



HAL
open science

Reflexiones sobre la multiplicidad de las teorías en didáctica de las matemáticas

Corine Castela

► **To cite this version:**

Corine Castela. Reflexiones sobre la multiplicidad de las teorías en didáctica de las matemáticas. 2021. hal-03199465

HAL Id: hal-03199465

<https://hal.science/hal-03199465v1>

Preprint submitted on 15 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

REFLEXIONES SOBRE LA MULTIPLICIDAD DE LAS TEORÍAS EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Corine Castela, Investigadora emérita,

Normandie Univ, UNIROUEN, LDAR, 76000 Rouen, France

Universités de Paris, Artois, Cergy Pontoise, Paris-Est Créteil

A petición del profesor Ugarte, el 25 de octubre de 2019, di una conferencia en la PUCP sobre el tema de la multiplicidad de teorías en la didáctica de las matemáticas. Esto me ofreció la oportunidad de volver con algunos años de distancia y más espacio para expresarme sobre reflexiones presentadas en dos ocasiones: el simposio *Hommage à Michèle Artigue* en 2012 (Grugeon, Godino, Castela, 2016), el congreso CERME 9 en 2015 (Castela, 2015). Este texto presenta el contenido de esta conferencia.

INTRODUCCIÓN

La didáctica de las matemáticas pronto podrá celebrar su 50º aniversario. Esto no es mucho para una ciencia, sin embargo, podríamos esperar que sus trabajos ejercieran una influencia creciente en las políticas educativas. Este no es el caso: por ejemplo, en Francia, uno de los países en que nació la didáctica de las matemáticas, son las neurociencias las que hoy monopolizan la atención de los políticos y de las autoridades educativas. ¿Por qué?

Entre los profesores, pero también entre los matemáticos, la didáctica es a menudo criticada por la complejidad de sus discursos. Según ellos, los fenómenos de enseñanza no requerirían una conceptualización particular, podrían describirse en términos del lenguaje coloquial. Nadie se sorprenderá de que rechace totalmente esa posición. La didáctica desarrolla modelos conceptuales y un vocabulario específico cuya complejidad se adapta a la complejidad de los fenómenos de enseñanza-aprendizaje de saberes específicos. Por supuesto, esta complejidad obstaculiza la diseminación de las investigaciones didácticas en los diferentes estratos de la sociedad, como ocurre con todas las ciencias. Esto atañe al problema de la divulgación científica, un problema difícil, de índole didáctica, que no puede ignorar la comunidad de los didácticos de las matemáticas. Pero la conferencia no trató de este tema.

Otra razón explica la influencia limitada de la didáctica de las matemáticas, y, más allá, de las ciencias de educación, sobre las políticas educativas: diferentes instituciones sociales, específicamente de la ciencia y de la política, no reconocen el carácter científico de estas actividades de investigación. Ciertamente que la multiplicidad de las teorías contribuye a esta dificultad de reconocimiento (como también a la dificultad de diseminación de sus resultados).

Pero, antes de desarrollar la reflexión sobre esta dimensión de la realidad actual de la didáctica de las matemáticas, contemplemos rápidamente otra dimensión muy criticada de la investigación educativa: sus metodologías. Nos permitirá aclarar un poco la concepción de la ciencia que subyace a estas críticas. Estas críticas metodológicas son específicamente desarrolladas en el movimiento de la *Evidenced Based Education*¹ (EBE) que desde el inicio del siglo XXI ocupa un lugar importante en la investigación educativa en los países de habla inglesa. Por ejemplo, en el informe *Scientific Research in Education* (Feuer, Towne, Chavelson, 2002), encargado por el *American*² *National Research Council*, los autores pretenden que la investigación educativa debería importar desde la investigación médica la

¹ http://veille-et-analyses.ens-lyon.fr/DA-Veille/18-may-2006_EN.pdf

² Cabe señalar que “American” remite aquí a los USA y no a la totalidad de los países que se pueden considerar como americanos.

metodología de los Ensayos Controlados Aleatorios (*Randomized Control Trial*) para evaluar con precisión la validez de un determinado proceso educativo. La idea básica de una prueba controlada aleatorizada es ofrecer, de manera aleatoria, el tratamiento a un grupo de individuos (grupo de tratamiento) y a otro no (grupo de control o de comparación)³. Las propiedades estadísticas de la aleatorización permiten que tanto el grupo de tratamiento como el grupo de control tengan características estadísticas idénticas y, de esta manera, que se pueda identificar el impacto que el tratamiento tiene sobre el grupo que lo recibió respecto al que no lo recibió. Se pretende de esta manera evidenciar un vínculo de causalidad o por lo menos de correlación, entre el tratamiento y ciertos efectos esperados. Sin embargo, hay muchas diferencias entre medicina y educación. Cabe destacar una: Cuando ECA se aplica para evaluar una droga, a los pacientes del segundo grupo se les da un placebo. Pero, no existe nada parecido a un placebo en el campo educativo. En otras palabras, las unidades educativas en las que se está experimentando el diseño a evaluar saben que están involucradas en una experimentación institucional, lo que puede conducir a cambios incontrolados en sus comportamientos, al igual que puede suceder en las que no han sido elegidas si se enteran de ello. Por eso, al suponer que dos grupos de unidades educativas de mismas características respecto a todos los determinantes del enseñanza-aprendizaje se puedan seleccionar, el hecho de involucrar solo uno en una experimentación cambia la intercambiabilidad de ellos. Por eso, ¿qué causa los efectos? ¿el diseño o bien los cambios que derivan de la selección como terreno de experimentación? Añadiré que yo no creo posible en una metodología a escala grande identificar en cada clase involucrada todas las características que pueden actuar sobre la realidad de la enseñanza y del aprendizaje, con un profesor dado y sus estudiantes particulares. Por lo tanto, opino que, al implementar un diseño en numerosas clases, es imposible distinguir entre los efectos que derivan solo del diseño y los que derivan de las interacciones entre este diseño y la realidad específica compleja (de índole didáctica, pedagógica, social y relacional) que vive en cada clase y que por una parte queda ignorada de los investigadores cuando trabajan a escala grande y con selección aleatoria.

En otras palabras, en el campo de la didáctica, buscar establecer vínculos causales entre fenómenos es una quimera que pretendo ineficaz. No obstante, ella resulta el sueño de los responsables políticos porque quieren certezas para concebir sus políticas. Pero no son los que pueden discutir de la pertinencia de este enfoque causal y de la metodología ECA para la didáctica. Tampoco lo son los científicos cuyos dominios de investigación ignoran la dimensión social del ser humano. Es decir, una visión de la ciencia inspirada en gran medida en las ciencias duras no es legítima para recusar la científicidad de las ciencias humanas y sociales y sus metodologías. Por eso, las reflexiones que yo desarrollo en este texto se fundamentan en la teoría de la ciencia que el sociólogo Pierre Bourdieu presentó en 2000-2001 al *Collège de France* (Paris), en un curso titulado *Science de la science et réflexivité* (Bourdieu, 2001; traducción en castellano 2003).

La responsabilidad de discutir sobre las metodologías por elegir debe recaer en la comunidad de los investigadores especialistas y conocedores de la educación, a partir de una epistemología científica compatible con la naturaleza compleja de la realidad investigada. Pero, el informe antes mencionado destaca que la comunidad de investigadores de la educación falta de debate sobre los métodos en sí mismos, de una cultura científica compartida y de autorregulación. Agrega otra crítica a la investigación educativa, su falta de acumulación que resulta de un conocimiento insuficiente y no sistemático de los resultados generados por las investigaciones anteriores. Concluye que, en esas condiciones, los investigadores no deben seguir indignados por el hecho de que los responsables políticos se sientan tentados a imponer normas "desde el exterior": se trataría simplemente de una sanción

³ Fuente: Wikipedia

lógica derivada del hecho de que la comunidad de investigación en el ámbito de la educación no se responsabilice de su propia regulación en temas como la calidad y la disciplina metodológica. Veremos a continuación, por qué, en el marco teórico de Bourdieu, tal intervención desde el exterior contradiría cualquier proyecto de desarrollar la dimensión científica de la investigación educativa. Pero, veremos también como en el mismo marco, se considera la insuficiencia de comunicación en un dominio dado de investigación como un obstáculo a la científicidad. Es desde este punto de vista que reconocemos en este texto la multiplicidad de teorías como un inconveniente para la didáctica de las matemáticas.

En la primera sección de este texto presentamos brevemente la Teoría de los Campos de Bourdieu y cómo él la utiliza para analizar la científicidad. En la segunda sección, nos planteamos las preguntas: ¿Qué entendemos exactamente por teorías o enfoques teóricos? ¿Qué significa entender un enfoque teórico? Ilustramos, en la tercera sección, las respuestas que proponemos con dos ejemplos de origen francés. La sección siguiente aborda el por qué existen tantas teorías. Finalmente presentamos algunas de las estrategias desarrolladas por la comunidad europea de educación matemática para reducir los inconvenientes en relación con la multiplicidad de teorías.

I. LA CIENTIFICIDAD EN EL MARCO DE LA TEORÍA DE LOS CAMPOS

Como lo he dicho en la introducción, la didáctica siendo una ciencia humana, su científicidad no se puede evaluar desde criterios desarrollados por y para las ciencias duras y naturales. Como sociólogo, es decir como practicante de una ciencia humana y también como especialista de las dimensiones sociales de las actividades humanas, Bourdieu nos proporciona un enfoque a la científicidad que me parece muy relevante para las ciencias educativas. Dentro de los límites del presente texto, es imposible dar cuenta a fondo de la fuerza de este trabajo, en particular de la manera en que Bourdieu logra aplicar a la ciencia una pauta de análisis sociológica que postula la primacía de lo social sobre todas las prácticas humanas sin caer en un relativismo radical. Sin embargo, intento enseguida asumir el reto de dar suficientes elementos de esta teoría para que los lectores se hagan una idea de su relevancia en las cuestiones que nos interesa tratar sobre la didáctica y que a ellos les apetezca estudiar el texto de Bourdieu.

1. *Elementos de la Teoría de los Campos de Bourdieu*

La noción de campo conceptualiza la existencia en la sociedad de organizaciones sociales relativamente autónomas. Un campo se caracteriza por el juego que se juega entre todos los agentes del campo y sólo ellos. Por agentes debemos entender tanto a los individuos como a los grupos estructurados; por ejemplo, en el caso de la ciencia, a los investigadores como a los laboratorios. Este juego está regulado por un sistema de normas específicas del campo.

Según una metáfora tomada de la física, un campo es un *campo de fuerzas* cuyo estado en el tiempo t está determinado por la distribución de un capital entre los agentes. Del juego resultan relaciones entre agentes, más particularmente una jerarquía con dominantes y dominados, un espacio de posiciones que estructura el campo. Del capital del agente depende su poder, el poder de actuar en el campo y el poder sobre los demás. El capital puede ser de naturaleza material, por ejemplo, en el campo científico, medios técnicos, financiación, control de una revista clasificada. Pero también tiene siempre un carácter eminentemente simbólico, basado en el reconocimiento por parte de todos los agentes de la dominación de un determinado agente o institución.

La estructura del campo, definida por la distribución desigual del capital, es decir, de las armas o de las bazas específicas, pesa, al margen incluso de cualquier interacción directa, intervención o manipulación,

sobre el conjunto de los agentes, y limita más o menos el espacio de las posibilidades que se les pueden abrir según estén mejor o peor colocados en el campo, es decir, en esa distribución. El dominante es el que ocupa en la estructura un determinado espacio que hace que la estructura actúe en su favor. (Bourdieu, 2003, p. 66)

Campo de fuerzas, un campo es correlativamente un *campo de luchas*:

Podemos pasar ahora al segundo momento de la definición, o sea, al campo como campo de luchas, como campo de acción socialmente construido en el que los agentes dotados de recursos diferentes se enfrentan para conservar o transformar las correlaciones de fuerza existentes. Los agentes desencadenan unas acciones que dependen, en sus fines, sus medios y su eficacia, de su posición en el campo de fuerzas, es decir, de su posición en la estructura de la distribución de capital. (ibidem, p.67)

En resumen, a lo largo de un proceso dialéctico, los éxitos de un agente en el juego del campo dependen de su capital, pero dicho capital depende a su vez de los éxitos.

La existencia del campo presupone el sometimiento de todos los agentes a las normas del campo. Es decir, ellos deben compartir las normas del juego específico del campo, como también las reglas de atribución del poder en el campo. Cabe señalar que, en vez de sometimiento, Bourdieu utiliza la noción de *derecho de admisión* (véase ibidem, p.93). El ejercicio del poder, incluido el simbólico, es por una parte visible; la distribución del capital se construye y se disputa explícitamente en las dinámicas del juego, de las luchas competitivas entre agentes. Pero también yace en gran medida en una aceptación tácita, la incorporación por parte de cada agente de lo que Bourdieu llama el *habitus* del campo, un sistema de disposiciones incorporadas que regula inconscientemente la participación en el juego y que, en primer lugar, despierta el deseo de participar en él para conquistar posiciones consideradas deseables.

2. *El campo científico*

Bourdieu propone contemplar la ciencia como un campo cuyo juego específico consiste en la producción de conocimientos objetivos sobre el mundo real. Este objetivo epistemológico está compartido por todos sus agentes, su incorporación forma parte del derecho de admisión. Se puede emplear la misma idea para las diferentes disciplinas científicas.

Todo se plantea como si [...] los investigadores se pusieran de acuerdo, tácitamente, sobre el proyecto de ofrecer una representación realista de lo real; o, más exactamente, aceptaran de modo tácito la existencia de una realidad objetiva por el hecho de aceptar el proyecto de buscar y de decir la verdad del mundo y de aceptar ser criticados, contradichos, refutados, en nombre de la referencia a lo real, constituido de ese modo en árbitro de la investigación.

[Este postulado ontológico implica otro, el hecho de que exista un sentido, un orden, una lógica, en suma, algo que entender en el mundo, sin excluir el mundo social] (ibidem, pp.123-124).

Bourdieu desarrolla una visión social del proceso de producción del hecho científico:

Pensamos tácitamente que la construcción debe ser validada por la experiencia, en una relación entre el experimentador y su objeto. En realidad, el proceso de validación del conocimiento como *legitimación* (que asegura el monopolio de la opinión científica legítima) implica la relación entre el sujeto y el objeto, pero también la relación entre los sujetos y, muy especialmente, las relaciones entre los sujetos en relación al objeto (insistiré sobre ello). El hecho es conquistado, construido y verificado en y por la comunicación dialéctica entre los sujetos, o sea, a través del proceso de verificación y de producción colectiva de la verdad, en y por la negociación y la transacción, así como por la homologación, que es su ratificación mediante el consenso explícitamente expresado *-homologéin⁴*- (y no sólo en la dialéctica entre la hipótesis y el experimento). (ibidem, p.129)

El hecho científico sólo queda completamente realizado como tal cuando se realiza por la totalidad del campo y todo el mundo colabora por convertirlo en un hecho conocido y reconocido. [...] Verificado, significa colectivamente validado en un trabajo de comunicación que culmina en el reconocimiento

⁴ De *homo* y *logos*: discurso común, homologación: un acuerdo racional sobre el mismo discurso

universal (dentro del límite del campo, es decir, del universo de los conocedores competentes). (ibidem, p. 130)

Que todos los agentes de un campo científico hayan incorporado, transformado en sentido práctico del juego -el *habitus* científico de la disciplina, que hayan convertido en reflejos, todos los recursos teórico-experimentales, es decir, cognitivos y materiales obtenidos de investigaciones anteriores, resulta necesaria para que las interacciones y regulaciones entre científicos sobre las investigaciones conlleven hechos objetivos.

Por lo tanto, como se anunció al final de la introducción, la comunicación entre los investigadores, el entendimiento mutuo, son condiciones imperativas de la científicidad en el marco teórico de Bourdieu. Además, Bourdieu destaca que los procesos de verificación y homologación no pueden limitarse a interacciones entre individuos en las instituciones locales de investigación. Tienen que extenderse a los niveles superiores de la organización social de la ciencia:

El proceso de despersonalización, de universalización y de desparticularización, cuyo resultado es el hecho científico, tiene un número de posibilidades de realizarse que es directamente proporcional al grado de autonomía y de internacionalización del campo (de todos los campos especializados)” p.134

Así, la multiplicidad de las teorías en la didáctica de las matemáticas puede considerarse como un obstáculo para la científicidad, ya que, por supuesto, dificulta el entendimiento mutuo entre investigadores de marcos teóricos diferentes. Cabe destacar que no se trata en primera instancia de una razón epistemológica, sino social.

Sobre la idea de autonomía

En realidad, el campo está sometido a *presiones* (exteriores) y lleno de *tensiones*, entendidas como fuerzas que actúan para descartar y separar las partes constitutivas de un cuerpo. Decir que el campo es relativamente autónomo respecto al universo social que lo rodea equivale a decir que el sistema de fuerzas que constituye la estructura del campo (tensión) es relativamente independiente de las fuerzas que se ejercen sobre el campo (presión). Dispone, en cierto modo, de la «libertad» necesaria para desarrollar su propia necesidad, su propia lógica, su propio *nómos*. (ibidem, p.87)

Cuanto más autónomo es un campo, más difícil es convertirse en agente del campo y viceversa.

El proceso de autonomización va unido a la elevación del *derecho de admisión* explícito o implícito. El derecho de admisión es la competencia, el capital científico incorporado [...] convertido en sentido del juego, pero también es la apetencia, la *libido científica*, la *illusio*, de creencia no sólo en lo que está en juego, sino también en el propio juego, es decir, en el hecho de que la cosa vale la pena, compensa jugarla. Al ser producto de la educación, la competencia y la apetencia están científicamente unidas porque se forman de manera correlativa (en lo esencial a lo largo de la formación). (p.93)

Como lo vimos algunas líneas antes, el derecho de admisión en una disciplina científica es muy alto, el *habitus* que incorporar muy complejo. Es menester que sean así para asegurar la autonomía en que yace el carácter científico del campo.

La autonomía no es un dado, sino una conquista histórica, que no tiene fin. Bourdieu lo destaca en el caso de las ciencias sociales:

Cuando nos preguntamos acerca de la científicidad de un campo, nos referimos a unas propiedades directamente relacionadas con el grado de autonomía. Por ejemplo, las ciencias sociales están obligadas a tener siempre en cuenta que hay fuerzas externas que frenan constantemente el «despegue». (ibidem, pp. 87-88)

La científicidad de una disciplina depende de su capacidad a funcionar como un campo cerrado, a resistir a las presiones exteriores, que vengan de campos no científicos como de otras disciplinas científicas. Según este enfoque, el acceso a la científicidad de las ciencias educativas no se puede imponer desde otras disciplinas científicas, al importar sus concepciones, teorías y metodologías (como la ECA). Que estas sean relevantes en su campo

de origen no basta asegurar su legitimidad para otra ciencia. La cientificidad de la didáctica sólo puede ser construida por un proceso interno, independiente de cualquiera instrucción de fuera, por lento que sea este proceso.

3. *La ciencia como campo de fuerzas y campo de luchas*

La ciencia, siendo un campo, es simultáneamente un campo de fuerzas y un campo de luchas, con relaciones dialécticas entre ellas que se construyen a lo largo del juego científico.

La fuerza vinculada a un agente [científicos, equipos o laboratorios aislados] depende de sus diversas bazas, factores diferenciales de éxito que pueden asegurarle una ventaja en la competencia El capital científico es una especie de capital simbólico, capital basado en el conocimiento y el reconocimiento. (ibidem, p. 65)

El peso simbólico de un científico tiende a variar, de acuerdo con el valor distintivo de sus contribuciones y la *originalidad* que sus colegas-competidores reconocen a su aportación distintiva. El concepto de *visibilidad*, utilizado en la tradición universitaria estadounidense, sugiere perfectamente el valor diferencial de este capital que, concentrado en un nombre propio conocido y reconocido, diferencia a su portador del fondo indiferenciado en el que se confunden el conjunto de los investigadores anónimos. (ibidem, p.101)

Conlleva que

En el campo científico, las estrategias siempre tienen dos caras. Tienen una función pura y meramente científica y una función social en el campo, es decir, en relación con los restantes agentes implicados en el campo. (ibidem, p.99)

No existe ninguna opción científica [...] que no sea *también* una estrategia social de inversión orientada hacia la maximización del beneficio específico, indisociablemente social y científico (ibidem, p.106)

Esta visión cuestiona una visión idílica del mundo científico en la que todos los investigadores contribuirían generosamente al mismo fin, es decir, a producir conocimientos objetivos de lo real. Pero no convierte la investigación en una guerra en la que se enfrentarían entre sí investigadores movidos únicamente por la ambición. Dado que el juego científico tiene dos caras, los agentes del campo, individuos o instituciones, pueden perseguir conscientemente objetivos epistemológicos, al mismo tiempo que a nivel infra-consciente, participan en las luchas de dominación que pueden o no permitirles adquirir una posición dominante. La noción de *habitus* incorporado permite, a nivel de las personas, no interpretar en términos de ambición, cinismo u otra propiedad moral la forma en que un científico participa en el juego del campo y, por lo tanto, también en las luchas de poder. En este sentido Bourdieu se diferencia de otros sociólogos de la ciencia.

En la cuarta parte, cuando buscaremos razones de ser de la multiplicidad de las teorías en la didáctica de las matemáticas, volveremos a la dimensión “lucha de poder” de la ciencia, tomando en cuenta el papel central de la visibilidad en el capital simbólico de un agente.

II. ¿QUÉ SIGNIFICA CONOCER, ENTENDER UNA TEORÍA?

Una definición de la noción de teoría científica, propuesta por M. Niss (2007) circula en el dominio de la investigación en didáctica de las matemáticas. Abarca tres dimensiones:

- Una teoría es una red estructurada de conceptos y afirmaciones sobre un dominio extenso que consiste en objetos, procesos, situaciones y fenómenos;
- los conceptos están vinculados en una jerarquía conectada, en la que cierto conjunto de conceptos, considerados básicos, se utilizan como bloques de construcción en la formación de otros conceptos;

- las afirmaciones son supuestos o axiomas básicos, tomados como fundamentales, o afirmaciones obtenidas de las afirmaciones fundamentales por medio de una derivación formal o experimental.

Se reconoce un enfoque epistemológico clásico, específicamente bien adaptada a las teorías de las ciencias exactas. Sin embargo, lo que dificulta la comunicación entre investigadores utilizadores de dos teorías es el entendimiento mutuo de cada una, es decir, el acceso que logra cada investigador al significado de la teoría del otro. ¿Cómo definir el significado de una teoría? La definición anterior no basta para contestar esta pregunta. Iniciamos nuestra reflexión con la proposición de Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2019):

La correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde interviene tal objeto se interpreta como el “significado de dicho objeto” (institucional o personal). (p.7 en la versión español)

Es decir, el significado de una teoría no es estrictamente interno a la teoría. Surge de todas las prácticas en las que participa.

1. *Dos modelizaciones del significado de una teoría*

En el seno de un *Working Group* focalizado en la conexión de teorías, iniciado en el congreso CERME⁵ 4 en 2005 y aún activo, se han propuesto lo que podemos considerar como dos modelizaciones del significado de una teoría, ambas compatibles con la visión de Godino et al. Como veremos, no son completamente idénticas. Analizar sus diferencias nos permitirá alcanzar una modelización más completa.

En el capítulo 15 del libro *Networking of theories in mathematics education edited por Bikner-Ahsbahs, A. & Prediger, S.*⁶ (2014), M. Artigue y M. Bosch se apoyen en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y su noción de organización praxeológica para modelizar las actividades de investigación. Cabe señalar que el concepto de significado con su referencia psicológica no pertenece al campo conceptual de la TAD; sin embargo, el modelo praxeológico brinda una articulación de las dimensiones prácticas y teóricas de todas actividades humanas.

Las actividades de investigación se describen en términos de praxeologías puntuales [T/τ/θ/Θ] donde la noción de teoría aparece bajo el símbolo Θ. Después se consideran las organizaciones praxeológicas que amalgaman a las praxeologías de la misma tecnología, luego a las de la misma teoría; se habla de organizaciones praxeológicas locales y regionales. Artigue y Bosch dejan claro que lo que designan como praxeologías de investigación (OPI a continuación) son por lo menos organizaciones praxeológicas locales, organizaciones cuyo surgimiento, según ellas, es crucial en la dinámica científica y en la historia de las teorías. Sin embargo, como focalizamos nuestra reflexión en lo que se reconoce como teoría, contemplamos el nivel de organización praxeológica regional para modelizar el significado de una teoría. Se define por:

- los tipos de cuestiones T que se pueden abordar y los que no, determinando las cuestiones de investigación aceptables y las transformaciones que sufrirán para definir los objetos de estudio,
- por las técnicas de investigación τ , asociadas a los tipos de cuestiones y consideradas legítimas,
- por las tecnologías θ de estas técnicas de investigación, en particular los argumentos racionales que las producen y que justifican y explican las opciones metodológicas,

⁵ Congress of European Research in Mathematics Education

⁶ Este libro edita los trabajos de un grupo de investigadores europeos, conocido como el Grupo de Bremen. Volveremos a ello particularmente en la última parte de este texto.

- por la teoría Θ .

Como lo destacan Artigue y Bosch:

Considering theories as elements of research praxeologies is also adopting a pragmatic and dynamic vision of theories, trying to make clear how they inform and shape the practical research work, and conversely how they progressively emerge from it and integrate its results. (ibidem, p.251)

Cabe subrayar que el componente *logos* de cualquiera praxeología agrega saberes, entendiéndose el término "saber" en el sentido de conocimiento explícito, socialmente legitimado y, por tanto, institucionalizado. A cada técnica de investigación se relaciona una tecnología, componente que abarca los saberes elaborados para producir, justificar y hacer inteligible dicha técnica. ¿En qué sentido empleamos el concepto de teoría en este modelo? Puede ser en el sentido de Niss puesto que nos interesamos en este texto en la multiplicidad de teorías con visibilidad dentro de la didáctica de las matemáticas. Sin embargo, la TAD emplea este concepto en un sentido más amplio: la teoría es el discurso racional de apoyo a las tecnologías, un *logos* de segundo nivel. Específicamente, se considera como parte de la teoría todo elemento de saber que garantiza la validez de las tecnologías. Pero, la teoría puede ser evanescente, poca estructurada.

Es decir, el modelo praxeológico de investigación vale incluso dentro la fase de emergencia de una primera amalgama praxeológica, que sólo se identificará por una teoría bastante consistente a lo largo del tiempo y de los trabajos de investigación. Artigue y Bosch insisten en el interés del nivel tecnológico de las praxeologías mediante esta fase: en particular, permite dar cuenta de la naturaleza y del papel de los saberes en falta de una estructuración teórica integradora. Pero esta ausencia o debilidad del nivel teórico no impide que esta organización emergente acceda a una cierta existencia social, que se materializa al menos en el desarrollo de una comunidad de investigadores que se refieren a ella. En esta etapa, en un proceso de desarrollo iterativo, algunos de los resultados del trabajo realizado, especialmente los fenómenos didácticos⁷, generan nuevos tipos de cuestiones y nuevas metodologías. Los saberes producidos se integran en la tecnología de nuevas praxeologías que se incorporan a la amalgama en expansión. Artigue y Bosch dan el ejemplo del fenómeno de la transposición didáctica que, mucho antes de su integración en la TAD, ha dado lugar al desarrollo de praxeologías que hoy en día se han convertido en insoslayables en las investigaciones que se refieren a la TAD y a la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)⁸.

La segunda modelización que consideramos aquí la propone (Radford, 2008), se basa en un trío (sistema *P* de principios, metodología *M*, conjunto *Q* de preguntas de investigación):

a theory can be seen as a way of producing understandings and ways of action based on:

- A system, *P*, of basic principles, which includes implicit views and explicit statements that delineate the frontier of what will be the universe of discourse and the adopted research perspective.
- A methodology, *M*, which includes techniques of data collection and data interpretation as supported by *P*.
- A set, *Q*, of paradigmatic research questions (templates or schemas that generate specific questions as new interpretations arise or as the principles are deepened, expanded or modified). (Radford, 2008, p. 320).

En un vocabulario y una estructura diferentes, estas dos modelizaciones presenten semejanzas evidentes, pero también ciertas diferencias, tomarlas en cuenta nos llevará a desarrollar ambas.

⁷ Según una formulación de G. Brousseau, un fenómeno didáctico es una regularidad cuya estabilidad se establece por medio de la investigación.

⁸ Este fenómeno se reconoce también en otros dominios de investigación, con otros marcos teóricos, tal como en la didáctica profesional, en un enfoque que se refiere a la Teoría de la Actividad de Leontiev.

2. Extensión de la modelización de Radford: construcciones teóricas clave

Primero, el conjunto Q de cuestiones paradigmáticas corresponde al conjunto de tipos de cuestiones que abarca una OPI local o regional, o, quizás, a un subconjunto; según el sentido del adjetivo “paradigmática”, podría referirse a un núcleo central de T . Respecto a la metodología M , parece desde la definición de Radford que esté integrada por el conjunto de técnicas del OPI. Pero ¿dónde encontramos en el modelo de Radford las tecnologías de estas técnicas? Apoyándonos en la etimología de la palabra método-logía, con su componente *logos*, parece razonable presumir que estén incluidas en el bloque M y por parte en el sistema P de principios básicos. Sin embargo, falta una formulación explícita de la toma en cuenta de estos saberes sobre las técnicas de investigación.

De la misma manera, nos percatamos que, salvo en la forma de los principios básicos explícitos incluidos en el sistema P , la teoría misma con su conjunto organizado de conceptos y afirmaciones está ausente del trio (P, M, Q) . A contrario, el modelo OPI da ostensiblemente a los saberes, tanto metodológicos como teóricos, el lugar crucial que una ciencia ciertamente no puede negarles por su papel en los procesos sociales de validación de las técnicas como de los saberes en sí. Esta diferencia entre los dos modelos se redujo gracias a la introducción en el libro *Networking of theories in mathematics education* de un cuarto componente en la proposición de Radford: el conjunto K de construcciones teóricas clave (*Key concepts*) de la teoría. Si bien, a contrario del modelo OPI, el modelo (P, M, Q, K) no tiene en cuenta la totalidad de lo que se considera usualmente como una teoría científica, resulta como una herramienta adecuada para un encuentro bastante significativo con un marco teórico. Lo ilustra el libro citado en que se emplea este modelo para analizar cuatro marcos teóricos; daremos una idea de este análisis con el ejemplo de la Teoría de las Situaciones Didácticas en la parte III.

La tabla siguiente presenta un resumen de los vínculos ya establecidos

Radford	Artigue, Bosch
<p><i>La teoría como productor de entendimiento y acciones basadas en:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Un sistema, P, de principios básicos, que incluye puntos de vista implícitos y <u>declaraciones explícitas que delimitan la frontera de lo que será el universo del discurso y la perspectiva de investigación adoptada.</u> • Q, conjunto de cuestiones de investigación paradigmáticas • M, metodología, <u>métodos de investigación y conocimiento de los métodos</u> • K Construcciones teóricas clave 	<p><i>La teoría como componente de un modelo praxeológico regional de investigación científica</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • T conjunto de tipos de cuestiones relevantes • τ técnicas de investigación • θ discurso racional sobre las técnicas • Θ discurso racional de apoyo a las tecnologías, más o menos desarrollado

Tabla 1. Correspondencias entre los dos modelos

Es decir, $Q = T$ o $Q \subset T$, $M = \tau + \theta$, $\{\text{explícitos } P \text{ y } K\} \subset \Theta$.

3. Extensión de la modelización praxeológica: Paradigma de investigación

Nos queda ahora considerar la parte implícita que aparece en el sistema P de Radford. Yo afirmo que no hay lugar en la modelización praxeológica para la parte implícita del sistema P . Esta afirmación necesita discusión.

Chevallard, Bosch y Kim (2015) sostienen que

a theory is made up of two main components, that we may call its “emerged part” and “immersed part. [...] In ATD, a theory is thus a hypothetical reality that assumes the form of a (necessarily fuzzy) set of explicit and implicit statements about the object of the theory.

Esto reconoce la necesidad de incluir una dimensión implícita en la modelización de la actividad humana. Sin embargo, no estoy de acuerdo con la idea de que los puntos de vista implícitos puedan ser considerados como parte del componente *logos* del modelo praxeológico. Según el significado etimológico de este término griego, el *logos* es un discurso explícito. En mi opinión, el modelo praxeológico debe seguir con este significado donde el bloque $[\theta/\Theta]$ se refiere a conocimientos explícitos y socialmente legitimados, es decir, a saberes. Sin embargo, refiriéndome a la TAD con su dimensión institucional, asumo que la forma en que una praxeología vive en una institución dada está determinada por un conjunto de restricciones, entre las que se encuentran normas incorporadas culturalmente compartidas (*habitus* en el sentido de Bourdieu), ciertas de las cuales quedan implícitas en el seno de dicha institución. Por lo tanto, siguiendo a Chevallard (2006, p.23), considero que cada praxeología es una idiosincrasia institucional, cuyos componentes traen las huellas normativas de una institución, lo que represento de la manera siguiente⁹: $[T, \tau, \theta, \Theta] \leftarrow I$, donde la flecha representa los procesos por los cuales la institución I produce, normaliza, legitima e institucionaliza la praxeología. Esta extensión de la modelización praxeológica permite integrar en el modelo la actividad de desarrollo praxeológico, emergente como inmersa, explícita como implícita, llevada a cabo por la organización social institucional.

Si queremos emplear esta extensión para la investigación, tenemos que incorporar en la modelación una organización social, lo que propuse en Castela (2015) y en (Grugeon-Allys, Godino y Castela, 2016) bajo el nombre de *Paradigma de investigación*. Un paradigma de investigación está constituido de una praxeología regional de investigación y de una comunidad de investigación. Los investigadores de la comunidad tienen preocupaciones comunes, colaboren en el desarrollo de la OPI y en la legitimación interna de los avances (acción epistemológica). Dentro de un paradigma dado, las acciones de los investigadores están reguladas por la referencia a la OPI y por la influencia implícita de la comunidad social asociada (acción normativa).

La comunidad desempeña un papel específicamente crucial en la fase de emergencia evocada en la sección II.1: La organización praxeológica no se desarrollaría y organizaría en una amalgama de la cual podría surgir una teoría, no fortalecería y accedería a una cierta forma de reconocimiento científico sin que esta comunidad tenga cierta visibilidad en el campo de la investigación. Sin teoría bien desarrollada, es la comunidad que asegura la identificación social del paradigma:

$$[T_C, \tau_C, \theta_C, \Theta_C] \leftarrow C$$

Cabe destacar que esta configuración puede encontrarse para paradigmas bien establecidos, caracterizados, por ejemplo, por un campo de investigación específico (T_C). En la parte III, ilustraremos este caso con el “Doble enfoque didáctico y ergonómico de las prácticas de enseñanza de las matemáticas”.

⁹ (Castela, 2011) y (Chaachoua, Bessot Romo, Castela, 2019).

A la inversa, cuando existe una teoría bien consistente, ella funciona como el emblema del paradigma, enriqueciendo por su peso epistemológico el capital científico de la comunidad:

$$[T_{\Theta}, \tau_{\Theta}, \theta_{\Theta}, \Theta] \leftarrow C_{\Theta}$$

Un caso límite de la primera configuración es que la teoría sea evanescente. ¿Cuál es en la segunda? Que la comunidad C_{Θ} se reduzca a un único investigador, quien se encarga de los procesos de desarrollo, legitimación y institucionalización, la teoría estando identificada por el nombre de él. ¿Imposible? Dejo la pregunta al lector.

4. ¿Reducir la multiplicidad?

El problema de la didáctica de las matemáticas no solo es el de la multiplicidad de teorías, sino el de la multiplicidad de los paradigmas. Por lo tanto, un objetivo de la comunidad internacional de los didácticos podría ser reducir esta multiplicidad al fusionar marcos teóricos diferentes. J. Godino ha desarrollado otra manera de hacer que llama hibridación, creando una teoría nueva (Enfoque Onto-Semiótica, EOS) al seleccionar ciertos conceptos de varios marcos sin amalgamar todo (en la citación siguiente, se reconocen la Teoría de los Campos Conceptuales – TCC, Vergnaud, la Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas -TRSS, Duval, la Teoría de las Situaciones Didácticas – TSD, Brousseau- y la Teoría Antropológica de lo Didáctico – TAD, Chevallard):

the OSA has tried to develop a new framework with a clear hybrid character. The onto-semiotic configuration construct (Figure 2.2) keeps a "family resemblance" with the notions of concept, conception, semiotic representation register, knowledge, mathematical praxeology, but is not reducible to any of them, so it requires a specific designation. This notion can be more effective than the original notions, allowing to analyze the micro and macro level of institutional and personal mathematical activity, and to better understand the relationships between both dimensions of mathematical knowledge. [...]

It is clear that this new entity competes with the already existing, and has to prove its relative effectiveness to solve the paradigmatic issues in the field. (Grugeon-Allys et al. 2016, p.74)

Se ve bien en esta citación que Godino tiene el objetivo de sustituir el EOS a las otras cuatro teorías de las que hibrida algunos conceptos, aun sí el reconoce la necesidad de probar la superioridad del EOS sobre dichas teorías. Confirma esta tendencia en su conferencia “Articulación de teorías socio-culturales en educación matemática desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico” del congreso RELME 31¹⁰ (2017), con una diapositiva titulada “¿Para qué usar cuatro teorías cuando una puede ser suficiente?”. Esta vez, las tres teorías que olvidar son la TAD, la Socioepistemología y la Etnomatemática. Frente a tal proposición, se debe plantear las cuestiones siguientes: ¿Cómo se puede establecer que no se pierde nada al sustituir seis paradigmas por uno cuando éste sólo tiene en cuenta algunos de los conceptos de los seis, con significados parcialmente diferentes? ¿Cómo se puede establecer que el EOS permite tratar con igual eficacia todos tipos de cuestiones que consideran relevantes la TCC, la TRE, la ETR, el TDA, la socioepistemología y la etnomatemática? O bien, ¿Según qué criterios se decide que algunas de estas cuestiones no entran dentro de las cuestiones paradigmáticas de la educación matemática¹¹? Por supuesto, es imposible contestar esta cuestión desde el EOS, ya que sabemos que los principios P implícitos y la teoría de un paradigma determinan su componente T , es decir las preguntas que reconoce como relevantes. Se percibe la magnitud y la dificultad del trabajo que haría que hacer para establecer la primacía del EOS en el campo de la didáctica de las matemáticas. En el estado actual de la investigación, el EOS resulta simplemente una entidad más en la multiplicidad de los

¹⁰ http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/JDGodino_Conferencia_RELME31.pdf
¹¹ Vease “the paradigmatic issues in the field”

paradigmas de la didáctica de las matemáticas, el trabajo que requiere su entendimiento aumenta a medida que se amplía el conjunto de conceptos importados desde otros paradigmas, dejando atrás el objetivo de simplificación y de economía perseguido por Godino.

Otros didácticos europeos han encontrado la dificultad del desafío unificador, en particular en el proyecto europeo ReMath. ReMath tenía como objetivo trabajar en el desarrollo de ciertos ambientes interactivos, experimentándolos lo más cerca posible de las condiciones reales de la educación. En su formulación inicial, también pretendía reducir la diversidad de marcos teóricos, que se analizaba como una de las causas del bajo impacto en las prácticas escolares de la investigación ya realizada en el ámbito del CEHL (Computer Environments for Human Learning). Sin embargo, el trabajo inicial realizado rápidamente condujo a una reformulación de esta dimensión del proyecto (véase el primer informe de progreso después de seis meses¹²). La idea de buscar la creación de una gran teoría unificadora capaz de incorporar las aportaciones de las diferentes perspectivas existentes en el campo de la investigación en la didáctica de las matemáticas se consideró un callejón sin salida. Haciendo un balance del trabajo realizado, M. Artigue y M-A. Mariotti (2014) recalcan:

Despite our maturity as researchers, we all discovered up to what point our knowledge of many of the theoretical frameworks involved in the project was superficial. It had been gained through reading articles, listening to presentations, and discussing with colleagues. It lacked the firsthand experience provided by the actual use in a research project. In such conditions, misunderstanding and distortions are frequent. Through ReMath, using the language of the TDS, we have created an antagonist milieu for preventing such distortions in networking activities. (Artigue & Mariotti, 2014, p.350)

Entonces, en relación con la dimensión CEHL, ReMath se dedicó a la exploración de otras modalidades de vinculación, apoyándose en las modelizaciones que encontramos en las secciones II.1 y II.2. Presentaremos ejemplos de este trabajo en la quinta parte de este texto. Enseguida, ilustramos dichas modelizaciones con un análisis de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau por una parte, del Enfoque didáctico y ergonómico de las prácticas de enseñanza de las matemáticas (conocido como el Enfoque Doble) de Aline Robert y Janine Rogalski.

III. ILUSTRACIÓN DE LA DIVERSIDAD DE PARADIGMAS EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

1. *La Teoría de las Situaciones Didácticas*

Yo me apoyo aquí en el trabajo de M. Artigue, M. Haspékian y A. Corblin-Lenfant, presentado en el capítulo 4 del libro editado por Bikner-Ahsbahr & Prediger (2014). Emplean el modelo (Q, P, M, K) para ofrecer una primera descripción sintética de la Teoría de las Situaciones Didácticas. En lo que sigue, tengo que suponer que el lector conoce a las construcciones teóricas clave de la TSD. Si no, se puede referir a Brousseau (1998).

Principios y Construcciones clave

Desde sus inicios, la TSD ha adoptado una perspectiva sistémica, concibiendo la didáctica de las matemáticas como el estudio de las condiciones para la difusión y apropiación del conocimiento matemático a través de las instituciones educativas. Esta perspectiva sistémica se refleja en la organización de la teoría en torno a la idea de **situación**.

El objeto central de la investigación didáctica debe ser la situación y no el estudiante, ya que las situaciones se conciben como un sistema de interacciones entre tres polos: los

¹² Artigue, M. (coord.) (2006). Integrative theoretical framework. ReMath Deliverable 1. <https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190417/document>

estudiantes, el profesor y el conocimiento matemático. Por lo tanto, la TSD en sus primeros años se focaliza en el diseño, la experimentación y la evaluación de situaciones.

Hipótesis epistemológicas

Para todo saber matemático existe una familia de situaciones que pueden darle un sentido correcto (Brousseau, 1986, 1998). Son el conjunto de preguntas o, mejor dicho, los tipos de preguntas para las que el conocimiento en cuestión proporciona los medios para una respuesta óptima. Este es el concepto de **situación fundamental**.

Una segunda distinción importante en la TSD está vinculada a la siguiente característica epistemológica: el conocimiento matemático es algo que nos permite actuar sobre nuestro entorno, pero el poder pragmático de las matemáticas depende en gran medida del lenguaje específico que crea y de sus formas de validación. Esta característica se refleja en la TSD a través de la distinción entre tres tipos particulares de situaciones: **situaciones de acción**, **situaciones de formulación** y **situaciones de validación**.

Hipótesis cognitivas y didácticas

Según la TSD, el aprendizaje escolar resulta de una combinación de los dos procesos de adaptación y aculturación.

En cuanto a la adaptación, el discurso de Brousseau muestra una evidente proximidad con la epistemología piagetiana: el estudiante aprende adaptándose a un entorno que genera contradicciones, dificultades y desequilibrios, como lo hace la sociedad humana. Este conocimiento, resultado de la adaptación de los alumnos, se manifiesta en nuevas respuestas que aportan evidencias de aprendizaje. Estos supuestos abocan a los conceptos de **situación a-didáctica**, **'milieu' (medio) antagonista** y **devolución**.

Las situaciones a-didácticas consisten en preguntas contextualizadas, inspiradas en situaciones fundamentales y que se pueden delegar a los estudiantes, en el sentido de que el entorno que generan, el medio, se presta a una construcción colectiva del conocimiento por parte de los estudiantes sin intervenciones del profesor, las cuales podrían distorsionar esta construcción, es decir, "sin los efectos de contrato didáctico". Estas situaciones se prestan a la dialéctica de la acción, la formulación y la validación: los estudiantes se comprometen en un modelo implícito de acción sobre el medio ambiente, un modelo que se hace explícito a través de sus efectos sobre el medio y que puede ser validado o invalidado por referencia a él (medio antagonista). Y es en este entorno, que puede incluir aspectos materiales, cognitivos y sociales, en el que el profesor puede confiar para delegar realmente la pregunta estudiada a los estudiantes (devolución) sin efectos contractuales indeseables.

Pero esta adaptación no es suficiente; la aculturación es necesaria para vincular las construcciones de los estudiantes con formas de conocimientos socialmente compartidos, culturalmente arraigados y legitimados institucionalmente, es decir, de saberes ("savoirs" en francés). Este cambio en el estado del conocimiento requiere la intervención didáctica del profesor. El concepto de **institucionalización** da cuenta de esta dimensión socio-cultural.

La contribución del profesor al aprendizaje de contenidos matemáticos se toma en cuenta mediante el concepto de **situación didáctica** que conecta los procesos de devolución e institucionalización a la situación a-didáctica y el concepto de **contrato didáctico** que toma en cuenta la dimensión normativa, específica de las matemáticas o de un saber matemático, que rige el trabajo del profesor y de los estudiantes en el aula.

Cuestiones/ Preguntas

Las preguntas que la TSD intenta responder son diversas pero coherentes con estos principios. Ellas se focalizan en:

- la determinación de situaciones fundamentales asociadas a conceptos matemáticos específicos, y su posible actualización en situaciones didácticas, teniendo en cuenta las condiciones y limitaciones de contextos educativos particulares;

- el funcionamiento de los sistemas didácticos, lo que conduce a la identificación de las regularidades y su transformación en fenómenos didácticos;
- la relación entre las situaciones y la progresión del conocimiento en ámbitos matemáticos particulares, prestando la atención necesaria a los procesos de adaptación y aculturación.

Incluso si la TSD tiene la meta final de mejorar el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes, el estudiante no está en el centro de la teoría. La TSD da prioridad a la comprensión de cómo las condiciones y limitaciones de los sistemas didácticos permiten u obstaculizan el aprendizaje, y cómo puede mejorarse el funcionamiento de dichos sistemas.

Metodologías

Las metodologías de la TSD dan un papel esencial

- al análisis epistemológico para determinar las situaciones fundamentales adaptadas a los saberes matemáticos por enseñar;
- al diseño de situaciones controladas capaces de hacer que el conocimiento matemático emerja de las interacciones de los estudiantes con un medio apropiado en el contexto social de las aulas, y a la observación y análisis de la implementación en el aula.

Benefician de la creación del COREM (Centro de Observación e Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas), que reúne a los profesores de la escuela primaria Michelet y a los investigadores que trabajan con G. Brousseau, en particular para su tesis doctoral.

Ingeniería didáctica (Artigue 1989, 2013)

Se trata de una metodología estructurada en torno a una fase de análisis preliminar que combina perspectivas epistemológicas, cognitivas y didácticas, con el objetivo de comprender las condiciones y limitaciones a las que se somete el sistema didáctico considerado, una fase de diseño y un análisis a priori de las situaciones que reflejan su ambición de optimización; y, tras la implementación, una fase de análisis y validación a posteriori.

Corresponde a un rechazo de los procesos de validación habituales basados en la comparación entre las características pre y post de los grupos experimentales y de control, en beneficio de una comparación interna entre el análisis a priori y el análisis a posteriori de las realizaciones en clase.

En el diseño de las situaciones de aprendizaje, por ejemplo, se presta especial atención a los componentes del medio organizado para el estudiante y a la optimización de las posibilidades que ofrece, tanto en términos de acción como de retroalimentación, para fomentar la aparición de las estrategias y los conocimientos específicos. También se presta atención a la forma en que se organiza el proceso de devolución.

Una parte importante de los análisis está dedicada a la situación en sí misma: ¿qué sentido matemático puede surgir de las interacciones entre el estudiante y el medio?; ¿es la situación lo suficientemente accesible y eficiente para permitir que el estudiante tenga acceso, mediante la adaptación, a un significado apropiado del concepto objetivo? Este análisis se basa a menudo en un análisis epistemológico del concepto en cuestión.

Síntesis de las construcciones clave: Situación fundamental, situación a-didáctica y ‘milieu’ antagonista, situación de acción, situación de formulación y situación de validación, situación didáctica, devolución, institucionalización y contrato didáctico. Conocimiento-saber.

2. ¿Cuál es la frontera de la TSD?

A continuación, propongo explorar la frontera de la TSD, refiriéndome aquí a una noción introducida por Radford:

I suggest calling the boundary of a theory the “edge” that a theory cannot cross without a substantial loss of its own identity. [...] beyond such an edge, the theory conflicts with its own principles. (Radford 2008, p. 323)

Ejemplo de incompatibilidad entre dos paradigmas: TSD y construccionismo (Papert)

El construccionismo comparte con la TSD la referencia a Piaget y a la psicología constructivista. El aprendizaje construccionista busca involucrar a los estudiantes en la resolución de problemas que les interesan personalmente, atribuyendo un papel importante a la manipulación y creación de objetos materiales, incluidos objetos digitales. Los estudiantes están animados a sacar sus propias conclusiones a través de la experimentación creativa y la elaboración de objetos sociales. La enseñanza se sustituye por la asistencia al estudiante en sus propios descubrimientos a través de construcciones que le permiten comprender y entender los problemas de una manera práctica. No se busca controlar las trayectorias de los estudiantes.

Este punto diferencia totalmente el construccionismo de la TSD. La TSD se desarrolló con el objetivo de que los estudiantes reconstruyan, en las situaciones de clase, los conocimientos matemáticos institucionalmente prescritos. No cree que esto pueda lograrse a través de actividades abiertas basadas en la creatividad de los estudiantes, sino mediante el diseño de situaciones didácticas, cuya evolución se busca controlar, incluido en su fase a-didáctica.

Estos dos paradigmas se diferencian centralmente por los tipos de cuestiones en que se focalizan, lo que conlleva que sus diseños sean incompatibles. Este fenómeno lo evidenció el trabajo ReMath. Un equipo de la universidad Paris Diderot trabajando en el marco de la TSD y un equipo de la universidad de Atenas trabajando en el marco del construccionismo, ambos creadores de un Artefacto Digital Dinámico (ADD), tuvieron que diseñar una experimentación con ambos ADD, según la metodología de investigación de ReMath. Artigue & Mariotti (2014) señalan:

As explained above, TDS design is based on a vision of controlled design.

There is no doubt that constructionist perspectives do not convey a similar vision of design. [...] What is to be ensured is that the environment provides sufficient opportunities for meaning-making processes. In the design of DDAs, for instance, ETL privileges the vision of digital artifacts as half-baked microworlds that is to say microworlds that the users (teacher or student) can make evolve, adapting them to their own specific needs. It is expected that this adaptation [...] will generate interesting mathematizations and meaning-making processes. Similarly, in the design of tasks for cross-experimentations, ETL privileges open-ended tasks offering rich potential for meaning-making processes, but it does not pay much attention to controlling the learning trajectories. (ibidem, p. 358)

Destacan en su conclusión:

The crossexperimentation of Cruislet piloted by the ETL team in Greece and the DIDIREM team in France, was especially insightful from this perspective. Despite sharing a socio-constructivist background, it became clear for the two teams that it was impossible to combine the respective design perspectives of constructionism and that of the TDS. (ibidem, p. 362)

Ejemplos de cuestiones que la TSD no quiere plantearse

La TSD no provee de un marco para estudiar

- los procesos de aprendizaje, procesos de conceptualización de uno o varios estudiantes, contrario a teorías tal como APOE y Abstracción en Contexto;
- la construcción de una competencia vista como el acceso de un individuo a la posibilidad de enfrentar con éxito por su creatividad personal ciertas tareas siempre originales;
- las dimensiones individuales, afectivas, relacionales, ni tampoco sociales de lo didáctico.

Ejemplos de desarrollos internos

Se trata aquí de cuestiones para cuales, en sus primeros años de desarrollo por G. Brousseau y sus alumnos, la TSD no estaba apropiadamente equipada, conceptualmente y técnicamente, por no ser interesada. Sin embargo, al ampliarse las indagaciones hacia nuevos terrenos y nuevas cuestiones que no aparecen como incompatibles con los principios del paradigma, se desarrolló la teoría.

Inicialmente, la TSD, focalizada en la situación como sistema, no se interesaba mucho al profesor, limitando su papel a los procesos de devolución y de institucionalización, con el supuesto que estaba pasivo por la situación a-didáctica, ya que no tenía que intervenir en el juego de los estudiantes con el medio. A medida que las experimentaciones han arrojado luz sobre la responsabilidad del profesor en el desarrollo exitoso de una situación didáctica como sobre las dificultades que puede encontrar, se evidenció la necesidad de tomar la acción docente como objeto de estudio. Así, investigadoras como C. Margolinas (1995) y I. Bloch (1999) han modelizado el papel del profesor en los niveles del modelo de estructuración de los medios: nivel a-didáctico (profesor observador y regulador), didáctico (profesor para el estudiante) y sobre-didáctico (profesor diseñador, constructor y noosférico).

Otra ampliación del campo de investigación atañe al nivel escolar. Debido sin duda a la existencia del COREM como laboratorio de experimentación, los primeros trabajos se centraron en el nivel primario. Sin embargo, en el marco de la TSD, la hipótesis epistemológica de existencia de una situación fundamental se supone válida para todos los saberes matemáticos (veremos en la sección siguiente que ciertos didácticos no comparten este supuesto). Es decir, se supone posible diseñar situaciones didácticas a nivel secundaria y superior. Por ejemplo, los trabajos de I. Bloch se refieren a la enseñanza del análisis en estos niveles. Las restricciones institucionales conllevan ciertas evoluciones en el diseño de situaciones. Así, se hace imposible, por falta de tiempo, implementar la sucesión de situaciones de acción, de formulación y de validación que integran las ingenierías de Brousseau, sino que en el marco de una situación didáctica se suceden fases de acción, de formulación y de validación.

Utilización para analizar clases ordinarias

Mas allá de estos desarrollos, y quizás consecuencia de ellos, apareció lo que se puede considerar como una inversión del cuestionamiento. En vez de focalizarse en el diseño y la experimentación de situaciones óptimas para el aprendizaje de un contenido matemático prescrito en un entorno específicamente favorable como el COREM, investigadores han empezado a estudiar las prácticas de profesores ordinarios con clases de rendimiento y de origen social variado con la pauta de análisis brindada por la TSD para evaluar el potencial didáctico de las secuencias propuestas. Así, para enfrentar estas nuevas cuestiones, investigadores como A. Mercier, C. Margolinas, A. Bessot, C. Comiti, M-J. Perrin y M. Hersant han desarrollado ciertos conceptos ya existentes como el de contrato didáctico y también han introducido nuevas construcciones teóricas: episodio didáctico, potencial a-didáctico de una situación de enseñanza, bifurcación o desdoblamiento de una situación (Margolinas, 2005), situación de recuerdo en clases de rendimiento bajo (Perrin-Glorian, 1993). Aun cuando Brousseau nunca los evoca en los textos de síntesis que edita en su sitio web, la afiliación a la TSD de los trabajos citados no se contesta en la comunidad de la didáctica francesa. Sin embargo, ciertos de los investigadores que emplean herramientas de la TSD para clases ordinarias se reclaman hoy en día de un nuevo paradigma, el paradigma de la Teoría de la Acción Conjunta en Didáctica (TACD) iniciado por M.L. Schubauer Leoni, A. Mercier y G. Sensevy (Sensevy & al., 2000). Esta teoría combina conceptos que vienen de la TSD y de la TAD, con un papel central de los procesos de topogénesis, cronogénesis y mesogénesis.

3. *Cuando las cuestiones y principios de algunos investigadores son incompatibles con los paradigmas existentes: la emergencia de un nuevo paradigma*

Lo que propongo en esta sección es un relato del trabajo de una investigadora francesa, la Profesora Aline Robert. Ella ha realizado toda su carrera de investigación en París (equipo Didirem y después, en el laboratorio LDAR).

Etapa 1: investigaciones a nivel superior y secundario desde un cuestionamiento clásico sobre las relaciones enseñanza-aprendizaje

Sus primeros trabajos indagaron en la educación universitaria. A. Robert y luego el grupo de colegas que trabajaron con ella estaban particularmente interesados en la adquisición de la convergencia de las secuencias y en la enseñanza de los comienzos del análisis real, y después a la enseñanza de la álgebra lineal¹³. Respecto a estos dominios, introdujeron la noción de conceptos FUG, es decir Formalizadores, Unificadores y Generalizadores. Rechazaban la hipótesis epistemológica de la TSD que existiera una situación fundamental para tales conceptos. Por lo tanto, consideraban que no se podía encontrar buenos problemas que permitieran diseñar situaciones didácticas para enseñarlos. Se orientaron hacia el diseño de secuencias de enseñanza otorgando un papel importante a una enseñanza de métodos, y más allá al desarrollo de un discurso “meta” del profesor, en relación con trabajos en pequeños grupos de estudiantes. A continuación, se han desarrollado investigaciones complementarias sobre la enseñanza en la escuela secundaria y al final de la escuela media, en particular en geometría, aplicando una metodología de análisis de tareas específicas¹⁴. Cuando las hipótesis cognitivas de la TSD se relacionan con el constructivismo piagetiano, ellas de este grupo les acercan también del trabajo de Vygotsky con la consideración del papel del lenguaje en el aprendizaje y de la ZPD, que, poco a poco, se convirtieron en fuentes explícitas de inspiración.

A finales del siglo XX, debates animados opusieron este grupo con Brousseau y algunos de sus alumnos¹⁵, quienes, con el concepto de “deslizamiento meta cognitivo”, consideraban la enseñanza de métodos como una desviación de la enseñanza de los conceptos matemáticos mismos.

Destacaré por fin que este grupo introdujo muy pocos conceptos nuevos (concepto FUG, niveles de conceptualización, por ejemplo) y nunca pretendió crear una teoría nueva.

Etapa 2: Enfrentar el fracaso de la diseminación de las ingenierías de la TSD como de otros marcos teóricos: Hacia la toma en cuenta de la complejidad de las prácticas de enseñanza en el profesorado

A principios del siglo XXI, se produjo una ampliación de los intereses de A. Robert, de las cuestiones que consideraba de primordial importancia por investigar.

En esa época, se hizo evidente que la diseminación a nivel primaria, específicamente por la capacitación proporcionada por los IUFM¹⁶, de las ingenierías diseñadas en el marco de la TSD y otros encontraba problemas, hacia el punto de distorsionarlas (véase por ejemplo la tesis de J. Bolon, 1996). Apareció cierta incompatibilidad entre estas ingenierías y las condiciones reales del trabajo de los profesores. Por lo tanto, muchos didácticos franceses se han alejado de cuestiones de tipo diseño para investigar sobre el profesor en clases ordinarias,

¹³ Véase (Robert, Robinet, 1996) y los capítulos de JL.Dorier, A.Robert, J.Robinet y M.Rogalski en (Dorier, 1997).

¹⁴ (Robert, 1998)

¹⁵ Sarrazy, 1997.

¹⁶ Institutos Universitario encargados de la formación docente primaria y secundaria desde 1990. En Francia, la mayoría de los didácticos trabajan en estos institutos.

su trabajo de concepción fuera del aula y su gestión de clase con los estudiantes. La perspectiva era que, con un mejor conocimiento del trabajo real, se pudieran proponer diseños compatibles con estas condiciones. Como lo vimos antes, ciertos de los investigadores eligieron quedarse en el marco de la TSD, otros desarrollaron la TACD que permite analizar episodios de tamaño micro. Pero, avanzaré que estos paradigmas no conceptualizan la dimensión profesional del trabajo docente, considerada por A. Robert entre otros investigadores como un factor explicativo del fracaso de la diseminación de las ingenierías de Brousseau. Lo hace la TAD en el marco de su enfoque ecológico, con conceptos clave como ellos de institución, sujeto, restricción institucional y escala de niveles de co-determinación didáctica. Sin embargo, varios elementos hacen que el enfoque de A. Robert sea incompatible con el paradigma de la TAD. Primero, la TAD no da prioridad a la dimensión personal de los fenómenos didácticos, que resulta bastante marginal en este paradigma. A. Robert no comparte la hipótesis que se puede actuar con eficacia sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje sin considerar la singularidad de los actores, que sean profesores o estudiantes, **aunque haya abandonado el primer intento de explicación, a saber, que las dificultades de difusión se refieren principalmente a las concepciones metacognitivas de los profesores.** Además, en la primera etapa de su trabajo, había empezado a adoptar un punto de vista cognitivo a lo didáctico con referencia a la TCC de Vergnaud y después a la Teoría de la Actividad de Leontiev. Entonces, A. Robert no encontraba en los paradigmas existentes un entorno compatible con sus hipótesis y sus cuestiones.

Pues bien, desde los años 80¹⁷, una investigadora en didáctica de las matemáticas, Janine Rogalski, había reorientado su investigación hacia el análisis de las competencias profesionales relacionadas con la gestión cooperativa de entornos dinámicos abiertos, como la lucha contra los incendios forestales. En este campo de investigación, como lo escribe Roditi (2013, p. 43),

durant les années quatre-vingts, en direction du monde de l'entreprise, les recherches françaises en sociologie du travail et en psychologie ergonomique² se renouvellent avec un développement des études qui visent à comprendre le travail tel qu'il se fait plutôt que tel qu'il est commandé, et en tenant compte du point de vue de celui qui le fait. Influencés par l'école russe de psychologie, les chercheurs portent moins leur intérêt sur la profession et son organisation que sur l'activité de l'agent, dans son historicité et son contexte, dans ses dimensions personnelle et collective, en lien avec les orientations politiques et les valeurs qui les sous-tendent.

Esta línea de investigación, refiriéndose a la Teoría de la Actividad, se apoya en metodologías de análisis de la actividad en situación de trabajo.

El interés de sus antiguos colegas por el trabajo docente llevó Janine Rogalski a desarrollar con Aline Robert, el "Enfoque doble didáctico y ergonómico de las prácticas de enseñanza de las matemáticas" (Robert & Rogalski, 2002). Estas dos investigadoras han creado así, desde el LDAR, un corriente específico de investigación sobre el profesor dentro de la didáctica de las matemáticas. Hablaré de la emergencia de un paradigma de investigación del tipo

$$[T_C, \tau_C, \theta_C, \Theta_C] \leftarrow C$$

Es decir,

- un desarrollo del bloque $[T_C, \tau_C, \theta_C]$ con la introducción de un cuerpo restringido de conceptos, lo necesario para precisar los T_C y producir técnicas de investigación,
- desarrollo realizado por una comunidad unida, y en expansión gracias a las tesis defendidas regularmente, muchos de los nuevos doctores estando contratados como investigadores en los IUFMs,
- **la elaboración progresiva de un discurso teórico en el sentido de la TAD que, apoyándose en ciertos resultados de investigación didáctica y en la Teoría de la**

¹⁷ En esta sección, me apoyo en (Roditi, 2013)

Actividad, explicita un conjunto de hipótesis y justifica de manera coherente las cuestiones de investigación privilegiadas y las metodologías desarrolladas. El lector encontrará tal discurso en la parte 0 del libro *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes* editado por Vandebrouck en 2008 (con una traducción en inglés en 2013).

Conceptos más importantes

- Componentes que se anidan en el estudio de la práctica de un profesor:
Personal, cognitivo, mediativo, institucional, social (ibidem, pp.60-61).

Cabe señalar que estos componentes se pueden vincular con los niveles de la escala de niveles de co-determinación de la TAD, con la excepción del primero, la dimensión personal siendo ausente de la TAD. Los últimos dos componentes se relacionan respectivamente con los niveles Escuela y Sociedad, la palabra “institucional” estando empleada en un sentido limitado que se refiere a la organización administrativa de la educación matemática, incluyendo los textos de orientación general y programas. En cuanto a los componentes cognitivo y mediativo, tienen en cuenta elementos que se pueden conectar con los niveles Didáctica y Pedagogía, pero no se consideran como determinando las acciones del profesorado, sino como constituyentes de la práctica de un profesor. Se complementan con niveles de organización de las prácticas (micro, local, mundial) que refuerzan la comprensión de la complejidad de las prácticas y su estabilidad.

- Herramientas para analizar las tareas propuestas por el profesor con el objetivo de determinar qué actividad potencial podrían provocar en los estudiantes:
Nivel disponible¹⁸ o movilizable del funcionamiento de un conocimiento en la tarea, adaptaciones esperadas del conocimiento a la especificidad de la tarea.

Este tipo de análisis constituye un componente metodológico fundamental de este paradigma, que se trate de indagar las prácticas efectivas de un profesor o de diseñar secuencias de enseñanza o de formación docente. Permite describir lo que, en este marco, se llama el ‘relieve’ del escenario matemático y cognitivo diseñado por el profesor y de su implementación efectiva.

Se fundamenta en una hipótesis psico-cognitiva que relaciona la actividad efectiva del estudiante y su desarrollo matemático, según los principios de la Teoría de la Actividad (Véase el capítulo 2 de la parte 0 del libro antes mencionado), complementado por hipótesis del constructivismo piagetiano y el socio-constructivismo vygotskiano adaptado a las matemáticas y a la situación escolar. En cuanto a la formación profesional, más recientemente se han admitido hipótesis concretas sobre el desarrollo de las prácticas, que siguen inscritas en la Teoría de la Actividad, y que implican la ZPDP (zona proximal de desarrollo profesional). Conllevan a una formación “inversa”, basada en las prácticas y no en las matemáticas por enseñar y a un codesarrollo de los formadores y de los docentes.

- Herramientas para analizar el componente mediativo de la acción del profesor, no solamente en las fases de resolución de ejercicios, sino también en las fases de ponencia de saberes por el profesor:
Actividad a mínima y a máxima de los estudiantes, ayuda procedimental, ayuda constructiva, producción de proximidades en relación con la noción de ZPD.

Estas herramientas se emplean en una metodología basada en videos grabados en el aula con focalización en el profesor.

Para facilitar la investigación bibliográfica de los lectores, citaré algunos miembros franceses de la comunidad de este paradigma: A. Robert, J. Rogalski, E. Roditi, J. Horrocks, A. Chesnay, N. Grenier-Boley, M. Abboud-Blanchard, F. Vandebrouck, y, para la primaria, D. Butlen, M.L. Peltier, M. Pezard, P. Masselot.

¹⁸ La convocación del conocimiento esta debajo de la responsabilidad del estudiante.

Etapa 3: tentación de anunciarse como una teoría, integrando investigaciones sobre la actividad del estudiante y el enfoque doble.

Este paradigma se evoca generalmente por la denominación “Enfoque Doble Didáctico y Ergonómico” (de las prácticas de enseñanza de las matemáticas), lo que restringe la extensión presente de sus temas de investigación hacia investigaciones sobre el estudiante y su actividad matemática, **en particular integrando softwares** (véase por ejemplo la publicación de Vandebrouck & Robert (2017)). En contraste con los otros paradigmas franceses, no se identifica socialmente en el campo de la investigación por una teoría específica. Quizás porque esta comunidad no enfatiza en su comunicación la dimensión específicamente teórica de su trabajo, en el sentido de desarrollar una organización de los conceptos y resultados nuevos que se pueda presentar como original respecto a las teorías existentes, tal como la teoría de la actividad. Esto puede deberse a alguna molestia por la importancia dada a la teorización en la escuela francesa de didáctica de las matemáticas, y paralelamente por la prioridad otorgada a la voluntad de intervenir concretamente para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en relación con la formación docente, incluida la formación de formadores, lo que conduce a una forma intermedia de teorización. Sin embargo, quizás por la falta de visibilidad que conlleva esta situación, se debate ahora en la comunidad del paradigma de la necesidad de reconocer y hacer reconocer el trabajo teórico realizado. El subtítulo de (Vandebrouck & Robert, 2017) *Vers une théorie didactique de l'activité (TDA)* es una manifestación explícita de la existencia de tal reflexión.

4. Conclusión de la parte III

En esta parte, la modelización (P, M, Q, K) de Radford ha demostrado ser una herramienta apropiada para proporcionar una visión sintética de un paradigma. Pero habría sido insuficiente si hubiéramos querido ir más allá de este nivel de presentación y profundizar nuestro conocimiento de la organización racional de los conceptos clave desarrollada por este paradigma, es decir de la teoría misma. Del mismo modo, si hubiéramos abordado la cuestión de la metodología, habríamos debido no sólo describir las técnicas de investigación, sino también presentar sus razones de ser y relaciones con los elementos de P, Q y más allá de la teoría. Es decir, la modelización praxeológica OPI brinda una herramienta para un enfoque más profundo de un paradigma.

Sin embargo, la modelización de Radford también nos ha permitido explicar la coexistencia de dos paradigmas, es decir, entender en que dichos paradigmas se diferencian irreduciblemente: en sus cuestiones o/y en sus principios/hypotesis. En pocas palabras, el modelo (P, Q) se refiere a los fundamentos del paradigma, paradigmas con fundamentos diferentes no se pueden sustituir uno a otro.

Enseguida, adelantamos nuestra reflexión sobre el porqué de la multiplicidad de paradigmas en la didáctica de las matemáticas.

IV. LAS RAZONES DE SER DE LA MULTIPLICIDAD DE LOS PARADIGMAS DE INVESTIGACIÓN

1. Considerar la investigación didáctica como determinada externamente

Adoptando el punto de vista de la Teoría antropológica de lo didáctico, considero cada actividad humana, que sea individual, colectiva o institucional como determinada por restricciones que emanan de varias instituciones. Este supuesto vale para el conjunto de los fenómenos de transmisión y aprendizaje de las praxeologías de contenido matemático, es decir, para el dominio de la realidad que investiga la didáctica de las matemáticas, lo que la

TAD llama “lo didáctico”. Vale también para la didáctica de las matemáticas misma, vista como una institución de investigación que está sujeta a presiones externas, según la formulación de Bourdieu que encontramos en la sección I.2: por eso, la autonomía del campo introducida por Bourdieu como condición de la cientificidad no puede ser total. La oposición entre las presiones exteriores y la búsqueda de autonomía resulta en un grado de autonomía, un punto de equilibrio dinámico, de nivel variable. Las varias instituciones que influyen en lo didáctico como en la investigación didáctica se ubican en los diferentes niveles de una escala que llega a tener en cuenta la influencia de las sociedades y civilizaciones (Chevallard, 2007, p.737). Así, debemos considerar la influencia en la investigación didáctica de las diferentes sociedades y organizaciones geopolíticas, que sean a nivel local de los estados, a nivel regional de las agrupaciones geográficas o lingüísticas y, finalmente, a nivel mundial.

Desde el punto de vista epistemológico, este enfoque tiene consecuencias muy fuertes: se trata de considerar como hipótesis fundamental que la realidad de la educación matemática no está uniforme a nivel internacional, que ella trae la huella del entorno social, cultural, lingüístico en que ocurre. No se trata de negar que existen fenómenos didácticos universales, sino de cuestionar que evidenciarlos brinda a los didácticos el poder de explicar la complejidad de las realidades específicas y, sobre todo, el poder de actuar sobre ellas, lo que resulta, desde su creación, la razón de ser de la investigación didáctica: nació para lidiar con las dificultades de los sistemas educativos de matemáticas y diseñar soluciones para superarlas, es decir, para satisfacer demandas sociales. Propongo asumir que estas disfunciones no son idénticas en todas las sociedades del mundo, y además que estas sociedades y sus organizaciones políticas, de que depende una gran parte de la financiación de la investigación, no priorizan las mismas demandas educativas. Eso significa que el entorno institucional influye en la elección de las cuestiones que la investigación didáctica se plantea, en pocas palabras, en el conjunto Q . También influye en las respuestas que se desarrollan, porque los diseños propuestos tienen que ser aceptables para la sociedad, sus instituciones educativas y sus sujetos. La multiplicidad de paradigmas me parece una consecuencia de la epistemología de una ciencia que, desde sus inicios, ha querido actuar en una realidad heterogénea para mejorarla, poniendo así de relieve la dimensión local.

Cabe ilustrar este análisis con tres ejemplos.

La etnomatemática

Este paradigma se ha desarrollado en América Latina (U. d’Ambrosio) y África (P. Guerdes) en el seno de sociedades antiguamente colonizadas, con un rico y variado pasado cultural que, a menudo, no ha sido completamente borrado, sobreviviendo en comunidades no totalmente occidentalizadas. Se trata de dar respuestas al fracaso masivo del aprendizaje de las matemáticas en sistemas educativos que no rompen realmente con la visión de la educación colonial. La cultura occidental se considera en todo superior a la nativa, específicamente las ciencias, cualquier sea el entorno de vida que conocen los estudiantes y que conocerán como adultos. Se niegan en la educación las contribuciones de las poblaciones indígenas. Hoy en día, varios países tal como el Perú desarrollan políticas educativas multiculturales y bilingüe para encarar estas dificultades. Estas reformas se enfrentan a muchas cuestiones específicas que, desde hace más de 30 años, ha empezado a indagar la etnomatemática (D’Ambrosio, 2014).

Especificidades de lo didáctico y de la didáctica en Italia y Francia

Me apoyo a continuación en la contribución de P. Boero en el libro *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Homage to Michèle Artigue*. Introduce su reflexión de la manera siguiente:

While reflecting on the difficulties in establishing collaboration between the communities of French and Italian mathematics educator, I am now convinced that these difficulties do not derive only from

researchers' characteristics and personal positions, but also (perhaps mainly) from ecological conditions under which research in maths education develops. (p.26)

Boero identifica variables relacionadas con condiciones locales que, en su opinión, influyen en el desarrollo de la investigación y en sus resultados:

the features of the school system (teacher's mission and degree of freedom); the economic constraints of research (conditions for funding), particularly in the initial stage; and especially the weight of the cultural environment (particularly, but not only, as concerns the field of mathematics) p. 26

En el marco del presente texto, no presento la totalidad del análisis que ilustra estas variables, recomiendo al lector referirse al libro. Me focalizo aquí en la primera variable.

El sistema educativo francés visto desde Italia

Al contrastar los sistemas escolares italiano y francés, se evidencian características del segundo. El sistema escolar francés está organizado mucho más rígidamente que el italiano; los programas y directrices nacionales para la enseñanza son mucho más detallados y prescriptivos que los italianos; además en Francia existen funciones de orientación y control ejercidas por los inspectores, no hay nada comparable en Italia. Estas condiciones conllevan que, en Francia, los paradigmas de la investigación didáctica se centran en diseños controlados para enseñar contenidos matemáticos bien determinados. Ya encontramos esta característica cuando examinamos la diferencia entre la TSD y el construccionismo. Cabe señalar una excepción reciente: los REIs (Recorridos de Estudio e investigación) abiertos propuestos por la TAD. Sin embargo, se reciben con un escepticismo general en el seno de la comunidad didáctica francesa, en coherencia con el análisis de Boero.

Seguimos con algunos elementos que presenta Boero del sistema italiano.

La relación estrecha de los profesores italianos con la investigación didáctica

Por lo menos, dos especificidades del sistema italiano potencian la implicación de profesores en proyectos de investigación.

Primero, como lo vimos antes, los profesores italianos, a la diferencia de los franceses, disfrutaban de mucha libertad, lo que les permite participar en proyectos innovadores. Una segunda peculiaridad es que el mismo profesor enseña a los mismos estudiantes varios años seguidos (5 años a nivel primaria, 3 años a nivel secundaria inferior, y durante 2-3 años en el liceo). Esta situación institucional Boero la explica por la influencia de la cultura católica:

Another aspect of the Italian situation concerns the role of teacher; the teacher is conceived in official documents as well as in current mentality, within the school and outside the school, not only as a specialist in the teaching of one (or several) discipline(s) but also as an educator. This conception probably depends on the great interest of Catholic culture in educational issues, and on its strong influence, in the past, on teacher education for kindergarten and primary school. (ibidem, p.27)

Según Boero, el hecho de tener tanto tiempo con los mismos estudiantes ofrece a los profesores condiciones para implicarse en diseños innovadores con investigadores:

In such an institutional and educational context, broad long-term teaching projects may be developed and tested, frequently opened to extra-school reality, frequently extending over more than 1 year of teaching. These projects provide teachers and researchers with the opportunity to identify and appreciate the long term changes that educational choices produce, in comparison with other more or less traditional choices. As a consequence, when a teacher realises how the innovation resulting from a collaborating with the researcher results in a different mastery of concepts and skills, in comparison with previous teaching cycles, then the teacher feels motivated to further engage in research work. (p.27)

Así, en las universidades italianas, los investigadores en didáctica de las matemáticas colaboran estrechamente con profesores que han desarrollado una verdadera competencia de investigador al tiempo que mantienen sus funciones docentes en las aulas. Según Boero, esta situación resulta en que todas las investigaciones italianas incluyen una dimensión innovadora. Yo añadiré que puede también explicar la importancia que otorga la Teoría de la

Mediación Semiótica (véase Bartolini Bussi, Mariotti, 2008) al papel del profesor a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje de saberes matemáticos (véase Artigue, Mariotti, 2014, p. 344-345 por una comparación entre TSD y TMS sobre esta dimensión).

Este análisis nos provee un ejemplo con dos componentes: la cultura italiana influye en la organización de la escuela, lo que a su vez influye en la enseñanza de las matemáticas (determinación externa de lo didáctico) tan como en la organización de la comunidad de investigación didáctica. De la composición y cultura de la comunidad puede desembocar un paradigma con principios y cuestiones específicos. Esto resulta una modalidad de determinación externa de la didáctica que no hemos contemplado en lo anterior.

En resumidas cuentas, la multiplicidad de paradigmas aparece como una consecuencia

- de la epistemología de una ciencia que desde sus inicios ha querido actuar en el mundo real para mejorarlo, lo que pone de relieve la dimensión local, debido a que el mundo didáctico no es uniforme,
- de que el campo de la didáctica no es completamente hermético a las determinaciones externas.

2. *Considerar la didáctica como un campo de luchas de poder*

La TAD ofrece herramientas para analizar las determinaciones ejercidas sobre la didáctica desde su exterior. La Teoría de los Campos brinda otro punto de vista que permite tener en cuenta las relaciones internas entre los agentes de la didáctica, con los términos de lucha de poder, capital científico, visibilidad. Cabe recordar lo que dice Bourdieu:

No existe ninguna opción científica[...] que no sea *también* una estrategia social de inversión orientada hacia la maximización del beneficio específico, indisociablemente social y científico (Bourdieu, *¿*, p.106)

El concepto de *visibilidad*, utilizado en la tradición universitaria estadounidense, sugiere perfectamente el valor diferencial de este capital que, concentrado en un nombre propio conocido y reconocido, diferencia a su portador del fondo indiferenciado en el que se confunden el conjunto de los investigadores anónimos. (ibidem, p. 101)

Eso nos lleva a considerar que tanto la producción de teorías independientes como el llamado a su integración en totalidades donde se ahogan es parte del juego de conquistar y disputar las posiciones de poder en el campo. Para cualquier agente del campo de la didáctica, crear una teoría nueva resulta una manera de ganar visibilidad y, por lo tanto, de desarrollar su capital científico, tanto material como simbólico. Hay muchos ejemplos, en primer lugar, para la mayoría de las principales teorías didácticas iniciadas por personas cuyos nombres están siempre muy presentes. A contrario, el beneficio es más limitado para un investigador que trabaja en el marco de un paradigma, contribuyendo al desarrollo de la teoría y/o a su utilización para estudiar una pregunta dada. Por lo tanto, la lucha de poder resulta un factor de multiplicación de teorías y paradigmas.

Cabe afirmar, desde los análisis anteriores, que, cuando se trata de iniciativas individuales, regular este tipo de producciones parece ser una necesidad epistemológica para la comunidad de investigación didáctica. Pero, opino que la situación es más compleja a nivel colectivo. En particular, a nivel de una comunidad de investigación emergente, el desarrollo de un paradigma específico es una ventaja, una forma de evitar la dominación de las comunidades más antiguas, cuya tendencia es generalmente imponer sus propios paradigmas como los únicos relevantes. Imponer una unificación prematura puede dificultar la emancipación y la organización autónoma de la investigación didáctica en los países en los que está emergiendo. El caso de la etnomatemática ya ha sido discutido, mencionaré aquí la socioepistemología conscientemente desarrollada por un grupo de investigadores mexicanos con el doble objetivo de brindar herramientas adaptadas a la realidad educativa de América Latina y de salir de lo que podría sentirse como una extensión de la colonización a través del dominio de los marcos

teóricos estadounidenses y europeos en la didáctica de las matemáticas (véase Cantoral, 2013).

Para concluir, propondré invertir la problemática: si el desarrollo de un paradigma es un factor de poder, conviene preguntarse qué significa el postulado de la necesidad de reducir la diversidad teórica, visto desde el punto de vista del capital científico de las diferentes sub-instituciones de la investigación didáctica, en particular de las instituciones regionales (caracterizadas, por ejemplo, por la ubicación geográfica o por el idioma compartido). Cabe reconocer que la importancia dada a la cuestión de la multiplicidad de paradigmas en la didáctica no tiene sólo razones epistemológicas, sino que es un aspecto del juego social del campo.

V. REDUCIR LOS INCONVENIENTES EN RELACIÓN CON LA MULTIPLICIDAD DE PARADIGMAS

Así pues, se considera que la investigación en la didáctica de las matemáticas está doblemente determinada por el entorno social y cultural en el que tiene lugar, tanto en lo que respecta a sus preguntas y respuestas como a sus agentes y organizaciones. Estas determinaciones de la misma fuente se hacen eco entre sí, lo que puede considerarse como un factor de consistencia y eficiencia de la investigación desarrollada en un contexto socio-cultural dado. Sin embargo, cabe reconocer que, en un contexto dado, varios sistemas de valores, de prioridades, que conducen a varios paradigmas, pueden coexistir. Más allá de eso, la diversidad de los contextos mismos puede desembocar en paradigmas diferentes.

En pocas palabras, yo propongo considerar la multiplicidad de teorías y paradigmas como consecuencia de la adaptación de la investigación didáctica a la diversidad de las sociedades humanas y de lo didáctico dentro de ellas. Esta multiplicidad puede resultar una riqueza porque proporciona una diversidad de recursos para hacer frente a la complejidad, siempre que se desarrolle una verdadera comprensión de las teorías empleadas.

1. Construir el marco teórico de un estudio

Nos ubicamos aquí en la posición de un equipo de investigadores (por ejemplo, un estudiante de doctorado y su supervisor) que se propone estudiar un tema de investigación. Tiene que construir lo que en los artículos en inglés se llama “*theoretical framework*”, en español el marco teórico. Una posibilidad es elegir una teoría única y limitarse a sus herramientas. Es lo que ocurre cuando el supervisor está específicamente implicado en el desarrollo de un paradigma. No obstante, hay otra posibilidad que consiste en la combinación local de varias teorías consideradas como brindando herramientas que se complementan para tener en cuenta aspectos diferentes del tema de investigación. Por ejemplo, la tesis de doctorado de R. Loeng sobre la enseñanza de las funciones seno y coseno¹⁹, se refiere a

- la TAD para analizar los aspectos institucionales y describir la organización matemática mediante las nociones de praxeologías puntales y locales,
- el Enfoque Doble cuyas herramientas de análisis de tareas sirven para determinar el nivel de dificultad de las cuestiones que componen un cuestionario diagnóstico,
- la TSD para un análisis en termino de *milieu* del potencial adidáctico de una situación de enseñanza.

Eso constituye el marco teórico de la tesis de Loeng. Cabe destacar que no se combinan principios de estas tres teorías, sino ciertas de sus herramientas. Lo ilustro bien un aspecto de

¹⁹ Loeng, R. (2019). *Les fonctions sinus et cosinus dans le secondaire en France et au Cambodge*. Thèse de doctorat : université Paris Diderot.

mi trabajo (Castela, 2018). En el marco de la TAD, utilizo las herramientas de análisis de tareas del Enfoque Doble para concebir el momento del trabajo de una técnica. No significa que adopto el punto de vista psicocognitivo de la teoría de la actividad que subyace a los trabajos de A. Robert, sino que dichas herramientas me permiten analizar y diferenciar las soluciones de ejercicios de un punto de vista estrictamente matemático.

Tal aproximación es muy frecuente en el laboratorio LDAR. Es posible porque el equipo de investigadores integra conocedores expertos de varias teorías, quienes conocen también las otras. De la misma manera, la comunidad francesa ha desarrollado instrumentos que le permiten construir un conocimiento ‘satisfactorio’ de los paradigmas desarrollados en su seno: las escuelas de verano, la revista RDM y los Seminarios Nacionales.

Sin embargo, no basta para alcanzar el nivel de internacionalización que, según Bourdieu, condiciona la cientificidad de una ciencia, ni tampoco para que la comunidad internacional aproveche la riqueza que provee la multiplicidad de teorías. ¿Cómo profundizar el entendimiento mutuo entre los didácticos, cuando, como lo escriben Artigue y Mariotti, es tan difícil comprender la teoría que cada uno emplea? Abordamos brevemente este tema de reflexión en la última sección de este texto.

2. ‘Networking’ teorías

El ejemplo de ReMath

Me refiero aquí en el trabajo de conexión de teorías desarrollado en el marco del proyecto europeo ReMath que se mencionó al final de la sección II.4. Los lectores pueden referirse al artículo de Artigue y Mariotti (2014) para ir más allá que lo que presento enseguida.

Trabajaron en este proyecto seis equipos de cuatro países diferentes: Francia (DIDIREM-ahora LDAR- y MeTAH), Grecia (ETL), Italia (UNISI y ITD) y Reino Unido (IoE), todos con experiencia en el ámbito tecnológico. En el esquema siguiente se representan las teorías usualmente empleadas por cada equipo.

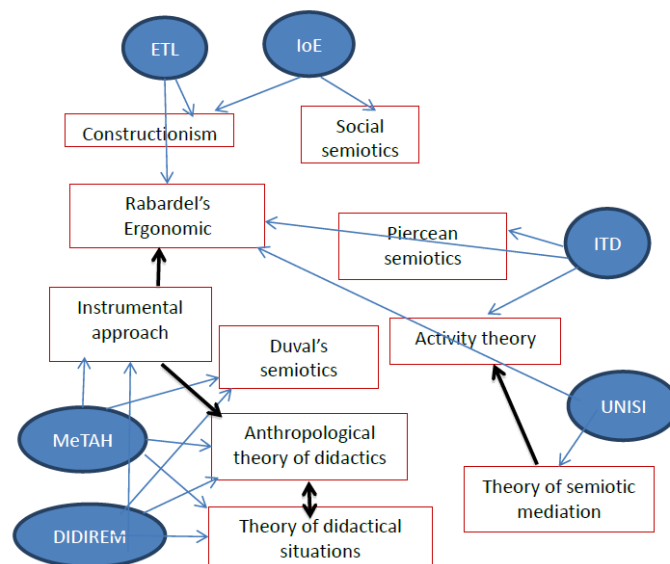


Tabla 2. Los equipos y las teorías en el proyecto ReMath (Artigue & Mariotti, 2014, p. 336)

Este mapa evidencia la diversidad de este paisaje, como también el hecho que estos investigadores no estaban conocedores expertos de todas las teorías presentes. Cabe recordar lo que escriben Artigue y Mariotti:

Despite our maturity as researchers, we all discovered up to what point our knowledge of many of the theoretical frameworks involved in the project was superficial. It had been gained through reading articles, listening to presentations, and discussing with colleagues. It lacked the firsthand experience provided by the actual use in a research project. In such conditions, misunderstanding and distortions are frequent. (Artigue & Mariotti, 2014, p.350)

Por eso, el grupo decidió abandonar el objetivo de reducción de la diversidad y de integración teórica que la definición del proyecto les había inicialmente asignado para diseñar lo que podemos reconocer como praxeologías de entendimiento mutuo, es decir, praxeologías de conexión de paradigmas, o sea como aparece en el título del artículo antes citado, '*networking theoretical frames*'.

La organización del trabajo

- Experimentación cruzada: diseño de artefactos digitales por cada equipo y por pares, desarrollo de secuencias utilizando el software producido por otro equipo.
- Formulación de las preguntas que deben ser respondidas por todos los equipos sobre el diseño y la experimentación.
- Búsqueda de un marco teórico mínimo común sobre el tema de las representaciones semióticas y de una cuestión de investigación común.
- Comunicación entre equipos: lograr resultados que puedan expresarse de forma compartida, buscando un lenguaje común.

El grupo de Bremen

En 2005, después del congreso europeo CERME 4 en que dos conferencias presentaron una reflexión sobre la multiplicidad de teorías en el campo de la didáctica de las matemáticas, investigadores de Alemania, España, Francia, Italia e Israel crearon un grupo para seguir con este tema. Este grupo estaba compuesto por dos investigadores de cada país, ambos trabajando con una teoría específica: *Theory of Interest-densed Situation* (A. Bickner-Ahsbahs y S. Halverscheid, Alemania), TAD (M. Bosch y J. Gascón, España), TSD (M. Artigue, A. Corblin-Lenfant y M. Haspekian, Francia), *Approach of Action, Production and Communication* (F. Arzarello y C. Sabena, Italia), *Abstracción in Contexto* (T. Dreyfus y I. Kidron, Israel). Este grupo, conocido como el grupo de Bremen, se ha estado reuniendo durante unos diez años. Editó su trabajo en 2014 en el libro *Networking of theories in mathematics education*. New York: Springer (Ahsbahs, A. & Prediger, S. (Eds.). 2014.) que ya hemos encontrado en lo anterior. Las cinco teorías antes evocadas se presentan en la segunda parte del libro, empleando la modelización (*P, M, Q, K*).

Los participantes al grupo de Bremen comparten la misma visión: la diversidad teórica es inevitable en nuestro campo de investigación, siendo una fuente de riqueza, pero también puede convertirse en una fuente de obstáculo; el trabajo sobre estos temas debe ser asumido colectivamente. Los lectores reconocerán el enfoque que yo he defendido en este texto.

La organización del trabajo

Al inicio se eligió partir del análisis de un mismo corpus: un video y su transcripción escrita propuestas por F. Arzarello en que dos estudiantes encuentran las funciones exponenciales por primera vez en el entorno del Cabri-Geómetro. Cada equipo tenía que analizar estos datos por separado con su teoría, análisis que luego fueron comparados por el grupo. Remito a los lectores a la Parte II del libro para que conozcan más sobre los análisis propuestos por cada equipo. Cabe destacar un solo punto: apareció que los datos brindados por el equipo italiano, centrados en la actividad de dos estudiantes no permitían a los otros equipos desarrollar su análisis. Por ejemplo, al equipo francés le faltaba inicialmente informaciones sobre el contrato didáctico, sobre los conocimientos matemáticos e instrumentales (con Cabri) de los estudiantes (análisis del medio) y sobre las expectativas del profesor (ibidem, pp. 58-59).

Después de esta fase se desarrollaron varias tareas, más o menos productivas, que culminaron en lo que llaman en el libro “*Case studies of networking*”. En cada caso, se trata de un trabajo de conexión entre ciertos conceptos de dos o tres teorías, apoyándose en una tarea que involucra estos conceptos en el análisis de un episodio de la misma secuencia sobre las funciones exponenciales.

¿Qué ha resultado de estos trabajos en equipo?

- Un mejor entendimiento de otras teorías tan como de sus teorías propias: explicitación de principios implícitos, de restricciones institucionales (véase la incompatibilidad entre TDS y construccionismo, III.2.),
- La identificación de ciertas limitaciones gracias a los análisis de otros equipos (enseguida : TSD-TMS ; ACP-TSD-IDS).
- La importación de ciertos conceptos y técnicas de análisis desde otras teorías.

Una ilustración con Remath

Los italianos (TMS) evidenciaron que los franceses (TSD) aglomeran en su experimentación las fases de formulación, validación e institucionalización, lo que atribuyen a su baja sensibilidad a las interacciones Profesor-Estudiantes y a la dimensión semiótica (véase IV.1.). El trabajo común arrojó que la visión de la mediación semiótica y los constructos asociados de la TMS, si se integra adecuadamente en el diseño, podría aumentar la fuerza de diseño del TSD. Por el contrario, dejaron claro que la noción de situación a-didáctica y de *milieu* de la TSD, las ideas de variable didáctica y el análisis a priori que son fundamentales en la ingeniería didáctica podrían ser nociones operativas para una actividad de diseño apoyada por el TMS (véase Artigue & Mariotti, 2014, p. 344-345).

Dos casos de estudio de networking (grupo de Bremen)

Los equipos de la AiC, TSD y TAD se focalizaron en los conceptos que en estas teorías tienen en cuenta el entorno del proceso de enseñanza-aprendizaje, considerado por cada teoría como influyendo en dicho proceso: respectivamente, contexto, *milieu*, dialéctica media-*milieu*. Al hacer funcionar estas herramientas en el análisis de un mismo episodio, los investigadores se percataron de las semejanzas y diferencias entre sus enfoques del entorno, pudieron entablar un diálogo entre sus puntos de vista hasta llegar a percibir una complementariedad de ellos.

Otro caso surgió de análisis contradictorias de un mismo episodio: una teoría identifica un fenómeno con valor positiva de interacción semiótica entre el estudiante y el profesor (juego semiótico-APC); al contrario, las otras dos teorías reconocen un mismo fenómeno didáctico de aprendizaje fictivo (*effet Topaze*-TSD, *Funnel communication pattern*-IDS). El trabajo común para aclarar esta contradicción provocó un proceso de deconstrucción-reconstrucción de cada concepto, con criterios nuevos más precisos para caracterizar los fenómenos que modelan.

VI. CONCLUSIÓN

Según Bourdieu, la científicidad de un campo de investigación está estrechamente ligada a su autonomía. Sin embargo, esta autonomía no puede ser total, debido a las presiones externas sobre el campo. Dependiendo de su capacidad para soportar estas presiones, el campo alcanza un punto de equilibrio dinámico, que resulta un grado de autonomía de nivel variable. Por eso, la didáctica de las matemáticas no debe permitir que se le impongan criterios de científicidad desde la esfera política o desde otras ciencias. Sólo a través de su propia dinámica interna puede alcanzar niveles más altos de científicidad.

La multiplicidad de las teorías y paradigmas desarrollados en el campo de la didáctica de las matemáticas tiene razones de ser de índole epistemológica. Desemboca del hecho que el

objetivo fundamental de la didáctica resulta intervenir sobre la realidad que estudia para mejorarla, dicha realidad siendo de naturaleza compleja y diversa, determinada por las instituciones del contexto sociocultural en el que está inmersa. Deriva también de la influencia de dicho contexto sobre el funcionamiento de la investigación y sobre las comunidades de investigadores mismas. Esta dimensión local conlleva que, de una comunidad a otra, se pueda priorizar principios y cuestiones diferentes que desembocan en teorías y paradigmas diferentes. Además, siguiendo a Bourdieu, también hemos contemplado la multiplicidad de teorías como una consecuencia de la lucha de poder dentro del campo de la investigación didáctica. Si este fenómeno puede considerarse como algo que debe controlarse cuando se trata de que un investigador desarrolle su propia visibilidad en el campo, se debe tener en cuenta el papel emancipador que desempeña la producción de una nueva teoría para comunidades de investigación emergentes en las naciones en desarrollo.

Si bien es cierto que esta diversidad no facilita la comunicación entre investigadores y de ahí la científicidad, reducirla no es la única manera de alcanzar una mejor comprensión recíproca de los diferentes agentes del campo internacional de la didáctica. Los trabajos de los grupos europeos que encontramos en la parte V evidencian que la distancia aparente entre las teorías no es necesariamente un obstáculo para el desarrollo de un diálogo productivo. Sin embargo, muestran también que este proceso no es una mera formalidad porque resulta difícil a cada investigador alejarse de sus posiciones teóricas y no distorsionar otras teorías cuando intenta entenderlas. Conectar teorías se puede alcanzar por la multiplicación de investigaciones que involucren a las comunidades asociadas, una multiplicación que debe desembocar en la creación de praxeologías específicas de la conexión de teorías, con tareas y técnicas que permitan tomar como objetos de estudio mutua las construcciones clave de cada teoría, tal como lo han empezado los colegas del grupo de Bremen y del proyecto Remath. Cabe subrayar que estos trabajos se deben realizar colectivamente, por su dificultad tan como por su razón de ser: desarrollar el entendimiento entre investigadores no puede ser la obra de un individuo afirmando que proporciona a los demás un lenguaje común.

Para concluir, quiero enfatizar la dimensión doble del trabajo realizado por los grupos²⁰ antes mencionados. Por una parte, desemboca en una mejor comprensión mutua debida a un mejor conocimiento de las otras teorías. Por otra parte, para cada equipo, resultan efectos positivos respecto a su teoría propia: primero, un entendimiento más profundo que deriva de la necesidad de explicitar ciertos principios implícitos, de volver a las razones de ser de las construcciones conceptuales, de cuestionar el papel efectivo de la teoría en las prácticas de investigación; segundo, un enriquecimiento con definiciones más precisas de ciertas construcciones que no se habían trabajado lo suficiente y posiblemente con la importación-adaptación de construcciones de otras teorías. Así se evidencia la riqueza que constituye para la didáctica la multiplicidad de teorías y paradigmas.

²⁰ Me apoya aquí sobre las dispositivos de conclusión que propuso M. Artigue en una conferencia titulada ‘Networking entre théories : enjeux, conceptualisation et pratiques’, el 31 de enero 2020, en el marco del seminario nacional de didáctica de las matemáticas, en Paris.

REFERENCIAS

- Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281–308.
- Artigue, M. (2013). Didactic engineering in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*. Berlin/Heidelberg: Springer.
- Artigue, M. (coord.) (2006). *Integrative theoretical framework. ReMath Deliverable 1*.
<https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190417/document>
- Artigue, A., Bosch, M. (2014). Ch. 15: Reflection on Networking Through the Praxeological Lens. In A. Bikner-Ahsbals & S. Prediger (Eds.). (2014). *Networking of theories in mathematics education*, pp. 249-265. New York: Springer.
- Artigue, M, M-A Mariotti (2014). Networking theoretical frames: the ReMath enterprise. *Educational Studies in Mathematics* 85(3), 329-355.
- Bartolini Bussi, M-G., Mariotti, M-A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L.English, M-G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*, second revised edition, (pp. 746-805). Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ.
- Bloch, I. (1999). L’articulation du travail mathématique du professeur et de l’élève dans l’enseignement de l’analyse en Première Scientifique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19 (2), 135-194.
- Bolon, J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l’enseignement des décimaux à la charnière école-collège*. Université René Descartes-Sorbonne, thèse de doctorat. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252104/document>
- Boero, P. (2016). Some reflections on ecology of didactic research and theories: the case of France and Italy. In B.R. Hodgson, A. Kuzniak & J-B. Lagrange (Eds), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Homage to Michèle Artigue*, (pp. 26-31). Dordrecht: Springer.
- Bourdieu, P. (2001). *Science de la science et réflexivité*. Paris : Raisons d’agir.
- Bourdieu, P. (2003). *El oficio del científico. Ciencia de la ciencia y reflexividad*. Barcelona: Editorial Anagrama.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 35–115.
- Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Editorial Gedisa
- Castela, C. (2011). *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l’étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au coeur du développement praxéologique des élèves en tant qu’utilisateurs de mathématiques*. (Habilitation à Diriger des Recherches), Université Paris Diderot. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00683613>
- Castela, C. (2015). Considering theoretical diversity and networking activities in mathematics education from a sociological point of view. In K. Krainer, N. Vondrová (Eds), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* pp.2562-2568 <https://hal.archives-ouvertes.fr/CERME9-TWG17/hal-01289422v1>

- Castela, C. (2018). Herramientas para desentrañar lo que abarca la noción sibilina de 'habilidad de aplicar un teorema dado'. *Ciencia y Tecnología. Memoria del III Simposio Internacional en Matemática Educativa*, 34(2), 42-55.
- Chaachoua, H., Bessot, A., Romo, A., Castela, C. (2019). Developments and functionalities in the praxeological model. In M. Bosch, Y. Chevallard, F.J. García & J. Monaghan (Eds), *Working with the anthropological theory of the didactic. A comprehensive casebook*, (pp. 41-60). Routledge.
- Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona, Spain: FUNDEMI-IQS.
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. In Ruiz-Higueras & Al. (Eds) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaén: publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Chevallard, Y., Bosch, M., Kim, S. (2015). What is a theory according to the Anthropological Theory of the Didactic? In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of CERME9*, (pp. 2614-2620). <https://hal.archives-ouvertes.fr/CERME9>
- D'Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del Programa Etnomatemática. *Revista Latinoamericana Etnomatemática*, 7(2), 100-107.
- Dorier, J.-L. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Grugeon-Allys, B., Godino, J.D., Castela, C. (2016). Three perspectives on the issue of theoretical diversity. In B.R. Hodgson, A.Kuzniak & J-B. Lagrange (Eds), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Homage to Michèle Artigue*, (pp. 57-86). Dordrecht: Springer.
- Feuer, M. J., Towne, Lhavelson, N, R.J. (2002). Scientific Culture and Educational Research. *Educational Researcher*, vol. 31, n° 8, 4-14.
- Godino, J., Batanero, C., Font, V. (2019). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. Pp. 1-12.
http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_Batanero_Font_2019_FLM_esp.pdf
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39 (1), 37- 42. Versión original disponible en <https://flm-journal.org/>
- Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques* (pp. 89-102). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. (2005). *Les bifurcations didactiques : Un phénomène révélé par l'analyse de la structuration du milieu*. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00432229/document>
- Niss, M. (2007). Reflections on the state and trends in research in mathematics teaching and learning. From here to utopia. In F.K. Lester & Frank K. (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1293-1312). Reston: NCTM.
- Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 13 (1/2), 95-118.
- Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education* 40(2), 317-327.

Robert, A. (1998). Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques* 18 (2) pp. 139-190.

Robert, A., Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*, 2, 4, 505-528.

Robert, A., Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16-2, 145-176..

Roditi, E. (2013). Une orientation théorique pour l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. *Recherches en didactiques*-15, 39-60. <https://www.cairn.info/recherches-en-didactiques-2013-1-page-39.htm>

Sarrazy, B., (1997). Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17-2, 135-166.

Sensevy, G., Mercier, A., Schubauer Leoni, M.-L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la Course à 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 20 (3), 263-304.

Vandebrouck, F. (Ed.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes*. Toulouse : Octarès Editions. (2013). Université Paris Diderot.

Vandebrouck, F. (Ed.) (2013). *Mathematics classroom: students' activities and teacher's practices* (pp. 3-23). Rotterdam, NL: Sense Publishers.

Vandebrouck, F. & Robert, A. (2017). *Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques : Vers une théorie didactique de l'activité* (TDA). Cahiers du LDAR n°17. Paris : IREM <http://numerisation.univ-irem.fr/PS/IPS17001/IPS17001.pdf>