



HAL
open science

Le spatial et le géométrique : le yin et le yang de l'enseignement de la géométrie

Catherine Houdement

► **To cite this version:**

Catherine Houdement. Le spatial et le géométrique : le yin et le yang de l'enseignement de la géométrie. (S. Coppé, E. Roditi, et al. coord.). Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques - XIXe école d'été de didactique des mathématiques 2017, Vol.1, La pensée sauvage, éditions., pp.19-45, 2019. hal-03201021

HAL Id: hal-03201021

<https://hal.science/hal-03201021>

Submitted on 20 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE SPATIAL ET LE GÉOMÉTRIQUE, LE YIN ET LE YANG DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Catherine Houdement*

RESUME

Ce cours répond à une commande des responsables scientifiques de l'école d'été : revenir sur des travaux français « anciens » de didactique de la géométrie et enrichir la réflexion par l'étude de travaux internationaux. Ce projet nous a conduit à nous centrer sur une des facettes de la géométrie, le spatial, dont les occurrences semblent très variables selon les pays, aussi bien dans les recherches que dans les curricula. Dans les travaux français de didactique des mathématiques, le spatial est étudié sous deux angles : outiller le citoyen dans ses rapports à l'espace sensible et préciser ses rapports avec la géométrie. Les études françaises sont plutôt basées sur la conception et l'analyse de situations didactiques, liées à une variation des milieux (tailles d'espace, traces graphiques, artefacts), appuyés sur des apports cognitifs concernant la visualisation. Les travaux internationaux pointent l'impact du spatial dans de nombreux apprentissages scientifiques (pas seulement géométriques), notamment par l'étude de corrélations entre réussites à des tests de compétences spatiales et connaissances scientifiques. Les types de tâches qui nourrissent les tests semblent relever de domaines beaucoup plus variés qu'en France, même s'ils sont souvent proposés sous forme papier crayon. A la lumière des travaux internationaux, il serait intéressant d'étudier de façon approfondie l'impact du spatial dans l'apprentissage de différents domaines de savoir.

Mots clefs : géométrie, spatial, raisonnement spatial, visualisation, tailles d'espace

ABSTRACT

This lecture answers an order from the scientific leaders of the summer school: to address "old" French research in didactics of geometry, and to enrich the discussion studying international research. This project led to focus on one of the facets of geometry, the spatial, whose occurrences seem very variable depending on the country, both in research and in curricula. In the French didactics of mathematics, the spatial is studied from two angles: to equip the citizen in his relations to the sensitive space and to clarify the relationships between spatial and geometry. French studies are rather based on the design and analysis of didactic situations, related to a variation of "milieu" (scale of space, graphic traces, artefacts), supported by cognitive contributions on visualization. International studies on education point to the impact of spatial in many (not just geometric) scientific learning, including the study of correlations between successes in spatial skills tests and scientific knowledge. The types of tasks that feed the tests seem to be much more varied than in France, even though often paper-and-pencil tests. In the light of international work it would be interesting to study in depth the impact of spatial in different disciplinary learning.

Key words: geometry, spatial, spatial reasoning, visualization, space sizes

Cette conférence est d'abord un voyage dans la potentialité, non complètement explorée, de travaux français anciens (notamment Berthelot & Salin, 1992). C'est aussi un arrêt sur une facette de la géométrie, le spatial, qui mérite d'être étudiée pour soi, *per se*. C'est le fil du spatial qui guide le texte.

L'étude faite n'est bien sûr pas exhaustive. En particulier ne figurent ni l'étude de travaux français de didactique de mathématiques liés à des formations professionnelles où le spatial est sollicité, ni des recherches françaises dans des champs de savoirs où le spatial est en jeu (par exemple la géographie, les sciences cognitives, la neuropsychologie). Le voyage dans les travaux internationaux montre plus de diversité, déjà dans les articles qui relèvent de l'éducation mathématique.

La finalité du texte est donc aussi de montrer la potentialité d'un domaine multiforme, le spatial, relativement ignoré de la didactique des mathématiques française, en dehors du rôle qu'il peut jouer en géométrie.

* Université Rouen Normandie, ESPE, LDAR (EA 4434), UA-UCP-UPD-UPEC-URN

PROLÉGOMÈNES

1. *Trois fonctions pour la géométrie*

Dans le séminaire national ARDM de janvier 2009, Perrin-Glorian et Salin (2010) rappellent trois fonctions pour la géométrie dans la pensée humaine, à l'instar d'autres auteurs (Brousseau, 1983, 2001 ; Bkouche, 1990 ; Chevallard & Jullien, 1990-91) :

- La géométrie comme modèle de l'espace sensible¹, « *mode de production de connaissances relatives aux objets matériels de l'espace* » (Perrin-Glorian & Salin, 2010, p. 51) qui donne des moyens de prévision et de contrôle des problèmes qui se posent dans l'espace environnant. Bkouche (1990) parle de « *science des situations spatiales* », Chevallard et Jullien (1990-91) considèrent la géométrie comme « *technologie de l'espace, théorie de la maîtrise pratique de l'espace* » (p. 60) et écrivent « *la géométrie part du monde sensible pour le constituer en monde géométrique, celui des points, des droites, des cercles, des sphères, des courbes, des surfaces et des volumes, etc.* » (p. 52).

- La géométrie comme théorie (en acte) de la rationalité (*ibid.*, p. 59).

- La géométrie comme modèle pour d'autres champs de savoir, encore appelée intuition géométrique ou géométrisation ; Bkouche (1990) cite, par exemple, les segments représentant les longueurs, la géométrie comme métaphore.

Nous nous intéresserons aux premier et second points, et surtout au premier point.

2. *Sur les termes modèle, espace*

Le terme modèle est indissociable d'une étude de la géométrie. Notre usage de ce terme dans ce texte est proche de la vision de Streefland² (1985, citée dans Van den Heuvel-Panhuizen, (2003, p. 14)) qui l'utilise dans une conception des mathématiques pour l'enseignement qui part du réel pour aller vers un monde de symboles (mathématisation horizontale, selon Treffers, 1978³, cité dans *ibid.*, p.12). Le modèle correspond au passage de niveaux informels, dont relèvent des représentations sémiotiques personnelles, voire culturelles, d'un problème, tels que schémas, dessins à main levée, à des niveaux plus formels. Ces niveaux plus formels permettent en mathématiques de résoudre une vaste gamme de problèmes, ou, dans d'autres sciences, d'expliquer un phénomène, d'en prévoir l'évolution. Les termes utilisés par Streefland sont *model of* et *model for*. Pour Streefland le passage de *model of* à *model for* est un levier pour élargir la portée d'un modèle construit, prendre du recul sur un premier usage local, apprendre des mathématiques. Le point de vue de Streefland suppose un enrichissement spiralaire du modèle, un *model for* devenant lui-même un peu plus tard ou dans un autre domaine scientifique un *model of*. Nous illustrerons plus loin ce point en géométrie.

Les utilisations du terme espace sont variées. Perrin-Glorian et Godin (à paraître) définissent une « *théorie physique de la géométrie* » qui porte sur les objets d'un espace graphique servant d'intermédiaire entre l'espace « physique » des objets matériels et l'espace théorique d'une géométrie axiomatique.

Pour Chevallard et Jullien (1990-91, p. 50) :

« L'espace de la géométrie euclidienne est le cadre pur des phénomènes géométriques (dont les objets géométriques sont le siège). Il est un ensemble de localisations possibles, un même objet pouvant occuper indifféremment telle ou telle région de l'espace ».

¹ Chevallard et Jullien (1990-91, p. 52) renoncent au terme *espace physique*, car l'espace de la physique comporte masses et forces.

² Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Nieuwe Wiskrant*, 5(1), 60–67.

³ Treffers, A. (1978), *Wiskobas Doelgericht*. IOWO, Utrecht, The Netherlands

Ces deux auteurs distinguent deux points de vue sur la figure (au sens géométrique commun) en dissociant figure comme représentation d'objets de l'espace et figure comme ensemble de points de l'espace. Pour eux, considérer la figure comme représentation d'un objet conduit à des difficultés d'analyse de figures. La figure est « *une représentation (matérielle graphique) de l'ensemble des points de l'espace que l'objet (matériel) vient occuper* » (*ibid.*, 1990-91, p.50). La représentation de la transformée d'une figure par une rotation correspond à la superposition de « *deux états de l'espace entendu comme ensemble des objets qu'il renferme* » ; ce dont rend mieux compte l'écran d'ordinateur où s'allument et s'éteignent des points (pixels).

Nous utiliserons espace sensible, pour rendre compte du réel environnant. Notre étude de la géométrie euclidienne se limitera à la géométrie plane.

3. *Trois paradigmes pour la géométrie plane élémentaire*

Houdement et Kuzniak (1999, 2003a) proposent de considérer la géométrie élémentaire constituée de trois paradigmes : la géométrie naturelle G1, une géométrie déjà schématisée ; la géométrie axiomatique naturelle G2 ; et la géométrie axiomatique formelle G3.

« Les objets de la Géométrie 1 sont des objets matériels, traces graphiques sur le papier ou traces virtuelles sur l'écran d'ordinateur, ou encore maquettes d'objets de l'environnement. Ce sont des épures au sens que lui donnent Chevallard et Jullien (1990-91). Dans les pratiques usuelles, ce sont souvent des objets du micro-espace (Berthelot & Salin 2000) censés représenter, dans un espace petit et propice à des contrôles, des objets réels plus grands ou plus complexes. Ils sont donc le fruit d'une première modélisation même des plus élémentaires : le trait tracé à la règle refuse les aspérités, le cercle tracé au compas est le produit d'une activité instrumentée représentant le « rond ». Ce sont des productions commodes notamment pour la reproduction et la description : le cercle est ainsi plus commode que l'ellipse, pourtant souvent meilleure image du « rond ». C'est dans ce sens qu'il faut comprendre le qualificatif de Naturelle.

(...) La Géométrie 2 prend pour objets d'étude des objets idéels. D'où la nécessité de définitions, d'axiomes, comme chez Euclide « *Le point est ce qui n'a aucune partie. Les extrémités d'une ligne sont des points.* ». Les axiomes proposés dans la Géométrie euclidienne, prototype de la Géométrie II sont fortement appuyés sur les objets de la Géométrie I, conservant ainsi un lien fort avec l'espace sensible, d'où le qualificatif d'Axiomatique Naturelle.

(...) Ses objets [de la Géométrie 3] sont aussi idéels, le raisonnement hypothético-déductif le moteur et la source des nouvelles connaissances. Ce qui la différencie de la Géométrie II est le fait que les axiomes de base ont coupé le cordon avec la réalité et que l'axiomatisation vise à être complète, alors qu'en Géométrie II, vivent des îlots déductifs. La Géométrie III a émergé avec la naissance des géométries non euclidiennes. Elle est culturellement peu convoquée dans les savoirs de l'école obligatoire. » (Houdement, 2007, p. 73-75)

Nous ne reviendrons pas plus en détail sur ces travaux. G1 est un modèle analogique (*model of*) de l'espace sensible. G2 est un modèle théorique (*model for*) de l'espace sensible et *a fortiori* de G1. G3, *a posteriori*, ne se réfère plus à l'espace sensible, ni le modélise. Ces trois paradigmes visent à rendre compte de l'horizon choisi pour la réponse à un problème spatial ou géométrique et de la complexité des jeux qui se jouent dans la pensée géométrique. Mais c'est le concept d'Espace de Travail Géométrique (voir Houdement & Kuzniak, 2006 ; Houdement, 2007, 2011, 2013) qui donne de la puissance à l'entrée par les paradigmes G1 et G2, les plus sollicités dans l'école obligatoire. L'Espace de Travail Géométrique est le giron de la pensée géométrique : l'expert géométrique construit et résout des sous-problèmes dans G1 (notamment par la décomposition/recomposition figurale et/ou dimensionnelle des figures qu'il lit ou trace, Duval, 1994, 2005) pour résoudre des problèmes de G2 (voir notamment le paragraphe 3 de la partie sur le spatial dans les travaux français).

Sur le plan historique, une hypothèse plausible est que G2 a émergé en partie du besoin d'organiser les résultats invariants sur l'espace sensible, dans des traités regroupant les connaissances accumulées. La construction d'un traité (le passage à l'écrit) nécessite l'utilisation d'un principe organisateur. Les *Éléments* d'Euclide, traité de G2, utilisent le

raisonnement hypothético-déductif comme principe, sa finalité est de modéliser le réel environnant, vu comme espace euclidien (Houdement, 2007, à partir de Szabo, 1993⁴).

Sur le plan pratique (et comme finalité d'enseignement), qu'apporte G2 de plus que G1 ? G2 permet de construire et de contrôler la validité d'un résultat spatial sur des objets ou des configurations d'objets quelle que soit la taille de l'objet concerné, de calculer des grandeurs géométriques (longueurs, aires, volumes), en minimisant les mesures, et même des grandeurs aussi grandes ou petites qu'on veut avec une précision aussi fine que souhaitée (Houdement, 2013 ; Houdement, 2017). Bien sûr l'opérationnalisation pratique est liée aux avancées technologiques des instruments de mesure.

Sur le plan didactique, la situation des médiatrices de Brousseau (1983, 2001) permet à l'enseignant de changer l'horizon de travail des élèves (Houdement & Rouquès, 2016) et de les faire basculer vers la recherche de raisons pour lesquelles telle construction, à quelque échelle soit-elle, produit ce qu'elle produit. Le triangle aplati (Berté, 1995-96 ; Floris, 1995) est un autre candidat, plus classique, pour ce basculement. La construction d'un trapèze à longueurs fixées (Houdement & Kuzniak, 2002) est intéressante en formation des enseignants avec la même finalité. Citons aussi Jahncke (2007) qui outille la compréhension de la preuve en G2, en s'appuyant sur la somme des angles d'un triangle.

4. *Des questions toujours d'actualité*

Dans les actes de l'École d'Été de 2007, Bloch et Conne (2009, p. 11) soulèvent deux problématiques toujours actuelles pour l'étude de la géométrie :

- les rapports à l'espace sensible (questions de modélisation),
- les rapports aux signes nécessaires pour cette étude (questions sémiotiques) déjà pointés par Bessot et Vérillon (dir., 1993) : « *Il y aurait donc un espace des signes et des figures dont les sujets feraient l'expérience et avec qui la géométrie entretiendrait un autre rapport que celui d'une simple modélisation* ».

De leur côté, Bloch et Pressiat (2009, p. 67) questionnent l'amont de G1 et laissent ouvertes les questions suivantes :

« Que sait-on des connaissances spatiales des élèves, en amont de tout enseignement géométrique ? Comment s'opère la constitution des références spatiales de la géométrie perceptivo-instrumentée ? Comment se constitue le passage de l'expérience spatiale au fait de pouvoir penser et représenter cette expérience, mais aussi de pouvoir lire des représentations graphiques de l'espace sensible, autrement dit de travailler sur des schémas conventionnels de l'espace sensible ou encore de travailler sur du spatio-graphique (sur les dessins de l'espace) ? ».

Ce texte ne fermera pas ces questions, mais l'ensemble des contributions de l'école d'été devrait permettre d'avancer. En résumé, c'est le fil du spatial que nous tirerons ici, en appui sur des recherches didactiques françaises et sur des travaux internationaux.

DÉFINIR OU DÉBUSQUER LE SPATIAL

1. *Espace sensible*

Dans une première approche, nous assimilons spatial et espace sensible. L'espace sensible est l'espace directement perceptible par les sens (Gonseth, 1945-1955 ; Chevallard & Jullien, 1990-91), il est propice aux expériences et à l'intuition. Mais nos sens sont influencés par nos connaissances. Alors ? L'espace sensible n'existe pas en soi, il n'existerait que des expériences spatiales, des connaissances spatiales... qui se construisent dans l'expérience ou

⁴ Szabó Á. (1993) *Entfaltung der griechischer Mathematik*. Traduction *L'aube des mathématiques grecques* 2000. Paris : Vrin.

le mythe (Keller, 2004, 2006). On appréhende ainsi les objets, créés, construits pour la vie quotidienne, de toute taille (artisanat, architecture), mais aussi dans les arts et par les mythes, notamment les représentations rupestres, les constructions d'autels, de mégalithes. Il s'agit en quelque sorte « *d'externalisation des représentations cognitives de l'espace sensible* », ce que disent Bloch et Pressiat (2009, p.72-73) pour les schémas sur papier rendant compte du trajet de l'extrémité d'une porte qui s'ouvre.

2. *Spatial et géométrie dans la noosphère*

Dans une première approche toujours, on pourrait dire que *spatial* est ce qui est accessible aux sens et relève des formes 1D, 2D, 3D. Le spatial est donc lié à *l'espace sensible*.



Commentaire « *Natural pattern* »



Commentaire : « *Incroyable régularité géométrique des formes naturelles dans le désert saoudien* »

Figure 1. – Les photos de Thomas Pesquet⁵ (décembre 2016)

Le commentaire des photos laisse penser la géométrie comme la perception des régularités du monde naturel, autrement dit un filtre sur le naturel qui repère ce que l'homme sait décrire comme des organisations ; peut-être des invariants que l'homme sait reproduire avec des instruments matériels et intellectuels ; finalement une projection de SA pensée sur le monde perçu. Cette remarque est en résonance avec le point de vue de Keller (2004, 2006) lors de ses travaux sur le Paléolithique. Le *géométrie* semble constitué des organisations des *objets de l'espace* environnant, *puis de l'espace*, faites par l'homme : taille des bifaces⁶ (Keller, 2006, chapitre 1, p. 3-19), construction des maisons (au début du paléolithique, *ibid.* chapitre 2, p. 21). On notera que « *le seul espace structuré des temps paléolithiques était [d'abord] un espace travaillé, et par conséquent local, à portée de main : le nucléus⁷ du sculpteur d'outils, le manche du propulseur (...) la fraction de paroi rocheuse* » (Keller, 2006, p. 29). Cette géométrie des origines « *n'a aucune autonomie par rapport au travail dont elle est la pensée. (...) Cette géométrie est inséparable d'un plan d'action concret, elle n'est pas faite de concepts.* » (Keller, 2004, p. 74). L'intérêt pour le macro-espace, et la réduction à un espace de figures, naît sans doute des mythes et de la sédentarité, qui incitent à observer d'un même lieu les levers et couchers de soleil sur l'horizon (Keller, 2006, p. 31), de construire des alignements et des premières figures géométriques, à partir d'invariants de l'espace sensible : croix des levers et couchers de soleil aux solstices d'été et d'hiver, rectangle contour.

⁵ https://twitter.com/thom_astro?lang=fr

⁶ Un *Biface* désigne un objet façonné plus ou moins complètement, un outil de pierre en forme d'amande. Dans le passage du caillou au *biface*, le plan apparaît comme résultat d'une taille : c'est donc le résultat d'une « déconstruction dimensionnelle » matérielle.

⁷ *Nucléus* indique le reste du débitage d'éclats à parti d'un caillou.

Le spatial des hommes du paléolithique n'est pas le nôtre. Le *spatial* est médié par l'environnement collectif. Considérons l'architecture : notre environnement actuel est plutôt horizontal, vertical, mais pas seulement ; pensons à la rotondité des toits de mosquée ou d'églises byzantines, aux surfaces réglées en béton armé de certains bâtiments (musées, châteaux d'eau).

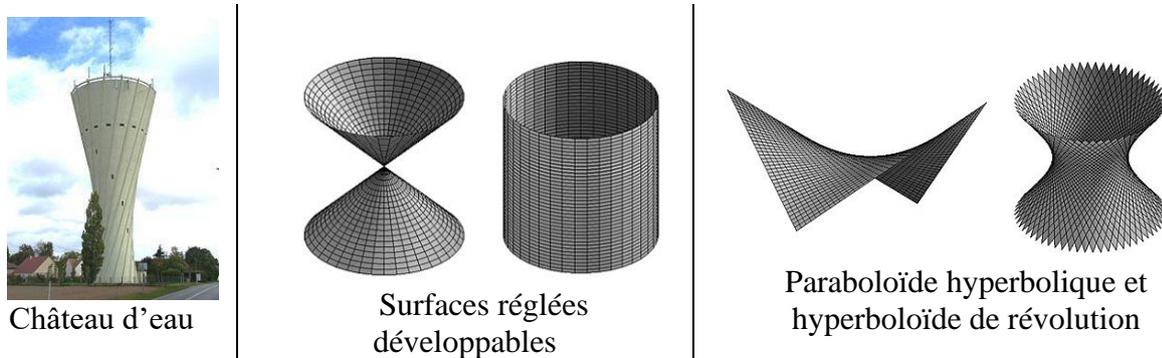


Figure 2. – Constructions en surfaces réglées

La géométrie fait partie de la culture collective, qui véhicule une représentation sociétale des sciences : par exemple quel citoyen qualifierait la forme d'un arbre de géométrique ? Pourtant un arbre a une structure pseudo-fractale (Mandelbrot, 1973). « Une figure fractale est un objet mathématique, telle une courbe ou une surface, dont la structure est invariante par changement d'échelle. Les objets fractals peuvent être envisagés comme des structures gigognes en tout point »⁸. Les objets fractals ne font pas encore partie des figures géométriques usuelles⁹ : pourtant ce sont des mathématisations de beaucoup plus d'objets naturels (arbres, intestins...) que les formes géométriques classiques. Notre perception du spatial s'enrichit grâce aux connaissances géométriques : le chou romanesco a une structure approximativement fractale, le projet de façade du Musée du Caire (2018) affiche un triangle de Sierpinski.

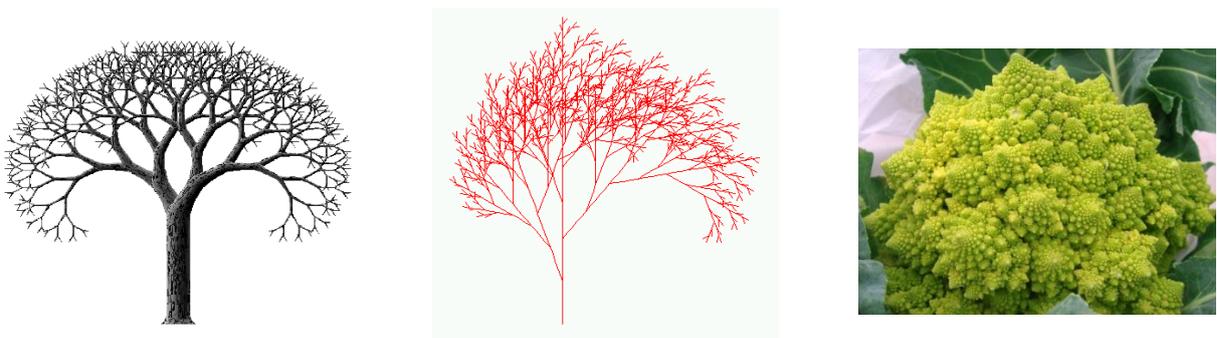


Figure 3. – Arbres fractals dessinés. Photo de chou romanesco

LE SPATIAL DANS DES TRAVAUX FRANÇAIS DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

⁸ Wikipedia (consulté 18/10/2018) <https://fr.wikipedia.org/wiki/Fractale>

⁹ Le rapport Kahane (2002) déplore l'oubli des fractales comme objet d'enseignement.

1. *Le spatial en soi*

Dans les recherches françaises de didactique sur la géométrie, notamment depuis Brousseau (1983, 2001), Galvez (1985), Berthelot et Salin (1992), le spatial a une place, que ce soit

1. pour nommer des connaissances informelles sur l'espace (le bébé qui cherche à faire entrer un cylindre dans un trou rectangulaire, le chauffeur de taxi qui se déplace sans GPS dans une grande ville), pour repérer leur acquisition (ou pas) par les individus (Brousseau, 2001) et développer des situations d'apprentissage ;
2. pour pointer des connaissances utiles ou obstacles pour entrer dans la géométrie¹⁰.

Berthelot et Salin (1992, 1993, 1994-95, 1999-2000) soulignent la double finalité de l'école obligatoire : « *préparer les élèves aux apprentissages ultérieurs, en particulier professionnels et scolaires, mais aussi les préparer à assumer les décisions qu'ils doivent prendre dans leurs milieux de vie* » (1999-2000, p. 38). De leur point de vue, il est utile de développer les dernières connaissances citées sur l'espace (pratiques, stratégies, vocabulaire et propriétés) indépendamment de celles de la géométrie (définie comme l'étude de la consistance des connaissances et des discours sur l'espace) ; cet apprentissage de l'espace¹¹ peut se faire sans recours préalable à un apprentissage de la transposition primaire de la géométrie ; l'apprentissage de la géométrie peut s'appuyer utilement sur les connaissances de l'espace. Cela ne veut pas dire qu'ils occultent le rôle du spatial dans le géométrique ou ignorent l'apport de la géométrie pour résoudre des problèmes spatiaux.

Berthelot et Salin (1992) explorent les *rappports spatiaux*, rapports établis par un sujet avec son environnement pour reconnaître, décrire, fabriquer, transformer des objets ; déplacer, trouver, communiquer la position d'objets ; reconnaître, décrire, parcourir, transformer un espace de vie ou de déplacement. Ces rapports spatiaux seront désignés plus tard par connaissances spatiales, qualifiées de stratégies d'action sur l'espace sensible (Berthelot & Salin, 2000-2001). Les connaissances spatiales sont définies dans les travaux français par des situations : « *Ainsi les connaissances spatiales d'un sujet sont celles qui lui permettent de résoudre des problèmes spatiaux, qu'il ait ou non la possibilité de les formuler* » (Brousseau, 2001, p. 70). Le spatial est donc maintenant défini par les connaissances spatiales mobilisées dans les situations que le sujet doit gérer dans l'espace sensible.

Brousseau (*ibid.*) cherche à préciser les formes des connaissances spatiales : modèles implicites d'action, mis en jeu dans les situations spatiales (désignées par vision spatiale, images mentales...), souvent non explicites ; langages en jeu dans des situations de communication, qui ne seraient pas descriptibles en termes géométriques ; énoncés :

« Les véritables connaissances sur l'espace se manifestent dans des anticipations ou dans des inférences qui dépassent la perception, la reconnaissance ou la description de l'environnement ».
(Brousseau, *ibid.*, p. 72)

Les connaissances spatiales dépendent de la taille de l'espace dans lesquelles elles s'exercent (Galvez, 1985 ; Berthelot & Salin, 1992 ; Brousseau, 1983, 2001 ; Berthelot & Salin, 2000-2001 ; Salin, 2014b). Ces chercheurs distinguent trois tailles d'espace.

- Le *micro-espace* est l'espace des interactions liées à la manipulation de petits objets, en relation avec la coordination tactile et visuelle.

- Le *méso-espace* défini par Brousseau (1983, p. 213) comme « *l'espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue. Objets fixes entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet. Un repère de référence par rapport auquel l'élève bouge. (...)* ». Berthelot et Salin (1992, p. 100), en appui sur Galvez (1985), précisent :

« [...] l'espace des interactions liées à la détermination et à la modification des positions à l'intérieur d'un domaine de déplacements domestiques, comme des mouvements du sujet à

¹⁰ Voir aussi orientation et prototypes, selon Gentaz (2014).

¹¹ Dans notre texte le terme espace est général, il ne s'agit pas d'une spécification de l'espace 3D.

l'intérieur de ce domaine... C'est une partie de l'espace accessible par une vision globale, obtenues à partir de perceptions successives, mais de durées minimales... C'est l'espace que contient un immeuble, qui peut être parcouru par un sujet, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur ».

- Le *macro-espace* est l'espace des grands déplacements, par exemple un espace urbain, rural, sylvestre, maritime. Brousseau (2001, p. 71) explique en quoi les connaissances spatiales y sont différentes :

« La situation qui consiste à indiquer à quelqu'un les déplacements d'un mobile dans un espace urbain en est un exemple (situation n°5). Cette situation suppose la gestion simultanée des mouvements relatifs de six trièdres de références : ceux liés au terrain, et au mobile réel, ceux liés à la carte et à la représentation du mobile, ceux liés aux deux interlocuteurs ; alors qu'il n'existe même pas une méthode standard pour évoquer précisément un carrefour en patte d'oie ».

On verra plus loin que cette typologie peut être enrichie.

Berthelot et Salin (1993, 1999-2000) ont mis en évidence un déficit de connaissances méso et macro-spatiales chez les élèves de fin de primaire ou plus tard. La motivation de la thèse de Galvez (1985), dirigée par Brousseau, résulte du constat que les enfants des rues se perdent dans la ville de Mexico quand ils changent de quartier. D'où cette préoccupation de recherche, examinée dans le paragraphe qui suit : enrichir les connaissances spatiales des élèves, notamment pour leur vie de citoyen.

2. Exemples de situations développant des connaissances plutôt méso- et macro-spatiales

Les contraintes de l'enseignement rendent nécessaire de construire des situations pour engendrer des rapports macro-spatiaux dans un espace plus petit. Il peut sembler étrange de jongler ainsi avec les tailles d'espace, mais la puissance de ce concept vient de sa signification comme *rapport* de type macro- méso- ou micro- spatial à un objet géométrique.

Pour comprendre, examinons la tâche de reconnaissance de patrons de cubes (Figure 4) parmi des hexaminos (assemblages plans de six carrés identiques par au moins un de leurs côtés) : une vision micro-spatiale consiste à essayer de « fermer » le cube devant soi ; une vision méso-spatiale consiste à s'installer virtuellement debout sur une face (le sol) à essayer de fermer le cube autour de soi, en relevant les murs, pour se placer à l'intérieur d'une pièce cubique. Par expérience, la seconde visualisation permet souvent de dépasser l'échec de la première, le choix de la face « sol » pouvant être plus ou moins facilitateur.

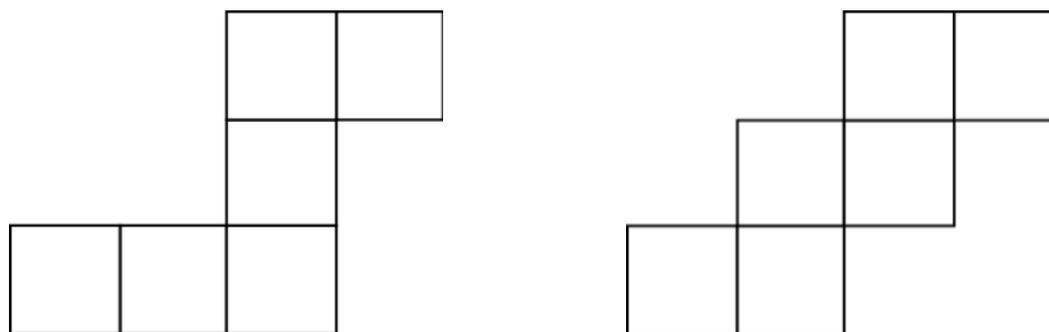


Figure 4. – Deux hexaminos : patron de cube ou pas ?

La conception de situations d'enrichissement de compétences spatiales qui visent une meilleure maîtrise des problèmes notamment méso- et macro-spatiaux, mais en restant matériellement dans un méso-espace au plus (une pièce de l'école), notamment suite aux contraintes matérielles de l'enseignement usuel, a constitué une part importante des travaux de Berthelot et Salin (1992).

Pour des exemples de situations spatiales de Grande Section et de CP (5-7 ans) pour l'enseignement, on pourra consulter le document d'accompagnement des Programmes 2002

de Mathématiques, *Espace et géométrie au cycle 2*¹² (MENESR, 2005), un document rédigé en grande partie par Marie-Hélène Salin. On pourra aussi consulter l'activité *De l'appel au plan de la classe*, succinctement décrite dans l'article de Houdement et Peltier (1992-1993).

Un travail sur plans et cartes a été conçu par Berthelot et Salin (1992, p. 329-339 ; 1993, p. 90-108) pour des élèves de CE2 (9-10 ans). Ils proposent des mises en relation entre différentes situations : création de plan, utilisation de plan simplifié à des fins de repérage ou de déplacements, lecture de plans d'architecte.

Arrêtons-nous sur la situation des Guides et des Voyageurs (Berthelot & Salin 1992), prévue pour la fin d'école primaire (9-11 ans). Cette situation, qui permet de simuler des explorations d'un espace urbain, modélisé par une carte type vue d'avion, possède certaines des contraintes d'un problème macro-spatial. Il s'agit, pour les élèves, de reproduire une carte et de guider, en appui sur cette carte, un voyageur qui veut se déplacer dans la ville. Le dispositif matériel (figure 5) est constitué d'une table sur laquelle est dessiné un plan succinct avec des rues et des carrefours, non nommés, et des bâtiments nommés (poste, piscine...) ; d'une nappe qui cache le plan à l'exclusion d'un trou circulaire, la nappe pouvant être déplacée pour positionner le trou sur différents endroits du plan de la ville. Les élèves n'ont accès à la carte qu'à travers le trou de la nappe. Ce dispositif méso-spatial permet de simuler le parcours d'une ville en n'ayant accès qu'à des vues locales de cette ville, donc de provoquer la construction de connaissances macro-spatiales (notamment le recollement de cartes). La modélisation choisie permet de traiter un grand nombre de problèmes rencontrés dans le déplacement dans une ville (mais pas tous) tels qu'évaluer / comparer des angles (entre deux rues) et des distances, choisir une direction de parcours à un croisement, et lors du guidage, gérer la coordination de systèmes de référence différents.

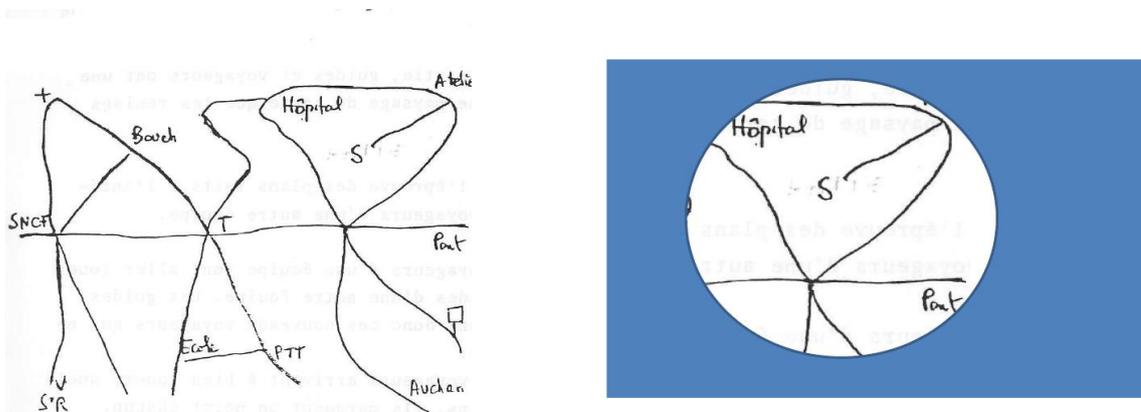


Figure 5. – Exemple de carte (Berthelot & Salin 1992, annexe associée à la page 346)

Signalons le travail de l'équipe ERMEL, notamment une situation proche (mais visant des connaissances méso-spatiales) proposée par Emprin (2014), qui simule virtuellement le déplacement d'une personne dans une maison inconnue.

De notre point de vue, des situations de restauration de figures (Perrin-Glorian & Godin, 2014), notamment celles qui visent à « découvrir » des alignements de points et/ou de segments pour restaurer la figure, participent aussi de la construction d'un rapport méso-spatial à la « droite », rapport selon nous nécessaire à la pratique géométrique experte. La droite n'est pas un concept issu du micro-espace (Berthelot & Salin, 2000-2001), bien qu'elle

¹² Ce texte a malheureusement disparu des références institutionnelles. Lien consulté 18/10/2018 <http://dpernoux.chez-alice.fr/Docs/espace.pdf>

soit le plus souvent abordée implicitement comme telle dans l'enseignement, dans une confusion entre l'objet et sa représentation. En effet la droite est représentée par un trait droit dans le micro-espace. Cette ébauche de droite (le trait droit) pourrait avoir émergé des pratiques de taille des pierres, comme l'intersection de deux plans, notamment quand il s'agit de fabriquer un *chopper*¹³ pour dépecer le gibier (Keller, 2006).

3. *Le spatial en relation avec G2*

G2 et le micro-espace

La feuille de papier, espace de schématisation et espace usuel du travail géométrique, est un micro-espace. Pour Berthelot et Salin (1992), il y a risque que seuls soient activés des rapports micro-spatiaux aux objets géométriques représentés. Notamment, Salin (2014b, p. 37) affirme que :

« Cette représentation micro-spatiale serait activée dans les activités géométriques 'spatio-graphiques', i. e. sur support papier, les élèves assimilant les « figures » de la géométrie aux objets du micro-espace, dont les possibilités de traitement sont particulièrement pauvres. Ceci pourrait expliquer par exemple leurs difficultés à concevoir des sous et des sur figures (berthelot & Salin 1992). »

Cette représentation pourrait alors se poser comme obstacle à l'entrée dans G2, qui nécessite très souvent des rapports aux objets géométriques représentés autres que micro-spatiaux, comme pour la droite, les angles et les figures (Berthelot & Salin, 1992, 1994-95 ; Vadcard, 2000).

Nous pouvons considérer G2 comme une théorisation du champ spatial. Mais comment est-il possible de saisir l'espace sensible en n'expérimentant que sur une portion limitée de cet espace ? Chevallard et Jullien (1990-91) déclarent que le postulat d'Euclide équivaut (en citant Wallis (1616-1703)) à l'existence d'une figure semblable à une figure quelconque de taille arbitraire (plus petite ou plus grande). La structure de l'espace est invariante par homothétie : « *Toute la géométrie de la réalité de l'espace sensible peut être enfermée dans les limites d'une feuille de papier* » (Chevallard & Jullien, 1990-91, p. 58).

La feuille de papier accueille les représentations informelles d'un objet ou d'une situation spatiale (des schémas, en amont des « schémas conventionnels » de Bloch et Pressiat 2009, cités plus haut). L'espace spatio-graphique, nommé ainsi par Berthelot et Salin (1992) et espace graphique par Perrin-Glorian et Godin (2014, à paraître), demande, de la part de l'expert géomètre, une genèse instrumentale pour devenir instrument de travail dans G2 et se transformer en espace des figures.

Le travail de Petitfour (2017) donne un exemple d'analyse très fine de la genèse instrumentale de l'action instrumentée. Plus modestement, pointons dans la genèse de la feuille de papier comme instrument de G2, des connaissances, plus ou moins élaborées, qui relèvent d'une « *composante sémiotique* », à l'instar de Petitfour (2017, p. 258), mais ici de l'activité géométrique. Il s'agit de l'« *ensemble des relations entre objets graphiques et géométriques* » (Petitfour, *ibid.*), intégrant aussi l'usage du support feuille de papier, telles que : la feuille de papier est une fenêtre sur un plan infini (à la façon du trou dans la nappe des guides et des voyageurs) ; l'extension plane de la feuille fait partie de l'espace ; cet espace est homogène ; un trait droit est une droite¹⁴ ; un trait non droit n'est ni un segment, ni une droite sauf si le texte dit le contraire ; le texte qui accompagne la figure est prioritaire pour l'appréhender visuellement ; dans le cas d'une transformation isométrique, ce n'est pas la

¹³ Un *chopper* est un galet taillé, mais de taille incomplète, par comparaison au *biface*.

¹⁴ Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la droite n'existe pas dans le micro-espace, elle peut difficilement y être conceptualisée, sauf à avoir aussi, en même temps un rapport méso-spatial à la figure.

figure qui bouge, mais le plan tout entier (deux instantanés du plan à deux temps différents) et aussi les relations entre langage et symboles graphiques, comme ceux pour désigner un angle droit, une égalité de longueurs ou d'angles. Dans cette genèse de la feuille de papier comme instruments de G2, on peut identifier des *connaissances spatiales*, englobées dans l'expression, la flexibilité des regards à porter sur une figure ; et aussi bien sûr des *connaissances géométriques* : deux points déterminent une droite, trois points peuvent être alignés ou non... La nature des connaissances à utiliser peut être liée à l'horizon visé, pour le travail géométrique, G1 ou G2.

G2 et les connaissances spatiales

Brousseau, Berthelot & Salin s'appuient sur les hypothèses suivantes. La première est épistémologique, il s'agit de fonder une notion sur un problème, ou mettant en jeu des conceptions, correspondant à sa genèse historique (ainsi angle et droite sont des concepts macro-spatiaux). Les secondes sont didactiques : limiter la résolution immédiate de problèmes par une activité sensori-motrice et articuler spatial et géométrique sont des conditions de la conceptualisation géométrique (Berthelot & Salin 1992 ; Gobert 2001).

La situation Géométriscrabble pour le CM (Berthelot & Salin 1992, 1994-1995) est un exemple d'étude, appuyée sur l'analyse épistémologique du concept d'angle (dont la genèse a émergé de problèmes macro-spatiaux) et sur l'analyse des difficultés des élèves (sans doute parce qu'ils rencontrent souvent l'angle comme un graphisme du micro-espace). C'est une situation a-didactique, insérée dans un micro-espace, mais cherchant à développer des connaissances méso-spatiales. Cette étude a trouvé ses prolongements dans la thèse de Vadcard (2000) qui étudie l'enseignement de l'angle dans l'environnement de géométrie dynamique Cabri-géomètre¹⁵.

L'activité Rectangles et Bancs (Berthelot & Salin, 1992 ; Salin 2014a) cherche à développer les connaissances sur le rectangle en le faisant construire dans la cour, les positions de deux sommets étant fixées.

L'articulation des connaissances spatiales et géométriques est l'objet de la thèse de Gobert (2001). Un des résultats forts de cette thèse est l'intérêt de ce que nous nommerons un *duo de situations*, à l'instar du *duo d'artefacts* (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013) : le même problème, Terrains et Tiges (Gobert, 2001 p. 231) est proposé dans le méso-espace de la cour, puis ensuite sur une feuille de papier (en y simulant les contraintes du méso-espace). Gobert (2010) pointe l'enrichissement des situations proposé par Berthelot et Salin (1992), certes par le changement de taille d'espace, mais plus généralement aussi par toutes les « *contraintes portant sur les interactions possibles entre le sujet et le milieu*¹⁶ » (Berthelot & Salin, 1992 p. 109). L'étude d'une situation de maternelle amenant les élèves à agir sur des objets en miniature amène Gobert (2010, p. 118) à proposer un raffinement de l'échelle de taille des espaces sous la forme « *d'un ordre de grandeur pour le rapport de taille entre des actants de la situation et taille des objets de la situation* ». Ce rapport se définit par trois zones, toujours relativement à 1 (autour de, plus grand, plus petit), mais des variations de connaissances dans une « zone » pourraient provenir de la « distance » à 1.

Des recherches plus récentes étudient, en relation avec la production de connaissances par les élèves, les jeux sur ces contraintes, qu'elles soient taille d'espace (Gibel & Blanquart-Henry, 2017) ou instruments autorisés (notamment Perrin-Glorian & Godin, 2014), sans changer la taille de l'espace.

¹⁵ Cf. aussi les travaux de didacticiens de la physique, notamment Munier & Merle (2007).

¹⁶ Le milieu est tout ce avec quoi le sujet est en interaction, l'espace, les objets de l'espace, et/ou ses propres actions sur cet espace.

G2 et la visualisation nécessaire

Les travaux de Duval et Godin (Duval, 1994, 1995, 2005 ; Duval & Godin, 2005) occupent une place importante dans la didactique française de la géométrie. Duval s'intéresse aux activités cognitives nécessaires dans le travail géométrique, le raisonnement déductif, l'argumentation en cours de recherche certes, mais aussi les traitements de la figure que conduit le géomètre. Il s'intéresse *a priori* à G2 dans le contexte du micro-espace graphique. Dans ce paragraphe nous nous centrons sur les traitements de la figure, sa visualisation pour G2.

Duval (2005) distingue une vision iconique des formes et une vision non iconique, entraînant la déconstruction des formes perçues préalablement. Il montre la nécessité de changements de regards sur la figure selon le problème géométrique posé. Duval (1994) cite les appréhensions perceptives (celle immédiate), discursive (celle pilotée par l'énoncé, la description de la figure et les questions), séquentielle (celle pilotée par les instruments) et opératoire (celle déclenchée à des fins heuristiques) de la figure. En synthèse actuelle, selon Duval, les activités cognitives nécessaires pour le travail en géométrie élémentaire sont le changement d'échelle, le changement d'orientation, la décomposition heuristique¹⁷, la déconstruction dimensionnelle, dans le micro-espace (du travail de la géométrie élémentaire).

La déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005) consiste à décomposer une forme en unités figurales de dimension inférieure à celle de la forme de départ : elle se fait en relation avec une activité discursive. Les définitions ou théorèmes qui mettent en jeu la décomposition d'une figure simple 2D/2D en une configuration d'unités figurales 1D ou 0D/2D en sont des exemples prototypiques (par exemple, la définition du parallélogramme par les relations entre ses côtés opposés, ou encore par les relations entre ses diagonales).

« Cette déconstruction dimensionnelle représente une révolution cognitive pour le fonctionnement spontané de la visualisation iconique ou non iconique. La déconstruction dimensionnelle des formes est une démarche qui va contre tous les processus d'organisation et de reconnaissance perceptives des formes. » (Duval, 2005, p. 23).

Duval fait l'hypothèse que la figure apporte une aide heuristique plus ou moins grande grâce à diverses opérations sur cette figure (Mesquita, 1989, cité par Duval, 2005).

« Pour un problème déterminé et une figure de départ (...), il existe généralement une des modifications figurales possibles qui donne l'idée de la solution ou de la démonstration. C'est la modification figurale heuristiquement pertinente » (Duval, 1994, p. 128).

« Toute figure, en géométrie plane, est une configuration transformable en d'autres, chacune se détachant d'une même trame, au gré des propriétés ou des objets que l'on nomme. » (Duval 2005, p. 26).

Duval et, plus récemment, Mathé et Mithalal (cf. texte dans cet ouvrage) développent une autre facette des compétences spatiales : activités cognitives de visualisation dans le micro-espace de la feuille de papier. Ainsi la thèse de Mithalal (2010) a remis en lumière la déconstruction instrumentale.

Les travaux de Lille autour de Perrin-Glorian et Godin

Si on suit Duval et Godin (2005), des activités de construction de figures (programme de construction) risquent d'avoir peu d'effet sur le fonctionnement cognitif car la primauté visuelle (par exemple 1D pour les formes 2D/2D) est imposée ; or l'approche géométrique visuelle de la figure comporte l'activation autonome par le sujet de déconstructions (notamment 2D voire 0D). L'équipe de Lille a construit des situations de restauration de figures dans le micro-espace visant à déclencher cette mobilité du regard sur la figure, car il est nécessaire, pour réussir, d'analyser la figure, en relation avec les contraintes posées par les

¹⁷ La décomposition / recombinaison figurale (Mesquita, 1989 ; Padilla-Sanchez, 1992), appelée aussi décomposition méréologique.

instruments imposés (usuels ou non). Certaines de ces situations favorisent aussi un rapport de type méso-spatial à certains objets : par exemple à la droite et l'alignement par la prolongation de segments et la recherche d'alignements (une des caractéristiques de la visée), au point comme intersection de deux lignes. Actuellement, différents travaux dans la suite de ceux de l'équipe de Lille visent la conceptualisation des objets géométriques en jouant sur le couplage figures et instruments, avec comme finalité de préparer les bases de la géométrie d'Euclide (par exemple Bulf et Celi dans cet ouvrage).

Autrement dit, l'équipe de Lille contextualise, dans des situations, des connaissances de visualisation pour G2, en particulier les capacités à décomposer / recomposer des formes 2D, et à les déconstruire dimensionnellement. Nous dirions, en utilisant les termes de la genèse instrumentale, que l'équipe de Lille contribue à construire les schèmes d'usage de la feuille de papier comme artefact de G2. Les situations proposées sont cependant des situations dans G1.

Conclusion sur G2 et le spatial avec Salin et Duval

La prise en compte « explicite » des connaissances spatiales dans les recherches en didactique semble toujours rester faible et, pour l'apprentissage de géométrie, Salin (2014b, p. 37) souligne encore récemment la nécessité

« d'identifier et de communiquer sur les difficultés de la maîtrise des connaissances spatiales utiles, et celles de la conceptualisation spatio-géométrique. (...) Car notre compétence en géométrie nous fait sous-estimer la complexité des savoirs enseignés.

C'est l'intrication entre spatial et géométrique qui explique en grande partie cette complexité. C'est parce que les connaissances nécessaires pour considérer les figures et les configurations spatiales, les traiter, mener un raisonnement géométrique sont à première vue, proches mais en fait différentes de celles acquises dans la résolution des problèmes spatiaux ordinaires auxquels nous sommes confrontés depuis l'enfance qu'entrer dans la géométrie est si difficile ».

Une des difficultés de la géométrie ne vient pas d'abord des concepts, mais, selon Duval,

« dans ce parasitage dû à un voisinage de traitements pertinents et non pertinents à l'intérieur d'un même registre, ainsi que dans l'absence de coordination entre traitements relevant de registres différents. Pour la plupart des élèves de collège, cette coordination est loin d'être acquise, et les activités proposées, dans le cadre de l'enseignement ne semblent pas suffisantes pour le favoriser. C'est là que réside le point stratégique de l'apprentissage de la géométrie » (Duval, 1995, p. 174).

LE SPATIAL DANS DES TRAVAUX INTERNATIONAUX DE PSYCHOLOGIE, MATHÉMATIQUES ET AUTRES DISCIPLINES

Il nous semble avoir montré que les entrées de la didactique française concernant le spatial (dont la visualisation) sont plutôt du côté des situations, plutôt à finalité géométrique, mais avec un intérêt pour « équiper » spatialement le citoyen dans la cité, cherchant à débusquer les connaissances en jeu.

Poursuivons notre projet de tirer le fil de l'espace sensible, du spatial, cette fois-ci dans les travaux internationaux. Il faut pointer un manque assumé dans cette étude. Nous nous sommes limitée, côté français, aux travaux de didactique de la géométrie ou en étroite relation avec eux, avec la finalité de les revisiter pour mieux les faire connaître. Dans le contexte international, nous avons élargi notre enquête au spatial sur l'éducation scientifique, au spatial en soi, justement parce qu'il est considéré ainsi, *per se*, comme on le verra dans la suite. Débusquer le spatial dans les champs de savoirs autres que les mathématiques serait un travail complémentaire à mener.

La première étape de l'enquête (Houdement, 2017) s'est plutôt limitée au circuit européen des recherches, à partir des articles de CERME (travaux plutôt européens) et du numéro récent *Geometry in the primary school* (Sinclair & Bruce, 2015) de la revue *ZDM – Mathematics Education*, avec les questions suivantes : quelles approches ? De quels types ? Avec quels outils théoriques ?

Nous ferons trois remarques. Il s'agit d'un ensemble de travaux, plutôt juxtaposés, avec des méthodologies différentes (notamment selon le domaine de référence des chercheurs, le plus souvent éducation mathématique et psychologie) qui rendent la synthèse difficile. Les regards sur le spatial sont influencés par les cadres théoriques choisis pour les travaux. Enfin, il n'y a pas d'étude des capacités spatiales en soi, mais toujours pour les mettre au service d'autres domaines de savoir (au moins à l'examen des motivations annoncées).

Nous avons ci-dessous relevé d'autres travaux qui proposent des méta-analyses d'articles sur la question, issus d'ICMI, de revues de psychologie... ainsi que des sites dédiés au spatial, qui ont nourri cette partie. Il serait complexe (et de notre point de vue peu utile pour le lecteur) de proposer une synthèse de ces synthèses.

Sur la géométrie

- Jones et Tzekaki (2016), spécialistes respectivement d'éducation mathématique et de psychologie, présentent une revue (30 pages de texte, 10 pages de bibliographie) de travaux de recherche (2005-2015), issus des PME 29 à 39. Ces travaux recouvrent des questions d'apprentissage, d'enseignement (conception de tâches) et de formation des enseignants, relatives au raisonnement spatial, à la visualisation géométrique, aux grandeurs et mesures géométriques, au raisonner et prouver en géométrie. Les outils théoriques utilisés sont essentiellement issus des travaux de van Hiele et des appréhensions des figures de Duval. Mais se diffusent progressivement dans PME (comme dans CERME) des cadres sémiotiques multimodaux (par exemple Radford, 2003 ; Arzarello *et al.*, 2005 ; Maschietto *et al.*, 2005).

- Sinclair *et al.* (2016). Cette revue très documentée de travaux publiés depuis 2008 sur l'Éducation Géométrique de l'école primaire à la formation des enseignants, identifie sept fils conducteurs, assignés chacun à deux co-auteurs : développement et tendances de l'usage des théories (notamment les outils géométriques, *figural concept* de Fischbein, appréhensions de Duval, espaces de travail géométrique) ; avancées dans la compréhension du raisonnement visuo-spatial, de l'usage et du rôle des dessins et des gestes ; avancées dans la compréhension du rôle des technologies ; avancées dans la compréhension de l'enseignement et l'apprentissage des définitions ; avancées dans la compréhension de l'enseignement et l'apprentissage des processus de preuve ; recherches au-delà de l'approche traditionnelle euclidienne (géométrie 3D et géométries non euclidiennes)

Sur le spatial

Nous citerons d'abord deux articles conséquents, le premier sur des travaux liés à la cognition (Uttal *et al.*, 2013), le second lié à l'éducation mathématique (Bruce *et al.*, 2017). De plus, en 2011, s'est créé en Ontario (Canada) un groupe, *Spatial Reasoning Study Group*, d'une vingtaine de chercheurs de domaines scientifiques différents (éducation, psychologie, mathématiques, sciences cognitives...), visant à partager, questionner, harmoniser des résultats de recherche sur le spatial. Il faut noter que dans un premier temps, un flou sur les définitions a été accepté pour garder ce dont les termes peuvent rendre compte dans chaque domaine de savoir. Davis & Spatial Reasoning Study Group (2015) proposent une entrée dans le spatial par ce que nous reconnaissons comme étant des types de tâches et/ou des techniques, au sens de Chevallard (2002), illustrés par des exemples d'activités pour le curriculum. Soulignons aussi l'intérêt d'un article, rédigé par la Présidente de la division Psychologie développementale de l'American Psychology Association (Newcombe, 2010), qui synthétise pour les enseignants ce qui est actuellement connu sur le spatial.

1. Exemples de définitions du spatial dans ces recherches

Battista (2008, 2011), développant plutôt une approche cognitive, intègre le spatial dans le géométrique. Il distingue en effet trois « niveaux de sophistication » (*level of sophistication*¹⁸) dans le raisonnement géométrique.

Le premier niveau, *Spatial Structuring*, qui détermine la perception d'un objet (ou un ensemble d'objets), est l'action mentale de construire une organisation ou de projeter une forme sur cet objet.

Le second niveau, *Geometric Structuring*, utilise des concepts géométriques (angle, parallélisme, longueur, système de coordonnées et des transformations géométriques, etc.) pour conceptualiser et agir sur la situation.

Le dernier niveau, *Logical/Axiomatic Structuring*, structure formellement les concepts en un système et spécifie quelles relations décrire et quelles relations établir par déduction logique.

Son modèle s'appuie sur les trois premiers niveaux de Van Hiele (rappelés dans Battista, 2011), un modèle universellement cité dans les travaux relatifs à la pensée géométrique¹⁹.

Les recherches proposent de multiples définitions du spatial et de nombreuses expressions qui peuvent être considérées comme équivalentes, par exemple *spatial ability*, *spatial skills*, *spatial reasoning*, *spatial structuring*, *spatial thinking*, *spatial intelligence*, *spatiality*... Les définitions du spatial sont souvent auto-référencées.

“Spatial reasoning (or spatial ability, spatial intelligence, or spatiality) refers to the ability to recognize and (mentally) manipulate the spatial properties of objects and the spatial relations among objects. Examples of spatial reasoning include: locating, orienting, decomposing / recomposing, balancing, diagramming, symmetry, navigating, comparing, scaling, and visualizing²⁰”. (Mulligan, 2015, p. 513)

“Spatial structuring: the mental operation of constructing an organization or form for an object or set of objects. It determines the object's nature, shape, or composition by identifying its spatial components, relating and combining these components, and establishing interrelationships between components and the new objects.” (Battista, 1999, p. 171)

“[Visuo-spatial reasoning, visualisation, visualizing...] the activity of imagining static or dynamic objects and acting on them (mentally rotating, stretching, etc.).” (Sinclair et al., 2016, p. 696).

Uttal et al. (2013) cherchent à produire une typologie des habilités spatiales, en vue de construire des situations d'apprentissage variées. Dans un premier temps, ils retiennent la visualisation spatiale, capacité à imaginer et à transformer mentalement de l'information spatiale et l'orientation spatiale, capacité à imaginer une configuration ou soi-même de différents points de vue. Puis, ils distinguent *information intrinsèque* et *information extrinsèque*, *tâches statiques ou dynamiques* (Uttal et al., 2013, p. 353). L'information intrinsèque concerne les relations entre un objet et ses parties, l'information extrinsèque concerne les relations entre objets d'un groupe d'objets, l'un par rapport à l'autre, ou par rapport à un cadre plus large. La distinction entre tâche dynamique et tâche statique est liée au mouvement : en effet, un objet peut se déplacer ou être déplacé, le mouvement change alors la position relative de cet objet par rapport aux autres ou au cadre.

Ainsi, pour Uttal et al., (2013, p. 355), détacher perceptivement d'un fond distrayant des objets, des chemins ou des configurations spatiales rend compte d'habilités intrinsèques

¹⁸ Pour Battista (2008, p. 517, citant Clements & Battista 1992) : “a level is a period of time in which a distinct type of cognition occurs for a specific domain (but the size of the domain may be an issue)”; “a level of sophistication in student reasoning is “a qualitatively distinct type of cognition that occurs within a hierarchy of cognition levels for a specific domain”.

¹⁹ Pour une mise en relation des niveaux de Van Hiele et des paradigmes géométriques, voir Houdement & Kuzniak (2003b).

²⁰ Exemples de raisonnement spatial : localiser, (s')orienter, décomposer / recomposer, équilibrer, schématiser, (se) déplacer, comparer, mettre à l'échelle et visualiser.

statiques (par exemple, lors de tâches sur figures emboîtées, labyrinthes) ; rassembler des objets en une configuration plus complexe, visualiser et transformer mentalement des objets, souvent 2D en 3D, ou le contraire, faire tourner mentalement des objets 2D et 3D est l'indice d'habilités intrinsèques dynamiques ; comprendre des principes spatiaux abstraits comme l'invariance de l'horizontalité ou la verticalité rend compte d'habilités extrinsèques statiques (comme les expériences d'anticipation du niveau d'eau, du fil à plomb) ; visualiser un environnement dans son entièreté selon différentes positions (points de vue), comme l'épreuve des Trois Montagnes (Piaget & Inhelder, 1948), rend compte d'habilités extrinsèques dynamiques.

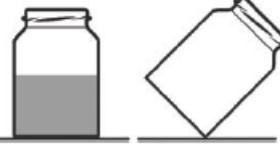
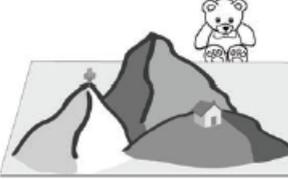
	Intrinsic Specification of object	Extrinsic Relation among objects or relation of object to a frame of reference
Static Object/frame of reference remains stationary	<p>Intrinsic-Static Perceive objects while ignoring distractors.</p>  <p>Sample task: Embedded Figures Test Where does the shape on the left appear in the image on the right?</p>	<p>Extrinsic-Static Describe the spatial position in reference to frame.</p>  <p>Sample task: Water-Level Test The glass jar has some water in it. The jar has been tilted. Draw a line to show how the water would look.</p>
Dynamic Object or perspective is transformed	<p>Intrinsic-Dynamic Manipulate or mentally transform an object.</p>  <p>Sample task: Mental Rotation Test Which of the three images on the right is the same as the one on the left if rotated?</p>	<p>Extrinsic-Dynamic Visualize the relation among moving objects or from a different vantage point.</p>  <p>Sample task: Three Mountains Task What does the teddy bear see?</p>

Figure 2.1: A 2 × 2 typology of spatial reasoning categories (adapted from Uttal et al., 2013).

Figure 6.– Illustrations de la typologie d'Uttal et al. (Davis & SRS (2015, p. 16)

2. Le spatial dans des programmes : bref aperçu

Rappelons que, dans les programmes français de mathématiques du primaire, quand le terme spatial est mentionné explicitement dans les textes, il n'est pas toujours facile de savoir ce qu'il recouvre (sauf en maternelle). Il désigne souvent des activités sur et autour des objets 3D, peut-être à cause du glissement 'géométrie dans l'espace' vers 'géométrie spatiale'. Les programmes de l'école élémentaire de 2002 représentent une exception, grâce notamment au document d'accompagnement (MENESR, 2005), déjà cité plus haut.

Les curricula des USA insistent sur le spatial à tous les niveaux (NCTM 2000²¹, NCTM, 2016²²), ce qui est peut-être lié aux recherches récentes liées aux données recueillies grâce au « Project Talent » dont il est question dans un prochain paragraphe. Le terme spatial avait pourtant peu d'occurrences en 2007, dans une des ressources pédagogiques faisant référence pour l'enseignement des mathématiques jusqu'au 8^{ème} grade, compte tenu de ses nombreuses rééditions (Van de Walle et al., 2007, 6^{ème} édition ; 2010, 7^{ème} édition ; 2013, 8^{ème} édition).

²¹ Dans NCTM 2000 et 2016, le libellé « Use visualization, spatial reasoning and geometric modeling to solve problems » est présent de Kindergarten au grade 12.

²² <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Geometry/>. Consulté 18/10/2018

L'Ontario (Canada) se distingue par une grande insistance sur le raisonnement spatial dans son curriculum, Cette insistance est sans doute liée à l'existence dans cette région du *Spatial Reasoning Study Group*, mentionné plus haut. Est disponible pour les enseignants un document d'appui à l'enseignement des mathématiques, de 32 pages, intitulé *Mettre l'accent sur le raisonnement spatial* (Ministère de l'Éducation, 2014). Dans ce document trois habilités spatiales sont en particulier valorisées (p. 9 à 13) : la visualisation spatiale ; la rotation mentale ; la mémoire de travail visuo-spatiale.

3. *L'intérêt du spatial pour les mathématiques, mais aussi pour STEM*

De nombreuses recherches insistent sur l'utilité du raisonnement spatial et de compétences spatiales pour l'apprentissage des mathématiques et de la résolution de problèmes (Tahta, 1980 ; Owens & Outhred, 2006 ; Sinclair & Bruce, 2015), Des recherches cognitives ont montré les effets positifs, sur le raisonnement spatial pour les mathématiques, y compris dans des domaines non géométriques, de l'entraînement à la rotation mentale. Par exemple, Cheng & Mix²³ (cité par Sinclair et al., 2016, p. 696) ont trouvé que cet entraînement améliorerait la réussite d'enfants dans la résolution d'équations telles que $5 + \dots = 14$.

L'importance de la mémoire visuo-spatiale serait cruciale pour les apprentissages géométriques. C'est la multiplicité des sollicitations spatiales, et ce dès le plus jeune âge, qui améliorerait le raisonnement spatial, sans effet de genre, ni d'origine socioprofessionnelle. Selon des recherches appuyées notamment sur des données issues du « Project Talent²⁴ », le raisonnement spatial joue aussi un rôle crucial pour les STEM, acronyme de Science, Technology, Engineering and Mathematics Education (Mulligan, 2015).

Le « Project Talent » est un projet social et politique, à grande échelle, implanté en 1960, qui avait comme objectif de rattraper le retard scientifique des USA sur l'URSS, qui a lancé le premier satellite artificiel (Spoutnik 1, 1957) et envoyé le premier homme dans l'espace (Youri Gagarine, 1961). Le « Project Talent » est une étude longitudinale sur des étudiants d'écoles secondaires. C'est l'étude la plus large et la plus complète de ce type conduite aux USA ; elle fut menée par l'*American Institutes for Research*. Plus de 440 000 étudiants (5% des élèves, des grades 9 à 12) de 1 353 écoles secondaires du pays entier ont été testés pendant deux jours. Les tests comportent des items de type capacités cognitives : intelligence générale et intelligences spécifiques, mathématique, verbale et raisonnement spatial. Le « Project Talent » inclut aussi une étude longitudinale un an, cinq ans, onze ans après la sortie d'école des étudiants. Cette gigantesque étude a permis d'accumuler des masses de données sur les jeunes Américains et conduit à des centaines de rapports, d'articles et de livres de recherche. Par exemple, une étude (Wai et al. 2009) a croisé le plus haut degré universitaire atteint, la discipline de leur qualification et la plus haute fonction occupée, et les capacités spécifiques (mathématiques, spatiales et verbales).

Cinquante ans de recherche confirment ainsi que la relation entre pensée spatiale et STEM est forte (Lubinski, 2010 ; Newcombe, 2010) que ce soit pour un individu « doué » ou pas, homme ou femme, né à différentes périodes. L'importance des capacités spatiales aurait été négligée pendant des décennies à l'avantage du raisonnement mathématique (mathematical reasoning) : “*spatial ability is clearly seen as distinctive from mathematical and verbal reasoning ability*” (Lubinski, 2010, p. 348).

Que recouvre le raisonnement mathématique dans cette étude ? Wai et al. (2009, p. 821-822) sur lequel s'appuie Lubinski (2010), nous donne des informations sur les quatre groupes

²³ Cheng, Y. L. & Mix, K. (2014). Spatial training improves mathematics ability. *Journal of Cognition and Development*, 15(1), 2-11.

²⁴ <https://www.projecttalent.org/> Consulté 18/10/2018

de quinze à vingt items qui mesurent ce raisonnement mathématique. Le premier groupe, Informations mathématiques, teste la connaissance de définitions et de notations, par exemple : « Parmi ces nombres, lesquels sont irrationnels ? ». Le second, Raisonnement Arithmétique, sollicite du raisonnement arithmétique basique, comme par exemple : « Un homme paie 4% de taxes pour l'achat d'une chaise. La taxe est de 6\$. Combien coûte la chaise ? ». Le troisième groupe, Mathématiques Introductives, mesure toute forme de connaissance mathématique enseignée en grade 9 (14-15 ans) ; par exemple, « La somme de deux nombres à deux chiffres est un nombre à trois chiffres. Quel est le premier chiffre de la somme ? ». Enfin le dernier groupe, Mathématiques Avancées, touche à l'algèbre, à la géométrie plane et des solides, aux probabilités, aux logarithmes et au calcul basique ; un exemple d'item est « Parmi ces équations, laquelle n'a pas de racine réelle ? ».

Lubinski (2010) souligne que les capacités spatiales sont une puissante source de différences individuelles qui a été négligée dans les travaux sur l'apprentissage et le travail. Il affirme que, compte tenu des recherches recensées aussi bien quantitatives que qualitatives, les différences individuelles en compétences spatiales (en début d'adolescence) contribuent à l'apprentissage et au développement d'une expertise et d'une qualification certaine pour des études avancées et un poste dans le domaine des STEM. En particulier, une étude du « Project Talent » montre que les personnes à haut niveau de capacités spatiales en début d'adolescence exercent dans les STEM et celles à bas niveau hors de STEM, même malgré un fort score en capacités mathématiques et verbales (Lubinski, 2010). À terme, selon le même auteur, cela devrait modifier le recrutement de talents pour les STEM et autres métiers en relation avec le spatial (architecte, ingénieur, robotique et laboratoires de sciences physiques) : actuellement en effet on teste le raisonnement mathématique et verbal, qui ne rend pas compte des capacités spatiales. Lubinski (*ibid.*) a ainsi étudié la réduction bénéfique (résultats équivalents et coût des tests bien moindre) de l'ensemble des tests à la seule évaluation des capacités spatiales dans certaines entreprises (par exemple, pour le recrutement des ingénieurs chez Microsoft à Pékin). Il semblerait que, dans le mode de pensée des recrutés selon leurs compétences mathématiques, domine le raisonnement appuyé sur des symboles verbaux-linguistiques, qui s'oppose à la conception de dessins et de formes et des relations qui les lient.

4. Des exemples de compétences ou d'activités liées au spatial

Les compétences spatiales sont souvent à inférer de tests écrits. Sont étudiées notamment les réussites à des tests ou les corrélations entre des réussites à des tests, en particulier dans les congrès CERME de 2003 à 2015 (Houdement, 2017) et dans le numéro spécial de ZDM, sur la géométrie à l'école primaire (Sinclair & Bruce, 2015).

Panaoura et *al.* (2007) se demandent si, comment et quelles habilités spatiales (parmi visualisation spatiale et relations spatiales) prédisent les performances d'élèves (1000) de primaire (grades 5-6) et secondaire (grade 8) dans des tâches géométriques sur des figures 2D et des assemblages de solides. Nos outils d'analyse *a priori* appliqués aux items proposés nous laissent parfois perplexes sur les conclusions tirées.

Van den Heuvel-Panhuizen et *al.* (2015) étudient, sur 300 élèves de 4-5 ans, des Pays-Bas et de Chypre, la corrélation entre deux capacités spatiales liées aux positions relatives d'objets les uns par rapport aux autres. Il s'agit de sélectionner parmi des points de vue (*Imaginary Perspective Taking*, IPT), celui qu'un observateur fixé peut avoir. Les items sont proposés en version papier-crayon, comme l'illustre la figure 7. Les deux capacités spatiales différentes concernent, en appui sur Flavell et *al.*²⁵ (1981), la première la visibilité des objets, la seconde

²⁵ Flavell, J.H., Everett, B.A., Croft, K., & Flavell, E.R. (1981). Young children's knowledge about visual perception: Further evidence for the level 1-level 2 distinction. *Developmental Psychology*, 17(1), 99-103.

l'apparence des objets. On remarquera que les situations 3D, méso-spatiales, voire macro-spatiales, sont évoquées à partir de représentations 2D.

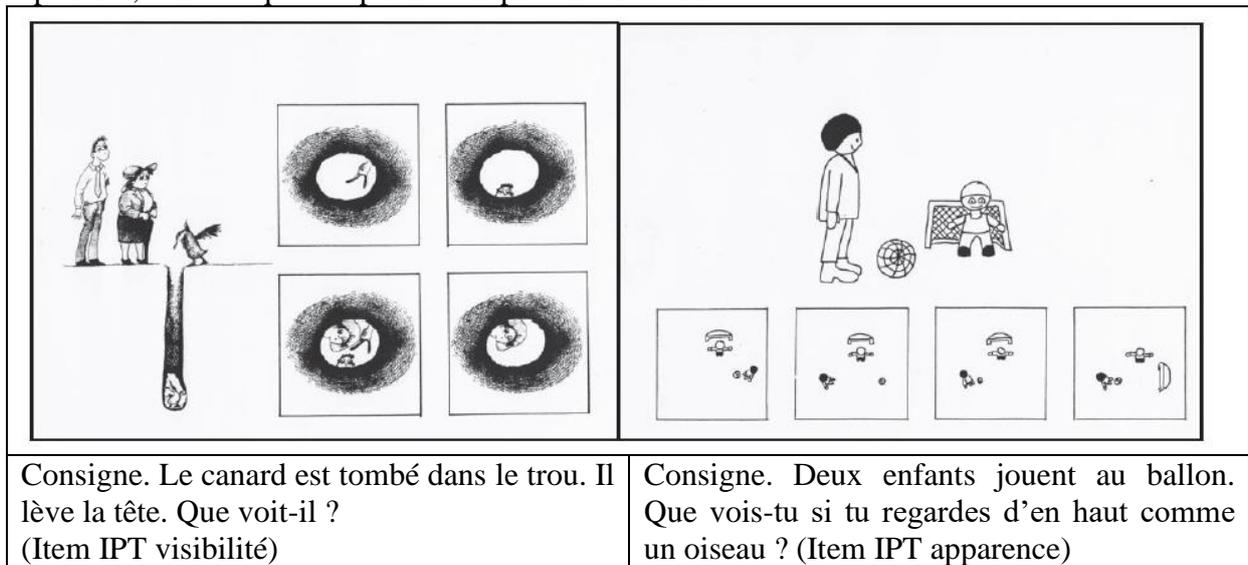
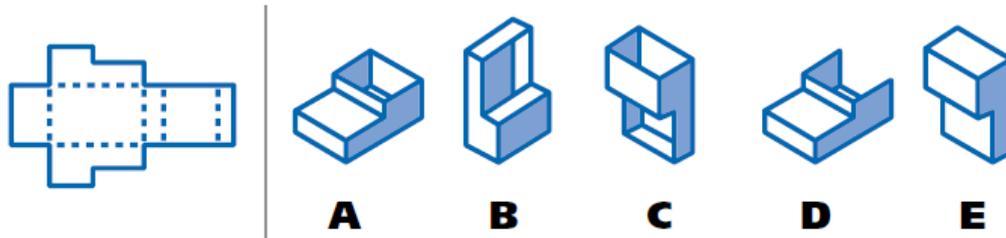


Figure 7.– Deux items (Van den Heuvel-Panhuizen et al., 2015, p. 357 et 360)

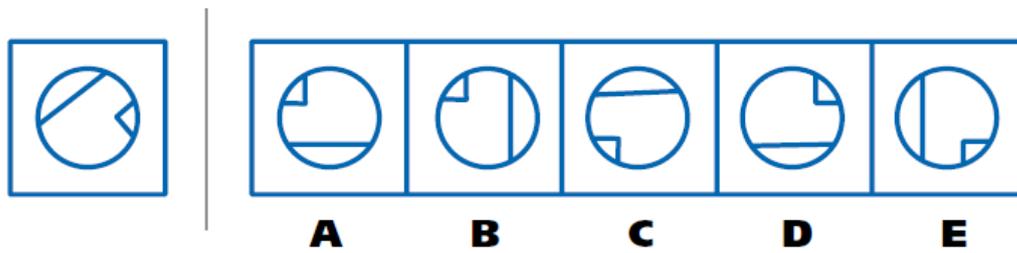
Les résultats montrent une meilleure réussite sur les items *visibilité* (Pays Bas 70% et Chypre 55%) par comparaison aux items *apparence* (Pays Bas 40% et Chypre 30%) ; en général la réussite sur les items *apparence* implique la réussite sur les items *visibilité*, ce qui confirme que la capacité IPT *visibilité* précède la capacité IPT *apparence*, résultat déjà pointé par Flavell et al. (1981). Les auteurs pointent cependant la variabilité des réussites selon le type de question (direction du regard, position du sujet observant), la représentation proposée (sujet observant inclus ou pas dans le dessin, comme le point de vue de l'oiseau), la familiarité du contexte évoqué.

De notre point de vue, l'oubli, entre autres, du travail sémiotique nécessaire au sujet pour inférer du 3D à partir de 2D (Duval, 2005) et du caractère, relatif à la taille de l'espace, des connaissances du sujet (Berthelot & Salin, 1992), affaiblit les résultats qu'on peut tirer de cette recherche.

Wai et al. (2009) proposent un exemple de chaque catégorie des quatre tests d'habiletés spatiales du « Project Talent » (Figure 8). Il s'agit notamment de trouver, parmi cinq propositions, la figure obtenue par pliage selon les pointillés de la « surface de métal » de gauche (test de type 1) ; la figure superposable directement à la figure de gauche (test de type 2) ; la figure qui complète selon un critère logique la série encadrée des cinq figures (test de type 4). Pour le test de type 3, il faut choisir une réponse parmi trois énoncés. On reconnaît des types de tâches intégrées dans la géométrie scolaire française (par exemple types 1 et 2 de la Figure 8), même si peu pratiquées sous forme routinière ; on trouve aussi des tâches plutôt anecdotiques en France (type 4 de la Figure 8).



Type 1. Visualisation spatiale en 3D



Type 2. Visualisation spatiale en 2D

<p>While wheel X turns round and round in the direction shown, wheel W turns</p> <ul style="list-style-type: none"> A. in direction A. B. in direction B. C. first in one direction and then in the other. 	
<p>Type 3. Raisonement 'mécanique'</p>	<p>Type 4. Raisonement abstrait²⁶</p>

Figure 8.- Des exemples de tests du projet national Talent (USA)

En revanche, nous n'avons pas trouvé beaucoup d'éléments relatifs à l'intérêt de connaissances spatiales pour la vie quotidienne, sauf dans la synthèse du *Spatial Reasoning Study Group*. Ce groupe (Bruce et al., 2017) a d'ailleurs tenté une synthèse du spatial, comme indiqué dans la figure 9 : il souhaite vivement une stabilisation assumée de situations visant un apprentissage du spatial (dont ils donnent de nombreux exemples dans Davis & SRS, 2015), plutôt qu'une entrée par des compétences, ainsi qu'un projet de collaboration entre domaines de savoir, à la place de leur simple juxtaposition.

²⁶ Réponses attendues : 1-A ; 2-A ; 3-C ; 4-D.

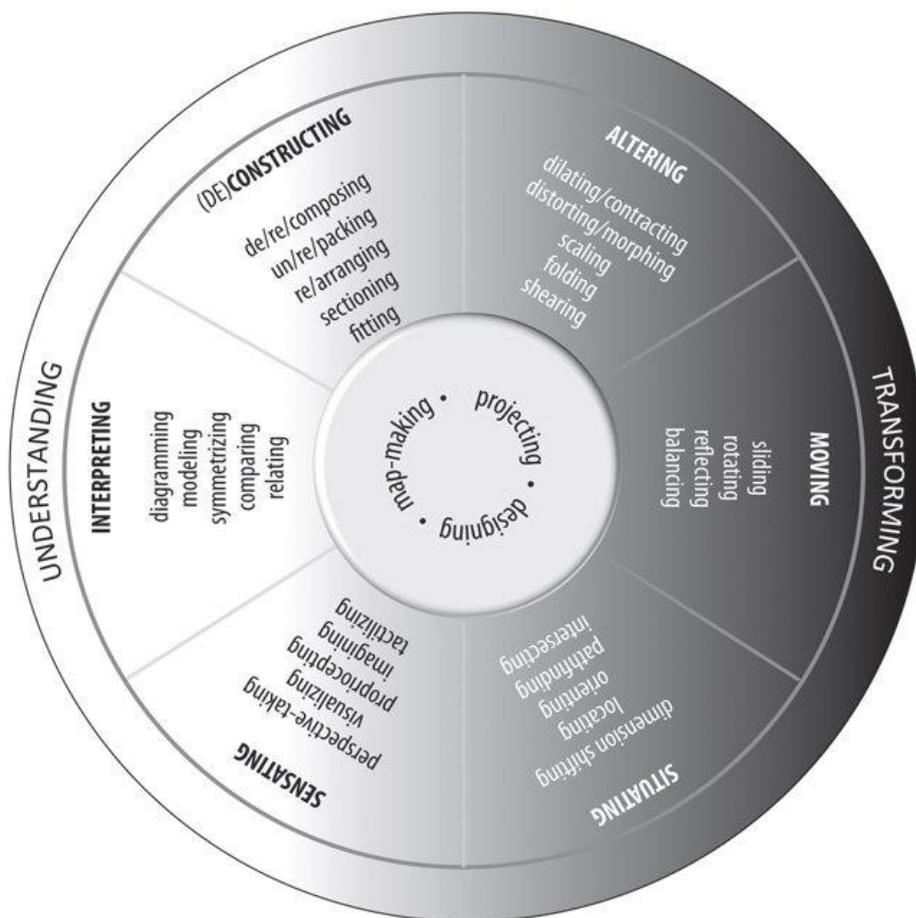


Figure 9.– Une tentative pour rendre compte de la complexité du raisonnement spatial (Davis & SRSG, 2015, p. 141)

Comprendre		Transformer			
Sensations	Interprétations	(Dé)constructions	Modifier	Bouger/ Déplacer	Situer /repérer
Points de vue Visualisation Proprioception ²⁷ Imagination Toucher	Schématisation Modélisation Symétrisation Comparaison Mise en relation	Dé/re/compositions Dé/re/groupement (Dés)organisation Division Adaptation	Dilater/contracter Déformer Agrandir/réduire Plier Découper	Glisser Tourner Retourner Équilibrer	Changer de dimension Localiser Orienter Trouver son chemin Croiser
Projet		Dessiner	Faire des cartes		

Figure 9 bis. – Essai de traduction de Figure 9.

5. Taille d'espaces et autres capacités spatiales

Le travail dans le groupe Géométrie de CERME nous a donné l'occasion de remonter à des références sur les tailles d'espace, initialisées en France et en didactique des mathématiques, par les travaux de Brousseau, Galvez, Berthelot et Salin.

La taille de l'espace pourrait être un problème de géographie, vue comme la « science de l'espace ». Montello (1993), géographe, constate que les propriétés de l'espace ou les relations entre objets de l'espace sont traitées indépendamment des échelles (des tailles

²⁷ La proprioception est la perception, consciente ou non, de la position des différentes parties du corps (d'après Wikipédia) : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Proprioception>, consulté 18/10/2018.

d'espace) quand elles sont étudiées comme problèmes formels (nous dirions en G2, s'il s'agit de mathématiques). Cependant, une fois qu'il existe une carte (réduite par rapport à l'espace), les décisions prises avec la carte sont indépendantes de la taille de l'espace, c'est d'ailleurs ce qui fait la puissance de la carte. Mais dans le cas de la perception humaine, de la pensée, des comportements (donc étudiés comme des problèmes psychologiques), les tailles d'espace ont de l'importance.

Notons une différence de terminologie entre l'anglais et le français. Le terme anglais *large scale* fait référence à une échelle, donc à un rapport entre deux « choses » (par exemple, l'expression *large scale map* signe le rapport entre les dimensions de la chose représentée, le réel, et la représentation). En bref, ce terme rend compte de la taille relative d'une représentation. Il s'agit du rapport entre l'espace étudié et une personne, un rapport au corps et aux actions de cette personne (regarder, marcher). L'expression *large-size space* (qui correspondrait à méso-espace) rend par contre implicite cette référence à la personne, même si elle est déclarée dans les travaux de Berthelot et Salin et reprise par Gobert (2010).

Pour Montello (*ibid.*), et d'autres avant lui, il est urgent de ré-étudier les espaces psychologiques dans le contexte d'environnements différents. L'auteur souligne que l'information à prélever est sans doute de type multimodal : la perception spatiale peut nécessiter ou pas le déplacement de l'homme, elle peut avoir une composante temporelle (un temps pour mémoriser et assembler les informations prélevées, par exemple pour prendre en compte un pays). Il propose la classification suivante, qui a de grandes ressemblances avec la typologie retenue par Galvez, Berthelot et Salin, à laquelle il ajoute une dimension temporelle et une quatrième catégorie.

- *Figural space* : un espace figuratif est projectivement plus petit que le corps, ses propriétés sont appréhendées sans nécessité de se déplacer. Il est en général divisé entre *pictorial space* and *object space*, petits espaces plats 2D et petits espaces 3D. L'espace figuratif est l'espace des images, des photos, des petits objets. On peut approcher haptiquement²⁸ certains objets, il n'y a pas besoin de mouvoir le corps entier. La plupart des tests psychométriques se font dans cet espace.

- *Vista space* : un espace de vision est aussi grand, voire plus grand que le corps humain, mais il peut être appréhendé d'un point fixe sans déplacement significatif. C'est l'espace d'une simple pièce, d'une place de village, une petite vallée ; l'horizon fait partie de cette catégorie.

- *Environmental space* : un espace environnant est plus étendu que le corps humain qu'il entoure. On ne peut pas l'appréhender sans déplacement conséquent ; il requiert l'intégration d'informations décalées dans le temps. C'est l'espace d'un immeuble, d'un quartier, d'une petite ville. Bien que cet espace ne puisse pas être appréhendé en un temps court, Montello fait l'hypothèse que ses propriétés spatiales peuvent s'acquérir avec le temps, grâce à une exposition prolongée à cet espace.

- *Geographical space* : un espace géographique ou gigantesque est plus grand que le corps humain, il ne peut pas être appréhendé directement par déplacement du corps, même conséquent. Il doit être appréhendé grâce à des représentations symboliques telles que cartes ou modèles qui réduisent l'espace géographique à des espaces figuratifs (*figural space*) : les états, les pays, le système solaire.

Pour Montello (*ibid.*), les cartes, qui représentent des espaces environnementaux ou géographiques, sont eux-mêmes des espaces figuratifs. La surface de la terre vue d'avion est un espace de vision car il peut être appréhendé globalement du siège de l'avion. Ces questionnements se sont particulièrement enrichis suite au développement des systèmes

²⁸ « La perception haptique résulte de la stimulation de la peau provenant des mouvements actifs d'exploration de la main entrant en contact avec des objets » (Gentaz, 2014)

d'informations géographiques SIG²⁹ : par exemple quelle serait la validité des simulations spatiales, par exemple des activités sur écran pour entraîner à l'activité réelle, si des espaces de tailles différentes sont appréhendés différemment (voir aussi impact des jeux sur ordinateur, entraînement au vol par simulation) ?

Des recherches plus récentes essaient de mesurer la corrélation entre capacités spatiales repérées par des tests graphiques, du type de ceux mentionnés plus haut (figure 8), et orientation dans le monde réel. Quaiser-Pohl et *al.* (2004), étudiant 172 élèves de grades 2, 4 et 6 de la région de Magdeburg (Allemagne), arrivent à la conclusion qu'il n'y a pratiquement pas de corrélation entre les mesures de cartographie (réaliser un croquis cartographique d'un lieu bien connu des élèves, tel que leur voisinage immédiat) et les performances spatiales (testées par réponses à trois tests piagétien, étudiés par Lohaus et *al.* (1996) : Mental Rotation Test, Water-Level Task, Rod-and-Frame Task (rotation mentale, niveau d'eau et cadre et bâton).

Wang et *al.* (2014) proposent une méta-analyse d'articles étudiant les capacités spatiales en les classant selon deux tailles d'espace : grand espace et petit espace (qui correspond au micro espace). Ils recensent des articles sur les capacités liées à un petit espace à partir de 1985, mais seulement après 2000 pour celles liées à un grand espace. La non corrélation entre les deux types d'habilités est avérée sur le plan neuropsychologique et comportemental : des zones différentes du cerveau sont sollicitées selon la taille (petite ou grande) de l'espace ; les repères en jeu sont différents, allocentriques (pour la petite taille d'espace, rotation mentale de l'objet sur lui-même) ou égocentriques (rotation autour de l'axe corporel pour la grande taille d'espace) ; des comportements différents sont avérés. Les questions retenues pour la méta-analyse sont les suivantes : jusqu'à quel point ces habilités sont elles dissociées ? Quel effet de sexe et d'âge sur le degré de cette dissociation ? Nous retenons de l'étude de Wang :

- considérer pour l'apprentissage et l'enseignement deux tailles d'espace, petit ou grand, est une hypothèse de travail raisonnable ;
- pour mesurer les compétences spatiales, un grand nombre de chercheurs se sont centrés sur des activités papier crayon ; ils doivent donc reconnaître avoir « loupé » les « *large-scale spatial abilities* » mieux mesurées par le fait de trouver son chemin dans des environnements réels (navigation) ou des réalités virtuelles ;
- il n'y a pas d'effet de genre qui serait modérateur des différences, mais à prendre avec réserve car la séparation entre hommes et femmes est difficile dans la méta-analyse ;
- l'âge modère significativement la relation entre « *small- and large-scale spatial abilities* » sans doute car les adultes (plus de 18 ans) ont plus d'expérience dans les grands espaces.

Enfin remarquons que les deux dernières « tailles » d'espace et la nécessité d'une temporalité dans l'exploration (Montello, 1993) rendent définitivement caduque l'assimilation du spatial à l'espace sensible. Les connaissances spatiales se développent à partir de multiples expériences de l'espace sensible, dans des espaces de tailles différentes, qui sont recomposées, articulées entre elles.

CONCLUSION

Ce texte a deux finalités : d'un côté, « remettre à jour » des travaux anciens de didactique de la géométrie et montrer leur potentialité pour de nouvelles recherches ; de l'autre, explorer le spatial, un domaine beaucoup plus présent dans les recherches internationales sur l'éducation mathématique qu'en France.

²⁹ Un *système d'information géographique* (SIG) est un système d'information conçu pour recueillir, stocker, traiter, analyser, gérer et présenter tous les types de données spatiales et géographiques.

Les recherches françaises actuelles (notamment, les travaux dans la suite de ceux du groupe de Lille autour de Perrin-Glorian, Duval, ..., mais aussi de Bulf, Celi, Mathé, Mithalal, ...), visant *a priori* une meilleure utilisation et appropriation de G2, par le travail sur la figure, concourent à l'apprentissage d'habilités spatiales, telles que flexibilité du regard sur la figure, avec ses différentes composantes, souvent dans un micro espace. Blanquart- Henry (thèse en cours) étudie la potentialité de l'utilisation de deux environnements, micro et méso-espace, pour faire construire aux élèves des connaissances géométriques. Le spatial n'est pas ignoré, son rôle en géométrie est reconnu, des ingénieries se développent pour l'installer au service du géométrique. Les textes de Mathé et Mithalal, et de Bulf et Celi, dans ce même ouvrage, rendent compte des multiples avancées pour mettre le dessin au service de G2.

Concernant les travaux internationaux, le lecteur aura compris que l'intérêt pour le spatial est lié à des niveaux de codétermination (Chevallard, 2002) qui dépassent celui de l'école (enjeu de tout un pays pour les USA ou thème propice à une collaboration de recherche inter-disciplinaire au Canada). Aux USA notamment, le spatial est considéré au service d'autres disciplines, d'orientation professionnelle, de sélection et bien au delà de l'école obligatoire.

La vision du spatial de l'école de Bordeaux (notamment Brousseau, Berthelot et Salin) semble convenir pour les recherches actuelles des différents domaines scientifiques s'intéressant au spatial : le spatial comme connaissances mises en œuvre pour gérer les situations spatiales. Ce sont plutôt des variables des situations qui produisent la variété des situations, par exemple les tailles des espaces ou les types de rapports sollicités, la disponibilité (ou la contrainte) d'artefacts, le support (espace sensible ou schématisations de cet espace) utilisé pour les communiquer. Ces variables peuvent être plus ou moins dépendantes du domaine de savoir (des questions) dans lesquels elles s'insèrent. D'ailleurs les synthèses recensées dans ce texte, qu'elles soient documents de recherche ou d'accompagnement des enseignants, telles que Newcombe (2010), Ministère de l'éducation (2014), Davis & SRSG (2015), sont déjà très riches et multiplient les exemples d'activités pour illustrer leur propos.

Le spatial comme outil du citoyen pour gérer ses rapports à l'espace ne semble pas tellement mis en avant dans les recherches internationales sur les STEM, cela reste une spécificité de l'école de Bordeaux, qui ne réussit pas à s'imposer durablement dans les programmes, du moins de mathématiques. Il serait intéressant d'étudier comment d'autres domaines de savoir (par exemple la géographie) prennent cela en charge, institutionnellement et didactiquement,

L'impact du spatial apparaît déterminant pour bon nombre d'études scientifiques, et pourtant en France, il n'apparaît que comme un ensemble de connaissances éclatées dans divers champs de savoir. Pourrait-on construire un nouveau thème de recherche inter-didactique, en cernant les connaissances qu'il embarque, en construisant les situations qui mettent en jeu ces connaissances, en orchestrant l'intégration d'activités de type spatial dans l'enseignement obligatoire ? Les travaux internationaux cités sont déjà une base très riche, à confronter aux travaux français, du champ professionnel (par exemple, Bessot et Vérillon, dir, 1993), d'autres champs disciplinaires, mais aussi dans le champ de la cognition ?

Le voyage se termine, le lecteur aura constaté le déséquilibre de nos propos en faveur de la face obscure du titre, le yin, et l'ampleur du travail à poursuivre.

RÉFÉRENCES

ARZARELLO, F., FERRARA, F., ROBUTTI, O., & PAOLA, D. (2005). The genesis of signs by gestures. The case of Gustavo. In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol 2, pp. 73-80). Melbourne: PME.

- BATTISTA, M.T. (1999). The importance of spatial structuring in geometric reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 6(3), 170-177.
- BATTISTA, M.T. (2008). Development of the shape makers geometry microworld. In G. W. Blume & M. K. Heide (Eds.) *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, Vol. 2: Cases and Perspectives (pp. 131-156). Greenwich, CT: Information Age.
- BATTISTA, M.T. (2011) Conceptualizations and Issues related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication. *The Mathematics Enthusiast*, 8(3), 507-570.
- BERTÉ, A. (1995-96). Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classes. *Petit x*, 40, 41-63.
- BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse. Université de Bordeaux 1.
- BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (1993). Conditions didactiques de l'apprentissage des plans et cartes dans l'enseignement élémentaire. In Bessot, A., & Verillon, P. (dir). *Espaces graphiques et graphismes d'espaces* (pp. 87-113). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (1994-1995). Un processus d'enseignement des angles au cycle 3 (8-12 ans). *Grand N*, 56, 69-116.
- BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (1999-2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*, 65, 37-59.
- BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (2000-2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x* 56, 5-34.
- BESSOT, A., & VÉRILLON, P. (dir., 1993). *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BKOUICHE, R. (1990). Enseigner la géométrie, pourquoi ? *Repères-IREM*, 1, 92-102.
- BLOCH, I. & CONNE, F. (2009). Introduction. In Bloch, I. & Conne, F. (Eds.). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques*. (pp. 9-14). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BLOCH, I., & PRESSIAT, A. (2009). L'enseignement de la géométrie, de l'école au début du collège : situations et connaissances. In Bloch, I. & Conne, F. (Eds.). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques*. (pp. 65-88). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU, G. (1983). Étude des questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp.183-226). Grenoble : MAG, Université Fourier.
- BROUSSEAU, G. (2001). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. In *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques*. Rethymon 2000 (pp. 67-83). Grèce : Université de Crète.
- BRUCE, C. D., DAVIS, B., SINCLAIR, N., MCGARVEY, L., HALLOWELL, D., DREFFS, M., FRANCIS, K., HAWES, Z., MOSS, J., MULLIGAN, J., OKAMOTO, Y., WHITELY, W. & WHOLCOTT, G. (2017). Understanding gaps in research networks: using "spatial reasoning" as a window into the importance of networked educational research. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 143-161.
- CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Ecologie & régulation. In J.L. Dorier, et al. (éds.), *Actes de la XIe École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y., JULLIEN, M. (1990-91). Autour de l'enseignement de la géométrie, première partie. *Petit x* 27, 41-76.
- DAVIS B. & SPATIAL REASONING STUDY GROUP (2015) *Spatial Reasoning in the Early Years: principles, Assertions, and Speculations*. New York: Routledge.
- DUVAL, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*, 17, 121-138.
- DUVAL, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Bern : Peter Lang.
- DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- DUVAL, R. & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur la figure. *Grand N* 76. 7-27.
- EMPRIN, F. (2014). Le point de vue d'ingénieries didactique. In Enseignement de la Géométrie à l'École. Enseignement de la Géométrie à l'École. Enjeux et perspectives. *Enseignement de la Géométrie à l'École. Enjeux et perspectives. Actes du 40^{ème} colloque COPIRELEM* (pp. 20-31). Nantes 2013.
- FLORIS, R. (1995). La géométrie traite-t-elle des illusions d'optique ? Quatre élèves aux prises avec le triangle aplati. *Petit x*, 39, 29-53.
- GALVES, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*. Thèse d'état, Université de Mexico.
- GENTAZ, E. (2014). Comment aider les enfants de 5-6 ans à connaître les figures géométriques planes ? Un point de vue des sciences cognitives de l'éducation. *Enseignement de la Géométrie à l'École. Enjeux et perspectives. Actes du 40^{ème} colloque COPIRELEM* (pp. 81-86). Nantes 2013.
- GIBEL, P. & BLANQUART-HENRY, S. (2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace. *Revue des sciences de l'éducation*, 43(1), 37-84.
- GOBERT, S. (2001). Questions de didactique liées aux apports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement élémentaire. Thèse Université Denis Diderot. Paris.
- GOBERT, S. (2010). Contribution a priori sur les ostensifs du milieu pour faire signe d'un objet de savoir. In L.Coulangue L. & C.Hache (eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Année 2009 (pp.109-137). Paris : IREM, Université Paris-Diderot.
- GONSETH, F. (1945-1955). *La géométrie et le problème de l'espace*. Editions du Griffon, Lausanne.
- HOUEMENT, C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères-IREM* 67, 69-84.
- HOUEMENT, C. (2011). De nouveaux savoirs en géométrie pour les enseignants ? In Kuzniak A. & Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement: enjeux de société et de formation* (pp. 437-448). Revue Internationale Francophone.

- HOUEMENT, C. (2013). Géométrie et formation des enseignants. In *Au milieu du gué: entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques* (pp.28-49). Note d'Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris-Diderot.
- HOUEMENT, C. (2017). Traveling in spatiality, in spatial sense. In T. Dooley & G. Guedet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME10, February 1–5, 2017) (pp. 621-628). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
- HOUEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1999) Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres. *petit x*, 51, 5-21.
- HOUEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2002). Sur la gestion des différents paradigmes géométriques. *Actes du XXVIII^{ème} Colloque COPIRELEM*. (pp. 285-296). Tours 2001.
- HOUEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2003a). Quand deux droites sont « à peu près parallèles » ou le versant géométrique du « presque égal ». *petit x*, 61, 61-74.
- HOUEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2003b). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In *Proceedings of the 3rd Conference of European Research in Mathematics Education*. Université de Bologne.
- HOUEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 11*, 175-195.
- HOUEMENT, C., & PELTIER, M.L. (1992-1993). Du rite de l'appel... à des activités mathématiques en grande section de maternelle. *Grand N*, 51, 13-24.
- HOUEMENT, C. & ROUQUÈS J.P. (2016). *Deux géométries en jeu dans la géométrie plane*. Contribution aux ressources Eduscol Collège 2016 Utiliser la géométrie plane. En ligne sur <http://www.irem.sciences.univ-nantes.fr/archives/geometriePlane/geometriesDessineeAbstraite.pdf>.
- JAHNKE, H. N. (2007). Proofs and hypotheses. *ZDM Mathematics Education*, 39(1-2), 79-86.
- JONES, K. & TZEKAKI M. (2016) Research on the teaching and learning of geometry. In Ángel Gutiérrez, Gilah C. Leder, Paolo Boero (Eds) *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, Chapter 4* (pp. 109-149). Publisher: Sense.
- KAHANE, J.P. (dir, 2002) *L'Enseignement des Sciences Mathématiques*. Paris : Odile Jacob.
- KELLER, O. (2004). *Le paléolithique. Aux origines de la géométrie*. Le monde des chasseurs-cueilleurs. Paris : Vuibert.
- KELLER, O. (2006). Une archéologie de la géométrie. La figure et le monde. Peuples paysans sans écriture et premières civilisations. Paris : Vuibert.
- LOHAUS, A., THOMAS, H., KESSLER, TH., & GEDIGA, G. (1996). Decomposing water-level responses: filed effects as separate influences. *Journal of Experimental Child Psychology*, 63, 79-102.
- LOHMAN, D.F. (1996). Spatial ability and G. In I.Dennis & P.Tapsfield (Eds.) *Human abilities. Their nature and assessment* (pp.97-116). Hillsdale, NJ:Erlbaum.
- LUBINSKI, D. (2010). Spatial ability and STEM: A sleeping giant for talent identification and development. *Personality and Individual Differences*, 49(4), 344-351.
- MANDELBROT, B. (1973). *Les Objets fractals : forme, hasard et dimension*. Paris : Flammarion.
- MASCHIETTO, M., & BUSSI, M. G. B. (2005). Meaning construction through semiotic means: the case of the visual pyramid. In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol 3, pp. 313-320). Melbourne : PME.
- MASCHIETTO, M., & SOURY -LAVERGNE, S. (2013). Designing a Duo of Material and Digital Artifacts: the Pascaline and Cabri Elem e-books in Primary School Mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45(7), 959-971.
- MESQUITA, A. (1989) *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie*. Thèse Université de Strasbourg.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION (2014). *Mettre l'accent sur le raisonnement spatial*. Canada : Ontario.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, RECHERCHE (MENER) (2005). *Espace et géométrie au cycle 2*. Mathématiques. Document d'accompagnement des Programmes 2002.
- MITHALAL, J. (2010). Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle. Thèse. Université de Grenoble.
- MONTELLO, D. R. (1993). Scale and multiple psychologies of space. In A. U. Frank & I. Campari (Eds.) *Spatial information theory: a theoretical basis for GIS. Proceedings of COSIT '93. Lecture Notes in Computer Science*, 716, 312-321. Berlin: Springer-Verlag.
- MULLIGAN, J. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: connecting spatial reasoning to mathematical learning. *ZDM Mathematics Education*, 47, 3, 511-517.
- MUNIER, V. & MERLE, H. (2007). Une approche interdisciplinaire Mathématique-Physique du concept d'angle à l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27/3, 349-388.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMATICS (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA : NCTM.
- NEWCOMBE, N. S. (2010). Picture this: Increasing math and science learning by improving spatial thion, Vanking. *American Educator*, 34(2), 29. En ligne <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ889152.pdf>
- OWENS, K. & OUTHRED, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutiérrez and P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 83–115). Rotterdam, Sense Publishers.
- PADILLA-SANCHEZ, V. (1992). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*. Thèse. Université de Strasbourg I.
- PANAOURA, G., GAGATSI, A. & LEMONIDES, C. (2007). Spatial abilities in relation to performance in geometry tasks. *Proceedings of CERME5*. (pp. 1062–1071).
- PIAGET, J., & INHELDER, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : PUF.
- PERRIN-GLORIAN, M.J., & GODIN, M. (2014) De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math Ecole*, 222. 28-38.

- PERRIN-GLORIAN, M.J., & GODIN, M. (à paraître). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. In CORFEM *Ressources pour la formation des professeurs. Savoirs mathématiques à enseigner au collège et au lycée*. Une version préliminaire est en ligne <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837/document>
- PETITFOUR, E. (2017). Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37/2-3, 247-288.
- QUAISER-POHL, C., LEHMANN, W. & EID, M. (2004). The relationship between spatial abilities and representations of large-scale space in children - a structural equation modeling analysis. *Personality and Individual Differences*, 36, 95-107.
- RADFORD, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- SALIN M.H (2014a) Que peut nous apprendre l'observation d'élèves de 11 ans confrontés à un problème « spatio-géométrique » ? *Math-Ecole*, 222, 9-16.
- SALIN M.H (2014b) Quelques remarques autour des finalités de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. In Enseignement de la Géométrie à l'École. Enseignement de la Géométrie à l'École. Enjeux et perspectives. *Actes du 40^{ème} colloque COPIRELEM* (pp.32-43). Nantes 2013.
- SINCLAIR, N. & BRUCE, C.D. (2015). Geometry in the primary school, *ZDM Mathematics Education*, 47/3.
- SINCLAIR, N., BARTOLINI-BUSSI, M. G., DE VILLIERS, M., JONES, K., KORTENKAMP, U., LEUNG, A., & OWENS, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, 48(5), 691-719.
- TAHTA, D. (1980). About geometry. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 2-9.
- UTTAL, D. H., MEADOW, N. G., TIPTON, E., HAND, L. L., ALDEN, A. R., WARREN, C., & NEWCOMBE, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139/2,352-402.
- VADCARD, L. (2000). *Étude de la notion d'angle sous le point de vue des conceptions*. Thèse de l'université de Grenoble 1.
- VAN DE WALLE, J.A., KARP, K. S., BAY-WILLIAMS, J. M., WRAY, J. A., & BROWN, E. T (2007, 2010). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Pearson Education, 6th & 7th editions.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN M., ELIA, I., & ROBITZSCH, A. (2015). Kindergartner's performance in two types of imaginery perspective-taking. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 345-362.
- WAI, J., LUBINSKI, D., & BENBOW, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology*, 101(4), 817-835.
- WANG, L., COHEN, A.S., & CARR, M. (2014). Spatial ability at two scales of representation: A meta-analysis. *Learning and Individual Differences*, 36, 140-144.