disposition relative des composants du circuit et leur dessin géométrique (le « layout » des masques) ne remettant que marginalement en cause les choix opérés aux niveaux supérieurs. En revanche, pour la partie transduction, la

distinction entre le niveau composant et le niveau masque est plus floue, tant les propriétés des composants MEMS sont dépendantes de leur géométrie précise.

5.2 Flot de conception MEMS

De manière un peu plus concrète, on peut formaliser un flot de conception descendant pour la partie transducteur de la manière suivante :

(1) Différentes géométries de transducteurs permettant d'implémenter la fonction à réaliser sont sélectionnées.

(2) Un modèle haut-niveau d'ordre « raisonnable » est assemblé pour chaque géométrie, à partir de la description de celle-ci.

(3) Une procédure d'optimisation sous contraintes des paramètres du modèle est lancée.

(4) Des simulations bas-niveau sont réalisées, pour valider les résultats et les hypothèses sous-jacentes du modèle haut-niveau optimisé.

5.2.1 Sélection des géométries

L'étape (1), la sélection des géométries, consiste non seulement à choisir des géométrie type, mais également les manières alternatives de détecter le mouvement de la structure (transduction capacitive, résistive, résonante, etc.) ou de l'actionner si nécessaire. Il s'agit de choix absolument cruciaux, puisqu'ils fixent l'espace dans lequel la conception/l'optimisation du transducteur va se dérouler. Il est cependant difficile d'en parler autrement que de manière très générale.

5.2.2 Modélisation haut-niveau

L'étape (2), la modélisation haut-niveau, peut être abordée avec différents degrés de finesse. Une approche analytique n'est généralement possible qu'en faisant des hypothèses cinématiques fortes sur le déplacement de la structure (par exemple : « la structure ne se déforme que selon la dimension X », ou « seul le premier mode de vibration de la structure est excité »). Elle nécessite également de simplifier la physique du transducteur dans tous les domaines (« masses » parfaitement rigides, hypothèses d'Euler-Bernoulli, condensateurs plans, etc.). Elle permet cependant d'aboutir à des modèles d'une complexité tout à fait « raisonnable » (1 ou 2 degrés de liberté) faciles à simuler et à optimiser, et présentant parfois un degré de fidélité satisfaisant tout en restant « intelligibles ». Cette approche présente aussi l'intérêt que les modèles sont assez simples à « recaler » sur des résultats de simulations bas-niveau, voire de caractérisations de dispositifs réels. L'alternative à cette approche consiste à utiliser un logiciel comme MEMS+ : celui-ci permet d'assembler un modèle haut-niveau à partir de « primitives » (poutre rectiligne, poutre courbe, serpentin, masse rigide, etc.) pré-définies, chacune étant décrite sans hypothèse cinématique particulière – mais avec une physique simplifiée. Les modèles résultants comptent typiquement de 10 à 1000 degrés de liberté, en fonction de la complexité de la structure conçue, la limite inférieure étant « raisonnable », la limite supérieure ne l'étant pas, du moins pour ce qui est de la co-simulation avec la partie électronique. Ces modèles sont évidemment de meilleure fidélité que ceux obtenus « à la main », avec une approche analytique, au prix d'une complexité accrue. Leur co-simulation avec l'électronique exige typiquement une étape de « réduction d'ordre ».

Des éléments supplémentaires pour l'obtention de modèles analytiques haut-niveau de structures suspendues sont donnés à l'annexe C. L'approche analytique de l'analyse modale est décrite à l'annexe D.

5.2.3 Optimisation

La phase (3), l'optimisation, consiste à déterminer les meilleurs paramètres du modèle haut-niveau vis-à-vis des spécifications (en termes de sensibilité, de bruit, d'erreur systématique, etc.). Certains paramètres peuvent être continus (longueur et largeur d'une poutre, par exemple, diamètre des perforations), tandis que d'autres peuvent prendre des valeurs discrètes (nombre de doigts d'un peigne). L'optimisation doit également tenir compte des contraintes de conception. Celles-ci sont notamment liées au processus de fabrication (typiquement taille minimale des gaps, largeur minimale et longueur maximale des poutres, voir annexe H), à des spécifications particulières (taille maximale du dispositif, gamme de température de fonctionnement, étendue de mesure), à des hypothèses physiques sous-jacentes au modèle haut-niveau (doigts et masses rigides, condensateurs plans, poutre, etc.). Hormis pour certaines géométries très simples, il n'existe pas de solution analytique à ce type de problème et l'optimisation doit se faire de manière numérique (quand elle ne se fait pas de manière heuristique ou empirique). L'optimisation fait alors appel de manière répétée à la simulation du modèle haut-niveau conçu à l'étape (2). En conséquence, plus celui-ci est d'ordre faible, moins l'optimisation est complexe, d'un point de vue calculatoire (mais les résultats de celles-ci risquent d'être moins pertinents qu'avec un modèle de complexité accrue). Une démarche « multi-grille », où l'on optimise d'abord un modèle haut-niveau analytique, qu'on utilise comme point de départ d'une optimisation d'un modèle plus fin, permet d'obtenir un bon compromis entre complexité et fidélité.

Si l'optimisation aboutit (i.e. s'il existe un jeu de paramètres optimaux pour lequel les objectifs de conception sont atteints), un modèle bas-niveau de la géométrie est assemblé : on passe alors à l'étape (4). Si l'optimisation n'aboutit pour aucune des géométries testées, il faudra envisager de relancer l'étape (3) avec un jeu de spécifications relâchées, quitte à renforcer celles sur la partie électronique, ou bien de sélectionner des géométries alternatives.

5.2.4 Modélisation bas-niveau

La phase (4), la modélisation bas-niveau, permet de vérifier la pertinence de la démarche d'optimisation. Les phénomènes se produisant à l'intérieur de la structure (« intrinsèques » à la structure) sont modélisés à l'aide de la méthode des éléments finis (FEM) appliquée aux équations fondamentales qui les gouvernent : c'est notamment le cas de l'élasticité et de la thermoélasticité, régis par les équations de Navier et de Fourier. Les phénomènes (« extrinsèques ») d'interaction entre la structure et son environnement sont déterminés à l'aide de la méthode des éléments frontière (BEM), appliquée à l'équation de Poisson pour le calcul des forces électrostatiques (cf. annexe E) ou à l'équation de Navier-Stokes ou de Boltzmann pour celui des frottements fluides (à faible ou fort Knudsen). Ce type de modèle « haute-fidélité » peut compter de 10^5 à 10^7 degrés de liberté, couplés de manière non-linéaire ; la simulation en est donc particulièrement complexe et coûteuse. C'est pour cela qu'il n'y est fait appel que de manière parcimonieuse et que l'optimisation du dispositif, qui repose sur des simulations répétées pour différents jeux de paramètres, se fait sur la base d'un modèle haut-niveau.

Si la phase (4) permet de valider les choix de conception effectués à l'aide du modèle haut-niveau, on génère un « modèle d'ordre réduit » du transducteur, pour la co-simulation avec la partie électronique. Ce modèle d'ordre réduit peut simplement consister en une version « recalée » du modèle haut-niveau de la phase (2), avec des paramètres réajustés pour tenir compte des résultats des simulations bas-niveau. Alternativement, il existe de nombreuses méthodes numériques permettant de réduire, de manière semi-automatique, la complexité d'un système de grandes dimensions. Ces méthodes consistent typiquement en la projection du modèle bas-niveau sur la base de quelques modes propres de la structure « convenablement choisis » et l'approximation des non-linéarités sur cette même base. Celles-ci sont décrites de manière un peu plus précises à l'annexe D.

Enfin, si la phase (4) n'est pas concluante, le modèle haut-niveau de la phase (2) peut être raffiné et la procédure d'optimisation (3) relancée sur ce nouveau modèle. Alternativement, les

contraintes de la procédure d'optimisation peuvent être réévaluées, notamment celles sous-jacentes aux hypothèses physiques du modèle haut-niveau.

5.3 Co-simulation

Différents niveaux de représentation (figure).

5.3.1 Modéles électriques équivalents

Butterworth-Van Dyke. A compléter.

5.3.2 Langages de description matérielle

VHDL-AMS, Verilog-A. A compléter.

5.4 Références

Les livres

[1] S. Senturia, « Microsystem design », Springer, 2001

[2] T. Bechtold et al., « System-level modeling of MEMS », Wiley, 2013

proposent des aperçus intéressants de la conception des MEMS, le premier de manière approfondie mais un peu datée, le second de manière un peu plus superficielle mais davantage au goût du jour.

La génération plus ou moins automatisée de modèles d'ordre raisonnable constitue un domaine de recherche en soi. Les outils présentés dans ce polycopié (y compris en annexe) sont suffisants pour parvenir à des modèles haut-niveau analytiques pour nombre de structures MEMS de géométrie simple. On pourra se référer à

[3] V. Zega et al., « Numerical modelling of non-linearities in MEMS resonators », Journal of Microelectromechanical Systems, vol. *, 202* (to be published)

pour une approche récente du problème (outre l'approche intéressante, cet article propose une bibliographie extensive du sujet).

Enfin, on pourra parcourir avec intérêt la documentation technique des logiciels CoventorWare et MEMS+, de Coventor, qui constituent des standards industriels du domaine.

6 Autour des capteurs

6.1 Composants

- Alimentation
- Références de tension
- Horloges
- Autres capteurs (T, multi-axe,etc.)
- CAN et CNA
- Numérique

6.2 Traitements

- Détection synchrone / capacités commutées.
- Test, calibration et compensation
- Asservissement (au niveau masse / accéléro / gyro, au niveau du pont)
- Gestion d'énergie
- Fusion

6.3 Environnement

- Package

A compléter.

7 Capteurs résonants FM et récupérateurs d'énergie

A compléter.

8 Annexes

A – DSP, variance et variance d'Allan

La densité spectrale de puissance (DSP) fournit une représentation fréquentielle de la stabilité d'un signal $v(t)$. Elle est égale, à un facteur multiplicatif près, au module au carré de la transformée de Fourier de $v(t)$ et, sous certaines hypothèses, à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation. Dans ce polycopié, on la note $S_v(f)$ où f est la fréquence ($f > 0$, il s'agit donc d'une DSP « one-sided »). Elle s'exprime en « unités de v » au carré par Hertz.

Lorsque $v(t)$ est stationnaire, sa variance σ_v^2 est alors donnée par

$$\sigma_v^2 = \int_0^\infty S_v(f)df \qquad \text{(A1)}$$

Dans le cas où $v(t)$ n'est pas stationnaire, par exemple lorsque

$$S_v(f) = h_\alpha \times f^\alpha \qquad \text{(A2)}$$

avec $\alpha = -1$ (bruit de flicker) ou $\alpha = -2$ (bruit brownien), cette intégrale n'est plus définie. D'autres estimateurs de la variance peuvent alors être utilisés pour caractériser temporellement l'instabilité de $v(t)$. C'est le cas de la variance d'Allan, ou variance à deux échantillons. Cette grandeur renseigne sur l'écart entre des moyennages de $v(t)$ sur des fenêtres successives de durée τ. La définition de la variance d'Allan est

$$\sigma_v^2(\tau) = \frac{1}{2}\langle(\bar{v}_{k+1} - \bar{v}_k)^2\rangle \qquad \text{(A3)}$$

où l'opérateur $\langle \quad \rangle$ désigne une moyenne sur un temps infini et

$$\bar{v}_k = \frac{1}{\tau} \times \int_{t_k}^{t_{k+1}} v_k(t)dt \qquad \text{(A4)}$$

et $t_k = k\tau$ (cf. Fig. A1).

Fig. A1 - Notations pour la variance d'Allan

La variance d'Allan renseigne sur les fluctuations à court ou à long terme de $v(t)$ selon que τ est petit ou grand, respectivement. Si $v(t)$ est la sortie d'un capteur, le minimum de la variance d'Allan indique la durée sur laquelle il faut moyenner $v(t)$ pour avoir la mesure la plus précise, i.e. dont la valeur change le moins deux échantillons successifs. La variance d'Allan $\sigma_v^2(\tau)$ est reliée au spectre $S_v(f)$ par la formule

$$\sigma_v^2(\tau) = 2\int_0^\infty \frac{\sin^4(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2} S_v(f)df \qquad \text{(A5)}$$

Pour plus de détails, on pourra se référer aux sites de David Allan (http://www.allanstime.com/AllanVariance/), de Enrico Rubiola (rubiola.org) et à l'article :

A. Makdissi, F. Vernotte, E. De Clercq, « Stability variances: a filter approach. », ARXIV : 0904.2660, 2009

B - De la loi de Hooke à Euler-Bernoulli

B.1 Obtention de l'équation d'Euler-Bernoulli

Par « flexion » d'une poutre, on entend une déformation où la courbure de la poutre change sous l'effet d'un effort extérieur. On peut décrire l'effet de cette courbure par un gradient de déformation de part et d'autre d'un axe ne s'allongeant pas, dit axe neutre, comme illustré à la Fig. B1.

Fig. B1 – Déformation de flexion et hypothèse d'Euler-Bernoulli

L'hypothèse d'Euler-Bernoulli, largement vérifiée pour les petites déformations des poutres minces, consiste à dire que les sections droites de la poutre restent perpendiculaires à l'axe lors de la déformation. Sous cette hypothèse, l'étude de la déformation de la poutre se réduit à la détermination de la forme $w(x,t)$ prise par l'axe, dont on peut déduire les champs de contrainte et de déformation dans l'ensemble de la poutre.

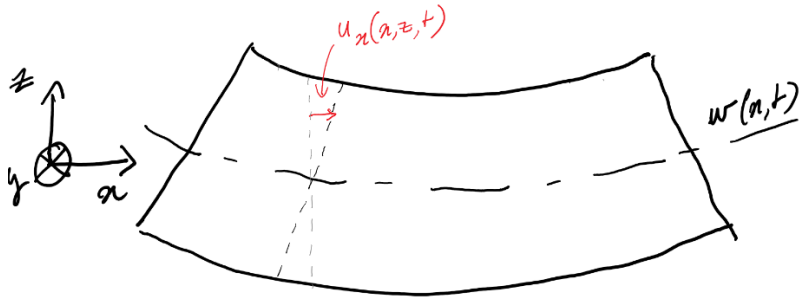


Fig. B2 – Champ de déplacement dans la poutre

L'hypothèse d'Euler-Bernoulli implique que le champ de déplacement selon x peut s'écrire (Fig. B2)

$$u_x \approx -z\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \text{(B1)}$$

dont on déduit l'allongement et la contrainte selon x

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \text{(B2)}$$

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} = -Ez\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \text{(B3)}$$

en vertu de la loi de Hooke et en supposant que la composante σ_{xx} est très grande par rapport aux autres.

Fig. B3 – Notations pour les forces et moments internes.

On s'intéresse aux forces et moments résultant des contraintes sur chaque section droite de la poutre : effort normal N, effort tranchant V et moment fléchissant M (Fig. B3). Ce dernier s'écrit

$$M = \iint z\sigma_{xx} dydz = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{(B4)}$$

où $I = \iint z^2 dydz$ est le moment d'inertie de la poutre. On peut à présent écrire l'équilibre des moments selon y, des forces selon x et la relation fondamentale de la dynamique selon z (i.e. on ignore l'inertie selon x et l'inertie de rotation selon y). D'après la Fig. B3, on a

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V + N\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \text{(B5)}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad \text{(B6)}$$

$$f + \frac{\partial V}{\partial x} = \rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad \text{(B7)}$$

où S est la section de la poutre. On élimine aisément les forces et moments internes de (B4-B7) pour arriver à l'équation d'Euler-Bernoulli

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,t) \qquad \text{(B8)}$$

B.2 Condition aux limites

On voit que l'absence d'un couple à une extrémité de la poutre se traduit bien, de par (B4), en une dérivée seconde de w nulle. L'équation (B5) implique que la condition « force nulle à une extrémité » s'écrit en toute rigueur

$$-EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + N\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{(B9)}$$

ce qui se réduit à la nullité de la dérivée troisième de w lorsque l'effort normal est nul ou que la pente est nulle à l'extrémité considérée.

Deux autres conditions aux limites sont utiles : le cas où l'extrémité de la poutre est retenue par (i) un ressort (ii) un ressort de torsion. Le premier cas correspond à un effort tranchant à l'extrémité vérifiant

$$V = K \times w \qquad \text{(B10)}$$

En utilisant (B5), cette condition aux limites s'écrit donc

$$-EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + N\frac{\partial w}{\partial x} = K \times w \Leftrightarrow w = -\frac{1}{K} \times \left(EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - N\frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad \text{(B11)}$$

On vérifie que, lorsque la raideur du ressort tend vers l'infini, la condition aux limites sur l'effort tranchant « dégénère » en condition aux limites sur le déplacement *w* qui doit alors être nul.

Le second cas est similaire, il correspond à un moment à l'extrémité tel que

$$M = -C \times \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{(B12)}$$

ce qui, de par (B4) devient

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{EI}{C}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \text{(B13)}$$

Lorsque la raideur de torsion tend vers l'infini, on aboutit à la condition aux limites « dégénérée » de nullité de la pente.

Un encastrement idéal est donc équivalent à un ressort associé à un ressort de torsion, tous deux de raideur infinie.

C – De la poutre simple à la suspension complexe

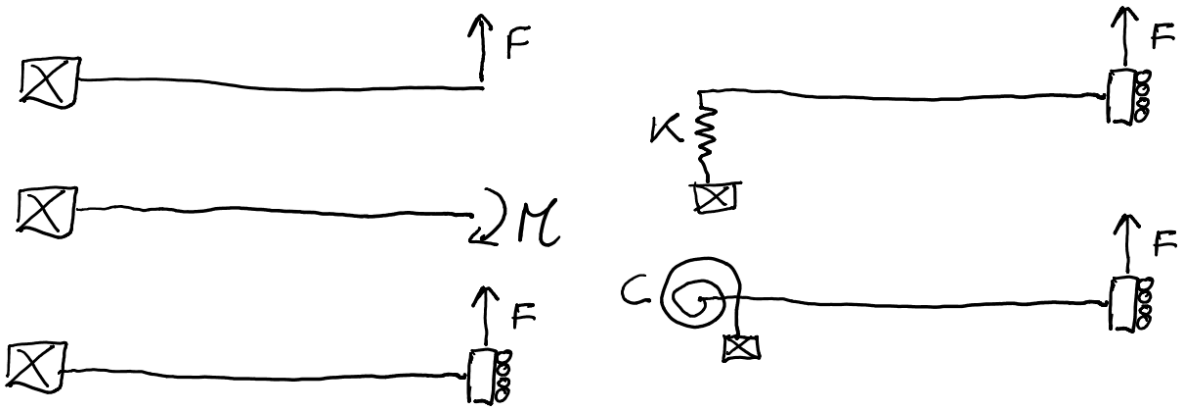


Fig. C1 – Configurations de poutres en flexion vues dans cette partie

On s'intéresse ici au cas de poutres en flexion ou torsion pure, en l'absence d'effort normal, chargées à leurs extrémités avec des conditions aux limites « non triviales ». Nombre de suspensions peuvent être modélisées comme des combinaisons de ces différents cas.

C.1Poutre en torsion – Fixée en $x = 0$, couple en $x = L$

Ce cas se modélise comme un ressort de torsion, de raideur

$$C_{torsion} = \frac{GJ}{L} \quad \text{(C1)}$$

où $G = E/2(1+\nu)$ est le module de torsion du matériau, et J le moment de torsion de la poutre autour de l'axe x. Pour une poutre de section rectangulaire, on a

$$J = Dd^3 \times \left(\frac{1}{3} - 0.21\frac{d}{D}\left(1 - \frac{1}{12}\frac{d^4}{D^4}\right)\right) \quad \text{(C2)}$$

où $D = \max(b,h)$ est la plus grande des dimensions latérales et $d = \min(b,h)$ la plus petite.

C.2 Poutre en flexion – Fixée en $x = 0$, force en $x = L$

Sous l'effet d'une force F, le déplacement à l'extrémité vaut

$$w(L) = \frac{L^3}{3EI} \times F \qquad \text{(C3)}$$

et la pente à l'extrémité

$$\theta(L) = \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=L} = \frac{L^2}{2EI} \times F \qquad \text{(C4)}$$

C.3 Poutre en flexion– Fixée en $x = 0$, couple en $x = L$

Sous l'effet d'un couple M, le déplacement à l'extrémité vaut

$$w(L) = \frac{L^2}{2EI} \times M \qquad \text{(C5)}$$

et la pente à l'extrémité

$$\theta(L) = \frac{L}{EI} \times M \qquad \text{(C6)}$$

C.4 Poutre en flexion – Fixée en $x = 0$, glissante + force en $x = L$

Sous l'effet d'une force F, le déplacement à l'extrémité vaut

$$w(L) = \frac{L^3}{12EI} \times F \qquad \text{(C7)}$$

et la pente à l'extrémité

$$\theta(L) = 0 \qquad \text{(C8)}$$

On retrouve ce résultat à partir des deux chargements précédents. Une poutre fixée-glissante soumise à une force F peut effectivement être vue comme un cantilever soumis à une force F et à un moment $M = -FL/2$ ce qui garantit (C8), par combinaison linéaire de (C4) et (C6).

C.5 Poutre en flexion – Ressort en $x = 0$, glissante + force en $x = L$

D'après (B11), la condition aux limites en $x = 0$ s'écrit

$$K \times w(0) - EI \left.\frac{d^3w}{dx^3}\right|_{x=0} = 0 \qquad \text{(C9-a)}$$

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0 \qquad \text{(C9-b)}$$

Sous l'effet d'une force F, le déplacement à l'extrémité vaut :

$$w(L) = \frac{L^3}{12EI} \times F \times \left(1 + \frac{12EI/L^3}{K}\right) \qquad \text{(C10)}$$

En développant cette expression (écrite sous cette forme pour mettre en valeur le rapport des raideurs), on met en lumière le fait qu'on peut considérer ce cas comme deux ressorts simples mis en série.

C.6 Poutre en flexion – Ressort de torsion en $x = 0$, glissante + force en $x = L$

D'après (B12), la condition aux limites en $x = 0$ s'écrit

$$w(0) = 0 \qquad \text{(C11-a)}$$

$$C \times \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} - EI \left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 \qquad \text{(C11-b)}$$

Sous l'effet d'une force F, le déplacement à l'extrémité vaut

$$w(L) = \frac{L^3}{12EI} \times F \times \left(1 + 3\frac{\frac{EI/L}{C}}{1+\frac{EI/L}{C}}\right) \qquad \text{(C12)}$$

Sous cette forme, on reconnaît dans le membre de droite le rapport entre la raideur angulaire C et celle d'un cantilever avec un couple à son extrémité (C6). On retrouve le cas fixé-glissant (C7) si C est grande, et le cas cantilever (C3) si C est faible.

C.7 Modèle général d'une poutre sollicitée à ses extrémités

Les hypothèses cinématiques sous-jacentes aux calculs qui précèdent (flexion selon une direction unique, par exemple) ne permettent pas d'appréhender parfaitement le comportement de suspensions de géométrie complexe. Armé d'un peu de courage, il est cependant possible

d'établir un modèle général d'une poutre d'Euler-Bernoulli dont chaque extrémité aurait 6 degrés de libertés (3 translations, 3 rotations) et serait sujette à 6 efforts (forces et moments selon les 3 dimensions) sous la forme

$$\begin{bmatrix} F_x(0) \\ F_y(0) \\ F_z(0) \\ M_x(0) \\ M_y(0) \\ M_z(0) \\ F_x(L) \\ F_y(L) \\ F_z(L) \\ M_x(L) \\ M_y(L) \\ M_z(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(0) \\ u_y(0) \\ u_z(0) \\ \theta_x(0) \\ \theta_y(0) \\ \theta_z(0) \\ u_x(L) \\ u_y(L) \\ u_z(L) \\ \theta_x(L) \\ \theta_y(L) \\ \theta_z(L) \end{bmatrix}$$

cette relation étant valable pour une poutre droite de longueur L, section S, moment de torsion J_x et moments d'inertie I_y et I_z (et en négligeant l'effet de l'effort normal sur la raideur en flexion). On peut alors déterminer les caractéristiques statiques d'une suspension constituée de segments droits en appliquant ce modèle à chacune de ses sous-parties. On gagne ainsi en généricité ce que l'on perd en intelligibilité.

C'est l'approche utilisée dans le logiciel MEMS+, de Coventor, qui permet de « construire » des transducteurs MEMS assemblés comme des Lego, élément par élément (voir Fig. C3 la librairie d'éléments disponibles), et ainsi de générer des modèles numériques de faibles dimensions, offrant un excellent compromis entre complexité calculatoire et précision. De ce point de vue, MEMS+ constitue une forme de « chaînon manquant » entre (i) des modèles simplifiés à 1 ou 2 degrés de liberté, essentiels pour une approche intuitive du dimensionnement et du comportement d'un transducteur, ainsi que pour la co-simulation transducteur-électronique et (ii) des modèles éléments finis reposant sur l'élasticité 3D.

On a représenté à la Fig. C4 un exemple de structure modélisé avec MEMS+ : il s'agit d'un résonateur – poutre centrale + « H » pour actionnement et détection capacitifs – associé à des microleviers actionnés de manière électrostatique – ceux-ci permettent de régler l'effort normal dans le résonateur, et donc sa fréquence de résonance.

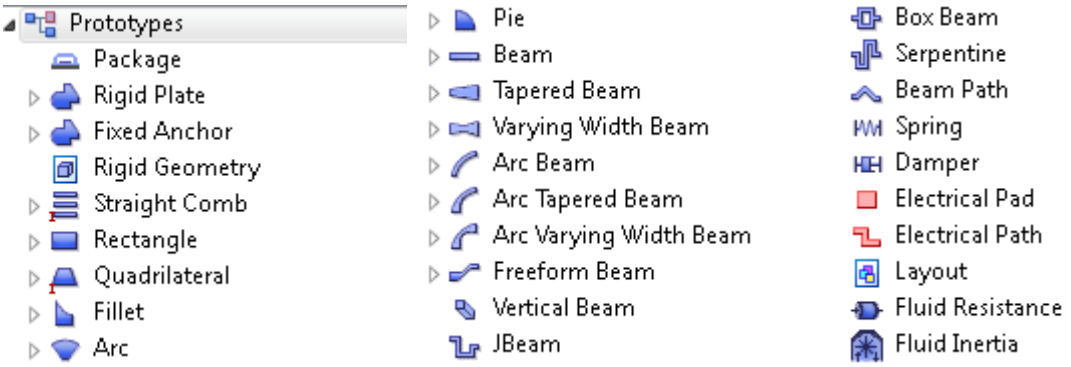


Fig. C3 – Librairie d'éléments disponibles dans MEMS+. Plusieurs modèles physiques sous-jacents sont disponibles (Bernoulli, Timoshenko, etc.)

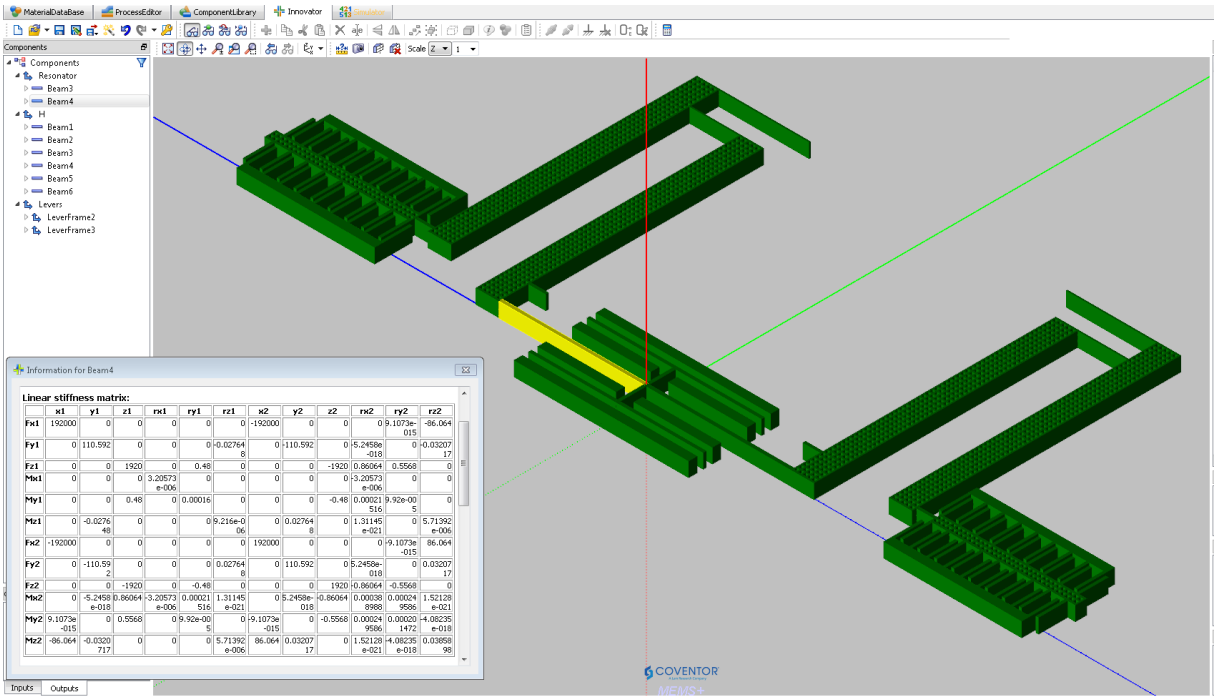


Fig. C4 – Structure modélisée avec MEMS+ et matrice de raideur associée à un des éléments (poutre d'Euler-Bernoulli). Le modèle comporte 55 éléments (seulement 16 éléments déformables de type poutre) et 239 degrés de liberté (mécaniques, mais aussi fluidiques et électrostatiques).

D - Modes propres et réduction d'ordre de modèle

D.1 Méthode de Galerkin

On cherche à déterminer une approximation de la solution d'une équation différentielle

$$\Lambda w = f + CL \quad \text{(D1)}$$

où Λ est un opérateur différentiel linéaire (spatial et temporel), f un terme de source/force (dépendant éventuellement de w) et CL désigne des conditions aux limites.

La méthode de Galerkin,– plus précisément de Bubnov-Galerkin – est une méthode qui permet d'y parvenir. Elle consiste à

(ii) approximer w sous la forme d'une combinaison linéaire $\widehat{w}$ de fonctions « convenablement choisies » formant une base de l'espace des solutions de (D1).

(iii) déterminer les coefficients de cette combinaison linéaire par projection sur cette même base de fonctions. Ceci garantit que le résidu $w - \widehat{w}$ est orthogonal à la base choisie.

La méthode de Galerkin, combinée au choix des « modes propres » comme fonctions de base, n'est jamais qu'une forme élaborée d'analyse de Fourier. Elle aboutit au résultat « spectatulaire » que les coefficients modaux peuvent être déterminés indépendamment les uns des autres lorsque f ne dépend pas de w de manière non-linéaire. Elle simplifie le problème initial en le décomposant en n sous-problèmes plus simples. Dans de nombreux cas d'études, n peut être choisi petit, voire égal à 1.

Pour un ingénieur qui sait se satisfaire d'approximations, les méthodes de Bubnov-Galerkin présentent également l'attrait de fournir des résultats qui sont extrêmement robustes au choix exact des fonctions de base. On en présente ci-après ses déclinaisons dans le cas d'une poutre en flexion, pour différents cas de chargement : cette étude a un intérêt pratique fort (l'élément sensible de nombre de capteurs MEMS résonants n'est souvent qu'une simple poutre), tout en étant pédagogique, se traitant de manière quasi-analytique. Elle peut aussi être mise en perspective avec l'approche numérique de la réduction d'ordre de modèle, abordée à la section D.3.

D.2 Analyse modale d'un résonateur simple

On s'intéresse dans cette section à une poutre de longueur L, largeur b, hauteur h, moment d'inertie $I = bh^3/12$, section S, constituée d'un matériau de module d'Young E et de densité ρ. Lorsqu'elle est soumise à une densité linéique de force $f(x,t)$, elle prend une forme $w(x,t)$ vérifiant :

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,t) + CL \qquad \text{(D2)}$$

où CL désigne 4 conditions aux limites qu'on suppose « triviales » (4.8), i.e. pas de force ou moment concentrés aux extrémités.

D.2.1 – Modes propres d'une poutre en flexion pure

Les modes propres $w_k(x)$ d'une poutre en flexion pure peuvent être définis comme les solutions non triviales de

$$EI\frac{d^4 w_k}{dx^4} - \rho S\omega_k^2 w_k = 0 + CL \quad \text{(D3)}$$

où $\omega_k > 0$ est la pulsation propre associée au mode. On peut démontrer qu'ils forment une base complète des solutions de (D2) et que cette base est orthogonale au sens du produit scalaire

$$\langle u.v\rangle = \frac{1}{L} \times \int_0^L u(x) \times v(x)dx \qquad \text{(D4)}$$

qui représente la valeur moyenne du produit de u et v sur $[0, L]$. Comme les $w_k(x)$ vérifient les conditions aux limites de (D2) et que celles-ci sont triviales, il est clair que toute combinaison linéaire de ces modes

$$\widehat{w}(x,t) = \sum_{k=1\ldots n} a_k(t) w_k(x) \qquad \text{(D5)}$$

vérifie également ces conditions aux limites.

D'après (D3), les $w_k(x)$ se mettent sous la forme générale

$$w_k(x) = A_k \sin(\gamma_k \frac{x}{L}) + B_k \cos(\gamma_k \frac{x}{L}) + C_k \sinh(\gamma_k \frac{x}{L}) + D_k \cosh(\gamma_k \frac{x}{L}) \qquad \text{(D6)}$$

où on a défini γ_k tel que

$$\omega_k^2 = \frac{EI}{\rho S L^4} \gamma_k^4 \qquad \text{(D7)}$$

Notons que, d'après nos définitions, les modes w_k sont sans dimension, de même que les coefficients γ_k ; en conséquence, les composantes modales a_k sont homogènes à des déplacements. Les coefficients (sans dimension) A_k, B_k, C_k et D_k sont solutions d'un système linéaire homogène, qui dépend des conditions aux limites. Par exemple, pour une poutre fixée à ses deux extrémités

$$w_k(0) = 0 \Leftrightarrow B_k + D_k = 0 \qquad \text{(D8-a)}$$

$$w_k'(0) = 0 \Leftrightarrow A_k + C_k = 0 \qquad \text{(D8-b)}$$

$$w_k(L) = 0 \Leftrightarrow A_k \sin(\gamma_k) + B_k \cos(\gamma_k) + C_k \sinh(\gamma_k) + D_k \cosh(\gamma_k) = 0 \qquad \text{(D8-c)}$$

$$w_k'(L) = 0 \Leftrightarrow A_k \cos(\gamma_k) - B_k \sin(\gamma_k) + C_k \cosh(\gamma_k) + D_k \sinh(\gamma_k) = 0 \qquad \text{(D8-d)}$$

Ce système a une solution nulle, sauf pour γ_k vérifiant

$$1 - \cos(\gamma_k)\cosh(\gamma_k) = 0 \qquad \text{(D9)}$$

On trouve $\gamma_1 \approx 4.730$, et $\gamma_{k+1} \approx \gamma_k + \pi$.

Pour une poutre cantilever

$$w_k(0) = 0 \Leftrightarrow B_k + D_k = 0 \qquad \text{(D10-a)}$$

$$w_k'(0) = 0 \Leftrightarrow A_k + C_k = 0 \qquad \text{(D10-b)}$$

$$w_k''(L) = 0 \Leftrightarrow -A_k \sin(\gamma_k) - B_k \cos(\gamma_k) + C_k \sinh(\gamma_k) + D_k \cosh(\gamma_k) = 0 \qquad \text{(D10-c)}$$

$$w_k^{(3)}(L) = 0 \Leftrightarrow -A_k \cos(\gamma_k) + B_k \sin(\gamma_k) + C_k \cosh(\gamma_k) + D_k \sinh(\gamma_k) = 0 \qquad \text{(D10-d)}$$

Ce système a une solution nulle, sauf pour γ_k vérifiant

$$1 + \cos(\gamma_k)\cosh(\gamma_k) = 0 \qquad \text{(D11)}$$

On trouve $\gamma_1 \approx 1.875$, et $\gamma_{k+1} \approx \gamma_k + \pi$.

Quelles que soient les conditions aux limites, on peut choisir A_k de manière arbitraire, et les coefficients B_k, C_k et D_k en conséquence. Dans la suite, on supposera avoir choisi A_k de sorte que $\max|w_k| = 1$. Les fonctions $w_k(x)$ correspondant à ce choix sont représentées à la Fig. D1, et les valeurs des coefficients γ_k, $\langle w_k \rangle$ et $\langle w_k^2 \rangle$ sont donnés au tableau D1.

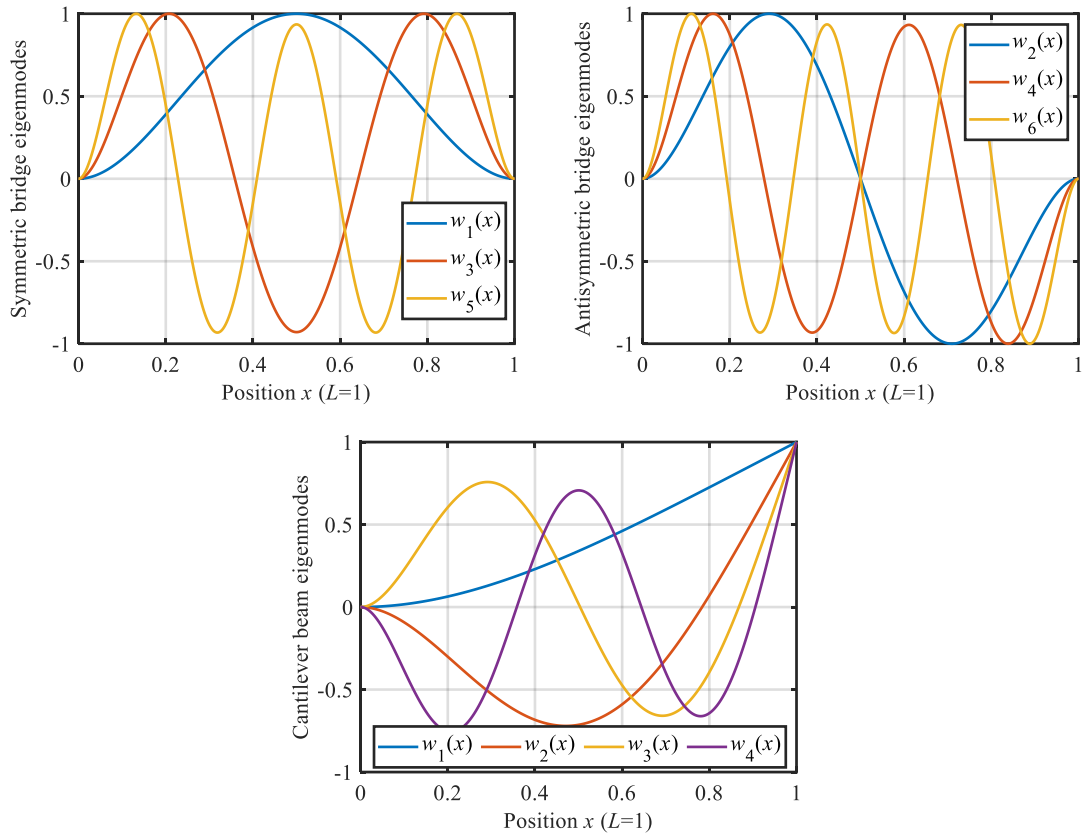


Fig. D1 – Modes propres d'un pont en flexion pure (en haut à gauche, les trois premiers modes symétriques ; en haut à droite, les trois premiers modes antisymmétriques) et d'un cantilever en flexion pure (en bas).

		$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
Pont	γ_k	4.730	7.853	11.00	14.14	17.28
	$\langle w_k \rangle$	0.523	0	0.241	0	0.153
	$\langle w_k^2 \rangle$	0.397	0.439	0.437	0.437	0.437
Cantilever	γ_k	1.875	4.694	7.855	11.00	14.14
	$\langle w_k \rangle$	0.392	-0.217	0.127	-0.091	0.071
	$\langle w_k^2 \rangle$	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25

Tableau D1 – Caractéristiques des modes des ponts et cantilevers.

On peut chercher une approximation de la solution de (D2) comme une combinaison linéaire de modes propres (D5). En remplaçant w par $\hat{w}$ dans (D2), on obtient

$$\sum_{k=1\ldots n} EIa_k \frac{d^4 w_k}{dx^4} + \rho S w_k \ddot{a}_k = f(x,t)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1\ldots n} \left(\omega_k^2 a_k + \ddot{a}_k\right) \times w_k = \frac{1}{\rho S} \times f(x,t) \quad \text{(D12)}$$

En projetant, au sens de (D4), cette équation sur la base formée par les n modes propres on obtient n équations

$$\omega_k^2 a_k + \ddot{a}_k = \frac{1}{\langle w_k^2 \rangle} \times \frac{1}{\rho S} \times f_k(t) \quad \text{(D13)}$$

où $f_k(t) = \langle f . w_k \rangle$.

Les n équations gouvernant les a_k sont indépendantes (dans la mesure où f ne dépend pas de w) et mettent en évidence un comportement de type « masse-ressort » pour chacun des modes. On désigne généralement par « masse modale » le terme

$$M_k = \langle w_k^2 \rangle \times \rho S \, L \qquad \text{(D14)}$$

et par « raideur modale »

$$K_k = \omega_k^2 \times M_k = \gamma_k^4 \times \langle w_k^2 \rangle \times \frac{EI}{L^3} \qquad \text{(D15)}$$

Plus un mode est d'ordre k élevé, plus sa fréquence propre et sa raideur modale sont élevées. Pour un cantilever, par exemple, le deuxième mode propre est environ 40 fois plus raide que le premier. Pour un pont, le deuxième mode est environ 8 fois plus raide que le premier, et le troisième 30 fois. Effectivement, d'après la Fig. D1, on conçoit bien qu'il faut déployer une force beaucoup plus importante pour donner à une poutre la forme d'un mode d'ordre élevé. Notons également que, par construction, la masse de chaque mode est inférieure à la masse du système réel.

En pratique, les modes pertinents pour représenter la solution de (D2) sont les modes

(i) les plus souples.

(ii) dont la fréquence propre est supérieure ou égale à la fréquence caractéristique de $f(t)$.

(iii) pour lesquels la force modale $F_k = f_k L$ est significative.

Dans les sections qui suivent, on illustre l'utilisation de l'analyse modale pour modéliser une poutre sujette à différents chargements $f(x,t)$.

D.2.2 – Chargement uniforme

Le problème aux limites s'écrit

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t) + CL \quad \text{(D16)}$$

En projetant cette équation, au sens de (D4), sur la base formée par les modes propres, on obtient pour tout k

$$K_k a_k + M_k \ddot{a}_k = F_k(t) = f(t) L \times \langle w_k \rangle \qquad \text{(D17)}$$

où $\langle w_k \rangle$ est la valeur moyenne du mode sur $[0, L]$. Pour un cantilever, $\langle w_k \rangle$ décroît de manière monotone avec k. Pour un pont, les $\langle w_{2k} \rangle$ sont tous nuls, et les $\langle w_{2k+1} \rangle$ décroissent de manière monotone. Dans le cas d'un chargement uniforme, la force modale F_k décroît donc avec k.

D.2.3 – Frottement visqueux et pertes thermoélastiques

La poutre soumise à un frottement visqueux et au même chargement uniforme que précédemment vérifie

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t) + CL \quad \text{(D18)}$$

où c est homogène à une viscosité. En projetant cette équation sur la base formée par les modes propres on obtient, pour tout k

$$K_k a_k + B_k \dot{a}_k + M_k \ddot{a}_k = F_k(t) \qquad \text{(D19)}$$

où

$$B_k = \langle w_k^2 \rangle \times cL \qquad \text{(D20)}$$

est un coefficient de dissipation modal.

Si on prend également en compte les pertes thermoélastiques, on a, en dessous de la fréquence de coupure thermoélastique (cf. section 4.4 et annexe H),

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4}(w + \tau \frac{\partial w}{\partial t}) + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t) + CL \qquad \text{(D21)}$$

Par projection sur les modes propres, on obtient, pour tout k

$$K_k a_k + (K_k \tau + B_k)\dot{a}_k + M_k \ddot{a}_k = F_k(t) \qquad \text{(D22)}$$

Cette forme est assez intéressante, puisqu'elle permet de donner une interprétation plus physique à l'amortissement de Rayleigh, présenté à la fin de la section 4.4 : elle met en évidence le fait que le coefficient α est caractéristique des pertes intrinsèques (comme le TED) du résonateur, alors que le coefficient β est caractéristique des pertes extrinsèques (comme les pertes fluidiques).

D.2.4 – Influence de l'effort normal

Un pont sujet à un effort normal N est régi par

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t) + CL \qquad \text{(D23)}$$

Notons que, malgré la forme un peu plus complexe de (D23) par rapport à (D2), il est relativement simple de trouver une base de modes propres v_k associés à des pulsations propres ϖ_k vérifiant

$$EI \frac{d^4 v_k}{dx^4} - N \frac{d^2 v_k}{dx^2} - \rho S \varpi_k^2 v_k = 0 + CL \qquad \text{(D24)}$$

et permettant ainsi de « diagonaliser » rigoureusement (D23), à supposer que N soit indépendant de w (ce qui exclut le cas d'un effort normal dû à un allongement de la poutre). Plutôt que d'adopter cette approche rigoureuse, on peut utiliser les modes de flexion pure $w_k(x)$ pour trouver une solution approchée de (D23) à l'aide de la méthode de Galerkin – comme souligné au début de cette partie, cette méthode est robuste au choix des fonctions de base. Par ailleurs, on peut vérifier a posteriori que ce choix donne des résultats quantitativement corrects.

La projection de (D23) sur la base des w_k donne

$$K_k a_k + \frac{N}{L} \times \sum_j R_{kj} a_j + M_k \ddot{a}_k = F_k(t) \qquad \text{(D25)}$$

où

$$R_{kj} = R_{jk} = L^2 \times \langle \frac{dw_k}{dx} . \frac{dw_j}{dx} \rangle \qquad \text{(D26)}$$

Les dérivées des $w_k(x)$ ne forment pas une base orthogonale : la matrice $\boldsymbol{R}$ n'est pas diagonale - comme on le voit ci-après dans le cas $n = 5$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 4.88 & 0 & 4.05 & 0 & 3.17 \\ 0 & 20.2 & 0 & 7.50 & 0 \\ 4.05 & 0 & 43.2 & 0 & 10.64 \\ 0 & 7.50 & 0 & 75.0 & 0 \\ 3.17 & 0 & 10.6 & 0 & 115 \end{bmatrix}$$

Les équations régissant les composantes modales ne sont donc plus indépendantes les unes des autres. En se restreignant à un unique mode, $k = 1$, on a

$$\left(K_1 + \frac{N}{L} R_{11}\right) a_1 + M_1 \ddot{a}_1 = F_1(t) \qquad \text{(D27)}$$

ce qui illustre bien l'influence de l'effort normal sur la raideur effective des ponts et leur fréquence de résonance. Les coefficients apparaissant dans (4.26) sont en fait obtenus à partir de (D27).

En revanche, toute diagonalisation devient impossible, quelle que soit la base de fonction choisie, dès lors que le système devient non-linéaire, par exemple lorsque l'effort normal reflète l'effet de l'allongement du pont, i.e.

$$N = \frac{ES}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \qquad \text{(D28)}$$

En remplaçant w par $\hat{w}$ dans (D28), on peut écrire

$$N \approx \frac{ES}{2L^2} \sum_i \sum_j R_{ij} a_i a_j \quad \text{(D29)}$$

et les équations régissant les composantes modales sont obtenues en remplaçant N dans (D25) par cette dernière expression. En se restreignant au premier mode propre, on parvient à

$$\left(K_1 + \frac{ES}{2L^3} R_{11}^2 a_1^2\right) a_1 + M_1 \ddot{a}_1 = F_1(t) \quad \text{(D30)}$$

Ceci met en évidence un effet de ressort durcissant (phénomène de Duffing).

D.2.5 – Force électrostatique

Si la poutre est séparée par un gap g d'une électrode plane de dimensions latérales $b, L \gg g$, elle est soumise à une densité de force électrostatique

$$f_{elec}(x,t) = \frac{\epsilon_0 b}{2} V^2 \times \frac{1}{\left(g - w(x,t)\right)^2} \qquad \text{(D31)}$$

où V est la tension entre la poutre et l'électrode. La projection de $f_{elec}(x,t)$ sur la base des modes propres aboutit à des forces modales

$$F_k = \frac{1}{2} V^2 \times \epsilon_0 b L \times \langle w_k . \frac{1}{(g-\hat{w})^2} \rangle = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial a_k} \quad \text{(D32)}$$

Il n'existe pas d'expression analytique simple de ces forces modales. L'approche la plus courante, adaptée lorsque w est petit par rapport au gap g, consiste à développer f_{elec} en série de Taylor. Dans le cas où on se restreint au premier mode de la poutre, on peut approximer F_1 par

$$\hat{F}_1 = \frac{\epsilon_0 b L}{2g^2} V^2 \times \langle w_1 \rangle \times \frac{1 + 0.017\tilde{a}_1}{(1-\tilde{a}_1)^{3/2}} \qquad \text{(D33)}$$

pour un pont, ou par

$$\hat{F}_1 = \frac{\epsilon_0 b L}{2g^2} V^2 \times \langle w_1 \rangle \times \left(\frac{1 + 0.783\tilde{a}_1}{1-\tilde{a}_1} + (0.531 + 0.114\tilde{a}_1)\log(1-\tilde{a}_1)\right) \quad \text{(D34)}$$

pour un cantilever, où $\tilde{a}_1 = a_1/g$ est le déplacement maximal de la poutre rapporté au gap. Ces expressions, obtenues de manière « semi-analytique » à partir du développement asymptotique de F_1, présentent l'intérêt d'être valables y compris lorsque $\tilde{a}_1 \to 1$. Elles mettent aussi en évidence le fait que, pour une amplitude $\tilde{a}_1$ donnée, les effets non-linéaires électrostatiques sont moins marqués pour les cantilevers que pour les ponts (et pour les ponts que pour les condensateurs plans).

Soulignons que, dans le cas général, les forces modales F_k dépendent de l'ensemble des composantes modales a_1, …, a_n, ce qui illustre à nouveau le fait que la non-linéarité est génératrice de couplage entre modes.

D.2.6 – Squeeze-film damping

On peut modéliser l'effet d'un film d'air de viscosité μ_{eff} coincé entre la poutre et l'électrode par une densité de force

$$f_{flu}(x,t) = -\mu_{eff}\frac{b^3}{(g-w(x,t))^3}\times\frac{\partial w}{\partial t} \qquad \text{(D35)}$$

Un nombre important d'hypothèses, qu'on supposera remplies, est nécessaire pour parvenir à cette expression (cf. annexe G). La projection de $f_{flu}(x,t)$ sur la base des modes propres aboutit à des forces modales

$$F_k = -\mu b^3 L\,\langle w_k.\frac{w_k}{(6\Lambda+g-\hat{w})(g-\hat{w})^2}\rangle\,\dot{a}_k \qquad \text{(D36)}$$

dans lesquelles on a explicité la dépendance de μ_{eff} à w et au libre parcours moyen Λ. Ainsi les forces modale s'écrivent $F_k = -B_k \times \dot{a}_k$ où les coefficients B_k dépendent de manière non triviale de l'ensemble des composantes modales (encore un couplage inter-modal).

Dans le cas où on peut se restreindre à l'étude du premier mode et où $\Lambda \ll g$, les approximations suivantes sont valables

$$\hat{F}_1 = -\frac{\mu b^3 L}{g^3}\times\langle w_1^2\rangle\times\frac{1+0.012\tilde{a}_1}{(1-\tilde{a}_1)^{5/2}} \text{(D37)}$$

pour un pont, et

$$\hat{F}_1 = -\frac{\mu b^3 L}{g^3}\times\langle w_1^2\rangle\times\left(\frac{1+0.381\tilde{a}_1}{(1-\tilde{a}_1)^2}+(0.165+0.091\tilde{a}_1)\log(1-\tilde{a}_1)\right) \quad \text{(D38)}$$

pour un cantilever.

D.3 Modèles numériques et analyse modale

Pour des géométries complexes de transducteur, l'obtention d'un modèle de faibles dimensions – dit « modèle d'ordre réduit » – n'est pas aussi immédiat que dans le cas d'une géométrie simple, où les modes propres peuvent s'exprimer de manière analytique. Une étape préalable à l'obtention du modèle d'ordre réduit est la construction d'un modèle numérique plus ou moins complexe de la structure et de son environnement physique.

Ici, nous supposons que ce modèle numérique (obtenu par exemple avec la méthode des éléments finis) se met sous la forme

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \qquad \text{(D39)}$$

où $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{N}}$ représente les N degrés de liberté de la structure (déplacements, rotations), $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{M}$ sont respectivement des matrices de raideur et de masse de taille $N \times N$, la matrice de dissipation est de type Rayleigh, i.e.

$$\boldsymbol{B} = \alpha\boldsymbol{K} + \beta\boldsymbol{M} \qquad \text{(D40)}$$

et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ regroupe l'effet des forces agissant sur la structure (linéaires ou non) et d'autres non-linéarités (allongements par exemple). Des formulations plus génériques peuvent évidemment être envisagées pour prendre en compte, par exemple, l'effet de phénomènes d'amortissement non-linéaires, etc.

La simulation directe de (D39), i.e. la détermination de la solution $\boldsymbol{x}(t)$ à des instants t_1, t_2 … est généralement mal aisée du fait de la dimension N du problème et de la non-linéarité ; à chaque pas de calcul t_i, un problème non-linéaire en dimension N doit être résolu, typiquement avec une méthode itérative comme la méthode de Newton-Raphson. A chacune des itérations de cette méthode, un système linéaire de dimension N doit être résolu et N fonctions non-linéaires doivent être évaluées (ce qui peut nécessiter de… résoudre un système non-linéaire). Ces dernières opérations peuvent être extrêmement coûteuses – en ressources et temps de calcul – à tel point que le passage à un modèle d'ordre réduit, de dimension $n \ll N$, est souvent souhaitable.

Une base engendrée à partir de n modes propres de la structure « convenablement choisis », $n \ll N$, est le choix le plus courant pour approximer la solution de (D39). Dans ce contexte numérique, un mode propre $\boldsymbol{u}_k$ associé à une pulsation propre ω_k vérifie

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_k - \omega_k^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0} \qquad \text{(D41)}$$

qui est le pendant discrétisé de (D3). Comme dans le cas continu, les modes propres forment une base orthogonale, qui peut être « normalisée » de manière arbitraire, par exemple de sorte que

$$\boldsymbol{u}_j^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_k = \delta_{kj} \qquad \text{(D42)}$$

En posant $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]$ la base de n modes considérés, on approxime la solution de (D39) sous la forme

$$\widehat{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{U}\boldsymbol{a}(t) \qquad \text{(D43)}$$

où $\boldsymbol{a}(t)$ est le vecteur des n composantes modales. En injectant $\widehat{\boldsymbol{x}}$ dans (D39), on obtient

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{U}\ddot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{a}, t)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{M}\boldsymbol{U}\boldsymbol{W}\boldsymbol{a} + (\alpha \boldsymbol{M}\boldsymbol{U}\boldsymbol{W} + \beta \boldsymbol{M}\boldsymbol{U})\dot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{U}\ddot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{a}, t) \qquad \text{(D44)}$$

où

$$\boldsymbol{W} = diag(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2) \qquad \text{(D45)}$$

est une matrice diagonale de taille $n \times n$. L'équation (D44) est le pendant discrétisé de (D12). Pour déterminer les équations régissant les n inconnues du problème, on utilise la méthode de Galerkin, i.e. on projette (D44) sur $\boldsymbol{U}$, ce qui donne

$$\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{U}\boldsymbol{W}\boldsymbol{a} + (\alpha \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{U}\boldsymbol{W} + \beta \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{U})\dot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{U}\ddot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{a}, t) \qquad \text{(D46)}$$

Comme, d'après (D42), $\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}_n$, cette dernière équation se ramène à

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{a} + (\alpha \boldsymbol{W} + \beta)\dot{\boldsymbol{a}} + \ddot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{a}, t) \qquad \text{(D47)}$$

où $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{a}, t) = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{a}, t)$. L'équation (D47) est l'équivalent discrétisé de (D13).

Le membre de gauche de (D47) a une forme sympathique, puisqu'il est diagonalisé. En l'absence de non-linéarité, les équations régissant les composantes modales pourraient donc être étudiées indépendamment. Toute la difficulté réside dans le membre de droite : bien que, formellement, $\boldsymbol{\phi}$ soit une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, son calcul demeure coûteux. En effet, son évaluation nécessite de passer dans $\mathbb{R}^N$ et d'y calculer les N composantes de $\boldsymbol{f}$. De la même manière, dans le cas de la poutre en flexion, les expressions (D32) et (D36) des forces modales nécessitaient l'évaluation (coûteuse) d'intégrales sur $[0, L]$.

Pour surmonter cette dernière difficulté – qui est en fait la seule véritable difficulté de ce type de procédure – il faut recourir, comme dans le cas continu, à des approximations des forces modales, basées sur des séries de Taylor, des développements asymptotiques ou toute autre méthode « d'apprentissage » adaptée à la forme exacte de la non-linéarité (électrostatique, fluidique, allongements, etc.). Cet apprentissage constitue une tâche plus ou moins complexe /

coûteuse selon la méthode employée et le domaine de validité recherché pour le modèle d'ordre réduit. Une fois cette tâche effectuée, le modèle d'ordre réduit est prêt à être utilisé.

E – Au-delà des condensateurs plans

E.1 Approche analytique

Les formules suivantes sont particulièrement utiles lorsque la validité de l'hypothèse des condensateurs plans

$$C = \epsilon_0 \frac{bL}{g} \qquad \text{(E1)}$$

- où g est le gap, et b et L sont les dimensions latérales des conducteurs – doit être remise en cause.

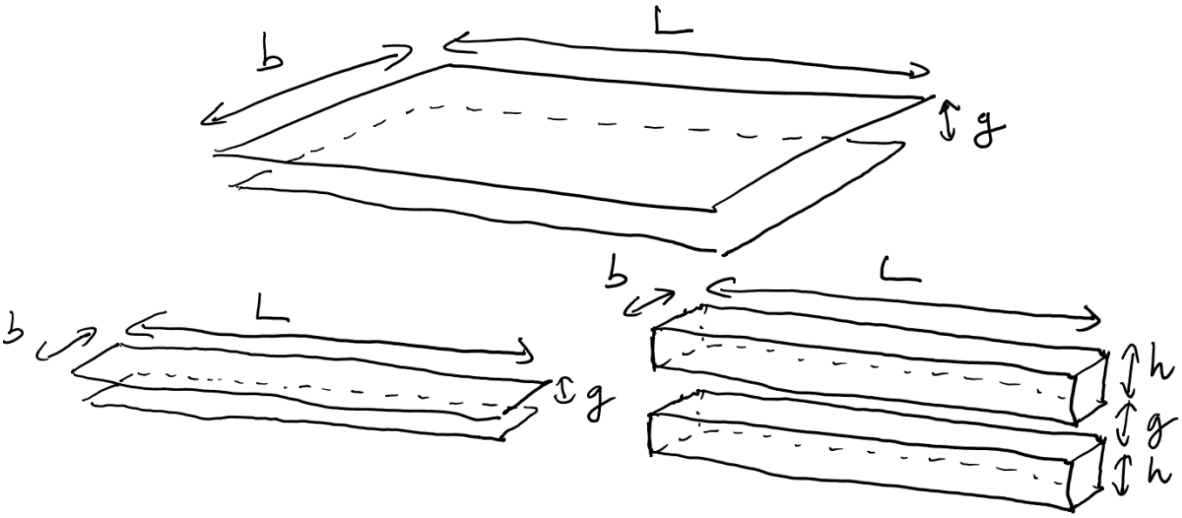


Fig. E1 – Géométrie de type condensateur plan (en haut), de type Palmer (en bas à gauche) et de type Leus-Elata (en bas à droite).

La plus connue est la formule de Palmer, qui est valable pour deux électrodes en vis-à-vis dont seule une des dimensions latérales L est supposée être très grande par rapport au gap, sans hypothèse particulière sur b. La capacité s'écrit

$$C = \epsilon_0 \frac{bL}{g} \times \left(1 + \frac{g}{\pi b} + \frac{g}{\pi b} \log\left(\frac{2\pi b}{g}\right)\right) \qquad \text{(E2)}$$

Cette formule a été adaptée par Elata et Leus pour tenir compte de la hauteur finie h des conducteurs en vis-à-vis

$$C = \epsilon_0 \frac{bL}{g} \times \left(1 + \frac{g}{\pi b} + \frac{g}{\pi b} \log\left(\frac{2\pi b}{g}\right) + \frac{g}{\pi b} \log\left(1 + \frac{2h}{g} + 2\sqrt{\frac{h}{g} + \frac{h^2}{g^2}}\right)\right) \qquad \text{(E3)}$$

[1] H. B. Palmer, « Capacitance of a parallel-plate capacitor by the Schwartz-Christoffel transformation », Trans. AIEE, vol. 56, 1927

[2] V. Leus, D. Elata, « Fringing field effect in electrostatic actuators », Technical Report ETR-2004-2, Technion, 2004

E.2 Méthode des éléments frontière en électrostatique

La méthode des éléments frontière (Boundary Element Method) est une méthode de résolution numérique de certains types d'équations aux dérivées partielles. Elle s'applique essentiellement à des problèmes homogènes (pas de terme de source), statiques (pas de dépendance au temps) et linéaires. Dans un contexte MEMS, elle est utilisée pour résoudre des problèmes électrostatiques ou fluidiques. Elle présente l'intérêt de ne nécessiter qu'un maillage des limites du problème (contrairement aux éléments finis, qui nécessitent aussi de mailler

l'intérieur du problème) et permet naturellement de tenir compte de conditions aux limites « à l'infini ».

Un exemple type d'utilisation est la résolution de l'équation de Laplace en 3 dimensions

$$\Delta V = 0 \text{ dans } \Omega, \qquad \text{(E4-a)}$$

$$V = \Phi_n \text{ sur } \partial\Omega_n, n = 1 \dots N \qquad \text{(E4-b)}$$

ce qui correspond à l'équation gouvernant le potentiel électrostatique créé dans le domaine Ω par N conducteurs de surface $\partial\Omega_n$ au potentiel Φ_n, en l'absence de densité de charge d'espace. Dans un contexte MEMS, la résolution de ce problème est nécessaire pour déterminer la valeur de la capacité entre plusieurs structures. La méthode des éléments frontière (qu'on peut formaliser comme une méthode de Petrov-Galerkin) permet de calculer numériquement la distribution de charge sur les différents conducteurs en ne nécessitant qu'un maillage des frontières $\partial\Omega_n$ du domaine.

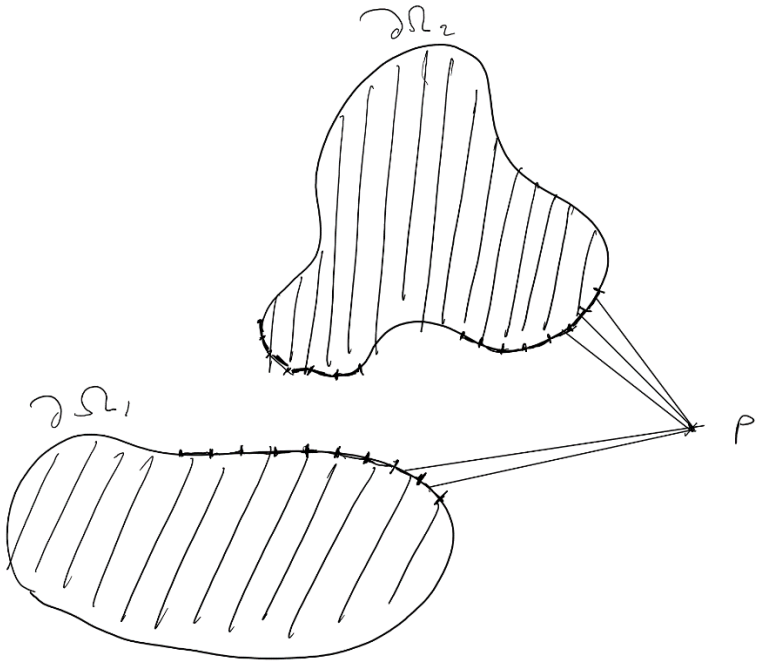


Fig. E2 – Principe de la BEM en électrostatique. Le potentiel en tout point P s'écrit comme la somme des contributions de tous les panneaux dont la densité de charge est inconnue. En prenant P au centre de chaque panneau, où le potentiel est connu, on peut assembler autant d'équations que nécessaire pour déterminer les densités de charge.

Pour parvenir de manière intuitive à la formulation numérique du problème, on peut procéder comme suit :

1) On discrétise les surfaces des N conducteurs $\partial\Omega_n$ en « petits panneaux » notés $\partial\Omega_n^j, j = 1 \dots J_n$ sur lesquels on suppose que la densité de charge σ_n^j est uniforme.

Le potentiel créé en un point P quelconque de Ω par le panneau $\partial\Omega_n^j$ s'écrit alors

$$V_n^j(P) = \frac{\sigma_n^j}{4\pi\epsilon_0} \times \iint_{\partial\Omega_n^j} \frac{dM_n^j}{r\left(P,M_n^j\right)} = \sigma_n^j \times I\left(P, \partial\Omega_n^j\right) \qquad \text{(E5)}$$

où $r\left(P, M_n^j\right)$ représente la distance entre le point P et le point courant M_n^j du panneau $\partial\Omega_n^j$. L'intégrale double $I\left(P, \partial\Omega_n^j\right)$ représente l'influence de la charge du panneau $\partial\Omega_n^j$ sur le potentiel au point P. Le potentiel total au point P créé par l'ensemble des panneaux s'écrit :

$$V(P) = \sum_{n=1\dots N} \sum_{j=1\dots J_n} \sigma_n^j \times I\left(P, \partial\Omega_n^j\right) \qquad \text{(E6)}$$

Le potentiel construit de cette manière vérifie forcément (E4-a), mais pas nécessairement (E4-b). Il s'agit alors de trouver les valeurs des densités σ_n^j faisant en sorte que les conditions aux limites soient vérifiées « au mieux ». Par exemple :

2) En utilisant (E6), on écrit la valeur du potentiel au centre C_m^k de chaque panneau $\partial\Omega_m^k$, où sait, par (E4-b), que le potentiel vaut Φ_m, i.e.

$$\forall m = 1 \dots N,\ \forall k = 1 \dots J_n$$

$$V\left(C_m^k\right) = \sum_{n=1\dots N} \sum_{j=1\dots J_n} \sigma_n^j \times I\left(C_m^k, \partial\Omega_n^j\right) = \Phi_m \qquad \text{(E7)}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système linéaire (E7) pour déterminer les densités de charge σ_n^j, les valeurs des tensions Φ_m étant connues, et les coefficients d'influence $I\left(C_m^k, \partial\Omega_n^j\right)$, qui ne dépendent que de la géométrie du problème, étant calculables aisément.

Il existe de nombreuses variantes de cette méthode, que ce soit dans les hypothèses (densité de charge non uniforme sur chaque panneau), dans le choix des points de collocation (ailleurs qu'au centre des panneaux), dans la manière d'approximer les coefficients d'influence et de résoudre numériquement le système (E7).

FASTCAP, un code éléments frontières de référence développé par le MIT, est disponible à cette adresse :

https://www.rle.mit.edu/cpg/research_codes.htm

Pour des géométries simples (par exemple en 2 dimensions), quelques lignes de Matlab sont suffisantes pour implémenter cette méthode et vérifier le domaine de validité des expressions (E1) (E2) ou (E3).

F - De Navier-Stokes au squeeze-film damping

+ analyse modale du squeeze-film

A compléter

G - De Fourier à l'amortissement thermoélastique

+ analyse modale du TED

A compléter

H - Procédés de fabrication

Description étape par étape du procédé SOIMUMPS et règles de conception

http://www.memscap.com/__data/assets/pdf_file/0019/1774/SOIMUMPs.dr.v8.0.pdf

Description étape par étape du procédé PiezoMUMPS et règles de conception

http://www.memscap.com/__data/assets/pdf_file/0020/5915/PiezoMUMPs.DR.1.3a.pdf

Vidéo de présentation du process THELMA de ST Microelectronics

https://www.youtube.com/watch?v=KFBOmLwJyP4

Présentation du process MIDIS (Teledyne DALSA)

https://www.teledynedalsa.com/download/10592c83-ffca-4ec7-8e5a-eff027d62a78/

Présentation générale des produits Bosch (très jolies images)

https://www.bosch.com/stories/bosch-mems-sensor-applications/

I - Résumé propriétés poly-Si / mono-Si / Air

A compléter

J – Travaux dirigés

K - Projets