Un algorithme de programmation dynamique pour le problème d'écoulement de larges blocs d'actifs

David Nizard, Nicolas Dupin, Dominique Quadri

Un algorithme de programmation dynamique pour le problème d'écoulement de larges blocs d'actifs

David Nizard[1], Nicolas Dupin[1], Dominique Quadri[1]

Université Paris-Saclay, Laboratoire Interdisciplinaire des Sciences du Numérique (LISN)
{david.nizard,nicolas.dupin,dominique.quadri}@universite-paris-saclay.fr

Mots-clés : *programmation non linéaire en nombres entiers, programmation dynamique, écoulement de blocs, dissémination de l'information.*

1 Introduction

L'écoulement de larges blocs d'actifs, aussi connu sous le nom de liquidation optimale de portefeuille est un problème classique de finance qui consiste à vendre (ou inversement à acheter) une très grande quantité d'un actif financier (e.g actions ou obligations) disponible sur le marché durant un intervalle de temps donné. La littérature financière traite extensivement du problème, avec comme hypothèses courantes une absence de mémoire des marchés, un portefeuille composé de plusieurs types d'actifs et une forte volatilité des prix induisant des problématiques d'optimisation stochastique [6]. Dans un tel cadre, la programmation dynamique (DP) est essentielle pour résoudre efficacement de tels problèmes [1, 2].

Dans ce papier, nous considérons un actif unique à écouler dans de grands volumes, dans un marché avec une mémoire importante et une faible volatilité des prix. Le prix de l'actif, observable sur le marché, n'est en effet valide que pour un très faible volume. Lorsqu'on dépasse la liquidité disponible au prix nominal, il faut solliciter d'autres acteurs de marché à un prix de vente plus faible. Les actions de l'opérateur révèlent partiellement ses intentions aux autres participants, qui y réagissent, en abaissant volontairement leur prix d'achat de l'actif. Dans le cadre de cette étude, de tels mécanismes sont prépondérants sur les prix de vente, la mémoire est importante entre les acteurs concernés pour cerner les intentions de chacun. Une telle problématique fait écho aux effets sur le marché des transactions de blocs [3, 5] et à l'asymétrie d'information entre participants d'un marché [7].

2 Modélisation en programmation mathématique

Nous supposons avoir M unités de l'actif considéré à écouler en N pas de temps. Pour tout pas de temps $i \in [\![1; N]\!]$, on note p_i et c_i les prix respectifs sur le marché, et prix planchers à la vente. La décision consiste à vendre à chaque pas de temps une quantité $x_i \in [\![0; M]\!]$ de l'actif. La pénalisation est modélisée avec une fonction g concave et croissante de $[\![0; M]\!]$ à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $g(0) = 0$, $\lim_{+\infty} g = 1$, le prix de vente sur un pas de temps i étant alors $p_i - c_i g(z)$ où z est la quantité déjà connue par le marché que l'on doit vendre, la mémoire est parfaite. On peut prendre par exemple $g(z) = 1 - \frac{1}{1+z}$, $g(z) = 1 - \frac{1}{1+\sqrt{z}}$, $g(z) = \frac{2}{\pi}\arctan(z)$. Cela se modélise comme un problème d'optimisation non-linéaire en nombres entiers :

$$\begin{cases} \max\limits_{(x_1,\dots,x_N)} f(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} \left[p_i - c_i \cdot g\left(\sum\limits_{k=1}^{i} x_k \right) \right] x_i \\ s.c : \sum\limits_{i=1}^{N} x_i = M \\ \forall i, x_i \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1}$$

3 Résolution par programmation dynamique (DP)

En notant $O_{n,m}$ la valeur optimale du problème (1) pour avec $N = n$ et $M = m$, on a $O_{n,0} = 0$, $O_{0,m} = 0$, et on prouve la formule de Bellman suivante :

$$\forall n \in [\![1; N]\!],\ \forall m \in [\![1; M]\!], \quad O_{n,m} = \max_{i \in [\![0;m]\!]} \{O_{n-1,m-i} + [p_n - c_n \cdot g(m)] \cdot i\} \tag{2}$$

La matrice $(O_{n,m})_{n \in [\![1;N]\!], m \in [\![1;M]\!]}$ peut alors se construire grâce aux équations (2) suivant les indexes croissants de n : une fois la ligne $O_{n,m}$ calculée pour tout $m \in [\![1; M]\!]$, la ligne $O_{n+1,m}$ se calcule en utilisant uniquement la ligne $O_{n,m}$ avec m calculs indépendants (pour une parallélisation naturelle). Chaque case se calculant en temps $O(M)$, les MN cases de la matrices sont construites en temps $O(NM^2)$. $O_{N,M}$ est la valeur optimale du problème (1), une stratégie optimale s'obtient par retour arrière sur les disjonctions de cas des équations (2), ces opérations ont une complexité en temps $O(NM)$. L'algorithme DP a ainsi complexité temporelle en $O(NM^2)$ et une complexité spatiale est en $O(MN)$.

Les données d'entrée du problème sont définies par les deux vecteurs p_i et c_i de taille N et la fonction g. Si on considère que la fonction g est donnée comme un vecteur de M éléments de $[0, 1]$, définissant les valeurs quelconques $g(m)$ pour $m \in [\![1; M]\!]$, l'espace mémoire des données d'entrée est de taille $O(N + M)$, et la complexité de DP est polynomiale, au plus cubique. Si g est donnée par une fonction usuelle, telle que $g(z) = 1 - \frac{1}{1+z}$ ou $g(z) = \frac{2}{\pi}\arctan(z)$, l'espace mémoire en entrée est en $O(N)$, et l'algorithme DP est pseudo-polynomial.

4 Conclusions et perspectives

La résolution exacte par programmation dynamique permet de résoudre des instances de taille assez conséquente, mais présente des limites quand (N, M) dépasse $(10^3, 10^5)$, ce qui peut correspondre à des tailles d'instances utilisées en pratique. Des premières perspectives sont d'accélérer la résolution exacte, en énumérant moins de cas dans les calculs (2) ou avec une parallélisation efficace de l'algorithme, similairement à [4]. D'autres perspectives sont de dériver des heuristiques de l'algorithme DP exact, et d'analyser dans les heuristiques dérivées le compromis entre qualité de solutions et temps de calcul.

Références

[1] D. Bertsimas and A. Lo. Optimal control of execution costs. *Journal of Financial Markets*, 1, 1998.

[2] G. Cornuejols and R. Tütüncü. *Optimization methods in finance*. Cambridge Univ. Press, 2006.

[3] L. Dann, D. Mayers, and R. Raab. Trading rules, large blocks and the speed of price adjustment. *Journal of Financial Economics*, 4, 1977.

[4] N. Dupin, F. Nielsen, and E. Talbi. Unified Polynomial Dynamic Programming Algorithms for P-Center Variants in a 2D Pareto Front. *Mathematics*, 9(4) :453, 2021.

[5] H. G. Guthmann and A. J. Bakay. The market impact of the sale of large blocks of stock. *The Journal of Finance*, 20, 12 1965.

[6] P. Kolm, R. Tütüncü, and F. Fabozzi. 60 years of portfolio optimization : Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2) :356–371, 2014.

[7] D. Seppi. Equilibrium block trading and asymmetric information. *The Journal of Finance*, 45(1) :73–94, 1990.