



HAL
open science

Le Rallye Mathématique Transalpin, médiation entre enseignants et résolution de problèmes

Catherine Houdement

► **To cite this version:**

Catherine Houdement. Le Rallye Mathématique Transalpin, médiation entre enseignants et résolution de problèmes. 18ème Rencontre internationale du Rallye Mathématique Transalpin, ARMT, Oct 2014, Sienn, Italie. pp.7-17. hal-03207562

HAL Id: hal-03207562

<https://hal.science/hal-03207562>

Submitted on 29 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Le RMT, médiation entre enseignants et résolution de problèmes

Catherine Houdement , LDAR, Universités Paris Diderot et Rouen

Ce texte est à la fois un travail d'élucidation et un hommage au travail magistral accumulé par les responsables du Rallye Mathématique Transalpin. Dans une partie introductive, je reviens sur les ressources qu'offre le RMT, sa richesse, en distinguant une dimension privée du RMT et une dimension publique. Dans la seconde partie je m'intéresse aux processus en jeu dans la résolution de problèmes, propose une organisation pour l'enseignant des problèmes arithmétiques, utilise cette organisation pour mesurer la contribution du RMT à la résolution de problèmes. Dans la dernière partie, je pointe des outils didactiques qui traversent la construction et l'analyse des problèmes RMT et je montre leur importance pour la formation des enseignants.

I La richesse du RMT

Le Rallye Mathématique Transalpin, initialement Rallye Mathématique Romand (1993) a débuté en 1993 avec vingt classes¹. Depuis 2011, au moins 4000 classes sont engagées dans le RMT. Un grand ensemble d'enseignants, d'écoles, de collèges, de lycées, et bien sûr d'élèves sont donc concernés par cette organisation. Je considère que le RMT a deux dimensions que j'appellerai privée et publique. La dimension privée consiste, notamment lors des moments de rallye, à observer des élèves s'organiser, chercher, s'interpeller sur des mathématiques, mais aussi à récupérer la réponse collective de sa classe sur tel ou tel problème. La dimension publique est liée à la multitude de documents disponibles, en général sur le site de l'Association : problèmes et leurs analyses, productions d'élèves, articles

Dans ce texte je me centrerai sur la dimension publique et les problèmes numériques. Les problèmes liés à la géométrie sont aussi dignes d'étude et un grand nombre de choses dites sur les problèmes numériques peuvent s'étendre aux autres problèmes, mais je préfère traiter un thème qui correspond à mes recherches actuelles.

Quelle est cette richesse publique du RMT ? L'abondance des problèmes proposés, la variété des connaissances auxquelles ils font appel, la permanence. des commentaires sur les problèmes. Ainsi chaque texte de *Problème* est accompagné d'une demande d'explication de la réponse, peut donner lieu à des variantes, repérables sous le même titre. Il est ainsi remarquable que chaque problème soit affecté d'un titre, notamment pour la mémoire collective des enseignants. Sont aussi fournies une *Analyse a priori* qui rend compte du *Domaine de connaissances* dans lequel s'inscrit ce problème, d'une *Analyse de la tâche* de l'élève, d'une proposition d'*Attribution de points* aux réponses des élèves, d'une *Analyse a posteriori* fondée sur l'étude de productions d'élèves. Cet ensemble est souvent accompagné d'exemples de productions de classes.

Par exemple, on trouve dans (Grugnetti & Dupuis 2003) cet énoncé amusant (clin d'œil à l'élève) avec des productions d'élèves.

LE NEZ DE PINOCCHIO

Le nez de Pinocchio a 5 cm de long. Quand Pinocchio dit un mensonge, la Fée aux cheveux bleus l'allonge de 3 cm, mais quand il dit la vérité, la Fée le raccourcit de 2 cm. A la fin de la journée, Pinocchio a dit 7 mensonges et son nez a 20 cm de long.

Combien de fois Pinocchio a-t-il dit la vérité à la Fée au cours de la journée ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver la réponse.

¹ <http://www.armtint.org/fr/presentation-du-rallye/historique>

On peut voir que certaines productions montrent des stratégies erronées, mais menant parfois à une réponse exacte, et d'autres des stratégies correctes, mais qui conduisent parfois à une réponse fausse.

Des stratégies erronées (et parfois une réponse exacte)

« Pinocchio a dit 10 fois la vérité. La réponse a été trouvée en faisant une ligne de 20 cm, puis elle s'est allongée de $3 \times 7 = 21$. Après il a fallu retirer 2 cm pour arriver à 20 cm. » (Catégorie 3 – I)

« Pinocchio a dit 7 mensonges et a dit la vérité à la fée aux cheveux bleus mais comme il a dit 7 mensonges il aura dit 7 fois la vérité »

5 c. di ~~la~~ mia gomma
 3 c. allungati
 2 c. accorciati
 7 bugie che ha detto
 20 bugie c. del giorno

20 : 5 = 4 5 >
 20 4 =
 20 : 3 = 6
 18
 2

20 + 26 =
 33 = 20 =
 23 + 26 - 2 = 31

2 =
 25 +
 7 =
 26

Pinocchio ha dato 3 risposte sincere.

Des stratégies correctes avec une réponse exacte

Cat.3

D'abord nous avons fait un chenal du nez de Pinocchio.

□ = 1 cm

Ensuite nous avons dessiné la nez de Pinocchio quand il a dit sept mensonges et pas de vérité. Cet arrive à 26 cm

Donc il y a six cm de trop. 2×3 six, donc il y a 3 vérité vu qu'il y a six cm de trop.

On enlève six cm.

Dans la journée Pinocchio a dit 3 vérités

Cat.4

26 ← +3
 23 ← +3
 20 ← +3
 17 ← +3
 14 ← +3
 11 ← +3
 8 ← +3
 5

$7 \times 3 = 21 + 5 = 26 - 3 \times 2 = 20$

Spiegazione

Per trovare la risposta abbiamo tenuto conto di un'informazione: Pinocchio ha detto sette bugie, quindi il suo naso si è allungato di $3 \times 7 = 21$ cm, poi abbiamo tolto $21 \text{ cm} + 5 \text{ cm}$ che lui aveva prima e poi ci siamo chiesti perché ha 20 cm alla fine della giornata? Perché ha smentito 3 volte.

cm 5 + 1 = 8 + 2 = 11 + 3 = 14 + 5 = 17 + 3 = 20 + 6 = 23 + 3 = 26 - 2 = 24 - 2 = 22 - 2 = 20 cm.

legenda:
 1-2-3-4-5-6-7 = BUGIE.
 8 = RISPOSTE SINCERE.

RISPONDO:
 Pinocchio ha dato 3 risposte sincere.

L'étude de la multitude de productions sur un même problème permet de dégager certaines caractéristiques des stratégies.

Les stratégies erronées (ou difficiles à comprendre) peuvent relever d'une incompréhension du contexte, d'une application d'un contrat implicite de classe (par exemple utiliser la dernière opération étudiée), d'un « enfermement » dans le numérique, d'une perte de sens du calcul, d'une absence de contrôle par le contexte... Elles peuvent néanmoins amener à une réponse correcte ! D'où l'importance de l'explication pour la pertinence de la réponse !

Les stratégies correctes sont très variées, croisent dessins, schémas, écritures arithmétiques, calculs. Elles montrent l'inventivité des élèves sur les types de représentations (symboliques ou non) pour expliquer la réponse. Dans les deux productions ci-dessus, on voit bien l'essai de coller à la fois au contexte (forme du nez) et au modèle mathématique et ainsi de donner la raison de la réponse.

Ces stratégies évoluent parfois selon les niveaux de classe, ce qui montre le rôle des connaissances des élèves sur le traitement d'un problème.

Ces stratégies varient parfois selon les pays, ce qui met en lumière l'influence des types d'enseignement (notamment des choix des programmes) sur une notion donnée.

La variété des productions des élèves nous donne accès à des modes de raisonnement sur les problèmes choisis. Mais comment définir ces problèmes que propose le RMT ? Quelle place ont-ils dans l'ensemble des problèmes mathématiques que rencontrent ou devraient rencontrer les élèves d'une classe ? Que sait-on du comment on réussit un problème ?

C'est l'objet du paragraphe suivant.

II Les processus de résolution de problèmes (plutôt numériques)

Prenons l'exemple de ces quatre problèmes a, b, c et d. Dans chaque problème, il s'agit de trouver le nombre de tulipes d'un massif.

a) C'est un massif de fleurs composé de 60 tulipes rouges et de 15 tulipes jaunes

b) Voici un massif de 60 rangées, toutes de 15 tulipes,

c) C'est un massif de 60 fleurs, composé de tulipes et de 15 jonquilles,

d) Je compte 60 tulipes disposées en 15 massifs tous identiques.

Aucun doute sur le fait que le lecteur réussisse à répondre presque instantanément. Les énoncés évoquent le même contexte (fleurs et massifs), présentent la même structure syntaxique (similarité de lecture-compréhension), posent la même question (combien de tulipes dans UN massif ?), mettent en jeu les mêmes nombres (15 et 60). Mais les problèmes relèvent d'opérations arithmétiques différentes. La question est la suivante : comment savons-nous, nous experts, associer des opérations différentes à des énoncés si proches ? Sollicitons l'aide d'un psychologue cognitiviste, Jean Julo, qui a travaillé sur la résolution de problèmes mathématiques scolaires.

1. Le point de vue d'un psychologue cognitiviste sur la résolution de problèmes

Julo (1995, 2002) met en avant l'importance de la représentation (mentale) dans le processus de résolution de problèmes. Qu'est ce qu'une représentation ? Selon Julo (1995 p11) « *comprendre quelque chose serait, d'une manière ou d'une autre, construire une représentation de cette chose.* » Une représentation est le fruit d'une profonde activité mentale, qui met en œuvre tout un ensemble de processus chargés de traiter les informations issues de nos organes sensoriels sur notre environnement. Les représentations (d'un problème) dont il est question ici sont des représentations ponctuelles et occasionnelles, Julo parle de *représentations particularisées*. Il existe aussi dans le modèle actuel des psychologues des représentations plus ou moins stables en mémoire à long terme, ce sont les connaissances (et les croyances) qui nous permettent d'appréhender le monde.

La représentation du problème ne se réduit pas à la compréhension de son énoncé. La nature d'un problème engage un autre type de représentation. « *Ce sont les relations complexes entre un but donné et les conditions de réalisation de ce but (les contraintes et les aides qu'introduit l'auteur de l'énoncé) qui caractérisent ce qu'est un problème par rapport à d'autres situations de compréhension de texte.* » (Julo 1995, p.16). L'enjeu de la résolution de problèmes est aussi spécifique : « *C'est bien le fait de découvrir par soi-même une solution que l'on n'entrevoit pas dans un premier temps qui est l'enjeu de cette activité particulière* » (Julo 1995, p.25)

Nous aurions chacun une **mémoire des problèmes** (Julo 1995) qui nous permettrait de reconnaître et de traiter des problèmes de façon presque « automatique ». Nous enrichissons cette mémoire grâce à la résolution réussie de problèmes **que nous menons à terme !** Par contre il est très complexe de savoir comment nous stockons en mémoire ces problèmes réussis.

Ainsi il y aurait au moins deux composantes (non successives, mais simultanées, qui interagissent) dans l'activité de résolution de problèmes :

- construire une représentation du problème, qui peut suffire à inférer de sa mémoire une stratégie adaptée pour le problème ;
- déclencher un traitement :
 - se remémorer une stratégie : ce qui est le cas dans un problème reconnu : *les massifs de fleurs*
 - construire une stratégie : pour un problème « dont on n'a aucun souvenir » : par exemple *le nez de Pinocchio*

La difficulté d'un problème pour un élève tiendrait ainsi, entre autres, à la complexité de la construction d'une représentation adaptée. Notons aussi la confiance en soi nécessaire pour se lancer dans la construction d'une nouvelle stratégie.

Cet apport essentiel pour la compréhension du processus de résolution de problèmes conduit à préciser deux enjeux de l'enseignement :

- enrichir la mémoire des problèmes des élèves, notamment en les faisant s'entraîner sur la résolution de problèmes « **basiques** » : ceux qu'il faudrait « automatiser » pour tel champ de connaissances ;
- leur donner l'occasion d'inventer des stratégies, en mettant en place des dispositifs qui leur donnent envie de chercher des problèmes « **atypiques** ».

Plus l'élève a réussi de problèmes, plus il en réussira d'autres : en effet plus sa mémoire sera riche, plus les chances de « reconnaître d'une certaine façon » un problème seront grandes.

2. Une typologie des problèmes arithmétiques

Je précise d'abord que cette typologie concerne **a priori** les problèmes de réinvestissement dans un champ de connaissances.

J'ai choisi les expressions « basiques » et « atypiques » pour aider l'enseignant à organiser dans un niveau donné, et par champ de connaissances, les problèmes qu'il choisit ou trouve dans des ressources pédagogiques.

Problèmes « basiques »

Les problèmes basiques sont **des** problèmes destinés à être « réussis de façon automatique » par les élèves d'un niveau donné ou d'un cycle donné. Ce sont, pour l'école primaire (niveau 1 à 5 ou 6) des problèmes à deux données dont il s'agit de déduire un 3^{ème} nombre (par exemple par le choix d'une opération arithmétique), des problèmes relevant du modèle proportionnel (trois données ou plus, en déduire d'autres nombres). Les énoncés sont sobres, sans surcharge d'informations, sans difficulté syntaxique excessive...

Exemples de problèmes basiques pour les niveaux 4 et 5

1. Avec 2 356 €, combien de billets de 100 € peut on obtenir ? Et avec 12 356 € ?
2. Alice a 26 timbres dans sa collection, c'est deux fois plus que Leïla. Combien de timbres Leïla a-t-elle ?

3. Grégoire a chargé dans sa camionnette vide 75 sacs de 20 kg de pommes. Combien pèse son chargement ?

Vergnaud (1991, 1997) et d'autres chercheurs nous aident à hiérarchiser a priori les complexités de raisonnement en jeu dans, d'un côté les problèmes additifs (addition et soustraction), de l'autre les problèmes multiplicatifs (multiplication, division, proportionnalité).

Problèmes « complexes »

Examinons le problème suivant

Au cinéma Royal Ciné un adulte paye 6 € par séance et un enfant paye 4 € par séance. A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants. A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants. La recette de la journée est de 542 €. Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ? (extrait de ERMEL CM1²)

Ce problème n'est un problème basique pour personne, il est nécessaire de construire **des sous-problèmes basiques calculables** qui permettent d'avancer vers la réponse. Ici le premier sous-problème est la recherche de la recette du soir, ce problème est calculable grâce à certaines informations fournies dans le texte. Il est nécessaire de **connecter ces informations**, éloignées les unes des autres dans le texte, pour construire ce premier sous-problème basique : *Un adulte paye 6 € par séance et un enfant paye 4 € par séance. A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants.* Il ne faut pas oublier de **qualifier le résultat calculé** (Houdement 2011) : c'est la recette du soir.

Le second sous problème basique calculable est la recherche de la recette de l'après midi.

Les autres sous problèmes basiques calculables sont la recherche de la recette de l'après midi venant des adultes, puis celle venant des enfants, et enfin le nombre d'enfants à la séance de l'après-midi.

J'appellerai un tel problème, un **problème complexe**³. Un problème complexe nécessite la construction de sous-problèmes basiques calculables (et en particulier la connexion d'informations). L'élève n'a pas à construire une nouvelle stratégie, mais doit articuler des résolutions de problèmes basiques dont la construction est à sa charge.

Or les élèves ne sont pas toujours armés face à ces problèmes

Ils peuvent ne pas repérer les problèmes basiques sous-jacents aux problèmes complexes, parce qu'ils ne savent pas les résoudre « de façon automatique ».

Ils peuvent ne pas connaître la nécessité de **qualifier** (Houdement 2011) les résultats calculés. Examinons par exemple la réponse de Paul (niveau 3) face au problème ci-dessus. Paul a exécuté la plupart des calculs nécessaires à la réussite, mais il annonce 72 comme réponse au problème ; or 72 est la recette venant des enfants de l'après midi. Lors de l'entretien Paul déclare : « Un adulte c'est 6 € donc j'ai fait 15 fois 6 égale 90. Ensuite il y avait 20 enfants à la séance, comme c'était 4 € j'ai fait 20 fois 4 égale 80 ». Quand on lui demande à quoi correspond 90 ou 80, il ne sait pas répondre : il ne sait pas qualifier la réponse (ni faiblement, 80 €) ni fortement (80 €, recette venant des enfants de la séance du soir). C'est cette absence de qualification, le fait de calculer sans garder la référence au contexte, qui lui fait perdre le fil du problème.

Des exemples pour affiner l'étude

L'âge des frères

Ce problème du RMT est un problème complexe.

Il est nécessaire de connecter les informations pour avancer, notamment les informations sur Antoine relativement à celles sur Christian. Certaines informations sont dans la question.

² ERMEL (1997 ; 2005) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*. Paris :Hatier

³ Cet adjectif a déjà été utilisé, par exemple dans ERMEL CM1 (1997, p.261) pour décrire des problèmes dont la solution nécessite l'utilisation successive de plusieurs opérations. J'ai essayé d'affiner ce point de vue.

LES AGES DES FRERES (Cat. 3, 4, 5). ©ARMT

Dans une famille, il y a 3 garçons : Antoine, Bernard et Christian, et une fille Denise. Denise regarde l'album de photos familial et constate que :

- quand Antoine avait 8 ans Bernard avait 12 ans
- quand Bernard avait 9 ans Christian avait 3 ans

Quel âge avait Christian quand Antoine avait 10 ans ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

Antoine a 10 ans et quand Antoine avait 8 ans, Bernard avait 12 ans permettent de construire par exemple les sous problèmes « Bernard a tant d'années de plus qu'Antoine » (sous problème basique de comparaison additive) et « âge de Bernard ».

L'information « âge de Bernard » et *quand Bernard avait 9 ans Christian avait 3 ans* (sous problème basique de comparaison additive) permet de déduire l'âge de Christian.

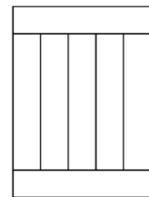
La table de jardin

LA TABLE DE JARDIN (Cat. 6, 7) ©ARMT

Le papa de Luc a construit une table de jardin rectangulaire en utilisant 7 planches de bois identiques, ayant chacune un périmètre de 3 m. Voici le dessin du plateau de la table, comme il se présente à la fin de la construction.

Quelle est la longueur et la largeur de cette table de jardin ?

Donnez votre réponse et expliquez votre raisonnement



C'est une analyse fine du dessin qui permet de connecter les informations : il faut reformuler le périmètre d'une planche en 2 longueurs + 2 largeurs de planche et étudier comme ces longueurs et largeurs interviennent dans les dimensions de la table. Ce problème sera qualifié **d'atypique**.

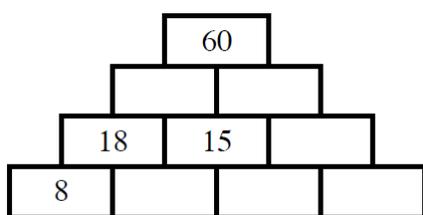
Les pyramides de briques

Pyramides de briques ©ARMT (*ici figure seulement une partie des énoncés originaux*)

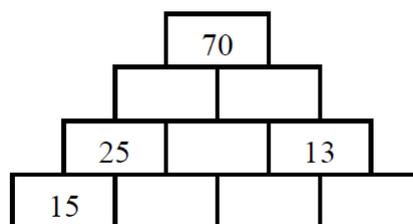
Pour chaque brique qui repose sur deux autres, le nombre écrit est la somme des nombres des deux briques sur lesquelles elle est posée.

Écrivez les nombres qui manquent pour compléter les pyramides ci-dessous

Cat 3,4,5



Cat 6,7,8,9,10



Étage 4

Étage 3

Étage 2

Étage 1

La pyramide de gauche

Sur l'étage 1, les réponses 10, puis 5 sont issues de problèmes basiques additifs. Ce sont des successions de problèmes basiques (additions à trou) qui permettent de remplir les cases de l'étage 3, de terminer l'étage 2, puis l'étage 1. Le problème de gauche est un problème « complexe » (...assez simple).

La pyramide de droite

Trouver 10 à l'étage 1 résulte d'un problème basique. Mais ensuite que peut-on chercher ? Un nombre de quel étage ? Plusieurs stratégies sont possibles

- faire des essais à l'étage 1 et de les adapter pour trouver 70 au sommet
- trouver un sous problème **calculable** : par exemple à l'étage 4, la somme fait 70 ; on a déjà 38 à l'étage 3 ; le nombre qui manque à l'étage 3 est donc 16 (la moitié de 32) ; les autres sous problèmes sont alors basiques
- tenter d'algébriser le problème : cela peut se révéler complexe, peut on se ramener à une seule inconnue ? Où la placer ?

Ce problème sera qualifié **d'atypique**.

Les problèmes atypiques

Pour ces problèmes, l'élève n'a pas a priori de modèle mathématique disponible, notamment parce qu'il n'en a jamais rencontré de ce type. Il doit alors inventer, construire une nouvelle stratégie. Ce sont ses connaissances dans le champ mathématique dont relève le problème et ses habilités stratégiques (les problèmes qu'il a déjà rencontrés) qui vont l'outiller.

Les stratégies à construire peuvent être du type expérimental (faire une hypothèse, la tester), par approximation (faire une hypothèse, la tester, l'adapter...), déductives (accéder à de nouvelles informations par déduction d'anciennes, analyse de schémas, etc.), mixtes... Elles peuvent être supportées par des dessins, des schémas, des calculs, des textes.....

Les problèmes atypiques intéressants pour l'école sont ceux qui réinvestissent des connaissances mathématiques installées (même si elles peuvent en préparer d'autres).

Nous avons rencontré déjà dans ce texte des exemples de problèmes atypiques : le nez de Pinocchio, la table de jardin, certaines pyramides de briques. En voici un autre, Chameaux et Dromadaires.

Chameaux et Dromadaires ©ARMT.

Cléopâtre a dessiné des chameaux et des dromadaires, cela fait 19 bosses et 52 pattes. Elle sait que les chameaux ont deux bosses et les dromadaires n'en ont qu'une. Puis elle a encore dessiné un homme sur le dos de chaque chameau.

Combien d'hommes a-t-elle dessiné en tout ? Expliquez votre réponse.

Ce problème donne lieu pour les niveaux 3 à 6 à des stratégies de type expérimental ou par approximation. Par contre pour les niveaux 8 et 9, ce problème est « juste » complexe pour les élèves qui repèrent l'intérêt, pour trouver la réponse, de (construire et) résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Remarquons qu'il est nécessaire, dans tous les cas, de résoudre d'abord le sous -problème basique : chercher le nombre d'animaux.

Conclusion sur typologie de problèmes arithmétiques

Cette typologie a vocation à décrire tous les problèmes arithmétiques d'entraînement et de réinvestissement juste après que les nouvelles connaissances aient été introduites.

Cette typologie souligne l'importance des problèmes basiques parmi les problèmes d'entraînement et se fonde sur des résolutions individuelles réussies de ces problèmes.

En ce qui concerne la place des problèmes « basiques » dans les problèmes en général, il est tout à fait pertinent de faire un parallèle avec le calcul. Pour le calcul, la mémorisation de faits numériques « basiques » (tables de multiplication, $4 \times 25 = 100$, etc..) et propriétés/rerelations numériques « basiques » (doubles et moitiés d'entiers, multiplier un nombre par 10, 100, 1000....) concourt à l'aisance calculatoire. En effet la mémorisation libère en mémoire de travail de l'espace pour du raisonnement.

Pour l'enseignant

Un point de vue sur les problèmes arithmétiques organisés en problèmes « basiques », problèmes « complexes », problèmes « atypiques » donne un fil conducteur pour le travail sur les problèmes dans un champ de connaissances.

Le qualificatif « problèmes basiques » désigne les problèmes qui ont vocation à être résolus automatiquement par tous les élèves à un niveau donné. Les problèmes basiques demanderaient être travaillés dans des dispositifs spécifiques qui permettent aux élèves de faire des liens, aidés par l'enseignant, par exemple entre des raisonnements identiques (par exemple Vergnaud 2001, Priolet 2008).

Les problèmes complexes s'appuient sur la connaissance de problèmes basiques sous-jacents au problème complexe. A priori ils ne peuvent être abordés qu'après installation de problèmes basiques dans le champ de connaissances sous-jacents au problème complexe.

Les problèmes atypiques peuvent être abordés dès que le minimum de connaissances nécessaires pour les résoudre est installé : par exemple pour Chameaux et Dromadaires, il suffit de connaître problèmes simples et techniques simples de multiplication et d'addition. Les problèmes atypiques visent à convaincre les élèves de l'intérêt personnel de trouver la réponse, que plusieurs stratégies ont légitimé, le but ultime étant de trouver une stratégie exacte qui réduit le temps de recherche sans perdre la réussite. Un problème basique à un niveau de classe donné a souvent été un problème atypique à des niveaux inférieurs.

Pour l'élève

Cette typologie n'est pas pour l'élève : pour l'élève il n'existe que deux sortes de problèmes, tous imposés : ceux qu'il reconnaît et sait traiter rapidement et les autres, ceux qui le bloquent, qui l'amènent à prendre des initiatives et... des risques (Houdement 2003) : mais pour cela il doit avoir confiance en lui.

3. Conclusion de résolution de problèmes

La **mémoire des problèmes** s'enrichit par construction personnelle de ressemblances entre problèmes. Ces ressemblances sont construites par le sujet, il se peut que certains dispositifs aident à construire ces ressemblances. La mémoire des problèmes agit sur les aptitudes à résoudre des problèmes « ressemblants » du point de vue de l'élève.

L'élève doit « automatiser » des **problèmes basiques** dans un champ de connaissances. L'élève doit avoir l'occasion ensuite d'aborder des problèmes **complexes** (composés de ces problèmes basiques). L'élève doit se sentir prêt et confiant pour construire et essayer des stratégies non apprises à l'occasion **des problèmes atypiques**.

On peut ainsi mesurer **la contribution du RMT à la résolution de problèmes**. Le RMT propose des problèmes a priori complexes ou atypiques. Il permet de déceler des déficits en problèmes basiques. L'enseignant peut ainsi retravailler les problèmes basiques qui ne sont pas installés. Le dispositif collectif RMT participe à la construction d'une attitude positive des élèves face aux problèmes. Le RMT permet donc de confronter les élèves à deux dimensions de la résolution de problème : construction /utilisation de connaissances ET inventivité stratégique.

Bien sûr les bienfaits du rallye seront décuplés si l'enseignant s'engage dans sa pratique ordinaire à faire fréquenter les problèmes à ses élèves avec le souci de les faire réussir par eux-mêmes.

III Des outils d'aide à la progressivité de l'enseignement

Le RMT permet d'illustrer l'utilisation d'outils didactiques, de donner du sens à ces outils et de montrer leur pertinence pour les apprentissages.

1. Les deux analyses, a priori et a posteriori

Les problèmes du RMT sont accompagnés de deux rapports d'analyses : une analyse a priori et une analyse a posteriori.

Pour un problème nouveau, l'analyse préalable (sans qu'on ait étudié des productions d'élèves ou de classe) vise à repérer les connaissances minimales nécessaires pour réussir le problème (notamment les problèmes basiques à construire), à anticiper certaines stratégies et certaines erreurs des élèves, à envisager des variantes si l'énoncé se révèle a priori trop facile ou trop difficile.

L'analyse a posteriori consiste en l'analyse des productions d'élèves, le classement des stratégies, des erreurs, des déficits de connaissances des élèves. Elle donne des indications pour la reprise en classe du problème ou le travail sur des problèmes complémentaires.

L'analyse a posteriori permet d'enrichir l'analyse préalable par toutes les informations qu'elle nous donne sur les élèves à travers les productions de classe.

Le fait que les deux analyses soient fournies dans les fiches problèmes RMT permet aux enseignants RMT de ne pas avancer à l'aveuglette quand ils proposent un problème.

En formation des enseignants, grâce à la disponibilité des travaux RMT, il est possible d'initier les enseignants à l'analyse préalable en leur faisant résoudre un problème (ce qui leur donne l'occasion de voir déjà la variété des stratégies d'adultes sur des problèmes complexes), puis anticiper des réponses d'élèves ou de classe (qui sont sans doute des réponses plus élaborées que des individuelles), et enfin comparer avec ce que proposent tels élèves ou tels élèves.

L'analyse a posteriori nous fait entrer sur le terrain de l'élève, comme le déclare Jaquet (2013).

Elle permet de prendre des informations sur des façons de raisonner d'élèves, leur inventivité collective (schémas, calculs, textes pour expliquer), leur propension à choisir une stratégie cognitivement peu coûteuse (par exemple une stratégie arithmétique pour un problème algébrique), leur attachement au contexte réel des problèmes (par exemple les dessins du Nez de Pinocchio).

Elle montre la nécessité pour enseigner de « décompresser » (Ball & Bass, 2002) les mathématiques : par exemple la proportionnalité ne se réduit pas à la règle de trois, ni au produit en croix, il existe d'autres raisonnements aussi valides et efficaces. Cette analyse fine des savoirs et des raisonnements (ce que Ball & Bass appellent le savoir mathématique spécifique pour enseigner) est nécessaire pour évaluer la pertinence d'une stratégie, son degré de validité (local ou plus général) ; pour aider (ni trop ni trop peu) ; pour enseigner les différentes facettes d'un savoir.

Elle permet de prendre des informations sur les connaissances des concepts qu'ont les élèves, ce qui peut permettre aux enseignants d'ajuster leur enseignement sur le concept.

Par exemple

- Repérer ce qu'on pourrait considérer comme obstacles : proportionnalité et fonction résistent à une entrée unique par les problèmes atypiques, ils nécessitent une structuration complémentaire (Henry 2005) ; le modèle proportionnel, une fois connu des élèves, est utilisé par eux comme modèle passe-partout d'une relation entre deux grandeurs ; la pensée arithmétique fait obstacle à la pensée algébrique.
- Pointer des courts-circuits dans la pensée des élèves : la propriété des écarts comme caractéristique de la proportionnalité ; la prégnance donnée au calcul aux dépens de l'étude des collections et des grandeurs.

L'analyse a posteriori nous fait « voir » le décalage entre l'enseigné et l'appris : ce que l'élève retient d'une notion est une recombinaison personnelle de ce qui a été rencontré, c'est rarement ce que l'enseignant a enseigné (ou voulu enseigner). Les productions de classes issues du RMT rendent compte d'un « maximum » de cette appropriation (car il s'agit d'une production collective). Le RMT fait ainsi entrer dans la complexité du temps d'apprentissage, en décalage avec le temps d'enseignement.

2. Le concept de variable didactique

Un problème n'engage pas toujours les mêmes connaissances quand on joue sur une variable, c'est-à-dire quand on change d'une certaine façon la valeur de cette variable. Le concept de variable est

un outil didactique pour pousser l'élève à construire des connaissances plus puissantes, à « mettre à jour » (au sens informatique) ses connaissances anciennes.

Dans le RMT on trouve des problèmes qui diffèrent selon la valeur d'une variable. Par exemple Les Marguerites....

3. LES MARGUERITES (Cat. 3, 4)

En effeuillant une marguerite, Martine récite la comptine suivante :

« *Problème, beau problème* (et arrache le premier pétale)
je te résoudrai (et arrache le deuxième pétale)
si je participe (et arrache le troisième pétale)
au rallye transalpin » (et arrache le quatrième pétale)

Puis elle recommence la comptine :

« *Problème, beau problème* (et arrache le cinquième pétale)

...

Pour une marguerite de 10 pétales, la comptine s'arrête à « *je te résoudrai* ».

Avec une marguerite de 47 pétales, sur quelle partie de la comptine Martine s'arrêtera-t-elle ?

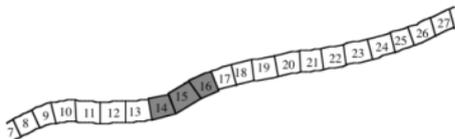
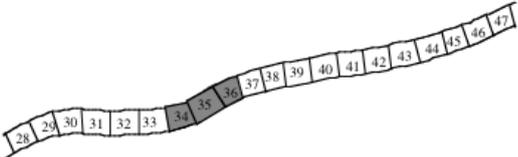
Et pour un bouquet de marguerites avec 152 pétales en tout, où Martine s'arrêtera-t-elle ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

La réponse pour 47 pétales peut se trouver en récitant la comptine, en dénombrant les vers et en s'arrêtant sur le vers en position 47. Ce faisant, les élèves s'aperçoivent parfois des positions successives du vers n°4. La réponse pour 152 peut déclencher une utilisation des multiples de 4 : *combien de fois 4 dans 152 ?* Et un regard sur le reste dans la division par 4.

Un retour en classe sur ce problème permettrait de poursuivre avec les nombres 158, 301, 310 etc. qui pourraient encore renforcer cette incitation à la division, en particulier aux niveaux 4, 5, 6, 7. Ce pourrait être l'occasion pour l'enseignant de pointer une autre facette de la division euclidienne, le reste. C'est un problème qui mérite d'être posé à plusieurs niveaux en jouant sur la variable nombre de pétales.

Les problèmes Rubans présentent aussi des valeurs différentes de la même variable.

Le ruban de Marie (Cat 3, 4) 11 ^{ème} RMTF ©ARMT	Le ruban de Noé (Cat 5, 6) 11 ^{ème} RMTF ©ARMT
<p>Marie a un ruban avec les nombres naturels de 1 à 40. Elle colorie la partie du ruban avec les trois nombres 14, 15 et 16 qui se suivent. Elle additionne ces trois nombres et trouve la somme de 45 qui est justement l'âge de sa mère !</p>  <p>Pourrait elle aussi obtenir 45 en additionnant d'autres nombres qui se suivent sur une partie du ruban ? Écrivez toutes vos solutions et les calculs que vous avez faits.</p>	<p>Noé a un ruban avec les nombres naturels de 1 à 100. Il colorie la partie du ruban avec les trois nombres 34, 35, 36 qui se suivent. Il additionne ces trois nombres et trouve la somme de 105 qui est justement son âge !</p>  <p>Pourrait-il aussi obtenir 105 en additionnant d'autres nombres consécutifs du ruban ? Écrivez toutes vos solutions et les calculs que vous avez faits.</p>

Pour le ruban de Marie, des essais successifs de sommes de nombres consécutifs sont possibles avec des ajustements pour atteindre 45, ils permettent d'aboutir.

Pour le ruban de Noé, si on a déjà cherché le ruban de Marie, l'hypothèse d'un plus grand nombre de solutions a priori peut faire évoluer la stratégie vers la recherche d'un nombre « central » dans la somme de nombres successifs. Par exemple dans $34+35+36$, 35 est central et est la moyenne des deux nombres qui l'encadrent.

Il serait très intéressant de donner simultanément les deux problèmes qui jouent sur la variable (taille du ruban, nombre somme).

Mais aussi le concept de variable est aussi en jeu dans les problèmes **Décorations** très étudiés (par exemple Jaquet 2007, 2009).

Décoration I cat.5, 6, 7.

Un peintre a peint quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur. Il a utilisé des pots de peinture de même grandeur



18 pots de rouge pour une des figures - 21 pots de bleu pour une autre figure
 27 pots de jaune pour autre figure - des pots de noir pour la figure qui reste
 À la fin de son travail, tous les pots étaient vides. Indiquez la couleur de chaque figure.
 Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés ? Expliquez comment vous avez trouvé.

Dans cette première version, les nombres de pots sont respectivement (18 ;21 ;27).

Dans une variante, les nombres de pots sont respectivement (72 ;84 ;96). Cette version génère plus de réponses fausses (qui ne sont pas dues à la taille des nombres).

Pourtant les deux problèmes relèvent du même contexte et modèle proportionnel (proportionnalité entre nombre de pots et aire des figures). Mais la version I, « petits nombres » permet de trouver une réponse correcte en court-circuitant le modèle proportionnel (en appliquant « juste » la propriété des écarts). Ce qui montre que la version « grands nombres » est plus adaptée pour la classe puisqu'elle bloque une réponse exacte trouvée par un raisonnement incomplet.

Le problème suivant, donné à la suite de la variante 1 ou de la variante 2 du précédent, prolonge cette variante. Mais c'est encore le même problème : les informations sur l'aire du rectangle sont données, il s'agit de trouver la quantité de peinture.

Décoration II ©ARMT

Le peintre remarque qu'il reste encore de la place sur le mur, à droite. Il décide de peindre encore un grand rectangle, de 4 carreaux de large et de 6 carreaux de long, avec de la peinture verte.
 Combien de pots de peinture verte le peintre va-t-il utiliser pour le grand rectangle ? Expliquez comment vous avez trouvé.

Par contre le problème suivant, donné à la suite de la variante I ou de la variante II du précédent, est un problème différent : il s'agit du problème **retourné** (Bloch 2009) : les informations sur la quantité de peinture sont données, il s'agit de trouver l'aire de la surface.

Décoration III

Un nombre de pots de peinture orange est donné dans l'énoncé : il s'agit de dessiner une figure qui utiliserait exactement toute cette peinture orange.

Ce problème retourné a plusieurs figures solutions qui sont toutes de même aire.

3. Problème et problème retourné

Le couple (problème, problème retourné) permet souvent d'affiner le savoir en jeu (Bloch 2009).

Revenons sur l'exemple du nez de Pinocchio. Le problème direct serait de trouver la longueur du nez de Pinocchio quand il dit par exemple 6 mensonges et 4 vérités. Ce problème, basique, n'est pas posé dans le RMT. Seul le problème retourné est proposé : c'est un problème atypique.

Le lecteur se souvient du problème des Marguerites, relevant du reste dans la division par 4. Regardons ce nouveau problème, retourné, qui explore une autre facette de la division : le quotient.

Les marguerites II

Pour une fleur à 20 pétales, combien de fois Martine récite-elle « je te résoudrai » ?

Pour une fleur à 30 pétales, combien de fois Martine récite-elle « je te résoudrai » ?

Pour une fleur à 45 pétales, combien de fois Martine récite-elle « je te résoudrai » ?

4. Problèmes « proches »

Il est intéressant de faire résoudre par les élèves des problèmes « proches » par un jeu sur une variable (comme Décoration I et II, Ruban I et II, Marguerite I et II) ou parce qu'il s'agit de problème et problème retourné (Nez de Pinocchio, Décoration II et III) ou parce qu'il s'agit de problème relevant de même raisonnement⁴.

En effet l'analyse des ressemblances entre problèmes (une fois résolus) contribue à montrer aux enseignants la sensibilité des élèves aux variations (quand ils sont par exemple donnés dans le cadre de RMT), elle peut aider les élèves à enrichir leur mémoire des problèmes si ces ressemblances sont discutées et les stratégies comparées dans le cadre de la pratique de classe.

Plus généralement et au-delà du RMT, je pense que les recherches sur les problèmes « basiques », notamment la création et/ou l'adaptation de dispositifs efficaces pour que les élèves les mémorisent (donc repèrent des ressemblances et différences structurantes entre problèmes « ressemblants ») ne sont pas suffisamment avancées.

5. Conclusion sur outils didactiques

La dimension publique du RMT fournit un matériel utilisable pour former les enseignants, expérimentés ou novices, à des outils didactiques puissants.

Les deux formes d'analyse, en particulier l'analyse préalable, permettent souvent de faire le tri entre les tâches adaptées aux élèves (quelles connaissances minimales sont nécessaires pour réussir la tâche, les élèves ont-ils ces connaissances minimales ?) et celles qui ne le sont pas, de retenir les tâches qui visent les connaissances souhaitées. Mais on apprend vite que cette analyse préalable devient beaucoup plus riche après qu'on ait étudié les productions d'élèves...

Jouer sur les valeurs d'une variable didactique permet de simplifier ou complexifier la tâche, donc soit de différencier, tout en gardant le même contexte ; soit de permettre l'émergence de connaissances plus sophistiquées ; soit de tester la résistance d'un raisonnement. Des problèmes obtenus par un jeu de variables sont des exemples de problèmes « proches ».

Travailler avec des problèmes « proches » et sur la proximité de problèmes avec les élèves (les critères de proximité sont à préciser) a sans doute un avenir.

Conclusion

Le but de ce texte était de revenir sur la richesse réelle et potentielle que représente la masse accumulée depuis plus de vingt ans de problèmes construits, analysés et bientôt indexés. L'étude s'est centrée plutôt sur les problèmes numériques, pour mesurer la contribution du RMT à ce vaste champ des problèmes numériques de réinvestissement des connaissances déjà travaillées. Ainsi le RMT permet d'observer, chez les élèves, des raisonnements en construction pour des notions non encore apprises et des raisonnements défailants sur des notions connues. L'étude a aussi pointé l'utilisation d'outils didactiques puissants pour la conception des problèmes et essayé de montrer leur potentialité pour le travail en classe, sur les problèmes, mais aussi sur la conception des séances de mathématiques grâce aux problèmes.

⁴ Là je fais référence à une utilisation de la typologie de Vergnaud sur les problèmes additifs d'une part, et les problèmes multiplicatifs de l'autre pour aider les élèves à structurer les problèmes résolus.

Références

- Ball, D. L. and Bass, H. (2002). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis and E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB:CMESG/GDEDM
- Bloch, I. (2009). L'enseignement des mathématiques à des élèves 'en difficulté' : situations, signes mathématiques, phénomènes de contrat. *Actes du colloque 2008 sur la formation des enseignants : Enseigner les mathématiques : où est le problème ?* (pp.63-79). Bordeaux : IREM de Bordeaux
- Charnay, R. (2006). Rallyes mathématiques : quel intérêt ? *Grand N*, 78, 53-63
- Grugnetti, L. & Dupuis, C. (2003). Le nez de Pinocchio, un problème de mathématique "inverse". *Grand N*, 72, 33-40
- Grugnetti, L. & Jaquet, F.(1998). La résolution de problèmes par classes. *Grand N*, 61, 61-69
- Grugnetti L., Jaquet F., Medici, D., & Rinaldi M.-G. (2012). Vers la construction de concepts au travers de l'analyse des procédures des élèves et des obstacles qu'ils rencontrent lors de la résolution de problèmes. In J.-L. Dorier et S. Coutat (eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le XXIe siècle* – (GT9, pp. 1192–1203). <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- Henry, M. (2005). Le concept de fonction dans les problèmes du RMT. *Actes des journées RMT Bourg-en-Bresse 2004*. Arco Di Trento 2005.
- Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en questions. *Grand N*, 71, 7-24.
- Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 14, 31-60
- Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 67-96.
- Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué: entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques*. Note HDR. Université Paris-Diderot
- Jaquet, F. et all. (2007). 'Quelques aspects de la proportionnalité dans les problèmes du RMT', Groupe de travail n° 2, in L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici, M.G. Rinaldi (Eds.) *Les problèmes au service de l'apprentissage : le rôle du RMT: I problemi come supporto per l'apprendimento : il ruolo del RMT. Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*. Vol 6. Parma 2006, Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Sezione di Parma dell'ARMT, ARMT, 101-116.
- Jaquet, F. (2009). La proportionnalité, des écarts aux rapports. Groupe de travail n° 2. In Grugnetti L. & Jaquet F. (Eds.) *Actes des journées RMT Vol 8* (pp. 73-86).
- Jaquet, F. (2013), Editoriale *Gazette de Transalpin*, n. 3.
- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, 69, 31-52.
- Priolel, M. (2008). *Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire française. Approches didactique et ergonomique*. Thèse Université de Lyon 2.
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10.2/3, 133-169.
- Vergnaud, G. (1997 ; 2001). *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3. Résolution de problèmes*. Paris : Nathan