



HAL
open science

Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres

Catherine Houdement, Alain Kuzniak

► To cite this version:

Catherine Houdement, Alain Kuzniak. Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 1999, 40 (3), pp.283-312. 10.1023/A:1003851228212 . hal-03198411

HAL Id: hal-03198411

<https://hal.science/hal-03198411>

Submitted on 24 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UN EXEMPLE DE CADRE CONCEPTUEL POUR L'ÉTUDE DE
L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE EN FORMATION DES
MAÎTRES

ABSTRACT. We are interested in the teaching of geometry to primary school (children from 3 to 11) teachers. We define a priori a conceptual frame, which organises geometry upon three kinds of knowledge: intuition, experience and deduction. Drawing on Gonseth's works, we bring out three syntheses of elementary geometry: natural geometry (geometry I), natural axiomatic geometry (geometry II) and formalist axiomatic geometry (geometry III). Next we illustrate this conceptual frame with examples of teaching geometry. Last we bring out different conceptions of geometry in scholar system which could lead to cross purposes.

RESUME. Nous nous intéressons à l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres de l'enseignement primaire. Nous définissons a priori un cadre conceptuel qui permet d'organiser la géométrie autour de trois modes de connaissances: l'intuition, l'expérience et la déduction. En nous inspirant de Gonseth, nous dégageons trois synthèses constitutives de la géométrie: la géométrie naturelle (géométrie I), la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II), la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III). Puis nous illustrons cette approche en faisant fonctionner notre cadre sur des exemples de situations géométriques d'enseignement. Dans une dernière partie, nous montrons la présence effective de différentes conceptions de la géométrie, qui peut engendrer des malentendus.

Cet article s'insère dans une réflexion sur la formation en géométrie des enseignants de l'école primaire¹, il prolonge nos études sur les stratégies de formation des professeurs d'école en mathématiques (Houdement C. et Kuzniak A. 1994, 1995 et 1996).

1. POSITION DU PROBLÈME

1.1. *Les termes du débat*

L'enseignement de la géométrie a toujours tenu une place à part dans l'édifice des mathématiques, suscitant des polémiques sur sa nature et ses formes d'enseignement, et cela non seulement chez les spécialistes des mathématiques, mais même dans les sphères politiques responsables des contenus d'enseignement.

Dès le XIX^{ème} siècle, en France, le débat oscille entre la nécessité d'enseigner les fondements de la géométrie avant de passer aux appli-



cations pratiques (dessin linéaire²) et celle d'enseigner préalablement des savoir-faire pratiques, accessibles à tous, pour garder l'enseignement des fondements pour plus tard. Le débat est parfois posé de manière plus radicale. Doit-on enseigner des éléments de raisonnement (et donc des éléments de géométrie) aux enfants du peuple et à leurs enseignants issus des mêmes milieux sociaux? Ou doit-on seulement leur enseigner des savoir-faire pratiques liés à l'arpentage ou aux problèmes concrets de mesure de l'époque? Témoin de ces hésitations, la géométrie disparaîtra de l'enseignement en France (loi Falloux 1850) pour réapparaître quelques années plus tard.

Aujourd'hui, les mêmes oppositions réactualisées s'exercent sur la formation en géométrie des professeurs d'école et rendent cette formation particulièrement problématique.

En effet on assiste à ce niveau à un phénomène de double évacuation de la géométrie:

- La tendance concrète tend à réduire la géométrie à une appropriation de connaissances spatiales basée sur la manipulation de différents matériels.
- La tendance abstraite fait évoluer la géométrie, et les mathématiques en général, vers une étude des structures (groupe, espace vectoriel, programme d'Erlangen de Klein 1872) et regroupe des secteurs 'anciens' par analogies structurales; dans cette conception, la géométrie élémentaire n'existe plus en tant que telle; elle n'est plus qu'une partie de l'algèbre linéaire. Or l'algèbre linéaire n'est pas un objet d'étude mathématique de l'école (ni des professeurs d'école).³

La définition et même l'existence de cette géométrie de 'type école' sont aussi remises en cause, compte tenu du rôle du raisonnement dans l'enseignement. En effet, certains auteurs pensent que sans démonstration, il n'y a pas de géométrie; or les capacités de l'élève de l'école ne lui permettent pas d'accéder à cette maîtrise bien calibrée du raisonnement. Donc la géométrie de l'école n'est au mieux qu'un ensemble de recettes (... de la cuisine!).

Les conséquences de ces conceptions vont se faire sentir dans les centres français de formation des enseignants (I.U.F.M). En effet, s'il n'y a pas de véritable géométrie à l'Ecole Élémentaire, faut-il continuer à enseigner la géométrie en formation des maîtres du premier degré? De même si la géométrie de l'école se réduit à un ensemble de recettes, ne vaut-il pas mieux laisser les futurs maîtres faire leur propre cuisine et restaurer le vieux clivage entre dessin linéaire et éléments de géométrie?

1.2. *Différentes approches du problème de l'enseignement de la géométrie*

Notre approche du problème. La question de la formation des enseignants en géométrie suppose une clarification d'un certain nombre de concepts. Nous faisons deux hypothèses.

HYP 1. La première est que des paradigmes différents et cohérents sont englobés sous le terme unique de géométrie. L'existence de ces différents paradigmes explique en partie la rupture que l'on rencontre dans l'enseignement, entre école et collège, puis entre collège et lycée.

HYP 2. La seconde suppose qu'étudiants (des IUFM), enseignants et élèves de l'école primaire se situent implicitement dans des paradigmes différents et que ce fait est une source de malentendu pédagogique.

Notre recherche met en évidence différents paradigmes, ce qui nous amène à distinguer différentes formes de géométrie. Puis elle montre comment ce cadre permet d'analyser un grand nombre de phénomènes d'enseignement de la géométrie. A terme, elle pourrait déboucher sur une articulation cohérente de l'enseignement de la géométrie dans les différents niveaux (école, collège, ... formation des enseignants).

Dans cet article, nous avons choisi de présenter dans une première partie notre cadre théorique, qui s'appuie sur une approche épistémologique, fondée sur l'étude de textes philosophiques, mathématiques et didactiques et sur certains écrits de mathématiciens sur la géométrie. Dans une deuxième partie, nous donnons des éléments de validation de la deuxième hypothèse que nous avons formulée. Nous réservons pour un autre article des exemples de fonctionnement de ce cadre, par exemple pour analyser l'épistémologie spontanée de différents acteurs de la géométrie à l'école dans les manuels et les textes d'examen.

Les autres approches. Notre approche porte plus sur la définition de l'objet à enseigner que sur des analyses ou des constructions d'ingénieries didactiques.

Ainsi, nous nous différencions de Berthelot-Salin (1992) qui proposent à l'école obligatoire une gestion des rapports entre réalité et géométrie, en pointant notamment tout un champ de connaissances nécessaires aux acquisitions géométriques qui ne sont pas prises en charge de façon explicite par l'école. La finalité de leurs recherches est la construction d'ingénieries visant à développer les aptitudes spatiales des élèves.

Les recherches de l'équipe de R. Duval (1988) (A.M.J. Lobo de Mesquita, 1989; J.C. Rauscher, 1993) s'articulent autour d'une approche sémiotique de la géométrie.

G. Arsac (1987, 1994 et 1997) et son équipe (M.P. Dussuc 1994) sont plus proches de l'optique dans laquelle nous nous plaçons: analyser des phénomènes didactiques en s'appuyant fortement sur des éléments épistémologiques liés à la géométrie, en particulier étudier les gestions possibles dans l'enseignement de la relation entre les objets de la géométrie plane et les objets matériels qu'ils sont censés représenter. C'est aussi, nous semble-t-il, la voie suivie par E. Fischbein (1987, 1993) (et avec M.A. Mariotti 1997). Tout comme lui, et bien après lui, nous insistons sur l'importance de l'intuition (voir plus loin); par contre, même si les deux sont très liées, notre attention porte plus sur une définition, globale et transverse, de l'objet de la géométrie que sur la genèse cognitive chez les élèves des concepts étudiés en géométrie élémentaire avec la notion de 'figural concepts'.

Sur notre approche épistémologique. Dans le cadre de notre étude, qui concerne des enseignants apprenant les mathématiques pour les enseigner ensuite à des élèves, il nous semble important de privilégier les approches épistémologiques qui valorisent la relation entre le sujet et l'objet de connaissances. Nous distinguons trois approches épistémologiques qui, contrairement à l'épistémologie interne, réincarnent le sujet.

- Le sujet réapparaît en tant qu'être humain idéalisé (non particularisé): nous retenons dans cette catégorie les approches phénoménologiques de Husserl (1936) et de Freudenthal (1986), les visions dialectiques de Gonseth (1945–1955) ou l'herméneutique telle qu'elle est reprise dans l'enseignement des mathématiques par Brown (1997).
- Le sujet est considéré comme être social: cela renvoie aux idées de Lakatos (1976) sur la constitution d'un savoir mathématique dépendant de la communauté scientifique et aux nombreuses utilisations de ce cadre en didactique (voir Nunokawa (1996) pour une recension).
- Le sujet est un être susceptible d'une évolution personnelle en tant qu'individu cognitif: les idées de Piaget (1950), entre autres, sont particulièrement importantes dans le cadre de l'enseignement primaire. Dans cette optique, on peut noter aussi l'approche de Tall (1995) qui analyse l'évolution de la pensée géométrique grâce à la notion de 'procept'.

Notre travail s'inscrit plutôt dans la première mouvance et s'appuie plus particulièrement sur les travaux de Ferdinand Gonseth concernant la relation entre géométrie et espace. Gonseth intègre sa réflexion sur la géométrie dans le cadre plus vaste d'une réflexion sur la démarche scientifique. Son approche n'est pas historique mais dialectique et vise à mieux comprendre

l'effort qui construit et fédère la géométrie dans son rapport à l'espace et au monde sensible.

2. LA DÉFINITION DE NOTRE CADRE THÉORIQUE

2.1. *Intuition, expérience et déduction*

La crise des géométries non-euclidiennes au XIX^{ème} siècle a permis de distinguer la géométrie abstraite, ou pure, de la géométrie physique et d'avancer dans la résolution du difficile problème de la liaison entre géométrie et réalité. La géométrie abstraite présuppose qu'on peut comprendre un traité de géométrie sans connaître la nature des entités dont il parle (Nicod 1923)⁴. Ce point de vue conduit à une approche logiciste de la géométrie où la *déduction* logique à l'intérieur d'un système d'axiomes constitue le seul socle de véracité et de réalité. Pour connaître un objet, il suffit de donner ses propriétés internes et alors, sans surprise, tous les états des choses possibles sont également donnés (Wittgenstein 1918)⁵.

A l'opposé de ce point de vue, il y a la géométrie physique qui s'appuie sur l'*expérience*, seule source légitime de validation des affirmations. Sa source principale de créance est sa conformité avec les indications fournies par les sens et notamment la vue. Ainsi apparaît un autre pôle de légitimation: l'*intuition*.

Dans la perspective pédagogique qui est la nôtre, il importe de bien comprendre l'évolution et les rapports existants entre géométrie et réalité. Pour un sujet confronté à l'apprentissage de la géométrie, cette articulation passe par une meilleure définition des trois modes de connaissances de l'espace que constituent l'intuition, l'expérience, la déduction.

Nous allons maintenant préciser le sens que nous attribuons à ces trois termes en revisitant ces expressions. Puis nous développerons notre propre synthèse, qui résulte d'une adaptation à notre sujet d'étude des travaux de Gonseth.

2.1.1. *L'intuition*

Prendre en compte l'intuition nous semble fondamental dans l'approche de la géométrie. Mais le premier embarras que l'on éprouve en mettant l'accent sur l'intuition provient de la difficulté à définir précisément ce qu'englobe ce terme. À moins d'admettre que tout le monde a une intuition de ce qu'est l'intuition. Mais il nous importe ici d'être opératoire (Voir Fischbein, 1987, pour une approche très complète).

L'approche de l'intuition relève, sans doute, de différents champs de connaissance comme la logique ou la psychologie. Nous suivrons Gonseth

lorsqu'il reprend l'idée kantienne de forme intuitive comme forme a priori de la connaissance. L'intuition apparaît comme le réceptacle interprétatif de nos sensations, elle structure la pensée en terme d'évidence. L'intuition peut se caractériser alors comme une prise de contact immédiate, directe, concrète avec son objet. Mais ce contact direct réalise en même temps la compréhension la plus intime avec son objet, le saisissant dans son essence et dans sa singularité. L'intuition s'opposerait ainsi à tout ce qui est pensée discursive, '*chaîne de raisons*', *détours de la démonstration, mise en œuvre formelle, application minutieuse d'une méthode* (Mouy 1952)⁶.

Dans notre conception, l'intuition peut évoluer avec le sujet grâce à un ensemble d'expériences et donc de connaissances a posteriori. La contradiction n'est qu'apparente: il faut voir l'intuition structurée au niveau de l'individu en un ensemble de strates qui se superposent et font oublier les premières intuitions. Certaines de ces strates seraient communes à tous les individus; c'est le travail des psychologues de les mettre en évidence (théorie des stades), d'autres dépendraient de la pratique du sujet et seraient dépendantes du passé scolaire ou professionnel.

Le second embarras que l'on éprouve à parler d'intuition résulte du triomphe de l'école 'bourbakiste' en France. Cette idée dévalorisée de l'intuition est souvent présente chez les mathématiciens dans la lignée de Bourbaki⁷.

'Il n'est pas niable que la plupart des formes mathématiques avaient, à leur origine, un contenu intuitif déterminé: mais c'est précisément en les vidant de tout contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance, et qu'on les a rendues susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles, et de remplir leur rôle élaborateur.'

Cette vision militante s'opposait à la vision traditionnelle des mathématiciens français réservés sur le projet d'Hilbert. Ainsi Poincaré (1902)⁸:

'Il est inutile de faire observer combien elle (la suppression de l'intuition) serait funeste dans l'enseignement et nuisible dans le développement des esprits, combien elle serait desséchante pour les chercheurs dont elle tarirait promptement l'originalité.'

Enfin, le surcroît d'intelligibilité qu'apporte l'intuition est souvent confondu par certains mathématiciens avec l'idée même de géométrie, dans son lien particulier et immédiat avec le réel que l'on peut résumer par la formule de René Thom (1983): '*Comprendre signifie donc avant tout géométriser*'⁹.

2.1.2. *L'expérience*

L'expérience permet d'approcher la géométrie en restant proche de l'action et d'une certaine réalité physique. La nature de l'expérience géométrique va dépendre des objets sur lesquels elle s'exerce.

Ainsi, dans un premier cas, faire une expérience en géométrie, ce sera tenter de vérifier matériellement ce que l'on avance. On montrera par exemple que la somme des angles intérieurs d'un triangle est un angle plat en rapprochant des gabarits des trois angles du triangle. Pliages, découpages et constructions à la règle et au compas constituent la base de cette approche expérimentale, qui peut déjà être développée à l'école. Cette approche se développe dans un espace mesurable, grâce à la perception ou à des instruments.

Aux moyens traditionnels d'expérimentation s'ajoutent désormais les possibilités offertes par l'informatique avec certains logiciels comme Cabri-géomètre (Laborde 1991) ou Logo. Il s'agit ici de simulations qui opèrent sur des objets virtuels. Ainsi peut-on découvrir certaines intersections de droites, certains alignements de points ou des lieux géométriques. Les fractales sont l'illustration 'à la mode' de ce lien entre géométrie et expérience par l'intermédiaire de la simulation.

Enfin une dernière forme d'expérience peut être mentale, *experimental thought*, elle consiste à mettre en œuvre mentalement des déplacements, des découpages sans les effectuer réellement.

Le lien entre expérience et intuition est très fort et comme le souligne Fischbein (1987 page 88)

Experience has a fundamental role in shaping intuitions because, in certain circumstances, it shapes stable expectations.

Cela ne signifie pas qu'il y ait, en mathématiques, un rapport unique qui irait de l'expérience vers l'intuition. Dans certains cas, une expérience, bâtie sur un raisonnement, dément l'intuition (géométrie non-euclidienne, fonctions continues non dérivables. . .). Cette expérience est alors source de nouvelles intuitions dans un nouveau paradigme.

2.1.3. La déduction

En suivant Oléron¹⁰, on peut définir la déduction en disant que, certaines connaissances étant considérées comme acquises, elle consiste à en tirer d'autres qui en sont les conséquences. La déduction permet d'atteindre de nouvelles informations à partir de celles déjà acquises, sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure. Elle est basée sur le raisonnement et elle permet de réorganiser les apports de l'expérience. Nous employons le mot *déduction*, mais l'usage que nous en faisons est plus vaste, plus proche du *raisonnement* dans son ensemble.

Le pôle déductif et logique est très prégnant quand on pense à la géométrie. Certains ne justifient le maintien de son enseignement que pour les apports logiques qu'elle est censée apporter. Mais il est important de ne pas réduire ces aspects déductifs à la démonstration basée sur des ax-

io mes bien définis et en nombre réduit. L'enfant peut aussi faire des déductions et prouver des affirmations, déduites de ses observations et basées sur des constructions. Les figures deviennent alors le support adapté pour guider l'intuition mais elles ne suffisent plus à fournir une preuve. Nous illustrerons plus loin ce point de vue.

2.2. *Notre synthèse*

Gonseth propose trois synthèses dialectiques de la géométrie qui réorganisent et articulent les relations entre l'intuition, l'expérience et la déduction. Nous avons repris son idée et l'avons transformée pour l'adapter à notre propos qui porte sur l'enseignement et la formation des maîtres. La synthèse que nous présentons nous est personnelle et ne doit pas être comprise comme une présentation fidèle des idées de Gonseth.

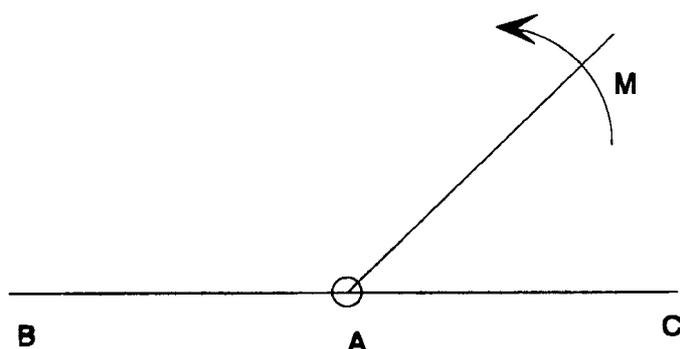
Nous proposons donc une vision unificatrice de la géométrie grâce à l'idée d'une synthèse dialectique évolutive entre divers pôles. Ce point de vue nous paraît fondamental dans une perspective de formation des maîtres. La géométrie doit contenir les trois pôles (intuition, expérience, déduction); il y a malaise si l'un des pôles est perdu (exemple hypertrophie du pôle déductif).

2.2.1. *La géométrie naturelle ou la confusion entre la géométrie et la réalité*

La géométrie naturelle a pour source de validation la réalité, le sensible. Elle comprend les trois aspects, intuition, expérience, déduction, mais la déduction s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments. En ce sens la géométrie d'Euclide n'est pas naturelle; il s'agit plutôt de celle de Clairaut¹¹ (ou dans certains cas de Legendre) où la déduction peut être liée à une expérience mécanique et où on ne doit pas encombrer l'esprit en démontrant des choses évidentes. A côté des expériences physiques, il y a aussi un type intermédiaire de raisonnement que nous allons illustrer par la 'démonstration' que fait Legendre¹² du théorème suivant:

Par un point pris sur une droite, on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on ne peut en élever qu'une.

Legendre base son raisonnement sur la figure 'matérialisable' suivante:



La droite AM d'abord couchée sur AC tourne autour du point A. L'angle MAC d'abord petit devient grand contrairement à son angle adjacent MAB qui devient petit pour atteindre 0. Ainsi l'angle MAC d'abord plus petit que MAB devient plus grand que cet angle: par conséquent il y aura une position AM de la droite mobile où ces deux angles seront égaux et il est évident qu'il n'y en aura qu'une seule.

Il ne s'agit pas ici d'une démonstration mathématique classique, 'suite de syllogismes enchaînés avec rigueur et continuité', mais plutôt d'une preuve articulée sur le monde sensible et non sur la pure déduction logique et abstraite. Il est fait appel à l'expérience mentale du monde sensible. En ce sens on peut parler d'une 'géométrie expérimentale'.

Cette preuve dynamique n'entre pas dans le domaine habituel de la géométrie d'Euclide (il existe cependant des axiomatiques dynamiques¹³), mais elle semble par contre très proche de la perception que peut avoir l'enfant de l'espace¹⁴.

Une autre preuve peut aussi résulter de l'usage du pliage. Suivant la terminologie présentée par Lebesgue¹⁵, il s'agira d'un pliage de deuxième espèce qui permet de partager un angle en deux parties égales.

Ainsi que ce soit par pliage ou par 'mouvement virtuel', la construction et la perception sont au cœur d'une géométrie naturelle de type expérimental. Le raisonnement que privilégie cette approche est un raisonnement de type constructif. Nous avons donc ici l'exemple des possibilités expérimentales et déductives de la géométrie naturelle.

2.2.2. *La géométrie axiomatique naturelle. La géométrie comme schéma de la réalité*

Dans la synthèse axiomatique euclidienne, les aspects 'non rigoureux' et les appels à l'intuition de l'espace cèdent la place à la déduction logique et à la démonstration au sein d'un système axiomatique le plus précis possible. Gonseth pose un certain nombre de questions sur cette géométrie.

Quelle est la place de l'axiomatique? Peut-on choisir n'importe quel type d'axiomes? Quelle est la place de la réalité quand on axiomatise?

Nous suivons Gonseth quand il affirme que l'axiomatisation est une formalisation, mais qu'elle n'est pas nécessairement formelle, la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique. Sa deuxième synthèse dialectique propose une géométrie qui n'est pas réduite au naturel, mais qui conjugue les notions d'horizon de la réalité, de schéma et de modèle. Cette géométrie ne prétend pas comme la géométrie naturelle qu'elle est la réalité, mais elle aspire à être un schéma de la réalité.

Gonseth illustre cette idée par sa fable de la forêt

Une plaine est recouverte d'une forêt assez dense, mais dont les arbres sont irrégulièrement distribués. Quelque part à l'intérieur de la forêt il y a une clairière et dans cette clairière une grande boule. Il nous faut la faire rouler jusqu'en un point, peu importe lequel, de la lisière.

Plutôt que faire rouler la boule et la pousser au petit bonheur, on peut passer par l'intermédiaire d'un schéma sur une feuille où des points figureront les arbres; des couleurs indiqueront les segments interdits pour le passage de la boule (distance entre les arbres inférieure au diamètre de la boule). Le problème pourra ensuite être résolu ('à la table d'une auberge') grâce aux indications portées sur le schéma.

La géométrie euclidienne classique est basée sur ce pas de côté, mais tout l'effort de schématisation est dissimulé et reste implicite.

La géométrie axiomatique formaliste. Indépendance de la géométrie et de la réalité

Cette fois, à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique s'impose. Gonseth n'insiste pas beaucoup sur ce dernier aspect (nous ne nous engagerons pas non plus très loin dans cette voie), on pourra se référer à l'ouvrage monumental de Boi¹⁶ sur le sujet.

L'approche axiomatique formaliste est bien explicitée par la rude affirmation de Wittgenstein¹⁷ qui clôt le débat entre géométrie et réalité:

Les axiomes d'une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité.

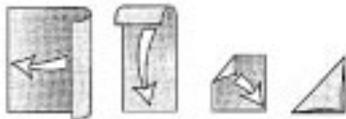
Dans l'enseignement, cette conception a permis d'introduire une géométrie élémentaire basée sur l'algèbre linéaire dont l'espace sous-jacent est l'espace \mathbb{R}^3 muni d'un produit scalaire. Poussant jusqu'au bout les conséquences de cette vision algébrique de la géométrie, Dieudonné peut affirmer dans l'introduction de son traité: '*Je me suis permis de n'introduire aucune figure dans le texte, ne serait-ce que pour faire voir que l'on s'en passe fort bien.*'¹⁸

Autrefois, dans l'ancienne Chine, on s'ottrait, à l'occasion du Nouvel An chinois, des sortes de « cartes de vœux » découpées dans du papier et on en décorait les murs et les portes des maisons.

Pour réaliser ces cartes, on utilisait souvent le pliage et le découpage.

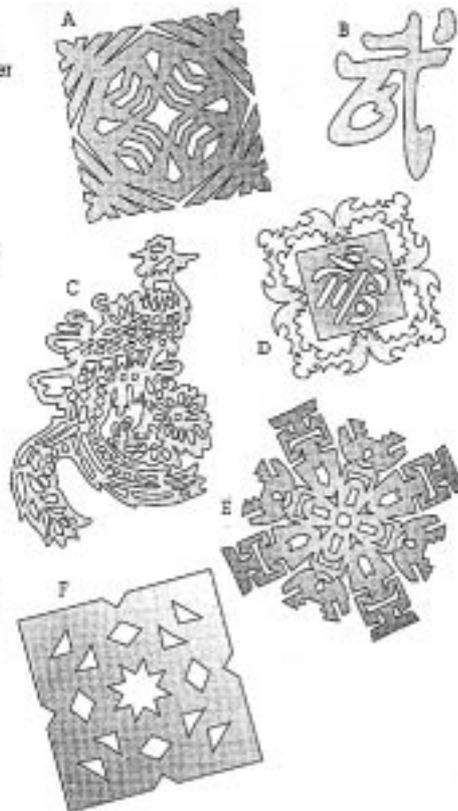
1. Parmi les motifs représentés, quels sont ceux qui ont été réalisés par pliage et découpage ?

2. Prends un carré de papier de 21 x 21 cm. Pile-le en huit comme ci-dessous ; c'est le pliage « rosace ».



Reporte un motif, découpe et déplie. Les lignes de pliage sont des axes de symétrie. Marque-les.

3. Utilise maintenant le pliage rosace pour réaliser la carte F. Découpe, déplie, compare avec le modèle et cherche les découpages oubliés.



Annexe 1. Extrait du manuel scolaire *Le Nouvel Objectif Calcul CE2* page 116 Editions Hatier 1995. Paris.

3. QUELQUES EXEMPLES ILLUSTRATIFS

Pour éclairer notre propos, nous allons illustrer notre approche par quelques exemples volontairement choisis dans tous les niveaux de l'enseignement.

3.1. *L'intuition n'est pas la perception*

Dès l'école primaire, il est possible de trouver des exemples de situations géométriques précisant notre approche de l'intuition, et en particulier de la différencier de la perception. L'extrait de manuel scolaire de CE2 (pour des élèves de 8 ans, cf. annexe 1), fournit un exemple d'activité qui nécessite une forte intuition. Dans la première question, les auteurs demandent aux élèves de repérer, parmi des dessins très complexes de napperons chinois en papier, ceux qui sont obtenus par pliage et découpage. Or ce repérage ne peut se référer qu'à une connaissance a priori de l'effet de pliages et découpages sur une feuille de papier, il ne peut se suffire d'une seule

perception, il nécessite ce que nous appelons une intuition forte. Cette intuition n'est pas innée, elle peut être le résultat d'expériences préalables sur ce type d'objets. D'ailleurs la question 2 donne l'occasion de mener l'expérience effective d'un pliage et d'un découpage sur un exemple plus simple. Cette expérience est réinvestie dans la dernière question où les élèves doivent comparer le résultat de leur découpage avec sa représentation incomplète. L'activité, telle qu'elle est proposée, relève donc d'abord de l'intuition, puis de l'expérience qui aurait pu forger cette intuition.

On voit donc ici que l'intuition ne se résume pas nécessairement à une appréhension immédiate de la forme, qu'elle peut résulter d'une expérience préalable qui aurait laissé une trace. L'exemple que nous venons d'étudier se place dans la géométrie I, mais nous étendons cette vision de l'intuition aux autres géométries et nous partageons l'affirmation de G.Arsac (1997):

'On peut conclure qu'un enseignement de la géométrie doit avoir en particulier pour effet une éducation de l'intuition, celle-ci ne saurait donc être considérée comme conséquence de la perception seule.'

Ce point de vue rejoint aussi celui de Fischbein que nous avons cité plus haut.

3.2. *Un exemple de géométrie I à l'école*

Dans un manuel scolaire français récent de CM2¹⁹, destiné à des élèves de 10 ans, à l'occasion de révisions sur les triangles, les auteurs demandent aux élèves de construire tous les triangles possibles en juxtaposant trois pailles parmi des pailles de trois longueurs fixées (4 cm, 5,5 cm et 8 cm).

Cette activité propose une *expérience* dans le cadre de la géométrie I: elle se situe complètement dans le monde physique; les élèves peuvent constater que les assemblages proposés ne sont pas tous possibles. L'expérience permet de conclure à l'impossibilité d'assembler dans tous les cas un triangle à partir de trois pailles, et cela est lié aux longueurs choisies par le maître pour les pailles. Il est alors possible d'explicitier avec les élèves les raisons de cette impossibilité '*ça ne marche pas parce que c'est trop court, parce que les pailles ne se joignent pas*'. A condition de faire le passage des pailles aux longueurs, les élèves peuvent tirer de l'expérience un début d'explication du processus de *non-construction* d'un triangle donné par les longueurs de trois 'côtés': *on ne peut pas toujours construire un triangle à partir de trois longueurs fixées*. Ils peuvent aller jusqu'à expliquer dans quels cas la construction n'est pas possible: *si une des longueurs est supérieure à la somme des deux autres*.

C'est la voie indiquée dans le guide pédagogique, destiné à l'enseignant, pour terminer l'activité: '*Conclure que, pour construire un triangle, il faut que le plus grand côté soit inférieur à la somme des deux autres.*'

Mais cette phase correspond à ce que nous appelons un aspect *déductif* de la géométrie I: elle n'est pas automatique chez l'élève, elle fait passer à la généralisation du processus de *construction* de triangles: pour pouvoir construire un triangle à partir de trois longueurs fixées, il est nécessaire que chacune des trois longueurs (ou la plus grande) soit inférieure à la somme des deux autres.

Le rôle du maître est essentiel pour passer à cette conclusion, beaucoup plus riche que la constatation de départ: les élèves ne sont généralement pas capables d'induire seuls cette généralisation.

Ainsi dès l'école élémentaire se rencontrent expérience et déduction, souvent liées, le maître jouant un rôle essentiel dans le passage de l'expérience vers la déduction.

3.3. *Le rôle du dessin dans les trois paradigmes*

L'activité précédente, telle qu'elle est proposée au CM2, se situe dans la géométrie I. Cependant le passage de l'expérience de construction de triangles avec des pailles au processus absolu d'existence des triangles à partir de trois longueurs arbitraires donne du sens à l'axiome du plus court chemin, qui se situe dans la géométrie axiomatique II. On rencontre ici un processus possible de fabrication d'un axiome de la géométrie axiomatique II à partir de la géométrie naturelle: l'activité commence dans la géométrie naturelle, l'expérience fait naître un questionnement qui permet de déduire l'énoncé du plus court chemin. Cet énoncé devient un point de départ dans la géométrie II sous la forme suivante:

*Si A, B et C sont trois points du plan,
l'inégalité suivante $AB \leq AC + BC$ est toujours vérifiée*

Ce même dessin 'triangulaire' donne lieu à une nouvelle interprétation dans la géométrie III. En effet, de l'inégalité triangulaire dérive en géométrie III une nouvelle propriété, cette fois-ci liée aux vecteurs:

*Si A, B et C sont trois points du plan,
les trois vecteurs vérifient la propriété $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.*

Ainsi apparaissent trois interprétations géométriques différentes d'un même 'dessin', ces interprétations se situant dans différents paradigmes.

- En géométrie I, on lit le dessin au premier degré: le dessin est objet d'étude et ses réalisations concrètes sont valorisées.

- En géométrie II, le dessin ne prouve plus l'existence effective du triangle qui est maintenant validée par un axiome. Le dessin n'est plus objet d'étude, il n'est que le support d'objets construits sur le sensible, les segments, dont il contient assez bien les propriétés (rectitude et longueur).
- En géométrie III, le dessin illustre une relation entre des objets virtuels, les vecteurs et il permet d'émettre des conjectures qui devront être validées par les règles algébriques liées aux vecteurs. Dans notre exemple, le dessin ne s'interprète plus de la même façon: il est maintenant porteur d'une direction, d'un sens, d'une longueur; il est le représentant d'une classe d'objets, qui ne sont plus matérialisables.

Les trois géométries mettent donc en jeu un rapport différent entre objet géométrique et dessin. En géométrie I, deux types d'objets physiques coexistent: l'objet matériel en trois dimensions (ici les pailles) et la représentation de cet objet sur la feuille de papier. Le dessin n'a pas le statut de 'figural concept' au sens de Fischbein²⁰, ce n'est qu'une image. En géométrie II, le seul objet physique est le dessin, mais un dessin 'controlled by its definition (though it may be inspired by a real object)'.

En géométrie III, le dessin reste bien sûr sous le contrôle de la définition mais c'est surtout la représentation schématique d'un objet théorique et un support possible du raisonnement.

Ces divers rôles du dessin illustrent bien l'évolution du statut de l'objet géométrique que Tall (1995) pointe comme cruciale dans le passage de la pensée mathématique élémentaire à la pensée mathématique avancée. Ce passage, en particulier sur l'exemple des triangles du manuel, d'une problématique de géométrie I à une problématique de géométrie II n'est ni automatique, ni facile. La construction de situations didactiques de 'passage' constitue un sujet de recherche.

3.4. *Un tableau récapitulatif*

A la lumière des exemples, il nous semble que notre étude des différents paradigmes géométriques peut se résumer au tableau suivant:

	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II	Géométrie axiomatique formaliste III
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur des axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidien
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Support du raisonnement et 'figural concept'	Schéma d'un objet théorique, outil heuristique
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriétés et démonstration	Démonstration et lien entre les objets

4. SUR LES CONCEPTIONS DES DIFFÉRENTS ACTEURS DU SYSTÈME

L'objet principal de notre recherche porte sur l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. C'est pour étudier certains des problèmes posés par cette formation que nous avons dégagé le cadre théorique précédent, nécessaire, selon nous, pour clarifier les différents paradigmes englobés sous le terme unique de géométrie (HYP 1). Nous allons montrer, à titre d'exemple, comment ce cadre nous a permis d'étudier notre deuxième hypothèse à savoir:

HYP 2. Les étudiants (des IUFM), les enseignants et les élèves de l'école primaire se situent implicitement dans des paradigmes différents et ce fait est une source de malentendu pédagogique.

Nous avons abordé ce problème en utilisant notre cadre théorique pour analyser et concevoir différents observables liés à la formation des enseignants.

Problèmes de géométrie posés à partir du même support visuel.

Questionnaire posé aux différents membres du système éducatif.

Activités géométriques présentées dans les manuels scolaires français

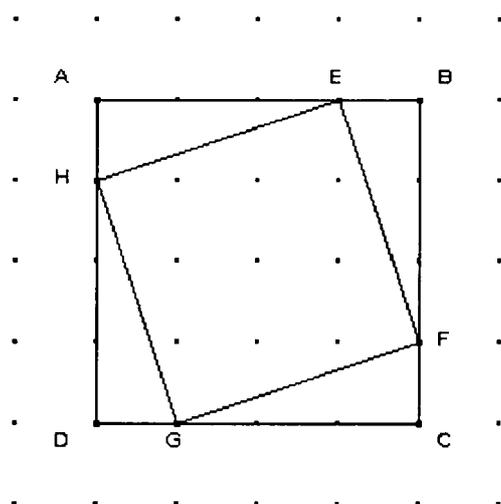
Epreuves des concours de recrutement des professeurs d'école.

Dans cet article, nous donnons des éléments sur les deux premiers points; les deux derniers, sans doute plus liés à la situation française, feront l'objet d'autres publications.

4.1. *Sur un problème posé à partir d'un même support visuel et résolu dans les différentes géométries*

Notre propos est ici d'explicitier une source de malentendus pédagogiques liée au fait qu'une même figure et un même problème peuvent être exploités de manières différentes dans les différents paradigmes que nous avons pu dégager.

La figure suivante, sur papier pointé, est proposée comme point de départ d'un problème. La question porte sur la nature du quadrilatère EFGH. Dans un premier temps, les seules hypothèses (on verra qu'elles peuvent dépendre du type de géométrie dans laquelle on souhaite implicitement que l'élève se place) sont la nature du support (réseau à mailles carrées) et le fait que les points nommés soient des nœuds effectifs de ce réseau.



4.1.1. Sur les hypothèses qu'il est possible d'associer à cette figure

Dans un problème de géométrie classique, il est usuel que celui qui pose le problème annonce les hypothèses, indiquant ainsi la façon 'légale' de lire la figure. Ce faisant, il se libère du dessin et pose implicitement qu'il existe une autre validation que la validation par les sens; les hypothèses écrites font donc entrer dans la cadre de la géométrie II (ou III). Par contre, si le dessin est le seul support des hypothèses, on peut dire que le problème est posé dans la géométrie I. Peut être alors considérée comme hypothèse tout ce qui se 'lit' ou se 'voit' sur la figure.

Ainsi la présence ou non d'hypothèses écrites et le choix des hypothèses placent implicitement le problème dans un certain paradigme géométrique. Par contre, le fait que cette attente soit implicite peut entraîner chez les élèves un premier type de malentendu: ils résoudre parfois le problème dans un autre type de géométrie que celui attendu par le maître.

Dans le cas de notre figure, les hypothèses à saisir sont multiples, par exemple:

- hypothèses 1: ABCD est un carré; E, F, G, H quatre points situés sur les quatre côtés du carré, pris dans cet ordre [AB], [BC], [CD] et [DA];
- hypothèses 2: les hypothèses 1 et les segments AE, BF, CG et DH ont même longueur;
- hypothèses 3: les hypothèses 2 et aussi $AE = 3/4 AB$.

4.1.2. *Etude des résolutions possibles*

Nous allons voir qu'il existe des résolutions relevant de chacune des géométries définies précédemment.

Dans le cadre de la géométrie naturelle. Le problème peut se construire en suivant les étapes implicites de construction de la figure: d'abord un carré initial, puis de segments intérieurs particuliers [EF], [FG], [GH] et [HE], apparaît alors une nouvelle figure EFGH. Quelle est sa nature?

Une première solution (*Solution 1*), purement *intuitive*, indique que EFGH est un carré, '*ça se voit*', il a les cotés égaux et ses angles sont droits.

Cette appréhension intuitive de la figure sera à la base de toutes les solutions qui vont suivre. Elle est à rapprocher de la construction sur un géoplan (ou planche à clous) d'un carré avec un élastique. Il existe une justification purement perceptive et intuitive: on allonge plus ou moins l'élastique. Elle pose parfois des problèmes aux enfants qui n'ont pas acquis la conservation des longueurs (au sens de Piaget).

Une solution (*Solution 2*) basée sur *une expérience* va passer par la vérification de l'égalité des côtés avec un compas et de l'orthogonalité des cotés grâce à une équerre. On retrouve ici l'idée de Gonseth d'une première expérience liée à l'idée d'un espace mesurable. L'expérience doit rester proche de l'intuition pour garantir des résultats cohérents.

Nous avons donc là deux exemples de résolution *dans la géométrie naturelle I*. En voici une autre (*Solution 3*), qui lie *déduction et expérience*: par superposition du gabarit d'un triangle rectangle égal à AEH, les élèves vérifient leur idée que l'angle AHE est égal à BEF. Ils utilisent une expérience antérieure qui leur avait permis de constater qu'on obtient un angle plat en juxtaposant par collage les trois secteurs angulaires d'un triangle et en déduisent que HEF est un angle superposable à EAH, donc droit.

Dans le cadre de la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II). Nous partons d'hypothèses énoncées: par exemple les hypothèses 2. Le texte de départ doit dégager de la figure ce qui peut y être lu, avec le sous-entendu: tout ce qui n'est pas écrit ne doit pas être lu directement sur le dessin, mais déduit des hypothèses.

Voici, à titre d'exemple, ce que peut être une solution (*Solution 4*) dans la géométrie II. L'intuition nous dit que les triangles AEH, BFE, CFG et DHG sont superposables. Confirmons cette intuition grâce à une démonstration: par hypothèse $AE = BF = CG = DH$ et $EB = FC = GD = HA$ et par le théorème de Pythagore, les côtés HE, EF, FG et GH sont de même longueur. Notre intuition est confirmée.

Donc les angles AEH, BFE, CGF et DHG ont même mesure, qui correspond au complémentaire des angles AHE, BEF, CFG et DGH. Les angles du quadrilatère sont donc droits (comme dernière partie d'un angle plat). Le quadrilatère EFGH est donc un carré.

Nous avons vu que le fait d'énoncer des hypothèses précises plaçait le problème dans une autre géométrie que la géométrie naturelle, mais ce fait n'est pas clair pour les élèves, il est souvent source de malentendus. Ainsi, rencontre-t-on, chez les élèves de collège (de 12 et 15 ans), une solution (*Solution 5*) mixte, entre géométrie I et II. Ils vérifient l'égalité des quatre côtés avec la règle graduée ou le compas, puis constatent l'existence d'un angle droit avec l'équerre, enfin ils concluent que 'EFGH est un carré comme losange avec un angle droit'. Cette solution est à mi-chemin entre la géométrie naturelle (expérience) et la géométrie axiomatique. En effet, elle s'appuie sur le sensible mesurable et sur un théorème connu (un losange avec un angle droit est un carré).

Cette preuve présente un défaut de cohérence, puisque certains résultats sont vérifiés sur la figure, et d'autres sont validés par la référence à une certaine axiomatique. Ce défaut de cohérence, très courant dans les productions des élèves de collège, résulte peut-être justement du fait que les cadres respectifs des géométries où on se place pour la preuve ne sont jamais suffisamment explicités.

Dans le cadre de la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III).

Dans le cadre de cette géométrie, les hypothèses doivent être écrites, soulignant les propriétés effectives de la figure à prendre en compte pour l'étude de la question. Idéalement, cette géométrie se passe de figure. Dans notre exemple, si l'énoncé est donné avec les hypothèses 2, il est posé dans le cadre de la géométrie II. Une résolution dans la géométrie III peut s'illustrer ainsi: le choix d'un repère orthonormé d'origine D, d'axes [DG] et [DH] nous fait passer d'un cadre géométrique à un cadre numérique (Douady 1984); une première étape consiste à écrire les coordonnées des vecteurs \vec{EF} , \vec{FG} , \vec{GH} et \vec{HE} , issues de la perception (seule concession nécessaire à l'intuition) et des hypothèses; ensuite le calcul des normes des vecteurs et du produit scalaire permet de montrer que EFGH est un carré. On peut s'aider de la figure, mais on ne peut pas utiliser des données évidentes, comme les égalités des longueurs EF, FG, GH et HE. La figure n'est ici qu'un support heuristique pour les objets virtuels (en géométrie II) que sont les vecteurs.

Cette fois, le malentendu est de nature différente: le changement de géométrie est implicitement attendu par l'enseignant. Ce cas surviendra surtout à la fin du lycée (élèves de 17 à 18 ans), lorsque le problème

sera posé à l'aide d'une figure et que la solution résultera d'une approche formelle (problèmes de transformations et d'angles orientés notamment).

4.1.3. *Conclusion*

L'existence de ces différentes façons d'envisager un même problème est une source constante de difficultés dans l'enseignement de la géométrie. De plus, elle nous semble spécifique de cette partie des mathématiques élémentaires. En effet, prenons le problème concret suivant: 9 objets coûtent 15 F, quel est le prix de 15 objets 'La résolution de ce problème passe par l'utilisation d'un modèle, celui de la proportionnalité. Il existe plusieurs procédures de résolution, mais un seul choix de modèle (tout autre modèle contient la proportionnalité).

Prenons maintenant un problème géométrique, dans quel paradigme se placer pour le résoudre: géométrie I, II ou III? Si le problème est théorique au départ, on reste dans la géométrie théorique (II ou III). Dans l'exemple que nous venons de traiter, la nécessité d'explicitier les hypothèses place la résolution en géométrie II ou III. Par contre si la question à résoudre se présente dans le monde physique ou même si elle l'évoque, il existe un véritable choix de traitement: reste-t-on dans la géométrie I ou passe-t-on dans la géométrie II?

En résumé, il est en général demandé de traiter un problème dans une géométrie de niveau égal ou supérieur (géométrie I, II ou III) à celui dans lequel le problème est posé. Mais cette demande n'est pas explicitée, il n'existe même pas de mot pour dire, en général, ce niveau de géométrie.

Cette distinction de niveaux est pourtant reconnue dans certains problèmes, ainsi la construction effective d'un pentagone ou d'un heptagone régulier convexe se place dans la géométrie I (avec de l'intuition, de l'expérience et de la déduction notamment pour travailler sur des mesures approchées d'angles), mais le problème de la constructibilité (à la règle et au compas) se place en géométrie II ou III. Pour ces problèmes de reproduction de figures, il existe bien deux expressions différentes pour désigner le paradigme dans lequel on se place: construction et constructibilité. Par contre, et c'est un peu l'objet de nos écrits, il n'existe pas, pour la géométrie en général, de double ou triple expression pour désigner le paradigme dans lequel on travaille.

4.2. *Analyse d'un questionnaire sur des définitions de la droite*

Cette partie présente une première approche des conceptions sur la géométrie de divers intervenants du système éducatif. Cette approche est destinée à donner une consistance à notre deuxième hypothèse.

Méthodologie

Nous utilisons ici notre cadre d'étude pour préciser l'analyse textuelle d'un questionnaire ouvert, dans lequel nous demandons la définition d'un certain nombre d'objets géométriques (droite, cercle, cube...), utilisant les questions suivantes: *Explique ce qu'est une droite, ce qu'est un cercle, ce qu'est un cube, un triangle*. Nous avons aussi posé des questions sur la géométrie en général, mais nous ne les exploiterons pas dans cet article.

Nous avons utilisé la méthodologie d'analyse textuelle proposée par Lebart et Salem (1994).

Entrer toutes les réponses aux questions proposées.

Faire une analyse de fréquence pour trouver les mots les plus utilisés et mettre en évidence certains segments.

Procéder à un codage des productions à partir des résultats de l'analyse de fréquence.

Faire une analyse factorielle (ACP) des données à partir du codage obtenu en 3.

L'analyse quantitative concerne trois populations: un groupe d'élèves (70) de CM2, un groupe d'instituteurs (20) en stage de formation continue et un groupe d'étudiants (35) en deuxième année de formation de professeur d'école. A cela s'ajoutent des réponses données par des enfants des classes CE2 (8–9 ans), CM1 (9–10 ans) et des étudiants de première année préparant le professorat de mathématiques (Lycée et Collège) ou le professorat des écoles.

Remarque et critique sur la démarche suivie

Nous ne retenons ici de notre questionnaire que les 'définitions' demandées portant sur la droite: en effet, elles se sont révélées les plus riches. Leur analyse est d'ailleurs assez proche de celle du cercle. Par contre, les réponses portant sur les autres objets sont plus problématiques car, chez les élèves, et même chez les enseignants, le taux de non réponse est trop important. Ce peu de réponse provient sans doute de la difficulté de la tâche, celle de définir un objet mathématique qui est en soi un problème (Fischbein et Mariotti). En choisissant la droite, dont la plupart des acteurs de notre système ont une conception, nous diminuons les difficultés posées par la demande d'une 'définition'.

La droite présente un autre intérêt: dans la perspective épistémologique qui est la nôtre, il s'agit d'une figure classique pour laquelle sont disponibles un grand nombre de définitions et d'approches historiquement et épistémologiquement bien repérables. Citons en quelques unes, par exemple:

- Platon, dans le Parménide, donne une définition archétype des définitions pré-euclidiennes: *'est droit, ce dont le centre fait écran aux deux extrémités'*; cette définition fait explicitement appel au regard, mais

elle est aussi liée au monde de la pratique, l'alignement des arbres dans un champ;

- la définition d'Euclide ne prend de sens que dans une perspective démonstrative: '*la ligne droite est celle qui est également placée entre ses points*' ou: '*celle qui repose également sur ses points*' la définition est donnée pour raisonner et s'exercer sur les propriétés; mais, même dans cette conception, il existe une grande diversité d'approche comme celle de Leibniz (1679) basée sur le mouvement: '*le chemin le plus simple d'un point se déplaçant vers un autre est une droite*' ou '*la droite est la ligne telle que si on immobilise deux de ses points, tous les autres sont immobilisés par cela seul*';
- la définition hilbertienne, enfin, est un exemple type de définition de la géométrie III, où seules les relations entre les objets importent (les points peuvent être des 'chaises' et les droites des 'tables')²¹.

Par contre, dans le cursus français d'enseignement actuel, il n'existe plus de définition standard de la droite, admise par tout le monde et répétée depuis l'enfance: ainsi nous pouvons faire l'hypothèse que les personnes interrogées sur la droite nous livrent une part de leur conception géométrique, dans la mesure où leur réponse ne peut être 'automatique'. Notons qu'il peut aussi exister chez le même individu plusieurs conceptions de la droite.

Ces diverses remarques montrent les limites de notre étude: mais elles visent à expliquer pourquoi nous avons choisi un objet aussi spécifique que la droite, en prenant le risque, par notre demande explicite de production de définitions, de faire entrer les personnes interrogées dans le jeu de la géométrie axiomatique.

• *Résultat de l'analyse textuelle*

L'analyse textuelle, sur laquelle repose notre analyse factorielle, nous a permis de dégager un certain nombre de variables que nous allons préciser.

1) *EPA, LIGNE et TRAIT*. Ces trois premières variables permettent de coder la suite de mots (ou le mot) qui se substitue au terme de droite dans les définitions proposées.

EPA (ensemble de points alignés): il s'agit ici d'une définition ponctuelle et circulaire qui ne définit la droite que de manière nécessaire, oubliant la continuité et le caractère non borné de cette suite de points alignés. *LIGNE* code le mot ligne et renvoie à une vision globale et non ponctuelle. Liée à cette idée, apparaît l'introduction de la variable DPD (deux points distincts), qui correspond aux formulations déterminant la droite grâce à deux points.

TRAIT renvoie à un trait ou à des tracés, il introduit une conception constructive de la droite par rapport à la conception statique précédente. *TRAIT* est corrélé positivement au mot *OUTIL* qui désigne ici la règle qui sert à tracer.

2) *ALLER et INFINI*. Aux trois variables précédentes qui portent en germe les oppositions futures, s'ajoutent les deux variables *ALLER* et *INFINI*.

ALLER est employé pour représenter la classe des verbes qui indiquent un mouvement. En fait ce codage renvoie à deux conceptions assez différentes. Dans un cas, il s'agit principalement de relier ou de passer par deux points. Dans l'autre cas, ce codage est lié au caractère non limité de la droite ('ne se termine pas, ne s'arrête jamais') ou au contraire à l'affirmation de son côté limité (confusion avec un segment). Il ne s'agit donc pas du tout de la même conception dans notre étude: seul le premier sens figure dans le codage *ALLER*.

INFINI code le mot 'infini'. En fait, deux notions de l'infini apparaissent. La première précise la nature illimitée de la droite. La seconde insiste sur le nombre infini de points présents sur cette droite. En fait, les deux notions sont très liées et nous pensons qu'en signalant l'infinité des points, les étudiants veulent signifier le caractère non borné de la droite, plutôt que le caractère dense d'un segment de droite. Cette idée est confirmée par l'explicitation orale faite par quelques étudiants. Dans l'analyse factorielle, nous ne distinguerons pas ces deux occurrences. Chez les enfants, il s'agit d'un infini potentiel lié, comme nous l'avons vu, au caractère illimité de la droite.

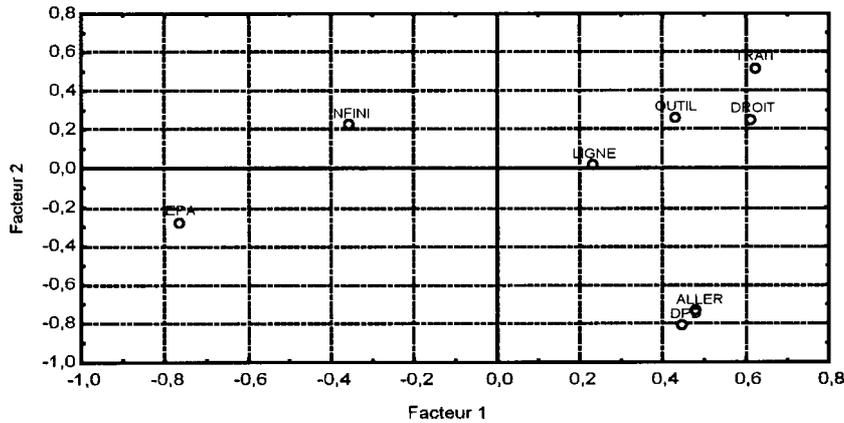
Les productions des élèves, mais aussi de leurs enseignants, font apparaître un nouvel élément lié à une conception erronée de la droite assimilée à un segment. Le jeu *FINI/INFINI* démarquera la différence entre les deux notions. Nous n'avons pas retenu cette différence dans notre étude, mais elle présente un réel intérêt didactique.

A toutes ces variables s'ajoutent quelques items originaux: précision sur la planéité, plus court chemin, notion de direction, etc.

● *Résultat de l'analyse factorielle*

L'analyse factorielle par composantes principales, effectuée grâce au codage de toutes les réponses avec les variables précédentes et avec le logiciel Statistica, fait apparaître deux facteurs très dominants (plus de 80% de la matrice de covariance).

Voici, la répartition de ces variables sur le plan déterminé par les deux premiers facteurs:



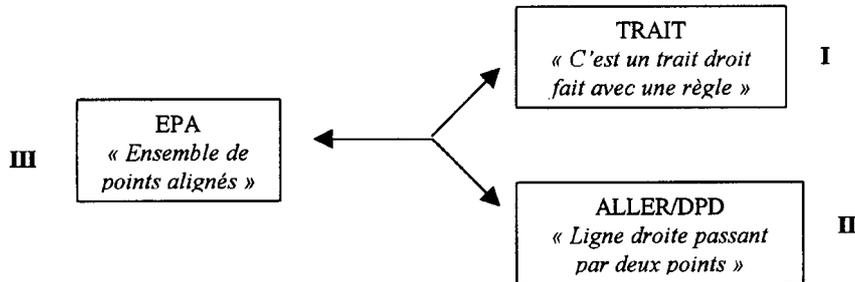
De manière significative, l'analyse fait apparaître trois facteurs principaux corrélés avec certains des codes.

Le facteur 1 est corrélé négativement avec EPA (-0,76) et positivement avec TRAIT

Le facteur 2 est corrélé négativement avec ALLER et DPD (-0,73 et -0,81)

Le facteur 3 est corrélé négativement avec LIGNE (-0,87)

Le premier plan factoriel (Fact 1 et Fact 2) permet de dégager une répartition tripolaire



Sous le codage, nous avons fait figurer la formulation effective la plus représentative du pôle.

Dans ce premier plan, les aspects statiques représentés par EPA s'opposent à un pôle dynamique constructif lui-même scindé, par l'opposition due au facteur 2, en ce qui relève du tracé effectif et ce qui repose sur l'affirmation d'une construction possible par le passage d'une droite par deux points.

Avant de rattacher les éléments d'analyse textuelle et factorielle à notre approche tripolaire de la géométrie élémentaire, nous allons rendre compte des projections des différentes populations sur ce premier plan factoriel.

Cette projection, dont nous donnons ici les trois cas (Annexe 2), fait apparaître clairement un certain nombre d'éléments:

Les étudiants, futurs enseignants, (PE2) sont massivement présents sur le pôle III.

Les élèves de CM2 sont de même très proches du pôle I.

Pour les instituteurs (FPS), la population se répartit entre le pôle I et le pôle II. Ainsi, une partie des instituteurs ne se distinguent pas des élèves de CM2 (10–11 ans). Une étude portant sur le niveau de la classe d'enseignement des instituteurs montre un éloignement progressif du pôle II (très lié aux enseignants des enfants de 6 ans à 8 ans) pour aller vers le pôle III (plus lié aux enseignants des enfants de 8 à 11 ans).

• *Lien avec notre cadre théorique*

Dans le pôle I, l'expérience et l'intuition nous semblent jouer pleinement leur rôle dans l'espace des objets réels. La droite est un trait de crayon construit grâce à un objet, la règle. Ce pôle I se rattache sans ambiguïté à la géométrie naturelle (géométrie I).

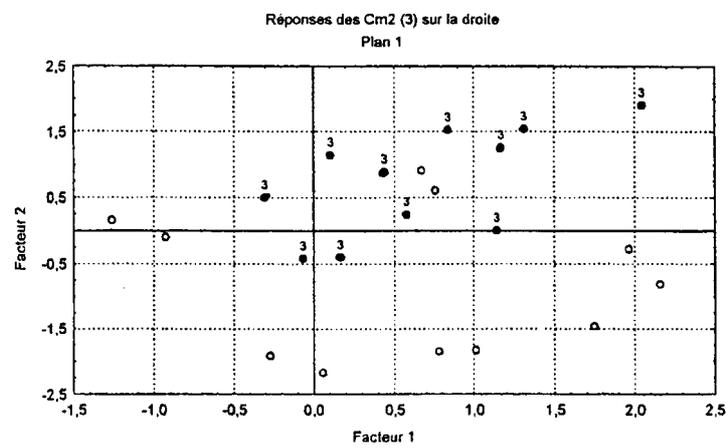
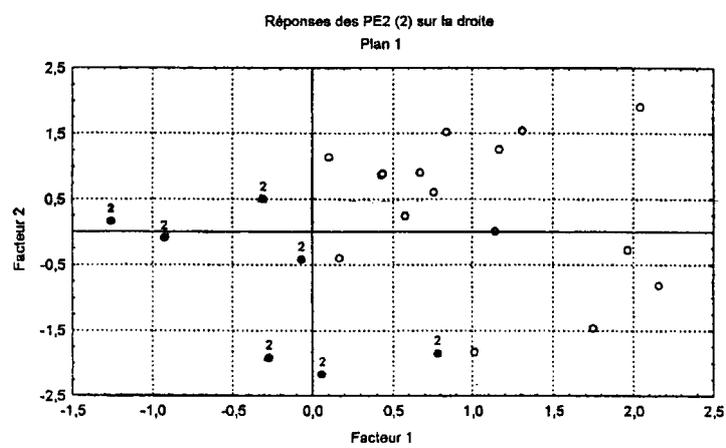
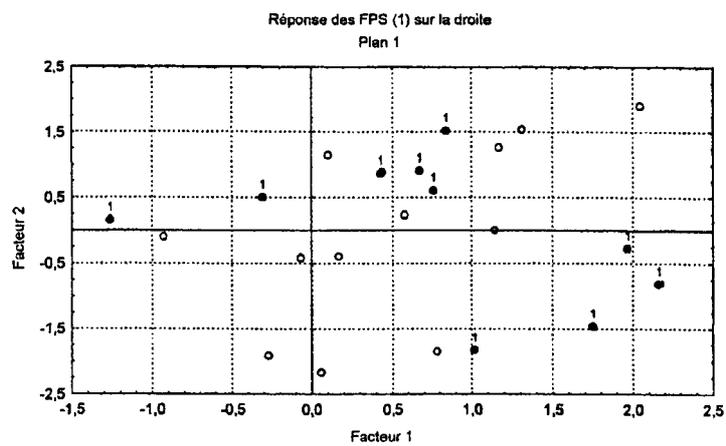
Le pôle II qui privilégie la droite comme ligne passant par deux points relève déjà de cette esquisse de schématisation obtenue à partir de l'observation et de l'expérience, et qui est un élément constitutif de la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II). Par contre, il faut noter que cette définition ne signale jamais l'unicité de la droite, point de départ nécessaire des déductions basées sur cette définition.

Pour le pôle III, la définition retenue est plus problématique. Elle se rattache à une volonté axiomatique, mais renvoie de manière caricaturale à une géométrie III, où les objets n'ont plus de sens réel, ni pour le géomètre, ni malheureusement pour les étudiants. Les étudiants non mathématiciens de notre échantillon se rattachent massivement à ce pôle: cela semble indiquer une mauvaise assimilation de la fonction de la géométrie.

Nous n'irons pas plus loin dans ces conclusions qui risqueraient de faire dire aux questionnaires bien plus qu'ils ne contiennent.

5. CONCLUSION GÉNÉRALE

Envisager l'enseignement de la géométrie à différents niveaux, de l'école primaire à la formation des maîtres, nous amène à étudier sur un cas particulier, la géométrie, la fermeture d'une sorte de boucle d'enseignement. La géométrie de 'type école' apparaît différente de celle de 'type lycée',



Annexe 2.

dont les futurs maîtres d'école ont suivi l'enseignement, l'un après l'autre. Comment peuvent-ils être préparés dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (I.U.F.M.) à enseigner la géométrie qu'ils ont dû oublier ou refouler pour faire leurs études? Comment rendre à chaque géométrie sa spécificité et sa raison d'être?

Il nous semble que l'approche de la géométrie structurée autour de trois modes de connaissance identiques, mais évoluant dans le temps, peut constituer une source de clarification pour les futurs enseignants. Nous avons défini trois paradigmes géométriques: la géométrie naturelle (géométrie I), la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II) et la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III). Cette dernière, sans doute à cause du niveau d'enseignement étudié, est restée à l'arrière-plan, il faudra vérifier sa pertinence au niveau des élèves de lycée et de leurs enseignants. Nous avons choisi de conserver dans chacun des paradigmes géométriques les mêmes entrées: intuition, expérience, déduction. Même si les significations liées à chacune de ces expressions demandent encore à être affinées, elles nous semblent permettre de donner une certaine cohérence à l'ensemble de la géométrie et simultanément un sens à la notion de rupture.

L'analyse des conceptions de différents acteurs du système (élèves, étudiants en formation de maîtres, maîtres en exercice) et de la nature de certains problèmes géométriques nous renvoie une certaine pertinence de notre approche: les acteurs se situent dans des paradigmes différents, cette différenciation étant en relation avec leur position professionnelle, de 'type école' ou de 'type lycée'; les paradigmes dans lesquels sont posés les problèmes ou attendues les réponses ne sont pas explicites, ce qui peut produire des malentendus. Une approche structurée autour des trois modes de connaissance définis plus haut devrait permettre aux enseignants d'enrichir leur propre conception de la géométrie et la confronter avec les paradigmes géométriques dans lesquels doivent évoluer leurs élèves.

D'autres études, non présentées ici, montrent que le cadre défini permet une certaine lecture des activités géométriques des manuels de l'école élémentaire et pose la question des choix de paradigmes de travail pour les textes géométriques des concours de recrutement d'enseignants.

Cependant de nombreuses questions restent en suspens, même si l'on admet la pertinence de notre synthèse.

Notre cadre permet-il de donner une véritable cohérence de la géométrie à l'école (avant 12 ans)? Permet-il d'en faire un tout, préalable à celle du collège (entre 11 et 16 ans)? Permet-il réellement de favoriser l'articulation entre les différents cycles d'enseignement? Enfin, comment sensibiliser les futurs enseignants à cette approche de la géométrie?

NOTES

- 1 En France les professeurs des écoles (pour enfants de 3 à 11 ans) se préparent à un concours aux épreuves disciplinaires et professionnelles en un an, puis ils viennent un an en formation professionnelle dans un IUFM (Institut Universitaire de Formation des Maîtres). L'I.U.F.M. prépare aussi les futurs enseignants de mathématiques (entre autres disciplines) des collèges (de 11 à 15 ans) et des lycées (de 15 à 18 ans).
- 2 Dessin linéaire: tracé aux instruments des lignes droites, des parallèles, des perpendiculaires, des courbes, des figures, des polygones inscrits; division des lignes; solides, usage de l'échelle, perspectives . . . Le tout sans essai de fondement, ni de justification théorique.
- 3 Choquet, G.: in *L'enseignement de la géométrie* Hermann 1964.
'1) Pour les jeunes enfants, l'enseignement de la géométrie ne peut être déductif. Ce doit être un enseignement basé sur l'observation; son but est l'élaboration des concepts fondamentaux à partir de l'expérience.
2) Pour le mathématicien, la façon la plus élégante, la plus profonde, la plus rapide de définir le plan (ou l'espace) est de le définir comme espace vectoriel sur \mathbb{R} , à deux (ou trois dimensions), muni d'un produit scalaire'
- 4 Nicod, J. (1923): 1962, *La géométrie dans le monde sensible* PUF.
- 5 Wittgenstein, L. (1918): 1961, *Tractatus logico-philosophicus*. Gallimard.
- 6 Mouy, P.: 1952, *La logique*, Hachette.
- 7 *Les grands courants de la pensée mathématique* (1948; réédition 1986) p 47. Editions Cahiers du Sud Rivages.
- 8 Poincaré H 'Les fondements de la géométrie' 1902 Le journal des savants in *Dernières pensées*. Gallimard.
- 9 Thom, R.: 1983, *Paraboles et catastrophes*, Flammarion.
- 10 Oléron, P. (1977): 1996 *Le raisonnement*, PUF.
- 11 Barbin, E.: 1991, 'Les éléments de géométrie de Clairaut: une géométrie problématisée', *Repères IREM* n° 4.
- 12 Legendre Géométrie livre 1, proposition 1.
- 13 A la fin du XIXème, en France, Méray fut à l'origine d'une réforme de l'enseignement de la géométrie basée sur des axiomes introduisant le mouvement. Cette réforme fut notamment soutenue par Borel.
- 14 Cette preuve peut être formalisée en faisant jouer le principe de continuité de l'analyse.
- 15 Lebesgue, H. (1950): 1987, *Leçons sur les constructions géométriques*. Editions Jacques Gabay.
- 16 Boi, L.: 1996, *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*. Springer Verlag.
- 17 Wittgenstein (1918): 1961, *Tractatus logico-philosophicus*. Gallimard.
- 18 Dieudonné, J.: 1964, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, page 15, Hermann.
- 19 Le Nouvel Objectif Calcul, Hatier, 1996.
- 20 The Theory of Figural Concepts (1993) in *Educational Studies in Mathematics* N° 24 (2) pages 139–162.

REFERENCES

- Arsac, G.: 1994, 'Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie. Vérification et démonstration', *Petit x* 37, 5–33, IREM de Grenoble.
- Arsac, G. et Mante, M.: 1997, 'Situations d'initiation au raisonnement déductif'. *Educational Studies in Mathematics* 33(1), 21–43.
- Berthelot, R. et Salin, M. H.: 1992, *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de l'Université de Bordeaux I.
- Brown, T.: 1997, *Mathematics Education and Language*. Kluwer Academic Press.
- Chevallard, Y. et Jullien, M.: 1991, 'Autour de l'enseignement de la géométrie', première partie. *Petit x* 27, IREM de Grenoble, pp. 41–76.
- Douady Régine: 1984, *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse soutenue à l'Université Paris 7. Paris: IREM de Paris 7.
- Dussuc, M.-P.: 1994, *Du constat graphique à l'évidence géométrique: étude de démarches d'élèves de CM2 et de 5ème*. Mémoire de DEA de Didactique des Mathématiques. Université Lyon I.
- Duval, R.: 1988, 'Approche cognitive des problèmes de géométrie'. *Annales de Sciences Cognitives et de Didactiques de Strasbourg*, IREM de Strasbourg, pp. 57–74.
- Enriques, F. (1906): 1985, *Problemi della scienza*. Zanichelli, Bologna.
- Fischbein, E.: 1987, *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*. D. Reidel, Dordrecht.
- Fischbein, E.: 1993, 'The theory of figural concepts'. *Educational Studies in Mathematics* 24(2).
- Fischbein, E. et Mariotti, M. A.: 1997, 'Defining in classroom activities.' *Educational Studies in Mathematics* 34(3).
- Fregona, D.: 1995, *Les figures planes comme milieu dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques*. Thèse de l'Université de Bordeaux.
- Freudenthal, H.: 1986, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel, Dordrecht.
- Gonseth, F.: 1945–1955, *La géométrie et le problème de l'espace*. Editions du Griffon, Lausanne.
- Houdement, C.: 1995, *Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques: programmation de stratégies*. Thèse de doctorat., Université de Paris VII, Paris.
- Houdement, C. et Kuzniak, A.: 1996, 'Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques.' *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 16/3, La Pensée Sauvage.
- Husserl (1936): 1962, *L'origine de la géométrie*, traduction et introduction de J. Derrida, PUF.
- Kuzniak, A.: 1994, *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs des maîtres du premier degré*. Thèse de doctorat., Université de Paris VII, Paris.
- Laborde, C.: 1988, 'L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques'. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 9/3, 337–364, La Pensée sauvage.
- Laborde, C. et Capponi, B.: 1991, 'Cabri-Géomètre, un environnement pour l'apprentissage de la géométrie élémentaire'. *Actes de la VI école d'été de didactique des mathématiques*. Plestin les Grèves.
- Lakatos, I.: 1976, *Proofs and refutations* (1984, *Preuves et réfutations*, Hermann).
- Lebart, L. et Salem, A.: 1994, *Statistique textuelle*. Dunod.

- Lobo de Mesquita: 1989, *L'influence des registres figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie*. Thèse de l'Université de Strasbourg.
- Nunokawa Kazuhiko: 1996, 'Applying Lakatos' Theory to the Theory of Mathematical Problem Solving.' *Educational Studies in Mathematics* 31(3), 269–293.
- Parzys, B.: 1988, 'Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures'. *Educational Studies in Mathematics* 19(3).
- Piaget, J.: 1950, *Introduction à l'épistémologie génétique, tome 1. La Pensée Mathématique*. Paris: PUF.
- Popper, K.: 1972, *Objective knowledge*. Clarendon Press.
- Rauscher, J. C.: 1993, *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes: le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège*. Thèse de l'Université de Strasbourg.
- Salanskis, J. M.: 1991, *L'herméneutique formelle*. Ed du CNRS.
- Tall, D.: 1995, 'Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking' *Plenary lecture at the conference of PME, Recife, Brazil*.

CATHERINE HOUEMENT

*I.U.F.M. de Haute Normandie,
BP 18, 76131 Mont Saint Aignan Cedex,
France
E-mail: Catherine.Houdement@univ-rouen.fr*

ALAIN KUZNIAK

*Université Louis Pasteur et I.U.F.M. d'Alsace,
Département de mathématiques,
7 rue René Descartes, 67 084 Strasbourg,
France
E-mail: kuzniak@math.u-strasbg.fr*