



HAL
open science

La solution du paradoxe de l'interrogation surprise Raisonnement strictement logique

Norbert Codréanu

► **To cite this version:**

Norbert Codréanu. La solution du paradoxe de l'interrogation surprise Raisonnement strictement logique. 2021. hal-03198088v9

HAL Id: hal-03198088

<https://hal.science/hal-03198088v9>

Submitted on 24 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La solution du paradoxe de l'interrogation surprise

Raisonnement strictement logique

Norbert Codréanu
Ing. E.N.S.E.M.
Docteur d'État-ès-Sciences (HDR)
Retraité

Abstract. The resolution of the « *paradox of the surprise interrogation* » (dating from 1948) is proposed in this article by the implementation, in a first part, of a rigorous logical demonstration (in classical logic), while using a language understandable by as many readers as possible. It describes three different solutions, but all equally logical. Then in a second part, for readers wishing to deepen the subject, a methodical analysis is carried out to highlight the errors committed in the usual reasoning.

Keywords : paradox, paradox of examination-surprise, philosophical paradox, mathematical logic, paradox of interrogation-surprise.

Résumé. La résolution du « *paradoxe de l'interrogation surprise* » (datant de 1948) est proposée dans cet article par la mise en œuvre, dans une première partie, d'une démonstration logique rigoureuse (en logique classique), tout en utilisant un langage compréhensible par le plus grand nombre possible de lecteurs. Elle décrit trois solutions différentes, mais toutes aussi précises du point de vue logique. Puis dans une seconde partie, pour les lecteurs désireux d'approfondir le sujet, une analyse méthodique est réalisée pour mettre en évidence les erreurs commises dans les raisonnements habituels.

Mots-clés : paradoxe, paradoxe de l'examen-surprise, paradoxe philosophique, logique mathématique, paradoxe de l'interrogation-surprise.

Table des matières

0. INTRODUCTION.....	3
1. PREMIÈRE PARTIE : Les résolutions du paradoxe.....	4
1.A. Préambule.....	4
1.B. Définition précise du problème.....	4
1.C. Solution numéro 1 : Raisonnement chronologique.....	5
1.C.1. Le principe du raisonnement.....	5
1.C.2. La démonstration.....	5
1.C.3. Conclusion de la solution numéro 1.....	6
1.D. Solution numéro 2 : Analyse de l'état logique de chacun des jours de la semaine.....	6
1.D.1. Le principe du raisonnement.....	6
1.D.2. La démonstration.....	6
1.D.3. Conclusion de la solution numéro 2.....	7
1.E. Solution numéro 3 : Raisonnement par l'analyse du dernier jour.....	7
1.E.1. Le principe du raisonnement.....	7
1.E.2. La démonstration.....	7
1.E.3. Conclusion de la solution numéro 3.....	8
1.F. Conclusion générale de la première partie.....	8
2. SECONDE PARTIE : Analyse des erreurs de raisonnement habituelles.....	8
2.A. Récurrence remontant le temps.....	8
2.B. Récurrence sur la durée de la « semaine ».....	9
Démonstration.....	9
Résultat.....	10
2.C. Tentative de formalisation.....	10
Démonstration.....	11
Résultat.....	11
3. CONCLUSION GÉNÉRALE.....	12
4. TABLEAUX.....	12
5. RÉFÉRENCES.....	13

0. INTRODUCTION

Cet article propose une solution au « *paradoxe de l'interrogation surprise* ». Ce problème, publié par D.O'Connor en 1948, n'a donc pas reçu d'explication logique depuis 75 ans.

Une abondante littérature existe sur le sujet, on trouvera, par exemple, dans l'article publié par Paul Franceschi (2005) une analyse historique très fine des différents raisonnements qui ont été développés ainsi que dans *l'Encyclopédie philosophique* l'article de Carlo Proietti (2018). À ma connaissance, la première publication, que l'on trouve dans la littérature sur le sujet, semble être celle de D. O'Connor (1948). Il présente le paradoxe sous la forme de l'annonce d'un exercice d'entraînement militaire. De nombreuses autres formulations se développent ensuite, telles que l'annonce de l'apparition d'un as dans un jeu de cartes (Scriven, 1951) ou encore une pendaison (Quine, 1953). Mais c'est la version, liée à l'annonce par un professeur, d'une interrogation surprise qui demeure la forme la plus courante.

De nombreux articles, concernant ce problème, sont basés sur des raisonnements par récurrence, nous les analyserons en détail dans la seconde partie de ce document. Ils concluent tous à un paradoxe à l'exception de celui-ci :

« Il n'y a pas de paradoxe, seulement un drôle de professeur qui tient des propos incohérents – contradictoires – auquel on ne peut donc pas se fier. Il n'a aucune raison d'être fier de nous surprendre puisque quiconque se contredit surprend forcément ceux qui croient à la vérité de ses propos. » (Delahaye, 2014)

La formulation du problème que nous choisirons est semblable à celle de Paul Franceschi, adaptée à une semaine de six jours.

« Un professeur annonce à ses étudiants qu'un examen aura lieu la semaine prochaine. Cependant, le professeur ajoute qu'il ne sera pas possible aux étudiants de connaître à l'avance la date de l'examen, car celui-ci aura lieu par surprise. Un étudiant intelligent raisonne alors ainsi : l'examen ne peut se dérouler le dernier jour de la semaine – [samedi] – car sinon je saurai, de manière certaine, que l'examen aura lieu le [samedi]. Ainsi, le [samedi] peut-il être éliminé. De même, poursuit l'étudiant, l'examen ne peut se dérouler l'avant-dernier jour de la semaine – [vendredi] – car sinon je saurai que l'examen aura lieu le [vendredi]. Ainsi, le [vendredi] est-il également éliminé. Par le même raisonnement, l'étudiant conclut que l'examen ne peut avoir lieu ni le [jeudi], ni le mercredi, ni le mardi, ni le lundi. Finalement, l'étudiant conclut que l'examen ne peut avoir lieu aucun jour de la semaine. Pourtant, cela n'empêche pas l'examen d'avoir lieu par surprise, par exemple le mercredi. Le paradoxe naît ici du fait que le raisonnement de l'étudiant semble valide, alors qu'il se révèle finalement en contradiction avec les faits, puisque l'examen a finalement bien lieu par surprise. » (Franceschi, 2014)

OÙ EST L'ERREUR ?

1. PREMIÈRE PARTIE : Les résolutions du paradoxe

1.A. Préambule

Dans la mesure du possible, nous tenterons de n'utiliser, dans cette première partie, qu'un langage simple, compréhensible par tous les lecteurs.

En particulier, nous n'allons employer, dans la démonstration qui suit, qu'une logique (classique) élémentaire que l'on peut « réduire » à un seul connecteur que l'on nomme « la conséquence » dans le langage courant.

Dans un langage un peu plus formalisé, on désigne ce connecteur par le terme « d'implication ». La proposition « A » implique la proposition « B » signifie que la proposition « A » a pour conséquence la proposition « B » ; et on écrit [A implique B] ou [SI « A » ALORS « B »].

Une autre propriété de l'implication, que nous utiliserons aussi, est ce que l'on désigne, en mathématique, par l'expression « *raisonnement par l'absurde* » et qui signifie que dans une implication [SI « A » ALORS « B »] lorsque « B » est faux alors « A » aussi est faux.

Le « *raisonnement par l'absurde* » consiste donc, de partir d'une hypothèse « A » pour en démontrer la conséquence « B ». Puis d'autre part, par un autre raisonnement, prouver que « B » est faux ce qui impose alors que « A » aussi soit faux (voir Tableaux 1).

1.B. Définition précise du problème

Pour construire un raisonnement logiquement sérieux, il nous faut définir avec précision tous les termes que nous employons. « une semaine, les jours de la semaine, une interrogation .. » tout cela semble clair et bien défini ; par contre, « l'effet de surprise » est plus flou.

La surprise, d'une façon générale, est fonction de deux paramètres : l'objet de la surprise et l'instant où l'évènement survient.

Je suis surpris du cadeau que je reçois pour mon anniversaire, mais connaissant bien évidemment ma date de naissance, la surprise concerne, dans ce cas, l'objet que je reçois.

Par contre, pour l'interrogation surprise : l'objet est connu (il y aura obligatoirement une et une seule interrogation dans la semaine), mais la date est inconnue, ce sera la surprise.

Dans ce cas, l'«effet de surprise» est temporel.

La définition précise du problème est donc la suivante :

Axiome n° 1 La semaine comporte 6 jours travaillés par les élèves, du lundi au samedi. (nous verrons que pour une pseudosemaine de « n » jours, avec n strictement supérieur à 2, le raisonnement reste valable)

Axiome n° 2 «l'effet de surprise » signifie -pour la question que nous étudions ici- : « les élèves ne peuvent pas connaître à l'avance, avec une certitude logique, la date de l'évènement ».

Énoncé du problème :

Un professeur annonce à ses élèves: «*Il y aura une interrogation surprise la semaine prochaine*».

Ce qui signifie trois choses:

- (a) Une interrogation aura lieu soit le lundi, soit le mardi, soit le mercredi, soit le jeudi, soit le vendredi, soit le samedi.
- (b) Juste avant le début de l'interrogation, les élèves ne pourront pas avoir la certitude que l'interrogation va avoir lieu le jour même; ce sera une surprise.
- (c) Une et une seule interrogation aura lieu pendant la semaine

1.C. Solution numéro 1 : Raisonnement chronologique

1.C.1. Le principe du raisonnement

L'effet de surprise étant fonction du temps, il semble logique d'analyser le problème de façon chronologique. Nous commencerons donc par étudier le lundi.

Mais tout d'abord il faut remarquer que pour chacun des jours de la semaine nous nous poserons la question classique suivante :

- I. soit l'interrogation a lieu le jour même (le jour « j »)
- II. soit l'interrogation n'a pas lieu ce jour « j »

Pour le premier cas (I.), l'interrogation a eu lieu avec surprise et c'est terminé. Le problème est résolu et donc il n'y a pas de « paradoxe ».

Pour le second cas (II.), on passe à l'analyse du jour suivant.

1.C.2. La démonstration

Le lundi :

- I. soit l'interrogation a lieu ce lundi (et c'est terminé, car elle a eu lieu avec « surprise », les élèves ne pouvant pas prévoir, avec certitude, qu'elle aurait lieu le lundi)
- II. soit elle n'a pas lieu, alors on analyse le jour suivant.

En formalisant un petit peu ce raisonnement, on obtient :

SI (*on est lundi*) ALORS [*l'interrogation a lieu aujourd'hui*] OU (*on passe au jour suivant*).

Le mardi :

- I. soit l'interrogation a lieu ce mardi (et c'est terminé, car elle a eu lieu avec « surprise », les élèves ne pouvant pas prévoir, avec certitude, qu'elle aurait lieu ce mardi),
- II. soit elle n'a pas lieu ce mardi, alors on analyse le jour suivant.

En formalisant un petit peu ce raisonnement, on obtient :

SI (*l'interrogation n'a pas eu lieu lundi*) ALORS [*l'interrogation a lieu mardi*] OU (*on passe au jour suivant*).

Et ainsi de suite pour tous les jours de la semaine jusqu'au samedi matin.

Le samedi :

- I. soit l'interrogation a lieu aujourd'hui -samedi-,
- II. soit elle n'a pas lieu aujourd'hui -samedi-, alors on passe au jour suivant.

En formalisant un petit peu ce raisonnement on obtient : SI «A» ALORS «B»

avec «A» = [*l'interrogation n'a pas eu lieu lundi*] ET [*l'interrogation n'a pas eu lieu mardi*] ET .. ET [*l'interrogation n'a pas eu lieu vendredi*]

et avec «B» = [*l'interrogation a lieu aujourd'hui -samedi-*] OU (*on passe au jour suivant*)]

- La proposition « *l'interrogation a lieu aujourd'hui -samedi-* » est FAUSSE. L'interrogation ne peut pas avoir lieu le samedi (en application de l'assertion (b) fixée par le professeur) car le vendredi soir les élèves sauraient avec certitude que l'interrogation aurait lieu le lendemain.
- La proposition « *on passe au jour suivant* » est aussi FAUSSE, car il n'y a pas de jour suivant (le samedi étant le dernier jour de la semaine).
- Donc la proposition «B» = [*l'interrogation a lieu aujourd'hui -samedi-*] OU (*on passe au jour suivant*)] est FAUSSE.

Dans une implication [SI «A» ALORS «B»], lorsque la conclusion «B» est fautive, cela entraîne que l'hypothèse «A» est aussi fautive. (voir la table de vérité dans Tableaux 1)

L'hypothèse «A» est FAUSSE signifie que la proposition « (l'interrogation n'a pas eu lieu lundi) ET (l'interrogation n'a pas eu lieu mardi) ET .. ET (l'interrogation n'a pas eu lieu vendredi) » est FAUSSE.

La relation « *A est fausse* » est équivalente à « *non-A est vraie* ».

Comme «**non-A**» = « (l'interrogation a eu lieu lundi) OU (l'interrogation a eu lieu mardi) OU .. OU (l'interrogation a eu lieu vendredi) » (voir Remarque Logique dans Tableaux 2), il s'en suit que l'interrogation a eu lieu dans la semaine, et comme, d'après l'assertion (c) fixée par le professeur, il n'y aura qu'une seule, et unique, interrogation dans la semaine. Il s'en suit que «*l'interrogation a certainement eu lieu l'UN des cinq premiers jours de la semaine*».

1.C.3. Conclusion de la solution numéro 1

On peut résumer la démonstration, qui vient d'être faite, en 3 étapes :

- 1) SI « l'interrogation n'a pas eu lieu pendant les 5 premiers jours de la semaine » ALORS « elle aura lieu le sixième jour -le samedi- » [première règle édictée par le professeur].
- 2) L'interrogation ne peut pas avoir lieu le dernier jour, car les élèves sauraient, à l'avance, la date de l'évènement [deuxième règle édictée par le professeur].
- 3) Dans une implication SI «A» ALORS «B», quand «B» est faux, «A» aussi est faux (c'est ce que l'on appelle aussi *le raisonnement par l'absurde*).

Par conséquent : « *l'interrogation a lieu l'UN des 5 premiers jours de la semaine* ». Et *il est impossible de déterminer la date exacte* de l'évènement, car comme nous l'avons vu, tous les jours, du lundi au vendredi inclus, autorisent une interrogation **avec surprise**.

Il n'y a donc aucun paradoxe, et l'expérience confirme la démonstration qui vient d'être faite.

1.D. Solution numéro 2 : Analyse de l'état logique de chacun des jours de la semaine

1.D.1. Le principe du raisonnement

Pour cette solution, nous analyserons « l'état logique » de chacune des journées indépendamment de la chronologie.

Habituellement, les élèves (ainsi que les professeurs d'ailleurs) considèrent que pour chacun des jours de la semaine, il y a deux possibilités :

- 1) soit l'interrogation a lieu le jour même
- 2) soit l'interrogation aura lieu plus tard (on passe alors au jour suivant)

ERREUR !! s'écrie Mathilde, la meilleure élève de la classe, en mathématiques.

Pour être complet, vous avez oublié une troisième possibilité : l'interrogation déjà eu lieu.

Donc en réalité, une journée est caractérisée par l'une des trois assertions suivantes :

- I. soit l'interrogation a déjà eu lieu
- II. soit l'interrogation a lieu le jour même
- III. soit l'interrogation aura lieu plus tard (les jours suivants)

1.D.2. La démonstration

Seuls le premier jour -lundi- et le dernier jour -samedi- sont différents des autres, car le premier jour n'a pas d'antécédent et le dernier jour n'a pas de suivant.

Pour le lundi, l'assertion « I. » est fautive. Le lundi étant la première journée de la période, l'interrogation ne peut pas avoir déjà eu lieu. Les deux autres alternatives étant valides, il n'y a pas de certitude logique pour que l'interrogation ait lieu ce jour-là (et si elle a lieu ce sera une surprise).

Pour les quatre jours suivants (mardi, mercredi, jeudi et vendredi), les trois assertions sont vraies. Ce qui fait trois possibilités, il n'y a donc pas de certitude logique non plus pour que l'interrogation ait lieu l'un de ces jours là (et si elle a lieu ce sera une surprise).

Pour le samedi, l'assertion « III. » est fautive. Le samedi étant la dernière journée de la période, l'interrogation ne peut pas avoir lieu plus tard. Et, l'assertion « II. », elle aussi, est fautive, car le samedi étant le dernier jour de la période, le vendredi soir il ne reste plus qu'une seule journée, donc les élèves sauraient, à l'avance et de façon certaine, que l'interrogation aurait lieu le samedi. Ce qui est contraire à la proposition (b) édictée par le professeur.

Il ne reste donc qu'une seule alternative : l'assertion « I. » *-l'interrogation a déjà eu lieu-*.

Nous avons vu aussi que pour chacun des cinq premiers jours de la semaine, il existe plusieurs alternatives, donc il n'y a ***aucune certitude logique possible sur la date exacte de l'interrogation.***

1.D.3. Conclusion de la solution numéro 2

On peut résumer la démonstration qui vient d'être faite en 3 points :

- 1) L'interrogation a forcément lieu l'un des cinq premiers jours de la semaine.
- 2) Il n'y a aucune certitude logique possible sur la date exacte de l'interrogation.
- 3) La proposition (c) édictée par le professeur indique qu'il n'y aura *qu'une et une seule interrogation*, donc il n'y a qu'un et un seul jour concerné

Il s'en suit que : « ***l'interrogation a lieu l'UN des 5 premiers jours de la semaine*** ». Et ***il est impossible de déterminer la date exacte*** de l'évènement, car comme nous l'avons vu, tous les jours, du lundi au vendredi inclus, autorisent une interrogation **avec surprise**.

Il n'y a donc aucun paradoxe, et l'expérience confirme la démonstration qui vient d'être faite.

1.E. Solution numéro 3 : Raisonnement par l'analyse du dernier jour

1.E.1. Le principe du raisonnement

Nous venons de voir que pour les deux premières solutions, prouvant que le problème n'est pas un paradoxe, c'est le samedi (dernier jour de la semaine) qui est déterminant.

Nous allons donc détailler, dans ce paragraphe, l'analyse du dernier jour.

1.E.2. La démonstration

1) le professeur a dit qu'il y aurait une interrogation dans la semaine, donc SI (*le samedi matin, l'interrogation n'a pas déjà eu lieu*) ALORS (*l'interrogation aura lieu le samedi*)

2) le professeur a dit que ce serait une surprise, donc (*l'interrogation ne peut pas avoir lieu le samedi*) car les élèves sauraient, à l'avance, le vendredi soir, la date de l'évènement.

3) en utilisant ce que l'on nomme couramment « le raisonnement par l'absurde », c'est-à-dire que pour une implication [SI « A » ALORS « B »] quand « B » est faux cela impose que « A » aussi soit faux.

Dans notre cas, la proposition « B » = (*l'interrogation aura lieu le samedi*) étant fausse, cela impose que la proposition « A » = (*le samedi matin, l'interrogation n'a pas déjà eu lieu*) soit elle aussi fausse. Par conséquent, « A » étant fausse, « non-A » est vraie, donc *le samedi matin, l'interrogation a déjà eu lieu*.

4) le professeur a dit qu'il n'y aurait qu'une, et une seule, interrogation. Donc l'interrogation a eu lieu l'un quelconque des cinq premiers jours de la semaine sans qu'il soit possible de savoir lequel.

1.E.3. Conclusion de la solution numéro 3

L'interrogation a eu lieu l'un quelconque des cinq premiers jours de la semaine (lundi, mardi, mercredi, jeudi ou vendredi) sans qu'il soit possible de définir lequel, ce sera donc une surprise pour les élèves.

Par conséquent, il n'y a pas de paradoxe, et le raisonnement logique correspond parfaitement à l'expérience.

1.F. Conclusion générale de la première partie

Quelle que soit la méthode choisie pour analyser le problème, la conclusion est :

- 1) *L'interrogation a lieu l'UN des 5 premiers jours de la semaine*
- 2) *Il est impossible de déterminer la date exacte de l'évènement*

Donc il n'y a pas de paradoxe.

Et l'expérience confirme la démonstration qui vient d'être faite.

_____ . _____ . _____

2. SECONDE PARTIE : Analyse des erreurs de raisonnement habituelles

Dans la première partie, nous avons démontré que la solution à notre problème était :
« *l'interrogation a lieu l'un des cinq premiers jours de la semaine* ».

Il n'y a donc aucun paradoxe et cette assertion est parfaitement conforme à l'expérience.

Nous allons nous intéresser maintenant, dans cette seconde partie, à l'analyse des erreurs commises dans les raisonnements habituels.

2.A. Récurrence remontant le temps

La plupart du temps, les erreurs commises dans les raisonnements logiques en « langage courant » sont dues à des hypothèses implicites, sous-entendues, et c'est le cas pour le « paradoxe de l'interrogation surprise ».

Le raisonnement tenu par l'élève est le suivant :

« . . . *Puisqu'il [le professeur] nous dit que nous ne pourrions pas connaître le jour de l'interrogation, celle-ci ne se déroulera pas le samedi, car samedi matin, sachant que l'interrogation se fera dans la semaine (affirmation a), elle ne pourrait avoir lieu que le samedi et donc nous saurions de manière certaine qu'elle va avoir lieu. Il est donc acquis que l'interrogation n'aura pas lieu le samedi. Mais alors, le vendredi, elle ne peut pas avoir lieu non plus car. . .* » (Delahaye, 2014)

La formalisation du problème nous a permis de mettre en évidence l'hypothèse implicite faite par l'élève. Mais il n'est pas nécessaire de passer par une transcription du raisonnement dans un formalisme mathématique pour comprendre ce qui a été sous-entendu.

- I. En effet, en analysant le raisonnement de l'élève, il apparaît que ce dernier considère qu'il se place, pour faire sa démonstration, le samedi matin. Si l'on réfléchit bien, cela sous-entend que, le samedi matin, l'interrogation n'a pas déjà eu lieu, sinon il ne serait pas possible de se situer le samedi matin. Car l'interrogation ayant eu lieu le jour « j », le problème s'est terminé ce jour-là. Et il n'y a alors aucune raison de continuer la démarche

jusqu'au samedi ; et de plus en supposant, le samedi, que « l'interrogation n'a pas déjà eu lieu » ce qui est faux.

L'interrogation a eu lieu le jour « j » et avec surprise. **Il n'y a donc pas de paradoxe.**

II. En reprenant le raisonnement de l'élève le samedi matin, il devrait dire :

- (1) « en supposant que l'interrogation n'a pas déjà eu lieu le samedi matin » [*hypothèse sous-entendue*]
- (2) d'après l'affirmation (a), le samedi matin, l'interrogation doit avoir lieu dans la journée, car samedi est le dernier jour de la semaine (et il doit y avoir une interrogation dans la semaine).
- (3) d'après l'affirmation (b), le samedi matin, l'interrogation ne peut pas avoir lieu dans la journée, car samedi étant le dernier jour de la semaine, les élèves sauraient, à l'avance, de façon certaine, la date de l'évènement.
- (4) Finalement, l'élève aboutit à une conclusion absurde : l'interrogation DOIT et NE DOIT PAS avoir lieu le samedi.
- (5) La déduction logique que l'élève devrait faire est la suivante : mon hypothèse de départ [disant que, le samedi matin, l'interrogation n'a pas déjà eu lieu] est FAUSSE, car elle aboutit à des résultats absurdes. Par conséquent, c'est le contraire de l'hypothèse de départ qui est VRAIE : « le samedi matin, l'interrogation a déjà eu lieu ». Le problème s'est donc terminé le jour où l'interrogation a eu lieu, et, avec surprise, car on ne peut pas préciser ce jour.

III. **Conclusion** : l'interrogation a eu lieu soit le lundi, soit le mardi, soit le mercredi, soit le jeudi, soit le vendredi, et avec surprise, car il est impossible de déterminer, avec certitude, la date de l'évènement.

Il n'y a donc pas de paradoxe.

2.B. Récurrence sur la durée de la « semaine »

Démonstration

Un autre raisonnement intuitif habituel, en langage courant, se présente comme suit :

« Pour comprendre le paradoxe, il faut simplifier l'histoire. Imaginons que les élèves de Monsieur Martin n'ont cours avec lui que le lundi et qu'il leur dise « (a) je ferai une interrogation la semaine prochaine et (b) vous ne pourrez pas savoir quel jour elle se déroulera; ce sera une surprise ». Jacques pourra alors raisonner ainsi : *« Le lundi matin, je saurai que l'interrogation va avoir lieu aujourd'hui (car Monsieur Martin nous dit qu'il fera une interrogation cette semaine et que nous n'avons cours avec lui que le lundi) et qu'elle n'aura pas lieu aujourd'hui (car Monsieur Martin nous dit que nous serons surpris de l'interrogation or si elle a lieu le lundi nous ne serons pas surpris) ». Il y a contradiction entre les conclusions qu'on tire des affirmations de Monsieur Martin. Notons que, dans le cas d'une semaine complète, il y a aussi une telle contradiction : on déduit que l'interrogation aura lieu dans la semaine – Monsieur Martin l'affirme – et qu'elle n'aura pas lieu dans la semaine – raisonnement de Jacques. Donc ce que dit Monsieur Martin est contradictoire : il affirme une chose et son contraire à la fois. Dans le cas de la semaine complète de cours, cette contradiction est masquée, mais il y a bien une contradiction dans les affirmations de Monsieur Martin. Que peut-on déduire des propos de quelqu'un qui se contredit lui-même? Tout et n'importe quoi. Il n'y a pas de paradoxe, seulement un drôle de professeur qui tient des propos incohérents – contradictoires – auquel on ne peut donc pas se fier. Il n'a aucune raison d'être fier de nous surprendre puisque quiconque se contredit surprend forcément ceux qui croient à la vérité de ses propos. » (Delahaye, 2014)*

C'est, nous, qui avons souligné certaines parties du texte qui représentent des généralisations abusives (donc fausses) du cas particulier de la pseudosemaine d'un seul jour.

Ce raisonnement étant FAUX, la démarche correcte est la suivante.

1. La « semaine » d'une seule journée est impossible, car le premier jour est aussi le dernier, et nous avons vu que le dernier jour il ne peut pas y avoir d'interrogation
2. La « semaine » de 2 jours est aussi impossible, car pour le dernier jour le bon raisonnement indique que l'interrogation a déjà eu lieu. Donc, l'interrogation aura lieu obligatoirement le «lundi», ce qui n'est pas possible, car la date serait alors connue à l'avance.
3. Ces deux cas (« semaine » de un ou deux jours) sont faux (impossibles, contradictoires), mais le professeur n'a envisagé qu'une semaine normale de 6 jours de cours (ou peut-être, dans certaines régions de 5 jours) pour lesquelles il n'y a aucun paradoxe comme on peut le voir ci-dessous.

III. Pour la « pseudosemaine » de 3 jours, il n'y a pas de problèmes (pas de paradoxe), car on peut reprendre le raisonnement correct qui a été fait dans la première partie :

a) le premier jour :

1. soit l'interrogation a lieu (avec surprise)
 2. soit l'interrogation n'a pas lieu et on passe au deuxième jour
- Il y a DEUX possibilités, donc aucune certitude sur cette date.

b) le deuxième jour :

1. soit l'interrogation a déjà eu lieu (la veille avec surprise)
 2. soit l'interrogation a lieu (le deuxième jour avec surprise)
 3. soit l'interrogation n'a pas lieu et on passe au troisième jour
- Il y a TROIS possibilités, donc aucune certitude sur cette date.

c) Le troisième jour, qui est le dernier :

1. soit l'interrogation a déjà eu lieu
2. soit l'interrogation a lieu le troisième jour
3. soit on passe au jour suivant

La proposition (3.) « on passe au jour suivant » est impossible donc fausse (il n'y a pas de jour suivant).

La proposition (2.) « l'interrogation a lieu le troisième jour » est aussi fausse, car le troisième jour est le dernier donc pas d'interrogation possible (les élèves connaîtraient la date à l'avance).

Il ne reste que le point (1.), donc pour le troisième jour : «*l'interrogation a déjà eu lieu*».

Pour une semaine de trois jours, il n'y a pas de paradoxe, l'interrogation aura lieu soit le premier, soit le deuxième jour.

Pour une « pseudosemaine » de quatre jours, ou plus, le même raisonnement, que ci-dessus (qui est d'ailleurs identique à celui développé dans la première partie), nous conduit à la conclusion : «*l'interrogation surprise aura lieu l'un des (n-1) premiers jours de la période* » (avec n strictement supérieur à 2) sans aucun paradoxe.

Résultat

Le raisonnement habituel par récurrence sur la durée d'une pseudosemaine est FAUX. Ce n'est pas parce qu'une pseudosemaine d'une durée de un ou deux jours conduit à un paradoxe qu'il est légitime d'extrapoler à une durée quelconque !! En effet, les propriétés de chacune des journées pour une pseudosemaine de trois jours, ou plus sont différentes de celles des pseudosemaines d'un seul jour (ou de deux jours) par conséquent, le raisonnement par récurrence n'est pas valide.

2.C. Tentative de formalisation

D'après le « **Paradoxe de l'interrogation surprise** » (Wikipédia en français):

« *Le paradoxe de l'interrogation surprise a été relevé par le professeur de mathématiques, Lennart Ekbom. Il fut publié en 1948 dans Mind.*

[En adaptant le problème à une semaine de 6 jours du lundi au samedi, on obtient]

« 1. Énoncé

Un professeur annonce à ses élèves : « Il y aura une interrogation surprise la semaine prochaine. »

Précisons les termes. Il faut comprendre trois choses :

1. une interrogation aura lieu durant un "cours" soit le lundi, soit le mardi, soit le mercredi, soit le jeudi, soit le vendredi, soit le samedi ;
2. juste avant le début de l'interrogation, l'élève ne pourra avoir la certitude que l'interrogation va avoir lieu ;
3. une unique interrogation aura lieu. »

Démonstration

« 2.1 En quoi est-ce un paradoxe ?

Un élève fûté fait le raisonnement suivant : Si vendredi soir, l'interrogation n'a pas eu lieu, alors je serai certain qu'elle est pour samedi. Ce ne sera donc plus une surprise. L'interrogation ne peut donc avoir lieu samedi parce c'est le dernier jour possible. Mais puisque l'interrogation ne peut avoir lieu le dernier jour, l'avant-dernier jour devient de facto, le dernier jour possible. Ainsi, par récurrence, on en déduit que l'interrogation ne peut avoir lieu.

Essayons de formaliser le problème. L'énoncé peut être (partiellement) interprété ainsi :

$$\exists i : P(i) \wedge \neg (\forall j < i : \neg P(j)) \Rightarrow P(i)$$

où i et $j \in \{1, \dots, 6\}$ sont des jours de la semaine et $P(i)$ le prédicat : « il y a une interrogation le jour i » (\neg est la négation et \wedge la conjonction). Or, en utilisant l'équivalence entre $\neg(a \Rightarrow b)$ et $(a \wedge \neg b)$, on voit immédiatement la contradiction : $\exists i : P(i) \wedge \neg P(i) \wedge \dots$ »

Cette formalisation n'est que partielle et fausse, car elle ne tient pas compte de l'effet de surprise, qui est fondamental (c'est le deuxième point de l'énoncé du professeur).

En langage courant, ce formalisme indique simplement qu'il existe un jour « i » tel que :

SI (l'interrogation n'a pas déjà eu lieu, avant le jour « i ») **ALORS** (l'interrogation aura lieu le jour « i »)

Ceci est faux pour « $i=6$ », sixième et dernier jour de la période. L'interrogation ne peut pas avoir lieu le samedi, car les élèves sauraient, à l'avance, la date de l'évènement, ce qui est contraire à l'assertion n°2 édictée par le professeur.

Le bon raisonnement pour « $i=6$ » (le samedi, sixième et dernier jour de la période) est :

1. L'interrogation ne peut pas avoir lieu le samedi (démonstration faite au début du paragraphe).
2. Comme, dans une implication SI « A » ALORS « B », lorsque la conclusion « B » est fausse, cela impose que l'hypothèse de départ « A » soit, aussi, fausse.
3. Donc la bonne conclusion est : l'interrogation ne peut pas avoir lieu le dernier jour de la semaine, car elle A DÉJÀ eu lieu (avant le dernier jour). L'hypothèse « A » = (l'interrogation n'a pas déjà eu lieu, le jour « $i=6$ ») est fausse, ce qui s'exprime aussi sous la forme «non- A » = (l'interrogation a déjà eu lieu, avant le sixième et dernier jour, le samedi) est VRAIE.

Résultat

Il n'y a pas de paradoxe si l'on tient compte de l'effet de surprise, ce qui n'est pas le cas dans cette formalisation partielle. Pour un raisonnement complet, l'interrogation a lieu l'un des cinq premiers jours de la semaine, et les élèves ne peuvent pas connaître, à l'avance, la date, logiquement certaine, de l'apparition de l'évènement.

3. CONCLUSION GÉNÉRALE

• La conclusion du raisonnement logique correct est «*l'interrogation surprise a lieu l'un des (n-1) premiers jours de la période* » (avec **n** strictement supérieur à 2) et l'on ne peut pas déterminer le jour.

Par conséquent, **il s'agit bien d'une interrogation surprise.**

Il n'y a donc pas de paradoxe.

De plus, le raisonnement logique est confirmé par l'expérience.

• Les raisonnements « habituels » par récurrence sont erronés. Parce qu'ils présupposent que tous les jours de la « pseudosemaine » ont les mêmes propriétés que le jour de départ (soit le samedi, si l'on remonte le temps pour une semaine de six jours, soit le lundi pour une semaine, à durée variable) ce qui est FAUX comme cela a été démontré dans cet article.

• Et, enfin, si l'on corrige, ces raisonnements erronés, ils aboutissent logiquement tous à la conclusion que «*l'interrogation surprise a lieu l'un des (n-1) premiers jours de la période* » sans aucun paradoxe [pour une semaine réelle, ou une pseudosemaine de **n** jours, avec **n** strictement supérieur à 2].

4. TABLEAUX

A	B	A => B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1 - Table de vérité de l'implication [$A \Rightarrow B$]

- α . Pour la logique propositionnelle (Cori & Lascar, 2021, pp.16,36), ce tableau indique dans la dernière ligne : *Pour que l'implication ($A \Rightarrow B$) soit vraie lorsque B est faux, il faut et il suffit que A soit faux.*
- β . Dans le langage mathématique courant, on appelle aussi cette démarche : «*raisonnement par l'absurde*». Pour tester la validité d'une hypothèse, on analyse toutes ses conséquences. Si elles sont toutes fausses, c'est que l'on s'est trompé, notre hypothèse de départ était fausse.
- γ . Le bon sens des paysans normands leur fait dire : si mon arbre est un pommier alors [*cela implique que*] c'est un arbre fruitier. Si ce n'est pas un arbre fruitier, ce ne peut pas être un pommier !
- δ . Pour un point de vue plus philosophique sur l'implication, on peut lire, entre autres, avec intérêt, le paragraphe «Un premier exemple de phénomène langagier», pages 3 et 4 de l'article de Zoé MESNIL (2014).

2 - Remarque logique

Le contraire de l'assertion **P** = « x_1 ET x_2 ET ... ET x_5 » étant **non-P** = «non- x_1 OU non- x_2 ... OU non- x_5 ».

Si **P** est **faux** alors **non-P** est **vrai**.

Pour que **non-P** soit vrai, il faut et il suffit que l'une (au moins) des assertions «non- X_i » soit vraie.

En langage courant cela s'énonce : « l'interrogation a eu lieu pendant l'un (au moins) des cinq premiers jours de la semaine ». Mais, comme dans notre cas, l'assertion (c), édictée par le professeur, indique qu'il n'y aura qu'une, et une seule, interrogation dans la semaine, il n'y a qu'un, et un seul, jour concerné, donc «*l'interrogation a eu lieu l'UN de ces cinq premiers jours de la semaine*» qui en compte six.

3 - Remarque méthodologique

La cause profonde de l'erreur de raisonnement de l'élève est que l'assertion « *l'interrogation ne peut pas avoir lieu le samedi* » apparaît, à la fois, dans le raisonnement faux de l'élève et dans la démonstration correcte que nous avons développée. Ceci perturbe l'exposition du problème en langage courant.

La différence est :

1. Pour l'élève, cette assertion, qui fait référence à un fait vrai (*le samedi, il ne peut pas y avoir d'interrogation*) est considérée comme absolue et sortie de son contexte.
2. Alors que dans la démonstration correcte, il est vrai que (*le samedi, il ne peut pas y avoir d'interrogation*), mais c'est PARCE QU'ELLE A DÉJÀ EU LIEU (donc elle ne peut pas avoir lieu une deuxième fois d'après la proposition n° 3 édictée par le professeur).
Dans ce raisonnement, il est tenu compte du contexte, c'est-à-dire de l'hypothèse implicite (sous-entendue) qui n'a pas été prise en compte par l'élève.

5. RÉFÉRENCES

- Charpentier, A.,(2009), « Quand peu d'information donne énormément d'information ». In :freakonometrics.hypotheses.org (2009), 1963.
- Cori, R., & Lascar, D. (2021). Logique mathématique : Vol.1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats (Cours et exercices corrigés). Paris : Dunod.
- Delahaye, JP., (2008). Au pays des paradoxes. Paris : Belin, Pour la science
- Delahaye, JP., (2014). Solution du paradoxe 9.1 : L'interrogation surprise, *Accromath*, 9(2), été-automne. <https://accromath.uqam.ca/>.
- Franceschi, P., (2005). Une analyse dichotomique du paradoxe de l'examen-surprise. *Philosophiques*, 32(2), 399–421. <https://doi.org/10.7202/011875ar>.
- Franceschi, P., (2014). Introduction à la philosophie analytique : paradoxes, arguments et problèmes contemporains : 4. Le paradoxe de l'examen-surprise. ed. 2.1, pp. 21-24
- Mesnil, Z., (2014). Un premier exemple de phénomène langagier. In Zoé Mesnil - Logique et langage dans la classe de mathématiques et la formation : actes du XXIe Colloque de la CORFEM (pp. 3-4). Grenoble, France.
- O'Connor,D.,(1948).Pragmatic Paradoxes, *Mind*, 57(227), 358–359. <https://doi.org/10.1093/mind/LVII.227.358>
- Proietti, Carlo (2018), «Paradoxe (A)», dans Maxime Kristanek (dir.), *l'Encyclopédie philosophique*, consulté le 22/12/2022, <https://encyclo-philos.fr/paradoxe-a>
- Quine, W., (1953). On a So-Called Paradox», *Mind*, 62(245), 65-67. <https://doi.org/10.1093/mind/LXII.245.65>
- Scriven, M., (1951). Paradoxical Announcements, *Mind*, 60(239),? 403-407. <https://doi.org/10.1093/mind/LX.239.403>
- Shira Kritchman et Ran Raz. « The surprise examination paradox and the second incompleteness theorem ». In : *Notices Amer. Math. Soc.* 57.11 (2010), p. 1454-1458
- lire le paragraphe à la page 5/8 : «A Possible Resolution of The Surprise Examination Paradox »

Sites Internet

Articles publiés le 18 septembre et le 25 août 2018 : PDF en lecture libre:

- [http://www.paulfranceschi.com/Paul Franceschi – Introduction à la philosophie analytique.pdf](http://www.paulfranceschi.com/Paul%20Franceschi%20-%20Introduction%20à%20la%20philosophie%20analytique.pdf) (pp. 21-24)
- <http://www.paulfranceschi.com/fr/2018/08/25/une-analyse-dichotomique-du-paradoxe-de-l'examen-surprise/>

Wikipédia en français : « 2.1 En quoi est-ce un paradoxe ? » (consulté le 22/12/2022)

- <https://fr-academic.com/dic.nsf/frwiki/1289981>