



HAL
open science

L'axiome d'indifférence

Léo Gerville-Réache

► **To cite this version:**

Léo Gerville-Réache. L'axiome d'indifférence: Essai sur les probabilités, les préférences et les jeux. 2020. hal-03207491

HAL Id: hal-03207491

<https://hal.science/hal-03207491>

Preprint submitted on 27 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'axiome d'indifférence

Essai sur les probabilités, les préférences et les jeux

Léo Gerville-Réache



L'indifférence me semble signifier proprement l'état dans lequel se trouve la volonté lorsqu'elle n'est pas poussée d'un côté plutôt que de l'autre par la perception du vrai ou du bien ; et c'est en ce sens que je l'ai prise lorsque j'ai écrit que le plus bas degré de la liberté est celui où nous nous déterminons aux choses pour lesquelles nous sommes indifférents. Mais peut-être d'autres entendent-ils par indifférence la faculté positive de se déterminer pour l'un ou l'autre de deux contraires, c'est-à-dire de poursuivre ou de fuir, d'affirmer ou de nier. Cette faculté positive, je n'ai pas nié qu'elle fût dans la volonté. Bien plus, j'estime qu'elle s'y trouve, non seulement dans ces actes où elle n'est poussée par aucune raison évidente d'un côté plutôt que de l'autre, mais aussi dans tous les autres ; à tel point que, lorsqu'une raison très évidente nous porte d'un côté, bien que, moralement parlant, nous ne puissions guère choisir le parti contraire, absolument parlant, néanmoins, nous le pouvons. Car il nous est toujours possible de nous retenir de poursuivre un bien clairement connu ou d'admettre une vérité évidente, pourvu que nous pensions que c'est un bien d'affirmer par là notre libre arbitre.

Descartes, Lettre au Père Mesland (1645)

Le propos de Descartes a un triple intérêt. Primo, il traite de l'indifférence, sujet de cet essai. Secondo, il reconnaît une vertu positive à l'indifférence. Tertio, il conclut en évoquant le libre arbitre. Depuis Descartes l'indifférence a poursuivi sa route :

En théorie des préférences rationnelles, si entre deux options possibles A et B, vous ne préférez ni A à B ni B à A, alors vous êtes *indifférent* entre A et B. Il reste alors à savoir quoi faire dans un tel cas. Si l'on ne veut pas finir comme l'âne de Buridan, il semble que la seule attitude rationnelle soit de choisir au hasard équiprobable entre A et B.

En probabilité, si entre deux possibles A et B, vous n'avez aucune raison de croire davantage en l'un qu'en l'autre, Keynes nous propose d'attribuer des probabilités égales à A et B. C'est le *principe d'indifférence* connu également sous le nom de *principe de raison insuffisante*.

L'indifférence se définit essentiellement par la négative !

Pourtant, alors que la théorie de Von Neumann et Morgenstern axiomatise les préférences et en déduit les choix rationnels, la théorie de Samuelson part de l'observation des choix pour en induire les préférences révélées. Egalement, alors que la théorie des probabilités de Kolmogorov axiomatise une mesure abstraite sur un espace probabilisé supposé connu pour en déduire des théorèmes, la statistique, à la manière de préférences révélées, observe des données pour en inférer des probabilités.

Tout est question de points de vue et on pourrait, en ce qui concerne l'indifférence, partir d'un autre point de vue, plus positif : l'indifférence comme base rationnelle jusqu'à ce que l'on ait de bonnes raisons d'en dévier.

En théorie des préférences vous seriez indifférent entre deux options tant qu'il n'y a aucune raison de préférer l'une à l'autre. En probabilité, vous poseriez l'équiprobabilité des possibles tant que vous n'avez aucune raison de poser des probabilités inégales. Enfin, dans les jeux non-coopératifs, chacun devra rationnellement jouer l'indifférence aux choix des autres et le libre arbitre n'y aura aucune place.

Dans cet essai, je vous propose d'explorer ce que l'indifférence prise comme principe premier (i.e. comme axiome) permet de construire en termes de probabilités, de préférences et de jeux.

Au programme

Chap. 1 : Indifférence et probabilités - Sur l'axiomatique de Kolmogorov

- Indifférence et duplicité : le cube de Van Fraassen
- Indifférence et connaissance : les livres rouges ou verts
- Indifférence et contraintes : le mélange Vin/Eau
- Indifférence et infini : les réels et hyperréels
- Indifférence et axiomatique des probabilités

Chap. 2 : Indifférence et préférences - Sur l'axiomatique de Von Neumann et Morgenstern

- Préférences : l'axiomatique de Von Neumann et Morgenstern
- Préférences et répétition : la critique d'Allais
- Préférences et intérêt : le problème des portefeuilles
- Préférences et perception : quelques grains de sucre
- Préférences humaines : retour sur le problème d'Allais
- Indifférence et axiomatique des préférences

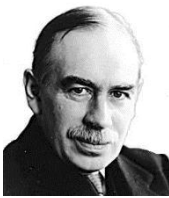
Chap. 3 : Indifférence et jeux - Sur l'axiomatique de Nash

- Indifférence aux choix de l'autre
- Indifférence et connaissance commune de la rationalité : la bataille des sexes
- Indifférence et irrationalité : le chantage
- Indifférence et libre arbitre : Newcomb
- Indifférence et le dilemme du prisonnier
- Indifférence et axiomatique des jeux

Epilogue

Chap. 1 : Indifférence et probabilités

Sur l'axiomatique de Kolmogorov



S'il n'y a aucune raison connue pour attribuer à notre sujet une alternative plutôt qu'une autre, parmi plusieurs alternatives possibles, alors, ces alternatives ont une probabilité égale relativement à notre connaissance. Des probabilités égales doivent donc être assignées à chacun des différents arguments, s'il n'y a pas de raison de leur assigner des probabilités inégales.

C'est le principe qu'énonce John Maynard Keynes en 1921 dans son livre *A treatise on probability*. Sous le nom de Principe d'indifférence, Keynes donne une définition d'une idée déjà discutée par Pierre Simon Laplace en 1840 dans son *Essai philosophique sur les probabilités*. A l'époque on parle de raison insuffisante (ou non suffisante) et Laplace nous l'explique en prenant en exemple le jeu croix ou pile.

Considérons le jeu de croix ou pile, et supposons qu'il soit également facile d'amener l'une ou l'autre face de la pièce.

Alors la probabilité d'amener croix au premier coup est $1/2$, et celle de l'amener deux fois de suite est $1/4$. Mais s'il existe dans la pièce une inégalité qui fasse paraître une des faces plutôt que l'autre, sans que l'on connaisse quelle est la face favorisée par cette inégalité, la probabilité d'amener croix au premier coup sera toujours $1/2$; parce que dans l'ignorance où l'on est de la face que cette inégalité favorise, autant la probabilité de l'évènement simple est augmentée si cette inégalité lui est favorable, autant elle est diminuée si l'inégalité lui est contraire.



Pour Laplace, attribuer les mêmes chances aux deux côtés de la pièce est soit une hypothèse, soit une conséquence logique imposée de notre ignorance. Soit la pièce est supposée « équilibrée », soit la pièce est supposée « déséquilibrée » mais nous ignorons dans quelle mesure. Dans les deux cas il convient d'attribuer, selon lui, des probabilités égales aux deux issues possibles.

Ce principe d'attribution des probabilités semble très naturel, rationnel. Il pourrait entrer en tant qu'axiome, c'est-à-dire *une proposition considérée comme digne, convenable, évidente en soi*, dans une théorie des probabilités.

Le problème est que ce principe ne fait pas consensus ! De nombreux auteurs l'ont critiqué et tenté de montrer soit son incohérence, soit sa duplicité. Ce principe, apparemment raisonnable conduirait donc à des aberrations rédhibitoires. Mais ce principe est en réalité bien plus subtil que les arguments de ses détracteurs. Il est ici nécessaire de reprendre les critiques les plus connues et de discuter de leurs pertinences.

1) Indifférence et duplicité : Le cube de Van Fraassen



Le problème du cube de Van Fraassen (1989) semble un bon point de départ pour préciser les subtilités du principe d'indifférence.

Une usine d'outils de précision produit des cubes de fer avec une longueur d'arête ≤ 2 cm. Quelle est la probabilité qu'un cube ait une longueur ≤ 1 cm, étant donné qu'il a été produit par cette usine?

Une application naïve du principe d'indifférence consiste à considérer la longueur comme un paramètre et de supposer une distribution uniforme (voir encadré). La réponse est alors de $1/2$. Mais le problème aurait pu être exprimé en des termes différents, mais logiquement équivalents:

<i>Cas possibles</i>	<i>Favorables</i>
<i>Arrête ≤ 2</i>	<i>Arrête ≤ 1</i>
<i>Aire d'une face ≤ 4</i>	<i>Aire d'une face ≤ 1</i>
<i>Volume ≤ 8</i>	<i>Volume ≤ 1</i>

Traitant chaque énoncé du problème, nous arrivons naïvement aux réponses $1/2$, $1/4$ et $1/8$. Mais celles-ci se contredisent !

Ce problème, clairement susceptible de convaincre dès à présent beaucoup d'entre vous que le principe d'indifférence a des conséquences contradictoires, doit être regardé attentivement pour éviter toute conclusion hâtive.

Quelles sont ici les alternatives du sujet ? En toute rigueur, il y a dans ce problème deux ensembles d'alternatives.

Le premier concerne les trois manières de considérer l'information qu'un cube a une arête de longueur inférieure ou égale à 2cm : soit telle quelle, soit en considérant que l'aire

d'une surface est inférieure ou égale à 4cm^2 enfin, soit enfin en considérant que le volume du cube est inférieur ou égal à 8cm^3 . Y a-t-il une raison de privilégier l'une des trois approches ? N'ayant aucune connaissance du processus de fabrication des cubes les trois approches doivent être considérées comme aussi raisonnables les unes que les autres et des probabilités égales doivent donc leurs être assignées.

Le second est qu'au sein de chaque approche, il convient d'appliquer à nouveau le principe d'indifférence. Dans l'alternative « un cube a une arête de longueur inférieure ou égale à 2cm », il faut identifier l'ensemble des alternatives. Attention, le principe d'indifférence n'évoque aucunement la possibilité d'une infinité d'alternatives. Aussi, nous devrions discrétiser l'espace des longueurs pour appliquer en l'état notre principe. Mais en réalité cela n'est pas nécessaire. Nous allons, comme le propose Van Fraassen, appliquer ce principe au cas continu d'une infinité d'alternatives. Soit L la longueur de l'arête, posons que X est une variable aléatoire de loi uniforme continue sur $]0,2]$. Il va de soi qu'en notant x la longueur d'une des arêtes du cube, avec $0 < x \leq 2$, on pose $P_1(L \leq x) = x/2$. Pour l'aire, posons $P_2(A \leq x^2) = x^2/4$ et enfin pour le volume, posons $P_3(V \leq x^3) = x^3/8$ (voir figure 1).

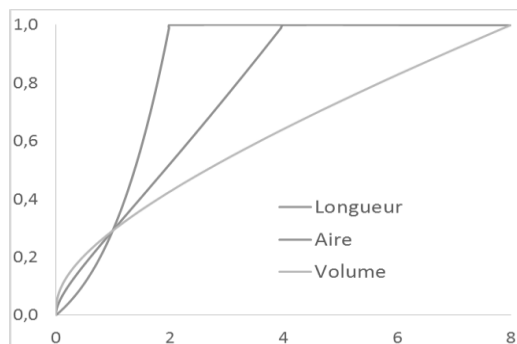


Fig1 : Fonction de répartition de la longueur, l'aire et du volume du cube

En réunissant les deux ensembles d'alternatives, on obtient alors la fonction de probabilité $P(x)=x/6+x^2/12+x^3/24$. Il est clair que $P(\text{Longueur} \leq x) = P(\text{Aire} \leq x^2) = P(\text{Volume} \leq x^3)$ pour tout $0 < x \leq 2$ et on obtient alors $P(\text{Arête} \leq 1) = 7/24$.

Voilà, la solution dictée par le principe d'indifférence est bien unique et non contradictoire. Elle vous surprend ? Moi aussi ! Mais Keynes ou encore Laplace ne nous ont jamais dit que nous ne serions pas surpris...

2) Indifférence et connaissance : Les livres rouges ou verts

Vous vous rendez dans une bibliothèque pour emprunter un livre dont vous ne connaissez pas la couleur. Il est un fait que ce livre peut être rouge ou non-rouge. Selon le principe d'indifférence, vous devez postuler que la probabilité que le livre soit rouge est de 1/2 (et non-rouge également 1/2). Mais ce livre peut également être vert ou non-vert et vous devez donc postuler que la probabilité que le livre soit vert est de 1/2. Ainsi, le livre est nécessairement soit rouge soit vert puisque la probabilité qu'il soit rouge plus la probabilité qu'il soit vert vaut un.

On peut toujours se demander l'intérêt de ce genre de problème. En effet, quel intérêt a-t-on à connaître ou à attribuer une probabilité au fait que le livre soit rouge?...

Ici, le principe d'indifférence est une fois encore détourné. Il est détourné de deux façons.

Premièrement, on ajoute des probabilités issues de deux problèmes joints (i.e. liés). Or pour ajouter des probabilités et que cette somme ait un sens, il est nécessaire que ces probabilités proviennent d'ensembles disjoints d'un même

espace probabilisé. Aussi, il n'y a rien de contradictoire à dire : d'une part « *Il est un fait que ce livre peut être rouge ou non-rouge. Selon le principe d'indifférence, vous devez postuler que la probabilité que le livre soit rouge est de 1/2 (et non-rouge également 1/2)* » et d'autre part, « *Ce livre peut être vert ou non-vert et vous devez donc postuler que la probabilité que le livre soit vert est de 1/2.* ». En revanche si l'on souhaite appliquer le principe d'indifférence à l'ensemble des alternatives identifiées dans ce problème, il en existe trois (rouge ; vert ; non rouge non vert). Le principe d'indifférence nous dicte alors d'attribuer une probabilité de 1/3 à chacune de ces trois alternatives.

Oui cela peut sembler paradoxal que partant de la réflexion qu'un livre soit rouge ou non-rouge, on en conclut qu'il faut attribuer une probabilité de 1/2 qu'il soit rouge et que lorsque qu'on remarque que ce livre peut être vert, la probabilité qu'il soit rouge devient 1/3. Mais c'est une erreur trop souvent faite que de ne pas comprendre que le principe d'indifférence fixe d'abord les alternatives et leurs nombres puis, attribue ensuite des probabilités égales entre toutes ces alternatives. Lorsque l'on ajoute une alternative, on ajoute une information et on change le problème et donc les probabilités qu'il convient d'attribuer.

Il faut voir le principe d'indifférence comme un problème d'estimation statistique. Il existe pour un problème donné, un ensemble d'informations qui permet une estimation a priori rationnelle. Si les données changent, l'estimation peut changer.

Prenons l'exemple d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Personne ne jugera irrationnel d'attribuer, en l'état des informations une probabilité de 1/6 à chaque face et en particulier une probabilité de 1/6 à la face numérotée « 1 ».

Maintenant, supposons que le dé a 20 faces. Est-il irrationnel d'attribuer une probabilité de $1/20$ à la face numérotée « 1 ». Certainement pas ! Pourtant, entre les deux dés, c'est uniquement le nombre d'alternatives identifiées qui a changé !

Deuxièmement, le fait de nous parler de livres et de couleurs nous attire irrésistiblement, de par notre connaissance de la richesse des couleurs du monde, vers des alternatives qui ne sont pas dans l'énoncé. En effet, notre expérience, notre connaissance nous conduit rationnellement à trouver stupide d'attribuer une probabilité de $1/2$ que le livre soit rouge sous prétexte qu'un livre est nécessairement rouge ou non-rouge. On pressent que la probabilité que le livre à d'être rouge devrait, en toute généralité, être de l'ordre de $1/10$ ou de $1/20$. Mais ne tombez pas dans le piège tendu par le problème des livres rouges ou verts. En mêlant votre expérience, vos connaissances au sujet, vous ajoutez de l'information, de l'information que le problème vous donne l'illusion d'être légitime. Vous vous dites, soit... Mais alors si j'énumère les 50 couleurs dont je connais le nom, cela signifie que je dois rationnellement attribuer une probabilité de $1/50$ au fait que le livre sera rouge ! Oui. Et si moi, je ne connais que 20 couleurs, j'attribuerai une probabilité de $1/20$ à la couleur rouge ! Oui. Mais en quoi cela est-il contradictoire, incohérent ? Nous n'avons pas les mêmes informations et donc pas la même estimation.

Mais alors qu'en est-il de la vraie probabilité ? Elle est ailleurs... Mais nous ne sommes pas ici pour attribuer les « vraies » probabilités aux alternatives. Nous sommes là pour attribuer des probabilités rationnelles aux différentes alternatives !

3) Indifférence et contraintes : Le mélange Vin/Eau

Si l'on omet le problème de la corde de Bertrand, qui n'est pas, à proprement parlé, une attaque directe du principe d'indifférence mais davantage un problème d'invariance et de symétrie, le problème du mélange Vin/Eau est sûrement le problème où le principe d'indifférence est le plus délicat à appliquer.

Un liquide contient un mélange de vin et d'eau tel que le rapport Vin/Eau est compris entre 1/3 et 3.

Quelle est la probabilité que le rapport (en volume) Vin/Eau soit inférieur à 2?

Vous allez dire que ce problème est encore plus farfelu que les problèmes précédents ! Mais notre propos ne doit refuser aucun problème, aucune tentative qui se veut discréditer le principe d'indifférence.

Selon le principe d'indifférence, il semble que nous devons mettre une loi uniforme continue sur le rapport Vin/Eau : $\text{Vin/Eau} \sim U[1/3;3]$. Dans ce cas, pour x compris entre 1/3 et 3, on a : $PV/E(\text{Vin/Eau} < x) = (3x-1)/8$. D'où on conclut que $PV/E(\text{Vin/Eau} < 2) = 5/8$. Mais pourquoi ne pas mettre cette loi uniforme sur le rapport Eau/Vin (i.e. $\text{Eau/Vin} \sim U[1/3;3]$)?

Cela revient à prendre pour distribution de probabilité pour le rapport Vin/Eau la loi $1/U[1/3;3]$. Dans ce cas, pour x compris entre 1/3 et 3, on obtient: $PE/V(\text{Eau/Vin} < x) = (3/x-1)/8$. On conclut ici que $PE/V(\text{Vin/Eau} < 2) = 15/16$.

Aie ! La solution dictée par le principe d'indifférence doit être ailleurs...

Nombreux sont ceux qui ont proposé une « solution » à ce problème. L'une des solutions les plus abouties a conduit son auteur, Marc Burock (en 2005) à l'équation suivante:

$$P(\text{Vin/Eau} < x) = \int_{1/3}^x \sqrt{1 + 1/u^4} du / \int_{1/3}^3 \sqrt{1 + 1/u^4} du ,$$

pour x entre $1/3$ et 3 .

Son idée était de travailler sur la loi conjointe des rapports Vin/Eau et Eau/Vin en remarquant que $\text{Vin/Eau} = 1/(\text{Eau/Vin})$. Il propose de mettre alors une loi uniforme sur la longueur de l'arc (Arc length) de la courbe $f(x) = 1/x$ pour la densité jointe définie entre les extrémités $(1/3, 3)$ et $(3, 1/3)$. Complexe, je vous l'accorde !

Malheureusement, cette distribution ne respecte pas l'ensemble des contraintes qu'implique le principe d'indifférence. Pour être précis, les contraintes que j'identifie ici sont les suivantes :

- (1) $P(\text{Vin/Eau} < 1) = P(\text{Eau/Vin} > 1) = 1/2$,
- (2) $P(\text{Vin/Eau} < x) + P(\text{Vin/Eau} < 1/x) = 1$, pour x entre $1/3$ et 3 ,
- (3) $f(1/3) = f(3) = 0$,
- (4) $f(1) = \max f(x)$.

Les deux premières sont assez simples à comprendre. Les deux dernières, non respectées par la loi de Burock, sont plus délicates. La troisième est la formalisation qu'il n'y a aucune raison que la densité de probabilité soit différente en $x=1/3$ et $x=3$ et qu'il n'y aucune raison qu'elle soit différente de 0. La dernière est issue du fait qu'il n'y a aucune raison que la densité de probabilité soit maximale en un autre point que $x=1$.

Malgré ces contraintes, il existe encore une infinité de lois possibles! Nous pouvons alors, comme l'ont proposé Burock et d'autres, chercher une solution en partant d'un mélange « physiquement uniforme ». Plus précisément, il faut construire un mélange Vin-Eau sur la base de lois uniformes qui,

raisonnablement indifférentes a priori, vérifient les multiples contraintes a posteriori.

Supposons que nous disposons d'une bouteille de vin de 75cl, d'une bouteille d'eau de 75cl et d'une jolie jarre. Pour que le mélange ait un rapport Vin/Eau entre $1/3$ et 3 , nous pouvons mettre 25cl de chaque liquide puis, verser simultanément (à des débits inconnus), de l'eau et du vin dans la jarre jusqu'à ce que l'une des deux bouteilles soit vide. Aussi, le volume de vin sera compris en 25 et 75cl, comme le volume d'eau. N'ayant pas d'autre information, les volumes d'eau et de vin seront modélisés par des variables aléatoires uniformes indépendantes $U[1/4;3/4]$. Le mélange sera donc le rapport de ces deux lois uniformes. On obtient après quelques calculs... la loi de probabilité suivante :

$$P(\text{Vin/Eau} < x) = x/8*(3-1/x)^2 \text{ si } 1/3 \leq x \leq 1 \text{ et}$$

$$P(\text{Vin/Eau} < x) = 1-x/8*(3/x-1)^2 \text{ si } 1 < x \leq 3.$$

Cette distribution (voir fig2) respecte les quatre contraintes !

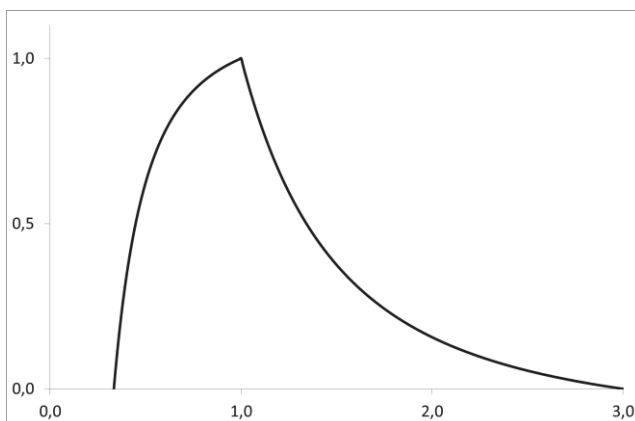


Fig2 : Densité $f(x)$ du mélange Vin/Eau

Voilà un sérieux candidat pour résoudre ce problème (en attendant de trouver mieux...). Le plus étonnant est peut-être le fait qu'avec cette loi, $P(\text{Vin}/\text{Eau} < 2) = 15/16$ est la même valeur que celle que l'on trouvait avec la loi $1/U[1/3;3]$!

4) Indifférence et infini : réels et hyperréels

L'Axiomatique d'Andreï Kolmogorov (1933)



Soit E une collection d'éléments ξ, η, ζ, \dots , que nous appellerons des événements élémentaires, et \mathfrak{F} , l'ensemble des sous-ensembles de E ; les éléments de l'ensemble \mathfrak{F} seront appelés des événements aléatoires.

- I. \mathfrak{F} est une σ -algèbre.
- II. \mathfrak{F} contient l'ensemble E .
- III. A chaque ensemble A de \mathfrak{F} est assigné un nombre réel non-négatif $P(A)$. Ce nombre $P(A)$ est appelé la probabilité de l'événement A .
- IV. $P(E) = 1$.
- V. Si A et B n'ont aucun élément en commun, alors $P(A+B) = P(A) + P(B)$.
- VI. Soit $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$, une suite décroissante infinie d'événements de \mathfrak{F} pour laquelle $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \dots = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$

Lorsque le nombre d'alternatives est infini, le principe d'indifférence devient problématique. Non pas dans le cas d'une infinité continue entre deux bornes finies, comme dans le problème du cube ou du mélange vin/eau mais dans le cas

d'une infinité dénombrable : on ne peut pas définir une loi équiprobable sur l'ensemble des entiers naturels (\mathbb{N}). En effet, selon la théorie des probabilités de Kolmogorov, s'il existe une telle loi, alors soit la probabilité de chaque élément est strictement positive et la somme infinie de ces probabilités est infinie, soit la probabilité de chaque élément vaut zéro et la somme infinie de ces probabilités vaut zéro. Dans les deux cas, on est en contradiction avec l'axiome IV de Kolmogorov qui demande que la probabilité de l'ensemble des éléments (Ω) fasse 1.

Mais cela signifie-t-il qu'il n'existe pas de loi de probabilité équiprobable (uniforme) sur \mathbb{N} ?

De Finetti voulait que l'on puisse parler d'une loterie où le nombre de billets serait infini et pour laquelle chaque ticket aurait la même probabilité d'être sélectionné. S'agit-il d'un rêve inaccessible ou d'une nécessité légitime?

Il faut remarquer que l'axiomatique de Kolmogorov permet de définir mathématiquement, quel que soit l'entier n , la loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$. Mais la limite quand n tend vers l'infini de la suite "d'existence d'une loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$ " est la non-existence de cette loi uniforme. On ne pourrait donc pas être équiprobable (ou *indifférent*) sur une infinité dénombrable d'alternatives mais on peut l'être sur l'infinité, infiniment plus vaste, comme par exemple celle de l'intervalle réel $]0,2]$.

Une solution à cette difficulté se trouve certainement en utilisant le concept de nombre infinitésimal (IP) et l'ensemble des hyperréels (${}^*\mathbb{R}$):

Un nombre hyperréel x est dit infinitésimal ou infiniment petit (IP) si $|x|$ est inférieur à tout réel strictement positif ;

infiniment grand (IG) si $1/x$ est infinitésimal ; appréciable (AP) s'il n'est ni infinitésimal ni infiniment grand.

Un nombre infinitésimal positif (IPP) est donc un nombre non-réel strictement supérieur à 0 mais inférieur à tout nombre réel strictement positif. Ce concept peut sembler déconcertant et les critiques en ont fait un objet mathématique actuellement à la marge. En effet, par exemple, si ε est un IPP, alors 3ε est également un IPP et de surcroît, $\varepsilon = 3\varepsilon > 0$!

L'axiomatique de Kolmogorov impose que toute probabilité soit un nombre réel (axiome III). Précisément, toute probabilité appartient à $[0,1]_{\mathbb{R}}$. Si l'on assouplit cet axiome en demandant que toute probabilité appartienne à $[0,1]_{H_{\mathbb{R}}}$, que se passe-t-il ?

Dans l'ensemble des hyperréels, certaines propriétés sont particulièrement intéressantes. Par exemple, si l'on procède au calcul d'une somme infinie de nombres infinitésimaux positifs, cette somme peut prendre par convention la valeur souhaitée. Pour ce qui nous préoccupe ici, en particulier, si ε est un IPP alors on peut définir que pour tout entier k :

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon = k\varepsilon = \varepsilon \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon = \infty\varepsilon = 1$$

Aussi, pour toute somme finie de nombres IPP, chaque nombre IPP se comporte comme le nombre 0. En revanche, pour une somme infinie, le comportement de cette somme n'est qu'une question de convention. Convention permettant de réconcilier l'offre proposée par une théorie avec la demande conceptuelle: Par exemple, *définir une loi équiprobable sur \mathbb{N}* .

NB : Dans la théorie des probabilités de Kolmogorov, le concept d'infinitésimal est en réalité bien présent. En effet,

selon Kolmogorov, l'événement impossible est de probabilité nulle mais un événement de probabilité nulle n'est pas nécessairement impossible. Cela est clairement contraire au sens commun de l'idée d'une probabilité nulle. Aussi, même si cela n'est pas dit et encore moins axiomatisé par Kolmogorov, les nombres infinitésimaux flottent comme un spectre au-dessus de sa théorie. Comment expliquer raisonnablement la non-équivalence entre probabilité nulle et événement impossible si ce n'est en introduisant clairement et formellement le concept de probabilité infinitésimale?

Dans le cas d'un ensemble fini d'éléments, le concept de probabilité infinitésimale se confond avec celui de probabilité nulle. Aussi, l'extension aux probabilités infinitésimales n'est utile que pour les ensembles infinis et donc intimement liée à l'axiome VI de signa-additivité. Cet axiome n'est nullement mis en cause ici, en effet, Kolmogorov le définit pour des probabilités appartenant à $[0,1]_{\mathbb{R}}$ et nous l'étendons aux probabilités appartenant à $[0,1]_{H_{\mathbb{R}}}$. Donc, en termes d'axiomatique, la seule modification nécessaire consiste en la généralisation de l'axiome III aux probabilités hyperréelles (ou "hyper-probabilités").

La théorie des hyper-probabilités n'est pas nouvelle. Elle se développe sous le nom de *probabilités non-archimédiennes*. En effet, *l'axiome d'Archimède demande que pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande*. Or, les nombres infinitésimaux ne respectent pas nécessairement cet axiome. Aussi, une théorie des probabilités qui intègre les IPP est dite non-archimédienne. L'article le plus significatif sur l'axiomatisation d'une théorie des probabilités non-archimédiennes est probablement (au sens archimédien du terme) celui de Vieri Benci, Leon Horsten et Sylvia Wenmackers (2013) : "*Non-Archimedean Probability*".

Dans cet article, les auteurs utilisent le concept de nombre infinitésimal mais également celui de "*numerosity*" (nombre d'éléments d'un ensemble : $n(\cdot)$). Ce dernier concept est associé à celui de cardinal d'un ensemble. La différence est cependant notable. En termes de cardinalité, si l'on prend l'exemple de l'ensemble \mathbb{N} , il y a « autant » de nombres pairs (*even*) que de nombres impairs (*odd*) mais il y a également « autant » de nombres pairs que de nombres entiers:

$$\text{Card}(\mathbb{E}) = \text{Card}(\mathbb{O}) = \text{Card}(\mathbb{N}).$$

Le concept de *numerosity* conduit à dire plus intuitivement que:

$$n(\mathbb{E}) = n(\mathbb{O}) = n(\mathbb{N})/2.$$

On peut définir la loi *hyper-équiprobable* (ou hyper-uniforme) sur \mathbb{N} de la manière suivante :

- Quel que soit E , un ensemble fini d'éléments de \mathbb{N} , l'hyper-équiprobabilité de E est infinitésimale (i.e. ${}^H P(E) = \varepsilon$).
- Quel que soit k , un entier naturel, et \mathbb{N}_k , l'ensemble des multiples de k l'hyper-équiprobabilité de \mathbb{N}_k vaut ${}^H P(\mathbb{N}_k) = 1/k$.

Cette définition est conforme à l'intuition, mais plus fondamentalement conforme à l'idée du concept de probabilité comme étant le rapport entre un nombre de cas favorables sur un nombre de cas possibles.

5) Indifférence et axiomatique des probabilités

Le principe d'indifférence nous invite à réfléchir au subtil mélange connaissance/ignorance. Les probabilités qu'il engendre sont parfois surprenantes voire déroutantes mais également élégantes et par-dessus tout, cohérentes. En analysant ce qu'un problème nous dit et ne nous dit pas, ce principe dicte les probabilités qu'il convient d'attribuer rationnellement. Toute proposition de solution doit alors être éprouvée pour voir si elle passe le test des raisons suffisantes et insuffisantes. Une distribution de probabilité sera alors solution du principe d'indifférence tant qu'il n'y a aucune raison qu'elle ne le soit pas! Mais n'est-ce pas l'adage de l'application de tout principe théorique ?

Les tentatives de déstabilisation du principe d'indifférence sont nombreuses. Certaines sont grossières et d'autres plus subtiles. Vous en connaissez peut-être d'autres... Avant de les valider et de rejeter ce principe, passer le problème au crible, au crible subtil du principe d'indifférence, dans toutes ses facettes. Une fois cela fait, si vous êtes toujours convaincu d'avoir un contre-exemple solide, vous avez deux solutions : faire partie de ceux qui rejettent encore ce principe ou faire partie de ceux qui se souviennent qu'une théorie, aussi complexe qu'elle soit, ne peut pas embrasser tous les problèmes du monde.

Mais, comme je le soulignais en introduction, le principe d'indifférence tel que formulé par Keynes est en négatif. En tant que tel, il ne peut constituer, selon moi, un des axiomes d'une théorie des probabilités. C'est pour cela qu'il me semble nécessaire de le rendre positif. Il ne serait plus ce qu'il convient de croire et de mesurer en termes de probabilité lorsque notre ignorance est à son comble. Il serait ce que nous devons croire, tant qu'il n'est pas fait la preuve du contraire. Aussi, la

formulation que je préconise pour la suite est de la forme suivante :

Soit E une collection d'éléments $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_n$, que nous appellerons des événements élémentaires, $P(E_i)=1/n$ tant qu'il n'existe aucune raison qu'il en soit autrement.

Ainsi, le *principe d'équiprobabilité* est fondé non pas sur notre ignorance mais bien sur notre connaissance (celle de la collection E). Il dicte le chemin qu'il convient de prendre, maximisant systématiquement l'entropie des possibles, utilisant toute l'information, rien que l'information.

Baucoup se sont essayés à théoriser le concept de probabilité, le tableau 1 reprend les principales théories.

Théories	Principe	Auteur principal	Infini	Science connexe
Théorie Classique	Cas favorables sur cas possibles	Laplace	Non	Physique
Théorie logique	Degrés rationnel de croyance	Keynes	Non	Logique
Théorie subjective	Degré de croyance individuelle	Ramsey	Non	Psychologie
Théorie Fréquentielle infinie aléatoire	Fréquence limite	Von Mises	Oui	Mathématique
Théorie Fréquentielle infinie non aléatoire	Fréquence limite	Reichenbach	Oui	Mathématique
Théorie Fréquentielle finie	Fréquence finie	Hàjek	Non	Statistique
Théorie de la propension	Disposition expérimentale	Popper	Non	Physique
Théorie Mathématique	Théorie de la mesure	Kolmogorov	Oui	Mathématique

Tableau 1 : Principales théories des probabilités

Ce qui nous intéresse principalement ici c'est que la plupart des théories proposent en réalité un principe d'attribution des probabilités. En fait, toutes sauf une : celle de Kolmogorov. En effet, la théorie la plus connue, la plus enseignée, et celle qui fait le plus consensus (même si le consensus n'est pas total), c'est une théorie des probabilités qui ne dit rien sur l'attribution des probabilités ! Or, point de calcul concret des probabilités sans probabilités. Kolmogorov précise lui-même : *Il s'agit d'une théorie axiomatique au même titre que l'algèbre ou la géométrie, indépendante des interprétations concrètes usuelles de ses éléments et leurs relations*. Moins on en suppose, plus on est consensuel ! Mais c'est la force des théories les plus consensuelles (on discutera de la théorie Von Neumann et Morgenstern qui est moins consensuelle même si elle est très majoritaire et tentera de comprendre son fondement).

Pour toutes les autres théories des probabilités, il est question des fondements de l'attribution des probabilités. Que ceux-ci soit logiques, physiques, statistiques, relatives à notre connaissance, objective ou subjective, faisant intervenir l'infini ou non, il est question du concept philosophique des probabilités, de leurs sens et de la manière de les déterminer ou de les interpréter. Oui, de les interpréter... et c'est la question de fond. Pour interpréter une probabilité, il est nécessaire de la définir. Kolmogorov en fait un objet mathématique dont l'abstraction est poussée à l'extrême. C'est mathématiquement parlant très séduisant mais cela ne nous dit rien sur la construction concrète de ces probabilités. Dans l'ensemble des théories constructives et interprétatives des probabilités, la plus consensuelle est encore la plus abstraite. Il s'agit de la théorie fréquentielle infinie aléatoire de Von Mises. Celle-ci voit la probabilité comme la fréquence d'un évènement dans une suite infinie et aléatoire d'évènements.

Dire par exemple qu'une pièce a une probabilité de $1/2$ de tomber sur pile, c'est poser qu'en lançant la pièce une infinité de fois, la fréquence relative de pile sera précisément de $1/2$ et qu'il n'existe aucune régularité dans cette suite. Voilà un axiome délicat ! Il intègre l'infini dans le concept même de probabilité mais également l'idée d'indépendance et d'aléatoire. Mais peu importe le caractère théorique d'un axiome, de toute façon, c'est ce que l'on peut en déduire qui est essentiel. En l'occurrence, c'est principalement cette conception de la probabilité qui est aujourd'hui à la base de la statistique. C'est la statistique qui nous dit comment attribuer les probabilités selon cette définition. On parle alors d'estimation de la probabilité et plus d'attribution. Mais le sens est en réalité le même. Les méthodes d'estimation sont nombreuses mais la plus précieuse, est sûrement celle du maximum de vraisemblance. Son principal écueil est qu'elle nécessite des observations et un modèle a priori. Par exemple, le lancer d'une pièce a deux issues possibles et modéliser les probabilités de ces issues est souvent réalisé avec la loi de Bernoulli. Cette loi dépend d'un unique paramètre p que l'on estimera par la fréquence observée de l'issue d'intérêt. On lance la pièce et elle tombe sur pile. L'estimation par maximum de vraisemblance sur la loi de Bernoulli nous demande alors d'attribuer une probabilité de 1 à pile et de 0 à face. Bien sûr, il s'agit d'une estimation temporaire en attendant d'avoir plus d'observations et donc, plus de précisions.

C'est là que je voulais arriver. En statistique, on estime (on attribue) des probabilités au fur et à mesure que de l'information nous parvient. A chaque nouvelle information, on actualise l'estimation et on augmente la précision, la confiance, la crédibilité, la fiabilité de cette estimation. Après un lancer, la probabilité estimée par le maximum de vraisemblance est nécessairement de 1 ou 0. On comprend

que cette estimation est très peu fiable, très peu crédible et pour autant on ne remet pas en cause cette estimation ; c'est celle du maximum de vraisemblance dont les propriétés mathématiques sont sans égales. Maintenant que pouvons-nous dire des probabilités de la pièce avant le premier lancer ? Le maximum de vraisemblance ne nous dit rien. Pourtant nous avons de l'information. Nous savons que seules deux issues sont possibles : pile ou face.

Utiliser, à ce moment premier, le principe d'équiprobabilité, c'est initialiser les probabilités afin de leur donner la seule valeur rationnelle avant l'observation de lancers. Le principe d'équiprobabilité est fondamentalement un principe statistique. C'est un principe d'estimation rationnelle des probabilités premières. Evidemment la fiabilité de cette estimation est très faible mais est-elle plus faible que celle issue de l'estimation par maximum de vraisemblance avec l'observation d'une issue ? C'est loin d'être évident !

Je ne développerai pas ici comment actualiser les probabilités premières, issues du principe d'équiprobabilité une fois l'observation d'un lancer. Ce n'est pas mon propos. Mais on peut penser à la loi de succession de Laplace qui donnera $(1/3 ; 2/3)$, ou au maximum de vraisemblance $(0 ; 1)$, à l'inertie doxastique $(1/2 ; 1/2)$, etc...

Ce qu'il faut retenir c'est que le *principe d'équiprobabilité* est un principe d'estimation statistique. Même s'il est de fiabilité non-quantifiable, il a la fiabilité de la rationalité de sa construction et l'impartialité de l'entropie maximale. Applicable au cas discret comme au cas continu, rationnel et cohérent, il doit être utilisé pour attribuer les probabilités du premier instant, à moins... A moins de renoncer à toute estimation initiale et donc renoncer à l'information du nombre de possibles et de ses conséquences rationnelles.

Axiomatique des hyper-probabilités (2018)

Soit E une collection d'éléments ξ, η, ζ, \dots , que nous appellerons des événements élémentaires, et \mathfrak{F} , l'ensemble des sous-ensembles de E ; les éléments de l'ensemble \mathfrak{F} seront appelés des événements aléatoires.

I. \mathfrak{F} est une σ -algèbre.

II. \mathfrak{F} contient l'ensemble E .

III. A chaque ensemble A de \mathfrak{F} est assigné un nombre **hyper-réel non-négatif** $P(A)$. Ce nombre $P(A)$ est appelé la probabilité de l'événement A .

IV. $P(E)=1$ et **$P(\xi) = P(\eta) = P(\zeta) = \dots$, tant qu'il n'existe aucune raison qu'il en soit autrement.**

V. Si A et B n'ont aucun élément en commun, alors $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

VI. Soit $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$, une suite décroissante infinie d'événements de \mathfrak{F} pour laquelle $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \dots = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$

Chap. 2 : Indifférence et préférences

Sur l'axiomatique de Von Neumann et Morgenstern



Pour introduire la question de l'axiomatique de Von Neumann et Morgenstern, commençons par un exemple célèbre : le problème d'Ellsberg.



Another example yields a direct test of one of the Savage postulates. Imagine an urn known to contain 30 red balls and 60 black and yellow balls, the latter in unknown proportion. (Alternatively, imagine that a sample of two drawn from the 60 black and yellow balls has resulted in one black and one yellow.) One ball is to be drawn at random from the urn; the following actions are considered:

	30	60	
	Red	Black	Yellow
I	\$100	\$0	\$0
II	\$0	\$100	\$0

Action I is "a bet on red," II is "a bet on black." Which do you prefer?

En choisissant de parier sur « rouge », votre probabilité de victoire est de $1/3$, cela est clair et directement tiré de la situation. En pariant sur « noire », votre probabilité de gagner dépend précisément du nombre de boules noires. Ce nombre est nécessairement compris entre 0 et 60. En l'état de connaissance du jeu, le principe d'équiprobabilité nous dicte d'attribuer des probabilités égales aux 61 situations possibles. Ou encore, n'ayant aucune raison de croire qu'il y a plus de boules noires que de jaunes (et réciproquement), ce même principe nous conduira alors à attribuer des probabilités égales à ces deux possibles. Ici pas besoin de sophistications particulières, le principe d'équiprobabilité nous dicte d'attribuer une probabilité de $1/3$ au fait de gagner en pariant sur « noire ».

Aussi, votre probabilité de gagner en pariant sur « rouge » est rationnellement égale à votre probabilité de gagner en pariant sur « noire ». Il existe une différence entre ces deux probabilités. La première garantit un gain moyen en cas de répétition du jeu alors que la deuxième ne garantit rien en moyenne. Dans les recherches d'Ellsberg, une grande majorité de personnes préfère parier sur « rouge ».

Cette préférence est-elle rationnelle ?

Est-il rationnel de préférer une probabilité donnée, issue de notre connaissance plutôt qu'une probabilité estimée, issue rationnellement de notre ignorance ?

Quelle somme d'argent est-il rationnel de payer pour avoir le droit de parier sur « rouge » plutôt que sur « noire » ?

Mais arrivons-en au propos principal de ce chapitre.

La théorie des préférences, celle qui est à la base de l'axiomatique de Von Neumann et Morgenstern définit l'indifférence par la négation. Si A n'est pas strictement préféré à B ($A < B$) et B n'est pas strictement préféré à A ($A > B$) alors A et B sont indifférents ($A \approx B$).

Lorsqu'il s'agit de faire un choix entre A et B, soit $A > B$ et il convient de choisir A soit $B > A$ et il convient de choisir B. Qu'en est-il du cas où $A \approx B$. Et bien, à moins de finir comme l'âne de Buridan qui mourut face à un seau d'eau et un picotin d'avoine, ne trouvant aucune raison de commencer par l'un ou l'autre, il ne peut être recommandé que de choisir avec équiprobabilité A ou B. En effet, l'idée qu'en l'absence de préférence, ne rien choisir ou encore suspendre notre décision jusqu'à la Saint-Glinglin est toujours possible. Mais si le choix doit être fait ici et maintenant, quoi de plus rationnel que l'équiprobabilité ?

Je ne peux pas faire l'économie ici de remarquer que l'indifférence dans le cadre du choix rationnel conduit à s'en remettre à l'équiprobabilité, celle-là même que préconise le principe d'indifférence lorsqu'il n'y a aucune raison de croire à une issue plutôt qu'une autre. Mêmes mots et mêmes conséquences...

Notre propos est ici de tenter de mettre au centre d'une axiomatique sur les choix rationnels, non-pas les préférences mais l'indifférence. L'indifférence tant qu'il n'y a pas de raisons suffisantes de préférer l'un à l'autre. Comme pour le principe d'équiprobabilité, il s'agit de produire un axiome sur l'indifférence, définie positivement et non par négation. Mais on ne peut réduire l'indifférence à sa seule conséquence en termes de choix. Il faut aller plus loin en analysant quelques problèmes de la théorie actuelle du choix rationnel telle qu'elle est proposée par Von Neumann et Morgenstern.

Il s'agit d'une théorie fondée sur les préférences et articulée autour de probabilités.

1) Préférences : l'axiomatique de Von Neumann et Morgenstern

L'axiomatique de Von Neumann et Morgenstern (1994)

Considérons un système U d'entités u, v, w, \dots Sur U , donnons une relation, $u > v$, et pour tout nombre α ($0 < \alpha < 1$), une opération

$$\alpha u + (1 - \alpha)v = w.$$

Ces concepts satisfont les axiomes suivants :

(A) $u > v$ est un ordre complet sur U .

Cela signifie : on écrira $u < v$ lorsque que $v > u$. Alors :

(A :a) pour tout couple u, v une et seulement une de ces trois relations existe :

$$u = v, \quad u > v, \quad u < v.$$

(A :b) $u > v, v > w$ implique $u > w$.

(B) Ordre et combinaison

(B :a) $u < v$ implique que $u < \alpha u + (1 - \alpha)v$

(B :b) $u > v$ implique que $u > \alpha u + (1 - \alpha)v$

(B :c) $u < w < v$ implique l'existence d'un α avec $\alpha u + (1 - \alpha)v < w$.

(B :d) $u > w > v$ implique l'existence d'un α avec $\alpha u + (1 - \alpha)v > w$.

(C) Algèbre des combinaisons

(C :a) $\alpha u + (1 - \alpha)v = (1 - \alpha)v + \alpha u$.

(C :b) $\alpha(\beta u + (1 - \beta)v) + (1 - \alpha)v = \gamma u + (1 - \gamma)v$
où $\gamma = \alpha\beta$.

Le fait que la préférence soit première est clairement signifié. C'est autour de la relation $u > v$ que Von Neumann et Morgenstern développent leurs axiomes. Tout de suite après

apparaît un réel α ($0 < \alpha < 1$) qui fait clairement penser à la probabilité d'un événement que l'on ne suppose ni impossible, ni certain. Enfin, apparaît une relation de combinaison. Elle impose l'existence d'une entité w telle que $\alpha u + (1 - \alpha)v = w$. C'est ici que l'on voit apparaître le concept de loterie et l'équivalence entre une loterie aléatoire $\alpha u + (1 - \alpha)v$ et une certitude w . Ils sont en train de définir un espace vectoriel sur les préférences en se basant sur des loteries. Mathématiquement c'est bien vu ! En effet, ces espaces sont extrêmement bien connus, simples, consensuels et finalement naturels. Mais peut-on représenter correctement les préférences par équivalence avec des loteries. Et plus précisément, les axiomes (B :c) et (B :d) sont-ils si évidents en soit ?

Pour mémoire ces axiomes permettent de démontrer que les préférences entre des loteries doivent se fonder sur la maximisation de l'utilité espérée des loteries : à chaque loterie, on peut faire correspondre un nombre réel et on doit rationnellement choisir celle (ou parmi celles) dont l'utilité espérée est maximale. Aussi, si je vous propose les deux loteries suivantes : gagner 1000 euros sûrement ou gagner 3000 euros avec probabilité $\frac{1}{2}$, si votre utilité est linéaire et que vous êtes rationnel, vous devez préférer et choisir l'incertitude des 3000 euros car l'espérance de gain est de 1500 euros. Mais, est-ce votre choix ? Et si tel n'est pas votre choix, êtes-vous irrationnel pour autant ?

2) Préférences et répétition : la critique d'Allais



Maurice Allais, publie en 1953 deux articles critiquant vivement l'axiomatisation de Von Neumann et Morgenstern en s'attaquant à la pertinence de la réduction d'une loterie à sa simple utilité espérée.

Maurice Allais refuse que la rationalité devant le risque soit dictée par cette utilité espérée. Plus précisément il critique l'espérance morale de Bernoulli qui, dès 1738, introduit ce concept pour tenter de résoudre le paradoxe de St Pétersbourg. L'idée est alors que le choix rationnel entre plusieurs situations risquées (des loteries), devrait se fonder sur la maximisation de cette espérance morale, somme du produit des utilités des gains possibles par les probabilités de ces gains. L'espérance morale a pris le nom d'utilité espérée dans les années 40. Il écrit en 1953 dans son article « Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Américaine » :

D'après le principe de Bernoulli, à tout gain g de probabilité p on peut faire correspondre un indicateur $B(g)$ tel que la valeur V d'une perspective aléatoire donnant des probabilités p_1, p_2, \dots, p_n de gagner des gains g_1, g_2, \dots, g_n soit donnée par la relation $B(V) = \sum_i p_i B(g_i)$. [...] On peut considérer que la thèse centrale des partisans de la formulation bernoullienne est que pour tout individu rationnel il existe nécessairement un index $B(g)$ tel que la valeur V de toute perspective aléatoire soit donnée par la relation

$$(7) \quad B(V) = \sum_i p_i B(g_i) \quad \text{avec} \quad (8) \quad \sum_i p_i = 1,$$

où les p_i sont les probabilités objectives. [...]

Notre thèse est que non seulement la formulation de Bernoulli ne peut, ni représenter convenablement le comportement de

l'homme réel, ni permettre de déterminer la satisfaction absolue, mais que, même pour un homme rationnel, la dépendance entre la valeur V et les gains g est en général d'une forme beaucoup plus complexe:

$$(9) \quad \bar{s}(V) = f(g_1, g_2, \dots, g_n, p_1, p_2, \dots, p_n),$$

de sorte qu'en général il n'existe pas d'indicateur $B(g)$ satisfaisant à la formulation de Bernoulli.

Il est important de rappeler ici que Maurice Allais n'est pas le premier à avoir soulevé cette question fondamentale. A l'époque de Bernoulli, Jean le Rond d'Alembert, connu pour ses doutes sur le calcul des probabilités, remettait déjà en question le bien-fondé de l'espérance morale. Il écrivait :



Je voyais bien que l'espérance était d'autant plus grande ;

*1° que la somme espérée était plus grande ;
2° que la probabilité de gagner l'était aussi.*

Mais je ne voyais pas alors avec la même évidence, et je ne le vois pas encore,

1° que la probabilité soit estimée exactement par les méthodes usitées ;

2° que quand elle le serait, l'espérance doive être proportionnelle à cette probabilité simple, plutôt qu'à une puissance ou même à une fonction de cette probabilité ;

3° que quand il y aurait plusieurs combinaisons qui donnent différents avantages ou différents risques (qu'on regarde comme des avantages négatifs) il faille se contenter d'ajouter finalement ensemble toutes les espérances pour avoir l'espérance totale.

La position de D'Alembert était donc la suivante. Soit on remet en cause le calcul des probabilités (et on peut par exemple se

référer alors à ses réflexions sur les probabilités des suites mêlées et non-mêlées), soit on accepte ces calculs mais alors, on doit moduler l'influence de ces probabilités via une fonction (qui reste à déterminer). Et enfin, lorsque la loterie comporte de multiples gains, il pose la question de la linéarité de l'espérance morale.

Dans tous les cas, la maximisation de cette espérance morale ne peut être le critère ultime de la décision rationnelle en présence de risques.

Afin de démontrer que la théorie de « l'école américaine », justifiant mathématiquement la position de Daniel Bernoulli, ne décrit pas le comportement de tous les individus rationnels, Maurice Allais expérimente auprès de différents publics, un ensemble de situations basées sur des choix entre loteries. En 1953, il publie un premier article dans le journal de la société statistique de Paris sous le titre : *La psychologie de l'homme rationnel devant le risque : la théorie et l'expérience*. C'est avec ce questionnaire que Maurice Allais met en exergue un paradoxe publié dans la revue *Econometrica* la même année. Il est basé sur les réponses aux questions n°35 et n°36 suivantes:

35. Préférez-vous la situation A à la situation B?

Situation A :	Certitude de recevoir 100 millions. . .	
	10 chances sur 100 de gagner 500 millions.	
Situation B :	89 chances sur 100 de gagner 100 millions.	
	1 chance sur 100 de ne rien gagner .	
		100

36. Préférez-vous la situation C à la situation D?

Situation C :	11 chances sur 100 de gagner 100 millions.	
	89 chances sur 100 de ne rien gagner. .	
		100
Situation D :	10 chances sur 100 de gagner 500 millions.	
	90 chances sur 100 de ne rien gagner. .	
		100

Les répondants affichant leur préférence pour la loterie A par rapport à B préfèrent majoritairement la loterie D à la C. Pourtant, aucune fonction d'utilité ne peut justifier cette double préférence. En particulier, en supposant une utilité linéaire comme la fonction identité, les espérances mathématiques des quatre loteries étant respectivement de 100 ; 139 et 11 ; 50 et il est clair que $E(A) < E(B)$ et $E(D) > E(C)$. Maurice Allais précisait que lui-même préférait A à B et D à C et ne se considérait pas comme irrationnel. Aussi, la théorie de l'utilité espérée, en construction depuis Daniel Bernoulli et conséquence de l'axiomatique par Von Neumann et Morgenstern en 1944 ne serait pas une théorie des préférences de l'individu rationnel devant le risque !

Il semble clair que toutes choses égales par ailleurs, la réflexion théorique et le contre-exemple expérimental de Maurice Allais signeraient la fin de la théorie de l'école américaine (très majoritaire à l'époque et encore aujourd'hui). Mais, ce serait oublier que l'expérience d'Allais était précédée de consignes très précises dont l'une d'entre elles est loin d'être anecdotique:

Chaque question correspond à une offre qui ne se présente à vous qu'une seule fois et qui très probablement ne se représentera jamais à nouveau. Cette hypothèse est absolument essentielle.

Il s'agit donc de répondre aux questions sans faire référence à la répétition possible de l'offre, en nombre fini ou infini. Mais, de leur côté, Von Neumann et Morgenstern construisent leur axiomatique sur ce qu'ils appellent des probabilités objectives dont ils précisent le sens:

« Probability has often been visualized as a subjective concept more or less in the nature of an estimation. Since we propose

to use it in constructing an individual, numerical estimation of utility, the above view of probability would not serve our purpose. The simplest procedure is, therefore, to insist upon the alternative, perfectly well founded interpretation of probability as frequency in long runs. »

On pourrait discuter de l'affirmation «perfectly well founded» en ce qui concerne la théorie fréquentiste des probabilités mais nous l'avons déjà abordé précédemment. L'essentiel est que la théorie de l'utilité espérée est fondée sur une conception fréquentielle de la probabilité et sur la répétition de la situation. Avec cette conception, l'espérance mathématique s'interprète précisément en termes de moyenne à long terme (là-même où s'applique la loi des grands nombres).

Il y a donc une différence de paradigme entre l'expérience d'Allais et la théorie de Von Neumann et Morgenstern. L'un supposant que la situation est unique et les autres qu'elle est par principe répétable un grand nombre de fois. Et cette différence est essentielle. Le livre de Von Neumann et Morgenstern : « Théorie des jeux et du comportement économique » traite de « l'agent économique rationnel ». Son but est donc de théoriser le comportement de celui que l'on nomme « l'Homo œconomicus ». Or, en économie, on traite d'échange, de commerce et fondamentalement de situation qui sont amenées à se reproduire un nombre indéfini de fois. Aussi, l'Homo œconomicus se doit de raisonner, en toute généralité, en supposant que la situation (ou le jeu) se présentera un grand nombre de fois. De ce fait, les probabilités sont supposées objectives et l'utilité espérée sera un gain qui se produira effectivement en moyenne (via les conséquences de la loi des grands nombres). En l'état, l'interprétation des probabilités et de l'utilité espérée semble parfaitement

cohérente avec le sujet que traite précisément Von Neumann et Morgenstern.

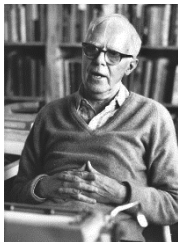
La thèse de Maurice Allais est plus générale et questionne en réalité l'hypothèse que tout individu rationnel (tout Homo sapiens), c'est-à-dire qui cherche à maximiser sa satisfaction absolue, devrait nécessairement maximiser son utilité espérée. La question est essentielle car l'Homo sapiens n'a aucune raison de ne considérer que le cas où la situation risquée se présenterait un grand nombre de fois. En particulier nous devons nous interroger sur le choix rationnel dans une situation risquée unique. Mais pour autant, l'approche de Maurice Allais incarnée par son expérience permettait-elle de contester la théorie des jeux et du comportement économique de Von Neumann et Morgenstern? En l'état, la réponse est négative. Cette expérience montre essentiellement que la théorie de Von Neumann et Morgenstern ne modélise pas l'Homme rationnel devant un risque qui ne se présenterait qu'une fois. Et cela, même si les risques présentés dans le questionnaire sont des probabilités objectives.

La question est alors de comprendre si nous devons, en toute généralité, raisonner comme si les choses devaient se présenter une unique fois ou un grand nombre de fois. Cette question est très délicate et de mon point de vue, sans réponse. En ignorant combien de fois la situation pourrait se présenter, il appartient à chaque individu de choisir sa référence. Cependant nous retiendrons que l'Homo oeconomicus est supposé, en toute généralité, faire référence à une répétition en grand nombre.

3) Préférences et intérêts : Le problème des portefeuilles

Le problème des deux portefeuilles ressemble davantage à une énigme bien posée qu'à un problème profond de théorie du choix rationnel. Pourtant, en l'analysant avec rigueur, notre regard pourrait changer...

Proposé en 1943 par Kraitichik, voici le problème tel que l'expose Martin Gardner en 1982 :



Wallet paradox : le professeur Smith déjeune avec deux étudiants en math.

- Professeur Smith: Laissez-moi vous montrer un nouveau jeu. Posez vos portefeuilles sur la table. Nous allons compter quelle somme a chacun. Celui qui a la plus petite somme gagne tout l'argent de l'autre portefeuille.

- Joe: Hum... Si j'ai plus que Jill, elle gagnera juste ce que j'ai. Mais si elle a plus que moi, je gagnerai plus que ce que j'ai. Aussi, je gagnerai plus que ce que je peux perdre. Le jeu est en ma faveur.

- Jill: Si j'ai plus que Joe, il gagnera juste ce que j'ai. Mais s'il a plus que moi, je gagnerai plus que ce que j'ai. Le jeu est en ma faveur.

Comment un jeu peut-il être favorable aux deux joueurs? Il ne peut pas. Ce paradoxe existe-il parce que chaque joueur affirme à tort que ses chances de gagner ou perdre sont égales? "

Votre première réaction à ce problème est sûrement, étant certain que les deux étudiants ne peuvent avoir simultanément intérêt à jouer, qu'il y a nécessairement une erreur dans le raisonnement des étudiants. Partons de l'hypothèse que dans ce problème précis, les deux étudiants

ne peuvent avoir simultanément intérêt à jouer. Il nous faut trouver en quoi le raisonnement des étudiants est faux.

En 1943, Kraitchik propose une rapide analyse basée sur l'hypothèse que les portefeuilles contiennent une somme aléatoire de loi uniforme entre 0 et 100. Traçant les courbes des distributions des sommes des deux joueurs et observant une symétrie par rapport à la diagonale, il conclut qu'il n'y a aucun avantage à jouer.

En 1982, Gardner ne retient pas l'explication de Kraitchik qui, selon lui, n'explique pas ce qui est faux dans le raisonnement des joueurs. Pour autant, il s'avoue incapable d'expliquer lui-même ce qui serait faux.

En 1997, Merryfield, Viet et Watson propose une analyse fondée sur la question du concept de "fair game". Pour les auteurs, le concept de "jeu équilibré" doit être mis en relation avec la question de la répétition du jeu (et pas avec un seul et unique jeu (one shot game)). Cette approche doit nous faire penser au dilemme du prisonnier pour lequel, il est bien connu qu'entre un jeu unique et un jeu itéré, les stratégies de jeu changent profondément. En associant le concept de "fair game" à celui d'un jeu nécessairement répété, les auteurs distinguent les deux cas, mais ne répondent qu'à celui d'un jeu répété. Il est important de noter que pour étudier le jeu répété, il est nécessaire de mettre une loi de probabilité sur les montants des portefeuilles et que cela rapproche l'analyse de celle de Kraitchik.

En 2001, Carroll, Jones et Rykken explorent la question de la stratégie de jeu de l'un des joueurs en fonction de la loi de probabilité des montants de l'autre joueur (recherche d'un équilibre de Nash). Les auteurs cherchent à voir s'il est possible dans un jeu répété, de construire une stratégie de jeu

optimale. Il n'est donc pas question de tentative de résolution du paradoxe mais simplement d'une digression autour du paradoxe. Néanmoins, on doit noter que toute l'analyse repose aussi sur la répétition du jeu et l'interprétation statistique de l'espérance mathématique (une espérance nous informe sur ce qui se passerait "en moyenne"). Cette interprétation de l'espérance nécessite de probabiliser les montants possibles dans les portefeuilles. On retrouve donc l'approche de Merryfield, Viet et Watson.

Enfin, en 2014, Ross propose un "essai" de quatre pages sur ce paradoxe. Son but affiché (après avoir convenu que ni Kraitchik, ni Merryfield et al., ni Carroll et al., n'avaient répondu à la question de Gardner) est d'expliquer ce qui est faux dans le raisonnement des joueurs. Pour cela, il traite en réalité du paradoxe des deux enveloppes dont il considère que, bien qu'il y ait des différences, l'erreur de raisonnement est de même nature. Il s'agirait du problème de la loi de probabilité sous-jacente dans les deux problèmes. Cette loi devrait être une loi uniforme sur un ensemble infini de valeurs possibles et chacun sait qu'une telle loi n'existe pas.

Il est important de noter que le paradoxe des deux portefeuilles est fréquemment cité dans les articles traitant du paradoxe des deux enveloppes. Toutefois les deux paradoxes diffèrent significativement et ne peuvent être résolus simultanément.

Pour finir, on peut revenir sur la position de Delahaye en 2005 qui présente le paradoxe avec deux cravates. Pour l'auteur, c'est l'application du principe d'indifférence (encore lui !), conduisant à dire que l'on a une chance sur deux de gagner et de perdre qui est à l'origine de l'erreur de raisonnement des joueurs. *"Dans le cas des cravates, trop peu d'informations sont disponibles pour qu'on puisse raisonner en termes*

probabilistes". C'est donc l'utilisation d'un raisonnement probabiliste inadapté (voir impossible) qui génère le paradoxe.

Il y a fort à parier que Gardner ne serait convaincu par aucun des arguments précédents. Le paradoxe des portefeuilles se résout-il en probabilisant les montants dans les portefeuilles? Certes non. En tentant de probabiliser l'ensemble des possibles montants des portefeuilles, on tombe, en toute généralité, sur des distributions soit impossibles soit d'espérance infinie. Mais cela ne résout en rien le paradoxe, cela montre simplement que probabiliser l'ensemble des possibles montants des portefeuilles est sans issue.

Il n'est pas nécessaire de probabiliser les montants pour probabiliser le fait que l'un des portefeuilles ait un montant supérieur à l'autre. Il semble raisonnable, ne sachant rien de l'autre joueur, que chaque joueur se donne (via le fondamental principe d'indifférence) une chance sur deux de gagner et de perdre. Les montants étant fixés, il est clair que l'un a, en réalité, une probabilité de 1 de gagner et l'autre de 0. Mais qui, "moi ou l'autre"? C'est cette incertitude totale qui est traduite par la probabilité $1/2$. Aussi, l'argument de Delahaye, qui refuse cette probabilité de $1/2$ n'est pas convaincant. Ce n'est pas l'attribution d'une probabilité de $1/2$ qui pose un problème dans le paradoxe des deux portefeuilles.

Aussi, en l'état des analyses proposées dans la (courte) littérature spécifique au sujet, aucun argument ne répond à la question de Gardner. Il semble qu'il faille chercher ailleurs, chercher également sans préjuger. Cela signifie qu'il faut envisager l'idée que les deux joueurs aient des raisonnements fondés et cohérents, et que la solution du problème est ailleurs...

Explorons l'idée que le raisonnement de chaque joueur : "JE me donne une chance sur deux de perdre le montant contenu dans mon portefeuille et une chance sur deux de gagner plus que ce montant" soit cohérent, en l'état de connaissance du jeu (on suppose que les deux portefeuilles contiennent des montants différents). La question se déplace alors sur l'implication de ce raisonnement sur le fait que le jeu soit "favorable" pour chaque joueur. Afin de voir la possible implication de l'un à l'autre, il convient dans un premier temps de définir ce qu'est un jeu "favorable"; ce que signifie "avoir intérêt à jouer". Pour Merryfield, Viet et Watson (1997), on a intérêt à jouer si lorsque l'on répète le jeu, en moyenne on est gagnant (on a déjà croisé cette approche avec le problème d'Allais). Mais nous avons vu que cette approche nécessite de probabiliser les montants des portefeuilles et que cela ne mène pas bien loin. Nous ne pouvons pas faire appel ici à la répétition du jeu. Aussi, nous devons raisonner sur un jeu unique et donc définir "l'intérêt à jouer" pour un jeu sans répétition.

Les probabilités mises en œuvre n'auront qu'une interprétation épistémique et ne feront en aucun cas référence à une fréquence quelconque. Si une espérance, par exemple positive, devait être calculée, en aucun cas elle ne signifierait que "en moyenne", on gagne. Il faut donc faire extrêmement attention aux interprétations des calculs qui pourraient être mis en œuvre.

On va supposer que chaque joueur connaît le montant contenu dans son portefeuille. Il y a deux raisons à cela. Primo, il est difficile d'accepter de jouer sans savoir ce que l'on risque de perdre. Deussio, afin de prendre une décision, en théorie des jeux, il est nécessaire de calculer diverses utilités, que l'on soit neutre au risque ou pas.

Aussi, soit x_A et x_B les montants des portefeuilles des joueurs A et B. On suppose donc que A connaît x_A mais pas x_B et inversement... En jouant, A considère qu'il peut gagner X_B (comme x_B est inconnu de A, on note ce montant X_B) avec probabilité $1/2$ et perdre x_A avec probabilité $1/2$. Son espérance de gain (espérance épistémique) qui vaut $E_A=1/2(X_B-x_A)$, est strictement positive à cause de la règle du jeu. Le joueur B aboutit également à $E_B=1/2(X_A-x_B)>0$. Ce qui est clair c'est que soit x_A-x_B est strictement supérieur à 0 soit c'est x_B-x_A . En revanche il n'est pas incompatible que, chacun de son côté, A et B estiment leur espérance comme strictement positive. On pourrait donc avoir simultanément deux espérances épistémiques strictement positives ($E_A>0$ et $E_B>0$).

Quel est le problème? Les deux joueurs savent que le jeu est à somme nulle mais ne connaissent pas les gains possibles. Ce jeu, à information incomplète, crée des espérances simultanément strictement positives. Pour autant, que doit déduire chaque joueur du fait qu'il se donne une espérance de gain positive? Doit-il déduire qu'il a "intérêt à jouer"? Plus précisément, doit-il en déduire qu'il a « un » intérêt à jouer?

Quantifier son intérêt...

La décision de jouer doit être argumentée par l'intérêt qu'il y aurait à le faire. Mais quel est "l'intérêt à jouer" du joueur A? Pour connaître son intérêt il conviendrait de le mesurer, de le quantifier! En effet, la question qu'il doit se poser est : " de combien est mon intérêt?". Or, en l'état de connaissance du jeu, il ne connaît pas son intérêt. Il sait seulement que cet intérêt est strictement positif. Aussi si on lui demandait ne serait-ce qu'un euro pour jouer, il refuserait. Il refuserait parce qu'il n'est pas en mesure d'être certain que $E_A-1>0$.

Si aucun des deux joueurs n'a intérêt à jouer c'est parce que cet intérêt n'est pas quantifié, il est seulement borné par 0, cela n'est pas suffisant pour faire de ce jeu, un jeu "favorable". Pour qu'un jeu ait un intérêt, il faut que le joueur soit prêt à payer une somme définie S pour jouer. Dans le jeu des deux portefeuilles, aucune somme S n'est définissable. Aussi aucun des deux joueurs ne peut identifier, quantifier, un intérêt à jouer.

Il semble, in fine, qu'une action A soit strictement préférée à une action B si et seulement si il existe une somme S , quantifiable et connue du joueur (à l'instant de sa prise de décision), telle que: $Eu(A) > Eu(B) + u(S)$, où $u(.)$ est une utilité strictement croissante non bornée et $Eu(.)$, l'utilité espérée. Le joueur rationnel doit être alors disposé à payer toute somme strictement inférieure à S pour réaliser l'action A plutôt que l'action B .

Pour les deux portefeuilles il est rationnel de croire que l'on a plus à gagner qu'à perdre. Mais l'intérêt à jouer n'est pas quantifiable (i.e. on est incapable de proposer une somme rationnelle à payer pour jouer). Il ne suffit pas de savoir (ou croire) que l'on a plus à gagner qu'à perdre pour avoir intérêt à faire une action plutôt qu'une autre, il faut être en mesure de quantifier cet intérêt.

Ce qu'il faut retenir de ce problème c'est qu'une préférence stricte $A > B$, n'est pas la conséquence de $u(A) > u(B)$ et réciproquement. Ce que l'on doit postuler, c'est que :

$A > B$ si et seulement si il existe $S > 0$ avec $u(S) > 0$ telle que $u(A) > u(B) + u(S)$.

NB : Avec cette définition de la préférence, on peut maintenant répondre à la question des préférences du problème d'Ellsberg. Il n'existe aucune somme strictement

positive rationnellement définissable justifiant la préférence à parier plutôt sur « rouge » que sur « noire ». Aussi, dans le paradoxe d'Ellsberg, seule l'indifférence entre les paris est rationnelle. On peut même ajouter qu'il est donc irrationnel de préférer une probabilité donnée, issue de notre connaissance plutôt qu'une probabilité estimée, issue rationnellement de notre ignorance.

4) Préférences et perception : quelques grains de sucre

En 2008, Rustichini donne un exemple particulièrement important pour comprendre l'indifférence.

Supposons que nous ne disposions que de sucre en poudre pour le verser dans notre café. Nous ne savons pas distinguer clairement une quantité X_1 de sucre en poudre qui comporte 200 grains, et une autre quantité légèrement supérieure qui comporte 250 grains, ni cette deuxième quantité X_2 comportant 250 grains d'une autre quantité X_3 comportant 300 grains encore supérieure. Nous dirons qu'entre X_1 et X_2 nous sommes indifférents, de même qu'entre X_2 et X_3 . Pourtant nous pouvons être capables de distinguer la quantité X_1 de 200 grains de la quantité X_3 de 300 grains et nous dirons donc que X_1 est inférieur pour nous à X_3 . Ce faisant, nous violons la transitivité de la relation d'indifférence, qui, de ce que X_1 est indifférent à X_2 et X_2 à X_3 , nous obligerait à conclure que X_1 est indifférent à X_3 . Notre ordre de préférence est un semi-ordre, disait Luce, parce que sa notion d'indifférence n'est pas transitive.

La question de la transitivité des préférences est une question importante. Von Neumann et Morgenstern axiomatisent qu'il existe un ordre complet (où ordre total) sur les préférences.

Pour être précis, avec l'axiome (A :a) qui postule que *pour tout couple u, v une et seulement une de ces trois relations existe : $u = v, u > v, u < v$* (ils définissent un préordre total).

Mais cet axiome de préordre total traduit-il bien ce que nous sommes ? L'indifférence serait-elle une égalité vague ? On pénètre alors dans la théorie des préférences floues (ou vagues) de Luce (quasi-ordre total). Mais on perd le côté très pratique des ordres complets, qui en particulier permettent une correspondance avec l'ensemble des nombres réels ! Peu importe, nous ne sommes pas ici pour nous faciliter la tâche mais bien pour axiomatiser une théorie du choix rationnel.

Dans la théorie de Von Neumann et Morgenstern (un préordre total), on a :

- 1) $A > B$ ssi $u(A) > u(B)$
- 2) $A = B$ ssi $u(A) = u(B)$

La théorie de Luce, déjà amorcée par Poincaré, se traduit de la manière suivante :

- 1) $A > B$ ssi il existe un nombre q strictement positif et indépendant de A et B tel que $u(A) > u(B) + q$
- 2) $A = B$ ssi $|u(A) - u(B)| \leq q$

Poincaré écrivait en 1935, « *Il arrive que nous sommes capable de distinguer deux impressions l'une de l'autre, tandis que ne saurions distinguer chacune d'elle d'une même troisième* ».

En notant P la préférence ($>$), I l'indifférence ($=$) et R l'impossibilité d'attribuer P ou I (incomparabilité), les approches les plus classiques des préférences sont résumées dans le tableau suivant, proposé par Vincke en 1985.

STRUCTURES DE PREFERENCE LES PLUS USITEES	
Nom	Propriétés particulières
Ordre total	P transitive I limitée aux couples identiques R vide
Préordre total	P transitive I transitive R vide
Quasi-ordre total	$a P b, b I c, c P d \Rightarrow a P d$ $a P b, b P c, a I d \Rightarrow \text{non } d I c$ R vide
Ordre d'intervalle total	$a P b, b I c, c P d \Rightarrow a P d$ R vide
Ordre partiel	P transitive I limitée aux couples identiques
Préordre partiel	P transitive I transitive $a P b, b I c \Rightarrow a P c$ $a I b, b P c \Rightarrow a P c$

Que l'on soit indifférent entre A et B ou que A et B soient incomparables (R), le choix rationnel sera de choisir avec équiprobabilité A ou B. Aussi, la construction d'un ordre d'intervalle total semble nécessairement et suffisamment général. Dans un tel ordre, qui correspond à un quasi-ordre total dans lequel le seuil d'indifférence q est variable, on a :

- 1) $A > B$ ssi il existe une fonction q strictement positive telle que $u(A) > u(B) + q(u(B))$
- 2) $A = B$ ssi $u(A) \leq u(B) + q(u(B))$ et $u(B) \leq u(A) + q(u(A))$

Dans un ordre d'intervalle total, c'est bien l'indifférence qui est au cœur de l'axiomatique. Cette indifférence est caractérisée par la fonction $q(\cdot)$ et ses propriétés sont alors au centre de l'axiomatique.

Si l'on se rappelle les grains de sucre, il est clair que notre seuil d'indifférence dépend du nombre de grains de sucre ou encore de la proportion de grains. Vous l'avez sans doute pensé au moment où vous avez lu le problème. Cette notion de seuil en dessous duquel on est rationnellement indifférent, parce qu'en réalité notre rationalité est limitée par notre connaissance et nos sens, est fondamentale. C'est ce seuil qu'il faut définir précisément afin de distinguer le rationnel de l'irrationnel, le choix rationnel du choix irrationnel.

5) Préférences humaines : retour sur le problème d'Allais

La différence de paradigme entre les approches de Von Neumann et Morgenstern et d'Allais n'est pas incompatible. Il est possible de mettre en relation l'Homo sapiens et l'Homo œconomicus. Pour cela, revenons à la formulation très générale d'Allais.

$$\bar{s}_{HS}(V) = f(\mathbf{g}, \mathbf{p}) = f(g_1, g_2, \dots, g_k, p_1, p_2, \dots, p_k).$$

Daniel Kahneman et Amos Tversky dans leur article de 1979 « Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk », propose une déformation psychologique des probabilités objectives qui permet de traduire l'aversion au risque ou encore l'asymétrie des probabilités selon qu'il s'agisse d'un gain ou d'une perte. En revanche, les auteurs ne prennent pas en compte l'ensemble des gains de la loterie pour définir chaque probabilité psychologique et ne tiennent pas compte

du nombre de répétitions de la situation. De ce qui a été énoncé avant, il semble que l'on puisse préciser la satisfaction absolue d'un Homo sapiens ainsi :

$$\bar{s}_{HS}(V) = \sum_i \bar{p}_{i_{HS}}(\mathbf{g}, \mathbf{p}, n) \times \bar{s}_{HS}(g_i).$$

Où n est nombre de répétitions de la situation.

Aussi, les probabilités psychologiques d'un individu rationnel, les $\bar{p}_{i_{HS}}(\mathbf{g}, \mathbf{p}, n)$, ne sont pas nécessairement les probabilités objectives. En revanche elles en dépendent fondamentalement. Et cette dépendance ne peut se soustraire à la propriété suivante :

(1) Quelle que soit $p_i > 0$,

$$|\bar{p}_{i_{HS}}(\mathbf{g}, \mathbf{p}, n) - p_i| \leq |\bar{p}_{i_{HS}}(\mathbf{g}, \mathbf{p}, n + 1) - p_i|.$$

La relation (1) signifie que, quel que soit l'ensemble fini des probabilités et des gains, l'écart entre la probabilité psychologique et la probabilité objective pour un nombre $n+1$ de répétitions doit être inférieure à l'écart entre la probabilité subjective et la probabilité objective pour un nombre n de répétitions. Il s'ensuit que

(2) Quelle que soit $p_i > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_{i_{HS}}(\mathbf{g}, \mathbf{p}, n) = p_i.$$

La relation (2) signifie que lorsque le nombre de répétitions du jeu tend vers l'infini, la probabilité psychologique ne peut diverger de la probabilité objective.

Il en résulte que :

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_{HS}(V) = \sum_i p_i \times \bar{s}_{HS}(g_i)$$

On reconnaît sans difficulté, dans la relation (3), l'utilité espérée de Von Neumann et Morgenstern. Aussi, l'Homo

sapiens, maximiseur rationnel se doit de maximiser son utilité espérée lorsque le nombre de répétitions tend vers l'infini.

De son côté, l'Homo œconomicus, se doit de maximiser :

$$(4) \quad \bar{s}_{HE}(V) = \sum_i p_i \times \bar{s}_{HE}(g_i)$$

On peut noter que l'Homo sapiens asymptotique (c'est-à-dire l'Homo œconomicus) se doit également d'être neutre au risque. Cette remarque peut sembler anodine mais en réalité elle pose la question de la pertinence des concepts d'Homo œconomicus risquophile ou risquophobe.

Précisément, un individu qui a de l'aversion pour le risque (risquophobe) préférera un revenu certain R à une situation risquée d'espérance mathématique R . Un individu qui est neutre face au risque sera indifférent entre un revenu certain R et une situation risquée d'espérance mathématique R . Un individu qui est risquophile (aime le risque) préférera une situation risquée d'espérance mathématique R à un revenu certain R .

Mais en réalité, cette question de l'aversion ou non au risque est traité par Von Neumann et Morgenstern via la fonction d'utilité qui serait, convexe, linéaire ou concave. Mais en cas de répétition « infinie » de la situation, on doit nécessairement être neutre au risque puisqu'il n'y a plus de risque.

Dans le cas contraire, un tel agent économique serait par définition irrationnel. On peut même se demander dans quelle mesure en se plaçant dans une optique de nombreuses répétitions de la situation et en l'absence d'information complémentaire, l'Homo œconomicus devrait avoir une fonction d'utilité non-linéaire. Aussi, on peut même se poser la question de la pertinence théorique, au sens de Von Neumann et Morgenstern, de supposer une fonction d'utilité non-linéaire.

Aussi, il semble que l'on puisse résumer la relation entre la satisfaction absolue d'un Homo sapiens et celle de l'Homo œconomicus comme suit :

Afin de me résumer, sous l'hypothèse d'égalité des fonctions d'utilités, on a :

$$(5) \bar{s}_{HS}(V) = \bar{s}_{HE}(V) + \epsilon_{HS_n}(V) = \sum_i p_i g_i + \epsilon_{HS_n}(V)$$

$$\text{Avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_{HS_n}(V) = 0 \text{ et } \epsilon_{HS_{n+1}}(V) - \epsilon_{HS_n}(V) \leq 0$$

Exemple : On propose de choisir entre les deux loteries suivantes : (A) gagner 100 et (B) gagner 300 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

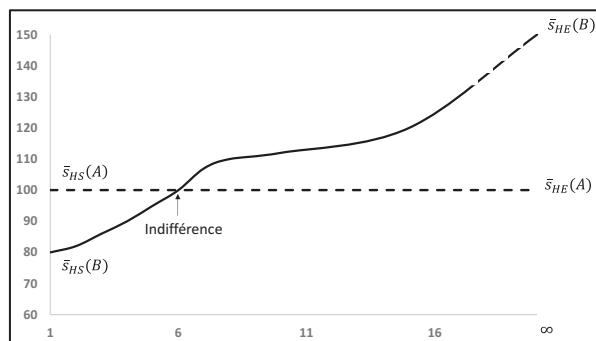
Il est clair qu'un Homo œconomicus, dont la fonction d'utilité serait (ou devrait être) l'identité ($\bar{s}(g) = g$) préférera la loterie B puisque :

$$\bar{s}_{HE}(A) = 100 < \bar{s}_{HE}(B) = 150.$$

Supposons que notre Homo sapiens ait les satisfactions absolues (qui lui sont personnelles) suivantes :

$$\bar{s}_{HS}(A) = 100 \text{ et } \bar{s}_{HS}(B) = 80.$$

Ce que nous dit la relation (5) est représenté dans le graphique suivant :



Cet Homo sapiens a des probabilités psychologiques qui lui sont propres et qu'il ne nous appartient pas de juger en termes de rationalité. Son point d'indifférence, c'est-à-dire le nombre approximatif de répétitions de la situation qui rend égale les satisfactions absolues des deux propositions, est ici pour 6 répétitions. Asymptotiquement, sa satisfaction absolue coïncide avec celle de l'Homo œconomicus et il doit donc rationnellement se comporter comme tel.

Dans l'ensemble des Homo sapiens, les probabilités psychologiques peuvent différer et il peut exister un grand nombre de rationalités différentes. En revanche, lorsque le nombre de répétitions du jeu augmente, quel que soit cet Homo sapiens, il doit se comporter de plus en plus comme l'Homo œconomicus de même fonction d'utilité.

Il est important de préciser qu'il s'agit ici de préférences et non de stratégies dans un jeu séquentiel. Pour être clair, si l'on propose cette loterie 10 fois, et que l'on a la possibilité au fur et à mesure des répétitions du jeu, de prendre en compte les résultats des loteries précédentes, la situation est très différente. Par exemple, un Homo sapiens pourrait commencer par choisir A cinq fois puis B une fois et en fonction du résultat de B, poursuivre avec B ou revenir sur A... Mais c'est un autre problème qui nous rappelle le Dilemme du prisonnier où en fonction du nombre de répétitions connues ou inconnues du jeu, le comportement rationnel peut s'avérer différent de celui d'un jeu unique.

6) Indifférence et axiomatique des préférences

Le choix rationnel face à deux loteries peut s'axiomatiser sur l'indifférence. Une indifférence telle que les relations de préférences et d'indifférence constituent un ordre d'intervalle complet dont les axiomes sont les suivants :

L'axiomatique des préférences humaines (2018)

Considérons un système U d'entités u, v, w, \dots

(A) $u > v$ est un ordre d'intervalle total sur U .

Cela signifie : on écrira $u < v$ lorsque que $v > u$. Alors :

(A :a) pour tout couple u, v une et seulement une de ces trois relations existe :

$$u = v, \quad u > v, \quad u < v.$$

(A :b) $u > v, v = w, w > x$ implique $u > x$.

(B) Indifférence et préférence

Il existe $q(v, n)$ avec $\lim q(v, n) = 0$ et $q(v, n+1) \leq q(v, n)$ telle que

$$(B :a) \quad u = v \Leftrightarrow g(u) \leq g(v) + q(v, n) \text{ et } g(v) \leq g(u) + q(u, n).$$

$$(B :b) \quad u > v \Leftrightarrow g(u) > g(v) + q(v, n),$$

La fonction $g(\cdot)$ est l'utilité espérée telle que définie par Von Neumann et Morgenstern et $q(\cdot, n)$ est une fonction de l'espace des loteries vers l'ensemble des réels.

Chap. 3 : Indifférence et jeux

Sur l'axiomatique de Nash

La théorie des jeux, ceux à sommes nulles ou ceux coopératifs, n'est pas exempte d'indifférence. Pour le comprendre, prenons le célèbre jeu : pierre, papier, ciseaux (chi-fou-mi). C'est un jeu à deux joueurs, simultané et à information complète. Comme tout jeu de ce type, il se caractérise par une matrice des gains. La voici :

Joueur1 \ Joueur2	Pierre	Papier	Ciseaux
Pierre	0	1	-1
Papier	-1	0	1
Ciseaux	1	-1	0

Comment jouer rationnellement à ce jeu fait partie des questions fondamentales de la théorie des jeux. Sans rentrer pour le moment dans les détails de ce que l'on appelle la

solution rationnelle de ce jeu, la théorie des jeux recommande de jouer pierre, papier ou ciseaux avec équiprobabilité. En jouant ainsi, votre espérance de gain est nulle qu'elle que soit la stratégie de jeux de l'autre. En jouant ainsi, votre espérance de gain ne dépend pas de ce que choisit l'autre. En jouant ainsi vous êtes indifférent au choix de l'autre.

Ici, vous ne jouez pas l'équiprobabilité parce que vous êtes indifférent entre pierre, papier et ciseaux, vous ne jouez pas l'équiprobabilité parce que vous croyez que l'autre va jouer l'équiprobabilité, vous jouez l'équiprobabilité parce que c'est la seule façon d'être indifférent à la stratégie de l'autre.

En théorie des jeux à somme nulle, certains jeux conduisent rationnellement à jouer l'indifférence, *l'indifférence à l'autre*. Ici, c'est cette indifférence que je vais tenter d'ériger en principe premier...

1) Indifférence aux choix de l'autre

Pour développer mon propos, il est suffisant de traiter des jeux où deux joueurs se font face, chacun ayant deux actions à sa disposition. En toute généralité, la matrice des gains est la suivante :

	J ₂	
J ₁	A	B
A	aa ₁	ab ₁
B	ba ₁	bb ₁

Chacune des quatre issues possibles du jeu produit des gains (positifs, négatifs ou nuls) à chacun des deux joueurs. Les joueurs jouent simultanément, chacun souhaitant maximiser

son propre gain. Mais il est clair que le gain de l'un dépend, en toute généralité, de son choix mais aussi du choix de l'autre. Comment, dans ces conditions, doit-on jouer ?

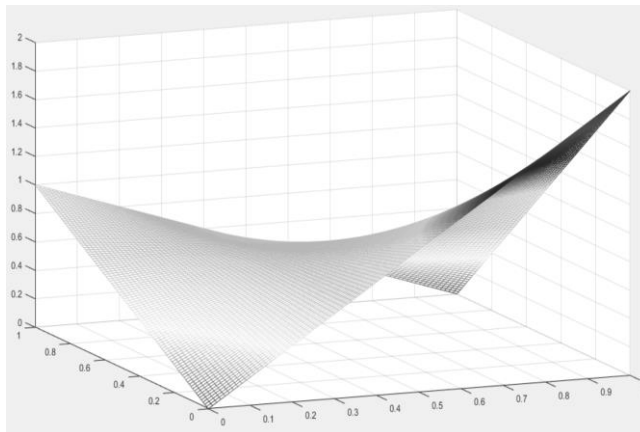
Si l'on suit la théorie de la maximisation de l'utilité espérée de Von Neumann et Morgenstern, il faut agir de manière à maximiser son utilité espérée. Pour ne pas alourdir notre propos, nous allons supposer que les deux joueurs sont neutres au risque et ont une fonction d'utilité qui est la fonction identité. Dans ce cadre, l'utilité espérée est simplement l'espérance mathématique du gain.

Toujours en toute généralité, c'est-à-dire en posant que J1 jouera A avec probabilité p_1 et J2 jouera A avec probabilité p_2 . Les espérances de gain des deux joueurs sont :

$$E_1 = p_1 p_2 a a_1 + p_1 (1 - p_2) a b_1 + (1 - p_1) p_2 b a_1 + (1 - p_1) (1 - p_2) b b_1$$

$$E_2 = p_1 p_2 a a_2 + p_1 (1 - p_2) a b_2 + (1 - p_1) p_2 b a_2 + (1 - p_1) (1 - p_2) b b_2$$

Chacune des espérances est une surface que l'on peut représenter dans un espace de dimension 3. Par exemple pour le jeu de la bataille des sexes (sur lequel je reviendrai) l'espérance de gain a la forme suivante :



La surface d'espérances de gain d'un joueur est entièrement définie par ses quatre extrémités (les gains des quatre issues possibles données dans la matrice du jeu).

En posant l'indifférence comme principe premier de choix rationnel dans tout jeu bimatriciel, on commence par raisonner sur une matrice avec des gains inconnus.

	J ₂	
J ₁	A	B
A	?	?
B	?	?

Dans une telle situation, J₁ (comme J₂) ne peut être qu'indifférent entre A et B. Chacun jouera A ou B avec équiprobabilité.

Ensuite, supposant que je suis le joueur 1, on ajoute de l'information sur les gains :

	J ₂	
J ₁	A	B
A	aa ₁	ab ₁
B	ba ₁	bb ₁

Cette situation est fondamentale. Elle correspond au fait qu'il n'existe aucun moyen, aucun raisonnement, aucune théorie qui permette d'entrevoir de quelque manière que ce soit l'intérêt de l'autre et ses intentions de jeu. Dans un tel cas, trois approches sont seulement envisageables.

Premièrement, appliquer le principe d'indifférence (ou d'équiprobabilité) et raisonner sous l'hypothèse que l'autre

jouera A ou B avec équiprobabilité. Dans ce cas, J_1 (moi) doit maximiser

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}[p_1aa_1 + p_1ab_1 + (1 - p_1)ba_1 + (1 - p_1)bb_1] \\ &= \frac{1}{2}p_1[aa_1 + ab_1 - ba_1 - bb_1] + \frac{1}{2}[ba_1 + bb_1] \end{aligned}$$

La probabilité p_1^* optimale pour J_1 est dépendante des quatre gains possibles. Mais de trois choses l'une :

- 1) Soit $aa_1 + ab_1 - ba_1 - bb_1 > 0$ et $p_1^*=1$.
- 2) Soit $aa_1 + ab_1 - ba_1 - bb_1 < 0$ et $p_1^*=0$.
- 3) Soit $aa_1 + ab_1 - ba_1 - bb_1 = 0$ et l'espérance ne dépend pas de p_1 .

Deuxièmement, jouer, si c'est possible, telle que notre espérance de gain ne dépende de la stratégie de l'autre. C'est-à-dire jouer *l'indifférence à l'autre*. C'est également la stratégie de sécurité mixte (maxmin). Nous y reviendrons au travers de plusieurs exemples...

Troisièmement, jouer en raisonnant sur autre chose que l'espérance de gain. Par exemple on peut choisir l'action qui évite le gain minimum ou encore celle qui permet de tenter le gain maximal. Après tout, ne sachant rien de l'intérêt de l'autre, je peux soit être prudent et me garantir un gain minimal ou encore, tenter à mes risques et périls le gain maximal.

En supposant un jeu unique (one shot), aucune des actions précédentes n'est fondamentalement irrationnelle. Elle dépend seulement de votre tempérament. Maintenant, en se projetant dans un jeu répété, avec absence de mémoire entre les répétitions, c'est l'espérance de gain qu'il convient de prendre en compte et cela avec des probabilités objectives.

De plus, Von Neumann et Morgenstern écrivait : *Les règles du comportement rationnel doivent prévoir de manière définitive la possibilité d'un comportement irrationnel de la part d'autrui.* Nous préciserons plus tard le concept de connaissance commune de la rationalité mais il est clair que Von Neumann et Morgenstern ne suppose pas que la rationalité des joueurs soit connaissance commune.

C'est donc la deuxième stratégie, celle de l'indifférence à l'autre, que je vais explorer plus avant...

2) Indifférence et connaissance commune de la rationalité : la bataille des sexes

La Bataille des sexes (The Battle of the sexes) est un problème de théorie des jeux qui pose la question de la coordination entre deux agents aux intérêts plutôt divergents.

Pour la petite histoire : *un couple s'est donné rendez-vous pour la soirée, mais aucun ne parvient à se souvenir si c'est pour assister à un match de foot ou aller à l'opéra. Le mari préférerait aller voir le foot, la femme aimerait aller à l'opéra. Tous deux préfèrent cependant être ensemble qu'être séparés. S'ils ne peuvent pas communiquer, où iront-ils ?*

Mais peu importe la petite histoire, c'est la matrice des gains qui est essentielle :

H \ F	Foot (A)	Opéra (B)
Foot (A)	1	0
Opéra (B)	0	2
H \ F	Foot (A)	Opéra (B)
Foot (A)	2	0
Opéra (B)	0	1

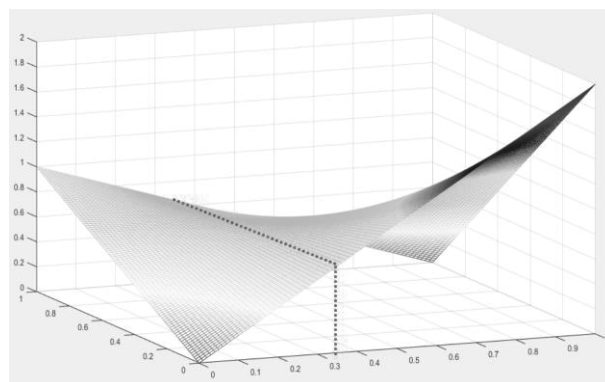
Avant d'analyser le jeu complet, regardons le point de vue de H en supposant qu'il ne connaît rien des intérêts de F. La matrice incomplète des gains et alors la suivante :

	F	
H	(A)	(B)
(A)	2	0
(B)	0	1

Dans ce jeu, en notant p_H la probabilité pour H de choisir l'action A et p_F , la probabilité pour F de choisir l'action A, l'espérance de gain de H vaut :

$$E_H = 2 \times p_H(1 - p_F) + 1 \times p_F(1 - p_H) = 2p_H - p_F(3p_H - 1)$$

Ici, il est possible pour H de jouer de telle manière que son espérance de gain soit indépendante de la stratégie de F. Il est possible pour H de jouer l'indifférence à l'autre (ce n'est pas toujours le cas). Pour cela il est nécessaire et suffisant qu'il joue $P_H=1/3$. En effet, c'est la seule stratégie qui rende constante son espérance de gain et celle-ci est alors de $2/3$. Si l'on regarde sur la surface de son espérance de gain, on retrouve cette solution :



Partant de la solution du principe de *l'indifférence à l'autre*, nous allons maintenant essayer d'établir comment il convient rationnellement de réviser cette stratégie en obtenant l'information des gains de l'autre (J_2). Imaginons dans un premier temps que l'information soit celle-ci :

	F		
H		(A)	(B)
(A)	2	2	0
(B)	0	2	0
		0	1

La nouvelle semble excellente ! Vous vous dites que l'autre va jouer A avec probabilité 1 et qu'en conséquence, vous allez jouer également A avec probabilité 1. Mais attention ! Qu'est-ce qui vous dit que l'autre va jouer A avec probabilité 1 ? C'est en réalité une conséquence de l'hypothèse que l'autre serait rationnel et qu'entre un gain de 2 et un de 0, l'autre choisira nécessairement le gain de 2. Vous raisonnez donc en supposant la rationalité de l'autre...

Mais imaginons que vous ne sachiez rien de la rationalité de l'autre. Dans quelle mesure l'information de ses gains possibles et le fait de savoir qu'il a connaissance de ses propres gains doit-elle vous faire dévier de votre solution initiale $P_H=1/3$? Dans l'ignorance de la rationalité de l'autre, l'information de ses gains possibles n'est pas une information suffisante pour modifier votre position initiale. Votre rationalité vous impose de ne rien changer.

Ce qui est essentiel à ce stade c'est de bien identifier que l'information sur les gains de l'autre n'a d'importance que si vous avez l'information que cet « autre » est rationnel. S'il l'est, de son côté, connaissant ses propres gains potentiels et pas les vôtres, il aura choisi A et le fait de découvrir vos gains

n'y changera rien (puisque ses gains ne dépendent pas de votre action).

Supposons maintenant que chacun des joueurs est rationnel, que chacun sait que l'autre est rationnel, que chacun sait que chacun sait que l'autre est rationnel, etc... De telle sorte que la rationalité de chacun est *connaissance commune* (c'est l'hypothèse de connaissance commune de la rationalité CKR).

Intéressons-nous maintenant au « vrai » jeu de la bataille des sexes. Un jeu bimatrixiel 2X2, symétrique, à information complète, en one shot simultané, dont la matrice des gains est la suivante :

	F	
H	Foot (A)	Opéra (B)
Foot (A)	1	0
Opéra (B)	0	2

Dans ce jeu, chacun va raisonner à partir de la solution de sa stratégie d'indifférence à l'autre. C'est-à-dire que H part de $P_H = P_H(A) = 1/3$ et F part de $P_F = P_F(B) = 1/3$. Précisément, le couple part de la solution $(1/3 ; 1/3)$ qui est la solution sans connaissance commune de la rationalité. Notre problème est donc de comprendre comment l'hypothèse CKR doit faire évoluer la solution. Attention, il s'agit d'une évolution qui n'a rien à voir avec celle qui pourrait apparaître en répétant le jeu avec mémoire. Il s'agit bien d'un jeu en one shot.

Sous CKR, rien ne distingue H et F, chacun est ainsi capable de se mettre à la place de l'autre et donc anticiper nécessairement la stratégie de l'autre. Cela peut sembler peu réaliste mais c'est bien une conséquence directe de CKR. C'est

dans ces conditions que John Nash a développé le concept d'équilibre, théorisant le comportement rationnel à tenir.

Ce jeu possède deux équilibres de Nash en stratégie pure. L'un où chacun joue A avec probabilité 1 et l'autre où chacun joue B avec probabilité 1. Ce sont des équilibres selon Nash dans la mesure où, si l'un de ces équilibres est atteint, aucun des deux joueurs n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa position. Mais les dissymétries de ces équilibres en termes de gains en font des stratégies inatteignables sous CKR.

Il existe également un équilibre de Nash en stratégie mixte, symétrique dans le sens où chaque joueur choisit l'action de gain maximal avec la même probabilité. Pour trouver cet équilibre, H suppose que F probabilise son choix de telle sorte qu'il sera indifférent entre toutes les probabilités à sa disposition (et réciproquement). C'est ce que l'on appelle le couple de meilleure réponse à la stratégie de l'autre. Ici, l'équilibre de Nash en stratégie mixte est celui où H choisit le A avec probabilité $2/3$ et F choisit B avec probabilité $2/3$. L'espérance de gain de chacun est alors de $2/3$.

Cette solution suppose que H est certain que F va choisir A avec probabilité $2/3$ car c'est la seule manière pour F de rendre H indifférent. Et si chacun des deux joue avec probabilité $2/3$, aucun n'aura unilatéralement aucun intérêt à dévier (puisque chacun est unilatéralement indifférent entre toutes les stratégies mixtes).

Nombreux sont ceux qui s'interrogent sur les fondements et la pertinence de cette solution et plus précisément du raisonnement qui la produit. En effet, « si moi, H, je suis certain que F choisira B avec probabilité $2/3$, pourquoi mon indifférence entre toutes les stratégies mixtes devrait me conduire à choisir précisément A avec une probabilité de

2/3?». Rationnellement indifférent, je devrais choisir le foot ou l'opéra avec équiprobabilité !

On comprend bien que si les joueurs sont à l'équilibre de Nash, ils n'ont aucun intérêt à dévier unilatéralement. Mais l'hypothèse CKR doit-elle conduire à cet équilibre ? Ce qui me semble essentiel à ce stade c'est que l'équilibre mixte de Nash utilise clairement l'hypothèse connaissance commune de la rationalité et sa conséquence directe qui est l'absence de libre arbitre.

En effet, si l'on devait refuser cette perte totale de libre arbitre réciproque, il n'existerait aucune raison d'être certain que l'autre choisirait nécessairement de jouer 2/3. Il s'ensuit que je n'aurais aucune raison de choisir moi-même 2/3.

L'équilibre de Nash fait donc clairement l'hypothèse d'absence réciproque du libre arbitre. Cela n'a rien de problématique en soi. Comment théoriser le choix rationnel en mettant en axiome le libre arbitre ? Certes, en axiomatisant le libre arbitre, la théorie produite serait totalement positive (dans le sens où elle sera capable d'expliquer tout et n'importe quoi). En revanche ses capacités normatives seraient de facto nulles !

Aussi nous devons retenir qu'à aucun moment le libre arbitre ne doit intervenir dans notre raisonnement. L'envie de libre arbitre est louable mais imaginer pouvoir dévier unilatéralement est fondamentalement en contradiction avec l'hypothèse CKR.

Sous l'hypothèse CKR, l'issue de ce jeu symétrique (comme de tout jeu symétrique) sera nécessairement symétrique et nécessairement établie par un raisonnement symétrique. C'est ce que nous pouvons retenir du raisonnement de Nash. Mais s'il est nécessaire, sous CKR, que l'issue soit symétrique et que l'on part de cette nécessité incontestable, l'issue rationnelle

sera alors la solution optimale pour chacun des joueurs, dans l'ensemble des stratégies symétriques. L'issue du jeu sous CKR sera sans rapport avec un quelconque équilibre (un équilibre car on suppose à tort que l'on pourrait dévier unilatéralement) et également sans rapport avec une quelconque Pareto-optimalité (puisque'il s'agit bien que chacun maximise son espérance de gain).

L'issue du jeu sous CKR sera définie par une unique probabilité p (qui est la probabilité que H choisisse A et également la probabilité que F choisisse B) qui rend maximum l'espérance de gain de chacun. E_H qui est égale à $2p_H - p_F(3p_H - 1)$ se simplifiera et sera égale à $3 \times p(1-p)$. Et il en est de même pour E_F . Cette espérance est maximale pour $p=1/2$. L'espérance de gain est alors de $3/4$.

Sous CKR, la stratégie optimale de chacun des joueurs est de s'en remettre au résultat du lancer d'une pièce équilibrée ! Il ne s'agit pas d'un équilibre de Nash, mais il n'est pas question d'équilibre dans un jeu en one shot simultané sous CKR. Il n'est question que d'issue (de solution) rationnelle.

Depuis l'axiomatisation de la théorie des jeux en 1944, de nombreuses situations de jeu restent problématiques. Le dilemme du prisonnier est le plus connu. Mais la bataille des sexes, bien que peu étudiée, est également très riche d'enseignement. Sous CKR, il existe deux équilibres de Nash en stratégie pure et un en stratégie mixte. Mais il n'existe qu'une solution rationnelle, celle qui renonce réellement au libre arbitre, celle qui s'appuie comme il se doit sur la rationalité des joueurs et sa connaissance commune, celle que l'on peut nommer la *CKR-solution*.

La bataille des sexes nous fait réfléchir aux implications jusque-boutiste de la connaissance commune de la rationalité et ses

conséquences sur la théorie des jeux bimatriciels. Dès que la rationalité est connaissance commune l'issue du jeu doit être repensée. Dans la bataille des sexes sans CKR, on ne peut guère espérer rationnellement mieux que les $2/3$ obtenus en jouant *l'indifférence à l'autre*. Sous CKR, la *CKR-solution* du jeu procurera une espérance de gain de $3/4$. C'est plus, c'est mieux, c'est l'avantage de l'hypothèse CKR pour ce jeu.

Mais ne soyons pas dupe ! L'hypothèse CKR n'est pas une hypothèse qui peut raisonnablement entrer dans une axiomatique qui se voudrait tant soit peu positive. Cette hypothèse est une utopie et il faudra vraisemblablement, rationnellement se rabattre sur l'hypothèse de rationalité des joueurs mais sans CKR. Dans un tel cadre, c'est l'analyse des jeux par le principe *l'indifférence à l'autre* qui devient alors la seule stratégie rationnelle.

Pour expliquer sa solution, Nash propose deux raisonnements. L'un fondé sur la répétition du jeu et l'autre plus en direction des jeux uniques. Dans sa version « jeu unique », Nash écrit :

L'axiomatique » de Nash (1950)



« Nous avons procédé en examinant la question: Quelle serait une prédiction «rationnelle» du comportement à attendre de joueurs rationnels au jeu en question? En utilisant les principes selon lesquels une prédiction rationnelle doit être unique, que les joueurs doivent pouvoir la déduire et l'utiliser, et qu'une telle connaissance de la part de chaque joueur de ce que les autres doivent faire ne devrait pas l'amener à agir en dehors de la conformité avec la prédiction, on est amené au concept de solution défini précédemment. »

Mais vous l'avez compris, il y a un problème avec l'hypothèse « *qu'une telle connaissance de la part de chaque joueur de ce que les autres doivent faire ne devrait pas l'amener à agir en dehors de la conformité avec la prédiction* ». Cette hypothèse suppose en réalité qu'un joueur pourrait dévier unilatéralement mais qu'il ne le ferait pas parce qu'il n'y trouverait aucun intérêt. Mais le simple fait de supposer pouvoir dévier unilatéralement est en contradiction avec l'hypothèse « *que les joueurs doivent pouvoir déduire et utiliser la prédiction rationnelle* ». Aussi, il n'est pas nécessaire que la solution d'un jeu soit stable. Nash recherche une solution rationnelle et stable. Il cherche un équilibre. Mais une solution rationnelle ne doit pas nécessairement être stable. Plus encore, il considère qu'une solution non-stable ne sera pas rationnelle.

Dans son interprétation basée sur la répétition du jeu avec mémoire, Nash parle de « mass-action interpretation ». Essentiellement, l'équilibre de Nash serait le point d'attraction (la limite) atteinte en moyenne par des joueurs jouant avec mémoire de nombreuses fois. Cette explication (qui n'est que d'une valeur modérée à ses propres yeux) nous rappelle néanmoins la question de la répétition ou non du jeu, comme c'est le cas pour les différences de points de vue entre Allais et Von Neumann et Morgenstern. Aussi cette interprétation, qui peut trouver une adéquation avec la réalité dans certains cas de jeux répétés avec mémoire, ne saurait en aucun cas justifier la pertinence de l'équilibre de Nash en one shot.

3) Indifférence et irrationalité : Le chantage

Il existe de nombreux jeux qui nous font réfléchir à ce que l'on appelle le chantage à l'irrationalité. On parle aussi de *menace*. Le plus connu est sans doute le jeu de l'ultimatum mais je lui préfère le suivant entre Alter et Ego :

Commençons, comme nous l'avons recommandé, par la matrice de gains de chaque joueur prise indépendamment. Pour Alter, la matrice est la suivante :

	Ego	
Alter	(y)	(R)
(r)	0	0
(A)	1	-N

Avec $N > 2$. Dans un jeu simultané, Alter peut toujours se protéger et jouer r avec probabilité 1 (et gagner 0). Mais il peut également s'interroger sur son espérance de gain en fonction des stratégies possible d'Ego. En l'occurrence, en notant p_A la probabilité qu'Alter joue A et p_R la probabilité qu'Ego joue R, l'espérance de gain d'Alter est la suivante :

$$E_{\text{Alter}} = p_A(1-p_R) - Np_Ap_R = p_A[1-(N+1)p_R]$$

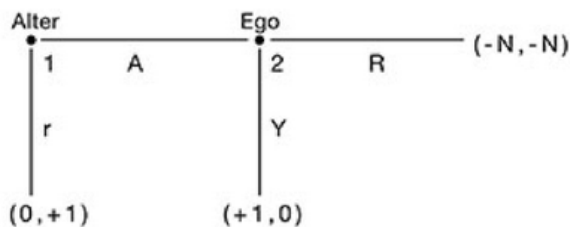
Pour que cette espérance soit supérieure au gain nul de la stratégie de protection, il faut que $1-(N+1)p_R > 0$. Ou encore, $p_R < 1/(N+1)$. C'est alors à Alter de voir s'il croit en cette inégalité. Mais, rationnellement, ne connaissant ni Ego, ni ses intérêts, il n'y a aucune raison de croire une telle chose. Il doit donc rationnellement jouer r avec probabilité 0. On peut noter qu'avec cette stratégie, Alter est indifférent au choix d'Ego.

Maintenant regardons le point de vue d'Ego dont l'information est la suivante :

	Ego	
Alter	(y)	(R)
(r)	1 ?	1 ?
(A)	0 ?	-N ?

Pour ego, la situation est claire et en bonne rationalité, il jouera y avec probabilité 1.

Mais précisons maintenant la réalité du jeu. Il s'agit d'un jeu séquentiel à information complète. C'est-à-dire que les deux joueurs ont connaissance des gains des uns et des autres et que cela est connaissance commune.



Dans ce jeu non simultané (qui a des points communs avec le jeu de l'ultimatum), Alter sait qu'en jouant A, Ego n'a aucun intérêt rationnel à jouer R. Mais sans CKR, Alter ne sait pas si Ego est rationnel. Dans un tel cas, il n'a aucune raison de croire davantage en $p_R < 1/(N+1)$ que précédemment. Aussi, il devrait rationnellement rester sur sa stratégie initiale qui est de jouer r avec probabilité 0.

Sans CKR, la question du chantage à l'irrationalité survient en imaginant les deux joueurs en interaction. Ego peut tenter de faire croire à Alter qu'il est irrationnel et que si Alter lui donne la main, alors il jouera R. C'est alors la force de persuasion

d'Ego qui pourra faire renoncer Alter, qui jouera alors r avec probabilité 1.

Sans CKR, c'est donc en toute rationalité qu'Ego doit tenter de faire croire à Alter qu'il est potentiellement irrationnel. Pour Ego, il est optimal de faire un chantage à l'irrationalité, de bluffer sur sa rationalité.

Une fois encore, l'issue du jeu sans et sous CKR sera différente. Mais contrairement à la bataille des sexes, la CKR est favorable à l'un et l'absence de CKR est favorable à l'autre. Sous CKR, l'issue du jeu sera évidemment (A ; Y).

4) Indifférence et libre arbitre : Newcomb

Nous avons déjà discuté de la question du libre arbitre mais il me semble important d'y revenir en détail. En théorie des jeux, c'est le problème de Newcomb qui illustre subtilement cette question (on pourrait également revenir ici sur le problème de l'âne de Buridan mais en réalité, dès que l'on consent que lorsque l'on est indifférent, il convient de choisir avec équiprobabilité, la question de l'âne de Buridan disparaît). Le problème de Newcomb est énoncé ainsi par Jean-Paul Delahaye :

Il existe un devin, un joueur et deux boîtes désignées par A et B. Le joueur a le choix entre ne prendre que la boîte B ou les deux boîtes A et B. Le joueur sait ce qui suit:

- *La boîte A est transparente et contient toujours un montant visible de 100 euros.*
- *La case B est opaque et son contenu a déjà été défini par le devin:*

- *Si le devin a prédit que le joueur prendra les deux boîtes A et B, alors la case B ne contient rien.*
- *Si le devin a prédit que le joueur ne prendra que la boîte B, la boîte B contient 1 000 euros.*

Même si le joueur sait ce qui précède, il ne sait pas quelle prédiction a été faite avant de faire son choix.

Deux raisonnements s'opposent :

Raisonnement 1 : Si la prédiction a été que je ne prendrai que la boîte B, alors prendre les deux boîtes rapporte 1100 €, alors que ne prendre que la boîte bleue ne rapporte que 1000 €. Si la prédiction a été que je prendrai les deux boîtes, alors prendre les deux boîtes rapporte 100 €, et prendre juste la boîte B rapporte 0 €.

Il est donc clair qu'il faut prendre les deux boîtes.

Raisonnement 2 : Si je prends les deux boîtes, comme cela aura été prévu par devin, il y aura 0€ dans la boîte B et mon gain total sera de 100€. Si je ne prends que la boîte B, comme cela aura été prévu par la devin, il y aura 1000€ dans la boîte B et mon gain total sera de 1000€.

Il est donc clair qu'il faut prendre seulement la boîte B.

Il est possible de mettre ce jeu sous forme de matrice des gains. Pour le moment, oublions que la fée est une fée et supposons le jeu simultané. Mettons-nous dans la situation suivante :

	B		
A		B1	B2
B1	?	1000	0
B2	?	1100	100

Ici, pour A, il est clair que jouer B2 est la stratégie rationnelle.

Maintenant, imaginons que le jeu n'est plus simultané que B joue après A et que B joue sachant le choix de A de la manière suivante : Si A joue B1 alors B joue B1 et si A joue B2 alors B joue B2. Les deux seules issues possibles du jeu sont alors B1-B1 et B2-B2.

	B		
A		B1	B2
B1	?	1000	
B2			?

Il est clair que le joueur A doit rationnellement jouer B1.

Toute la question est alors de comprendre si le problème de Newcomb doit être vu comme le premier jeu ou le deuxième ?

Considérer que le jeu de Newcomb est équivalent au premier jeu, c'est refuser que la rationalité rende prédictible nos actions. C'est supposer qu'il est toujours possible de dévier de ce que la rationalité dicte. C'est donc supposer l'impossibilité de toute capacité normative de toute théorie du choix rationnel.

En revanche, considérer que le jeu de Newcomb est équivalent au deuxième jeu, c'est-à-dire que la rationalité rend prédictible

l'action, où « changer d'avis » est en contradiction avec l'hypothèse de rationalité, où la notion même de choix au sens du libre arbitre est éliminée de tout raisonnement. Il n'est alors plus question de ce que vous faites mais de ce que vous devez rationnellement faire. Vous prenez les deux boîtes si et seulement si vous êtes irrationnel et vous prenez une seule boîte si et seulement si vous êtes rationnel.

Le jeu de Newcomb nous pousse jusqu'au bout de ce que nous impose la rationalité. Sous l'hypothèse de rationalité, vos actions sont nécessairement prédictibles. La raison en a dit que vous n'avez plus aucun libre arbitre. En nous proposant de jouer contre un devin, capable de prédire sans faille nos actions, Newcomb nous met simplement devant une conséquence nécessaire de toute théorie du choix rationnel : La rationalité dicte nos actions et le libre arbitre ne peut faire partie de son axiomatique.

Mais qui imaginerait une théorie, tant soit peu normative, où le libre arbitre serait mis en axiome ?

5) Indifférence et le dilemme du prisonnier

J'en arrive au jeu le plus emblématique de la théorie des jeux : le dilemme du prisonnier. Il n'est pas nécessaire de rappeler l'histoire imagée de ce jeu car comme pour tout jeu, seules les conditions de jeu et la matrice des gains sont nécessaires et suffisantes. Il s'agit d'un jeu à deux joueurs, simultané, symétrique, en one shot. La matrice des gains est de cette forme :

	J2		
J1		(A)	(B)
(A)		3	4
(B)		0	1
		3	4
		0	1
		4	1

Sans CKR, il est clair que J_1 , comme J_2 , joueront rationnellement B. En effet, quel que soit le choix de l'autre, B domine strictement A.

Maintenant, comme dans l'analyse de la bataille des sexes, il nous faut examiner la situation où la rationalité est connaissance commune (CKR). Sous cette hypothèse, l'issue du jeu est nécessairement symétrique (nous en avons déjà discuté). C'est-à-dire que l'issue sera nécessairement soit (A ; A) soit (B ; B). Cela est nécessaire est donc connaissance commune. Chacun préférant rationnellement l'issue (A ; A) à (B ; B), l'issue rationnelle sous CKR sera donc (A ; A).

On peut une fois encore tenter de discuter le fait que cette issue n'est pas « stable », n'est pas un « équilibre » mais pourquoi devrait-on axiomatiser que la rationalité et sa connaissance commune devrait produire de telles propriétés. En quoi l'idée que chacun aurait intérêt à dévier unilatéralement ferait de la solution (A ; A) une solution inadmissible, irrationnelle. Ce qui est irrationnel, c'est une fois encore, d'imaginer ici pouvoir dévier unilatéralement. Une fois encore, il n'est pas question de libre arbitre, il est question de rationalité !

Kenneth Binmore écrit : *Un argument n'est pas rationnel parce qu'il est accepté par une personne rationnelle. Au contraire, une personne est rationnelle parce qu'elle accepte uniquement des arguments rationnels.*

Il faut voir dans cette citation l'idée très précise qu'une personne rationnelle n'a pas le choix de ce qu'elle accepte ou non, de ce qu'elle pense ou non, de ce qu'elle fait ou non.

6) Indifférence et axiomatique des jeux

En posant comme axiome que la solution rationnelle d'un jeu soit nécessairement un équilibre, Nash pose de facto en axiome la connaissance commune de la rationalité mais en oublie sa conséquence première : il n'est plus question de libre arbitre et cela même est connaissance commune.

Dans une telle situation, le besoin d'équilibre n'est ni nécessaire ni suffisant. La solution d'un jeu ne dépend que des connaissances du jeu et des hypothèses faites sur les joueurs. Bien sûr, sans l'hypothèse de rationalité des joueurs, aucune théorie normative ne pourra émerger. Mais l'hypothèse CKR est trop forte pour imaginer produire une théorie tant soit peu positive et je rejoins en cela la position de Von Neumann et Morgenstern. Aussi, il faut poser en axiome la rationalité de chaque joueur mais sans CKR.

Voici l'axiomatique de la solution d'un jeu que je retiens :

Axiomatique de l'issue rationnelle d'un jeu (2018)

- A) Les joueurs sont tous rationnels (chacun cherche à maximiser sa propre espérance de gain)
- B) (A) n'est ni connaissance commune ni connaissance mutuelle des joueurs.
- C) Il existe une unique issue rationnelle (prévisible uniquement par un observateur extérieur).

Pour conclure, un mot sur l'équilibre corrélé d'Aumann. Dans le jeu de la bataille des sexes vu précédemment, il existe un

équilibre corrélé qui consiste à ce que le « Maître du jeu » sélectionne avec équiprobabilité AA ou BB. Chacun ayant connaissance de sa propre affectation, il peut en déduire l'affectation de l'autre. Sans CKR, il est difficile d'imaginer s'il convient de suivre son affectation, ne sachant pas si l'autre est rationnel et suivra son affectation. En revanche, sous CKR, il est clair que le l'issue sera soit AA soit BB. L'espérance de gain de chaque joueur sera alors de $3/2$ (merci Maître !). Ce qui est essentiel c'est que l'équilibre corrélé suppose la connaissance commune de la rationalité. Vous l'auriez compris, bien que très séduisant, avec l'axiomatique proposée, il ne peut être question d'équilibre corrélé.

Avec une telle axiomatique de solution, c'est l'indifférence aux choix de l'autre qui est la solution rationnelle de tout jeu.

Epilogue



L'indifférence est l'origine, le point de départ, tout comme l'ignorance. Nous devons théoriser l'ignorance et ses conséquences en termes de croyances, de préférences. Ensuite, notre connaissance augmentant, nous devons faire évoluer nos croyances, nos préférences, nos actions.

L'axiomatique de Kolmogorov suppose l'existence d'un espace probabilisé, c'est-à-dire d'un ensemble de possibles et d'une valeur (probabilité) associée à chaque sous-ensemble de possibles. Mais attribuer rationnellement les probabilités primaires sur l'ensemble des possibles n'est pas théorisé par Kolmogorov.

L'axiomatique de Von Neumann et Morgenstern suppose l'existence d'un espace de situation et d'une relation de préférence qui est un préordre total. Mais en faisant ainsi, ils font de l'indifférence une conséquence et non une origine.

En définissant le concept d'équilibre, Nash nous conduit à l'indifférence mais une fois encore en partant de l'idée que l'indifférence est une conséquence, une conséquence itérative basée sur les préférences.

Ces théories ont un autre point commun (pour les deux premières du moins). Point commun qui explique pleinement leurs constructions. Il s'agit du corps des nombres réels. Un

corps totalement ordonné, mathématiquement très pratique. Un corps où les préférences entre des loteries se résument à la comparaison entre des réels. Un corps où les infinitésimaux et leurs bizarreries sont bannis.

Ces théories ont deux autres points communs : l'infini et le corps des nombres réels. En optant pour les deux, on définit des probabilités qui ont un sens statistique et des espérances qui sont des gains effectifs moyens. L'hypothèse de l'infini, bien que peu réaliste reste importante. Elle nous dit qu'il existe toujours, en théorie, un moment d'indifférence, un moment au-delà duquel l'espérance de gain devient le critère de décision. Humainement, ce moment peut ne jamais se produire. Mais les théories qui nous intéressent ici ne peuvent faire l'hypothèse d'une borne absolue.

Pour autant, doit-on raisonner systématiquement en se projetant au-delà de ce point d'indifférence ? Nous avons montré que non. Mais nous devons savoir qu'un tel point existe théoriquement.

Travailler dans le corps des nombres réels, un corps totalement ordonné, un corps où les préférences entre des loteries se résume à la comparaison entre des réels, un corps où les infinitésimaux et leurs bizarreries sont bannis, c'est mathématiquement très pratique !

Mais les probabilités doivent-elles être totalement ordonnées ? Les préférences doivent-elles être totalement ordonnées ?

En probabilité, si l'on pose qu'une probabilité est un hyper-réel entre 0 et 1, alors il existe des probabilités logiquement différentes mais indiscernables. Des probabilités ε strictement positives telles que par exemple $5\varepsilon = \varepsilon$. Des probabilités telles qu'il existe une loi uniforme sur N . Oui, de telles probabilités

ne constituent pas un ordre total. Mais notre ignorance et l'imagination qu'elle induit peuvent-elles être théorisées par un ordre total ?

En préférence, si l'on renonce au préordre total et que l'on se contente d'un ordre d'intervalle complet, on renonce à la théorie de l'utilité espérée mais on ouvre la voix d'une théorie rationnelle humaine. Pas une théorie où le libre arbitre est roi. Mais une théorie où l'indifférence est première tant que l'on n'a pas apporté la preuve d'une quelconque préférence.

Pour traiter les problèmes posés par cet ordre total, de cette rationalité insatisfaisante est née la rationalité limitée. Une rationalité qui admet que nous sommes ignorants et non omniscients. Mais comment être rationnel lorsque l'information est limitée à son strict minimum ? Quelle est cette rationalité ultra limitée ?

De mon point de vue, c'est celle qui nous dicte l'équiprobabilité lorsque nous ne connaissons que les possibles, celle qui nous dicte l'indifférence en attendant d'avoir une préférence, celle qui nous dicte de jouer l'indifférence au choix de l'autre tant que nous ignorons ce qu'il est et ce qu'il sait de nous.

Il est confortable de supposer que l'indifférence est singulière, qu'il n'existe pas de zone de « non-droit », qu'il n'existe pas de zone où les probabilités et les préférences ne sont pas totalement ordonnées. Mais en faisant ainsi, on renonce en réalité à la complexité de la rationalité : humaine et paradoxalement sans libre arbitre.

Cet essai sur l'indifférence sous toutes ses facettes n'est que la conséquence des vides dans les théories actuelles. Car il ne faut pas oublier que la théorie des probabilités n'est pas parfaite. Il en est exactement de même pour la théorie des jeux

de Von Neumann et Morgenstern ainsi que la théorie des équilibres de Nash. C'est précisément en étudiant ces vides théoriques que nous arriverons à les faire évoluer : les rendre davantage normatives, davantage positives.

Pour ce faire, c'est sur les axiomes qu'il faut travailler. Pointer précisément ceux qui posent problème et comprendre comment les faire évoluer.

Définir qu'une probabilité est un hyperréel et poser le principe d'équiprobabilité, c'est généraliser l'axiomatique de Kolmogorov pour y faire entrer de nouvelles lois et de nouvelles perspectives.

Définir la préférence comme une évolution de l'indifférence, c'est généraliser la théorie de Von Neumann et Morgenstern pour y faire pénétrer la complexité des préférences humaines.

Définir les choix rationnels en partant de l'indifférence aux choix de l'autre, c'est comprendre les implications de l'hypothèse de connaissance commune de la rationalité et caractériser l'inadéquation de l'équilibre de Nash.

Définir les choix stratégiques en partant de l'indifférence aux choix de l'autre, c'est donner une nouvelle assise à la solution du maxmin pour les jeux à sommes non-nulles, comprendre les implications de l'hypothèse de connaissance commune de la rationalité et s'interroger sur la pertinence de l'équilibre de Nash.

Axiomatiser l'indifférence c'est donc reconnaître que nous naissons ignorants.

Éléments de bibliographie

- [] Abdellaoui M. et Munier B. (2001) Substitutions probabilistiques et décision individuelle devant le risque, Revue d'économie politique Vol. 111, 29-39.
- [] Allais M. (1953) La psychologie de l'homme rationnel devant le risque : la théorie et l'expérience. Journal de la société statistique de Paris, 94, pp. 47-73.
- [] Allais M. (1953) Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine, Econometrica, Vol. 21, No. 4 (Oct., 1953), pp. 503-546.
- [] Benci V., Horsten L. and Wenmackers S. (2013). Non-Archimedean Probability, Milan Journal of Mathematics 81 (1):121-151.
- [] Binmore, Kenneth (1999). Jeux et théorie des jeux, Bruxelles: De Boeck Université.
- [] Burock M. (2005), Indifference, Sample Space, and the Wine/Water Paradox.
- [] Carroll MT., Jones MA. and Rykken EK. (2001). The Wallet Paradox Revisited, Mathematics Magazine Vol. 74, No. 5, pp. 378-383.
- [] De Finetti B. (1936). Les probabilités nulles, Bulletin de Sciences Mathématiques, 275-288.
- [] Deakin M. (2006), The Wine/Water Paradox: background, provenance and proposed resolutions, The Australian Mathematical Society Gazette, 200-205.
- [] Delahaye, J.P. (2005). Les deux cravates. Les nouvelles d'Archimède n°38, pp 16-17.
- [] Flood M. (1950), Some experimental games, Projet RAND, US air force.

- [] Gardner M. (1982). Aha! Gotcha: Paradoxes to Puzzle and Delight, W.H. Freeman and Company, New York, p 106.
- [] Gerville-Réache L. (2016). Mettre de l'eau dans du vin, un paradoxe de l'indifférence ? Implications philosophiques, Implications philosophiques, 2016.
- [] Gerville-Réache L. (2017), Testez votre rationalité. POLE, pp.64.
- [] Gerville-Réache L. (2018), Le très délicat principe d'indifférence. Tangente, Editions Pole, n°182, pp.30-32.
- [] Gerville-Réache L. (2018), Comment se comporter rationnellement face au risque? Tangente, Editions Pole, n°180, pp.40-42.
- [] Hájek A. (2003), What Conditional Probability Could Not Be, Synthese, Volume 137, Issue3, pp. 273-323.
- [] Hammond P. J. (1997). Non-Archimedean Subjective Probabilities, Decision Theory and Games.
- [] Jaynes E. (1973), The well-posed problem, Foundations of Physics 3, 477-492.
- [] Kahneman D. and Tversky A. (1979) Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, Econometrica, Vol. 47, No. 2 (Mar., 1979), pp. 263-292
- [] Keynes (1921), Treatise on Probability, Macmillan London.
- [] **Kolmogorov A. (1950). Foundation of the theory of probability, Chelsea Publishing Company.**
- [] Kraitichik M.(1943). Mathematical Recreations, George Allen & Unwin, London pp 133-134.
- [] Laplace P.S. (1840), Essai philosophique sur les probabilités Bachelier.
- [] Luce R. D. (1956) Semiorders and a Theory of Utility Discrimination, Econometrica, Vol. 24, No. 2, pp. 178-191

[] Lyon A. (2012). Kolmogorov's Axiomatisation and its Discontents. Oxford Handbook of Probability and Philosophy.

[] Merryfield KG., Viet N. and Watson S.(1997). The Wallet Paradox, The American Mathematical Monthly Vol. 104, No. 7, pp. 647-649.

[] Mikkelson J. (2004), Dissolving the wine/water paradox, Brit. J. Phil. Sci. 55, 137-145.

[] Mongin P. (2014) Le paradoxe d'Allais. Comment lui rendre sa signification perdue ?, Revue Economique, 65, pp. 743-779.

[] Nash (1950) Non-cooperative games, thesis.

[] Nozick R. (1969), Newcomb's problem and two principles of choice", in Essays in Honor of Carl G. Hempel.

[] Nover H. and Hájek A. (2004). Vexing Expectations, Mind, Vol. 113(450), 237-249.

[] Samuelson P.A. (1938), A Note on the Pure Theory of Consumer Behavior », *Economica*, vol. 5, pp. 61-71 .

[] Tercieux O. et Menager L. (2006) Fondements épistémiques de concepts d'équilibre en théorie des jeux. *Revue d'économie industrielle*, 114-115, pp.67-84.

[] Van Fraassen B. (1989). *Laws and Symmetry*, Oxford: Clarendon Press.

[] Vincke P. (1985) La modélisation des préférences, IME, rapport n°83.

[] Von Neumann J. and Morgenstern O. (1947), *Theory of Games and Economic Behavior*, 2ème édition, Princeton University Press.



Achevé d'imprimer en France en Décembre 2018.
4, avenue d'Estienne d'Orves - 06000 NICE