



**HAL**  
open science

## La théorie des graphes

Jean-Claude Bermond, Emmanuel Lazard, Dominique Sotteau, Michel Syska

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond, Emmanuel Lazard, Dominique Sotteau, Michel Syska. La théorie des graphes. Le Courrier du CNRS, 1993, 80, pp.54-55. hal-03210214

**HAL Id: hal-03210214**

**<https://hal.science/hal-03210214>**

Submitted on 27 Apr 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LA THÉORIE DES GRAPHES

*Ces dernières années, la théorie des graphes est devenue indispensable en informatique, aussi bien pour modéliser un programme qu'un algorithme ou l'architecture d'un ordinateur. D'autres domaines de l'informatique ou d'autres disciplines font aussi appel à cette théorie.*

■ *Jean-Claude Bermond  
Emmanuel Lazard  
Dominique Sotteau  
Michel Syska*

**L**a théorie des graphes, et plus généralement les mathématiques discrètes, constituent un domaine des mathématiques qui, historiquement, s'est aussi développé au sein de disciplines diverses telles que la chimie (modélisation de structures), la biologie (génomique), les sciences sociales (modélisation des relations) ou en vue d'applica-

tions industrielles (problème du voyageur de commerce). Ces dernières années, la théorie des graphes a connu un regain d'intérêt pour ses capacités à modéliser de nombreux problèmes d'informatique. En effet, un graphe peut modéliser un programme, un algorithme, mais aussi l'architecture d'un ordinateur. Nous nous limiterons dans ce texte à l'exemple des réseaux d'interconnexion d'architecture parallèles.

Schématiquement, une machine parallèle est constituée d'un ensemble de processeurs élémentaires qui peuvent communiquer entre eux via un réseau.

*GRAPH THEORY - Interconnections networks between processors in parallel machines are given as an illustration of the significance of the theory of graphs in computer science. The networks used can be classical: complete networks, ring, hypercube, grid networks. But slightly more complex networks such as De Bruijn networks present substantial advantages and may take the fore in the future.*

Dans les machines à mémoire distribuée, un processeur est composé d'une unité centrale, d'une mémoire locale et d'un routeur qui permet de transmettre les messages sur des canaux. Le temps pris par les communications entre processeurs, qui ont lieu à travers le réseau d'interconnexion, est un paramètre important pour les performances des machines parallèles.

Le réseau d'interconnexion est modélisé par un graphe dont les sommets représentent les processeurs et les arêtes les canaux. La figure 1 montre des exemples de réseaux classiques :

- le graphe complet, dans lequel chaque processeur peut communiquer directement avec tous les autres processeurs ;
- l'anneau (ou cycle), très utilisé pour relier par exemple des stations de travail dans un réseau local ;
- l'hypercube, qui est le réseau utilisé dans la *Connection Machine* de Thinking Machine Corporation (CM2 à  $2^{16}$  processeurs), ou dans l'iPSC de chez Intel ;
- la grille 2 ou 3-dimensionnelle (éventuellement torique), à la base des nouvelles machines d'Intel (iWarp, Paragon), de Fujitsu (AP1000)...

Les briques de base actuellement utilisées pour construire ces réseaux sont des Transputers (Inmos, T800 ou futurs T9000), des processeurs Sparcs, des processeurs Motorola ou des i860 (Intel).

### Faciliter la communication entre processeurs

Le réseau d'interconnexion idéal doit permettre à de nombreux processeurs de communiquer de manière facile, efficace et sûre, tout en satisfaisant diverses contraintes :

- Un processeur ne peut être connecté qu'à un nombre limité d'autres processeurs, ce

qui se traduit dans le graphe par un degré maximum borné. Le modèle actuel du transputer a un degré de 4.

- Deux nœuds quelconques doivent pouvoir communiquer rapidement. Si les routeurs utilisent la technique dite *Store-and-Forward*, où un message est stocké avant d'être transmis au nœud suivant, le temps de communication entre deux nœuds est proportionnel à la distance entre les sommets correspondants du graphe (longueur d'un plus court chemin). On s'intéressera donc au diamètre du graphe, qui est la distance maximum entre toute paire de sommets du graphe.

- Les chemins sur lesquels les messages sont acheminés doivent pouvoir être déterminés de manière simple.

- Les liens doivent être courts, de manière à couvrir une grande bande passante (grand débit de communication).

- Le réseau doit être résistant aux pannes, c'est-à-dire que si certains processeurs ou liens sont défectueux, les messages doivent toujours être acheminés entre les processeurs restants. Cela se traduit sur le graphe par une grande connectivité. On dit qu'un graphe est  $k$ -connexe si le graphe obtenu en supprimant au plus  $k-1$  sommets reste connexe (c'est-à-dire qu'il existe encore un chemin entre toute paire de sommets). D'après le théorème de Menger, classique en théorie des graphes, "un graphe est  $k$ -connexe si et seulement s'il existe  $k$  chemins sommets-disjoints

Ces recherches, et plus généralement, l'étude des problèmes de communication dans les réseaux, sont menées en France dans le cadre du groupe RUMEUR du PRC GDR C3 qui rassemble des équipes d'Orsay (LRI), de Nice-Sophia Antipolis (I3S), de Lyon (LIP), de Grenoble (IMAG), de Bordeaux (LABRI), et de Rennes (IRISA). D'autres études sont en cours pour trouver comment plonger au mieux dans un graphe  $G$  de processus (ou un réseau de processeurs) dans un réseau  $H$  donné, de manière à ce que  $H$  simule efficacement toutes les communications spécifiées par  $G$ . Toutes font l'objet de programmes internationaux.

entre toute paire de sommets du graphe". Dans la pratique, on veut que ces chemins ne soient pas trop longs, ce qui a donné naissance à l'étude d'un paramètre nouveau qui mesure le diamètre maximum du graphe restant en cas de panne de sommets ou d'arêtes. L'existence de plusieurs chemins est utile, même en l'absence de panne, pour transmettre un long message en le découpant en paquets et en envoyant chaque paquet séparément sur chacun des chemins.

Il est impossible de satisfaire toutes ces contraintes en même temps, ce qui rend la conception du réseau difficile et nécessite de disposer d'une étude théorique poussée pour comparer les divers paramètres, et permettre de faire un choix en toute connaissance de cause.

Une des familles ayant un nombre maximum de sommets pour un diamètre et un degré fixé est celle des réseaux dits de de Bruijn (Fig. 2). A notre connaissance, il n'existe pas de machines parallèles commerciales les utilisant, mais certaines machines à base de Transputers sont interconnectées suivant ce modèle, et un décodeur employant ce type de réseau est utilisé dans le projet Galileo à Caltech (USA). De nombreuses études ont été faites pour déterminer leurs propriétés encore loin d'être complètement élucidées.

Jean-Claude Bermond, directeur de recherche au CNRS, directeur du Laboratoire d'informatique, signaux et systèmes I3S (URA 1376 CNRS).

Emmanuel Lazard, allocataire normalien BFR, Laboratoire de recherches en informatique LRI (URA 410 CNRS).

Dominique Sotteau, chargée de recherche au CNRS, LRI (URA 410 CNRS), Bât. 490, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex.

Michel Syska, allocataire MRT, Laboratoire I3S (URA 1376 CNRS), 250, avenue Albert Einstein, Sophia-Antipolis, 06560 Valbonne.

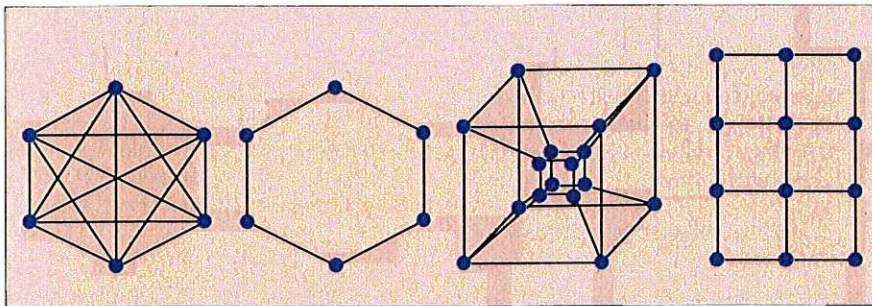


Fig. 1 - Un graphe complet, un anneau, un hypercube et une grille.

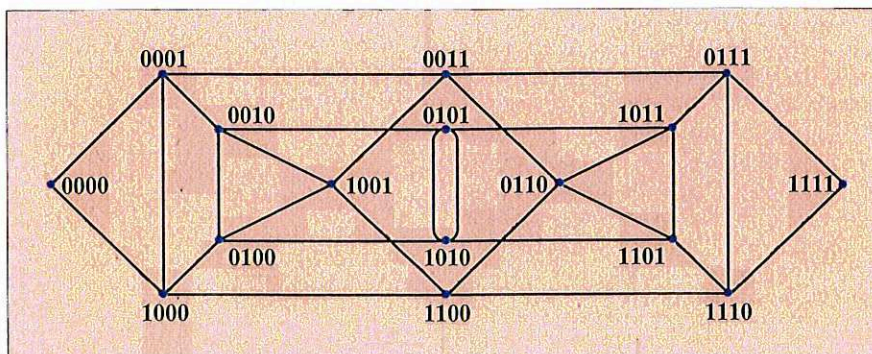


Fig. 2 - Un réseau de de Bruijn à 16 sommets.