HAL
open science

Un interféromètre de Fabry-Pérot ultrasonore

Frédérick Bernardot, Julien Browaeys, Jérôme Jovet

To cite this version:

Frédérick Bernardot, Julien Browaeys, Jérôme Jovet. Un interféromètre de Fabry-Pérot ultrasonore. Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie, 2020, 114 (1023), pp.365-379. hal-03195290

HAL Id: hal-03195290

https://hal.science/hal-03195290v1

Submitted on 10 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Un interféromètre de Fabry-Pérot ultrasonore

par **Frédérick BERNARDOT, Julien BROWAEYS** et **Jérôme JOVET**
UFR de physique, université Denis-Diderot Paris-7
frederic.bernardot@insp.jussieu.fr
julien.browaeys@univ-paris-diderot.fr
jerome.jovet@univ-paris-diderot.fr

Une expérience de résonance à ondes multiples est réalisée dans l'air avec des ondes ultrasonores de fréquence 40 kHz. Le dispositif expérimental est l'exact équivalent de l'interféromètre optique de Fabry-Pérot, les deux réflecteurs étant ici constitués de deux films en plastique tendus. Ce montage permet un nouveau type de mesure d'une longueur d'onde ultrasonore – et donc, à fréquence connue, de la célérité du son.

INTRODUCTION

La piézoélectricité a été découverte en 1880 [1]. Ce phénomène dans le quartz a été utilisé par Marie Curie à partir de 1897 pour ses mesures des charges électriques émises par la radioactivité [2,3]. Paul Langevin s'est également servi de la piézoélectricité du quartz pour fabriquer les premiers générateurs d'ondes ultrasonores, en 1917 [4] ; puis, à partir des années 1920, le relais a été pris par le sel de Rochelle [5,6]. Après la Seconde Guerre mondiale, le titanate de baryum fut employé pendant dix ans environ ; et enfin, depuis la fin des années 1950, les sources ultrasonores sont des transducteurs piézoélectriques en PZT (abréviation pour $PbZr_xTi_{1-x}O_3$) [7]. Aujourd'hui, ce dernier composé piézoélectrique est extensivement utilisé dans des applications pratiques, industrielles et médicales [8,9]. Cependant, à cause du plomb – nocif – contenu dans le PZT, des recherches sont menées de nos jours afin de trouver un matériau alternatif possédant d'aussi bonnes caractéristiques piézoélectriques que celles du PZT [10].

L'idée d'introduire des manipulations sur les ultrasons dans l'enseignement semble dater des années 1980. Ces expériences ont d'abord concerné la mesure d'une longueur d'onde ultrasonore, l'étude de figures d'interférences et de diffraction, et l'analyse d'une onde stationnaire fabriquée par réflexion ; puis on a proposé des manipulations sur les lois de la réflexion et de la réfraction [11-14]. Un peu plus tard, il a été montré que des expériences sur l'effet Doppler [15] étaient aisément réalisables avec les ultrasons [16-21]. Dans cet article, on présente une transposition au domaine des ondes ultrasonores de l'interféromètre de Fabry-Pérot existant dans le domaine des ondes lumineuses [22-26].

1. MONTAGE

Le montage utilisé pour réaliser un interféromètre de Fabry-Pérot ultrasonore est schématisé sur la figure 1A. Un émetteur d'ultrasons (E) est excité en régime sinusoïdal permanent par la tension de sortie d'un générateur de basses fréquences (GBF). Un récepteur (R) est placé à 50 cm environ en face de l'émetteur, à la même hauteur, sa sortie étant connectée à un oscilloscope (oscillo.) : la tension lue à l'oscilloscope est proportionnelle à la surpression de l'onde ultrasonore détectée par R. L'émetteur et le récepteur fonctionnent sur des résonances situées toutes deux au voisinage immédiat de 40 kHz. Dans l'expérience, on a travaillé à la fréquence de $f = 40{,}000$ kHz – valeur affichée sur le GBF, qui fait aussi office de fréquencemètre.

La figure 1B est une photographie du montage. Les émetteur et récepteur sont des produits standards du commerce ; l'émetteur est à gauche, le récepteur à droite. Deux membranes, faites chacune d'un film de plastique pour palettes tendu sur des montures annulaires, sont interposées entre l'émetteur et le récepteur. L'une, la membrane 1, reste fixe à 15 cm du récepteur (membrane sur la monture noire). L'autre, la membrane 2 (membrane sur la monture blanche), est située entre l'émetteur et la membrane 1. Tous les éléments cités sont placés sur un banc rectiligne ; l'émetteur, le récepteur et la membrane 1 y sont collés au scotch double face. La distance entre la membrane 2 et la membrane 1 est variée entre zéro et vingt centimètres environ. Les positions des supports de la membrane 1 (position1, fixe) et de la membrane 2 (position2) sont repérées sur une graduation millimétrique située le long du banc ; la distance entre les membranes est position1 – position2 *à une constante près*, qui provient du fait que les plans des membranes ne sont pas exactement à la verticale des bords des supports permettant les repérages des deux positions.

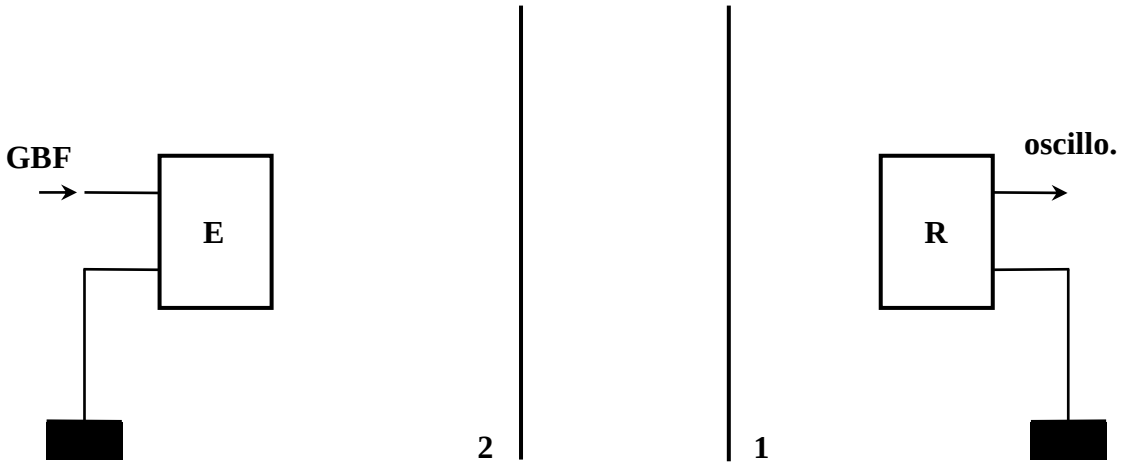

Figure 1A - Schéma de l'expérience. L'émetteur ultrasonore (E) est alimenté par un générateur de basses fréquences (GBF), à 40,000 kHz. La tension électrique produite par le récepteur (R) est analysée sur un oscilloscope (oscillo.). La membrane 1 est fixe ; la membrane 2 est mobile. Les positions de la membrane 2 pour lesquelles une résonance (aiguë) est observée par R, sont repérées sur une graduation au millimètre.

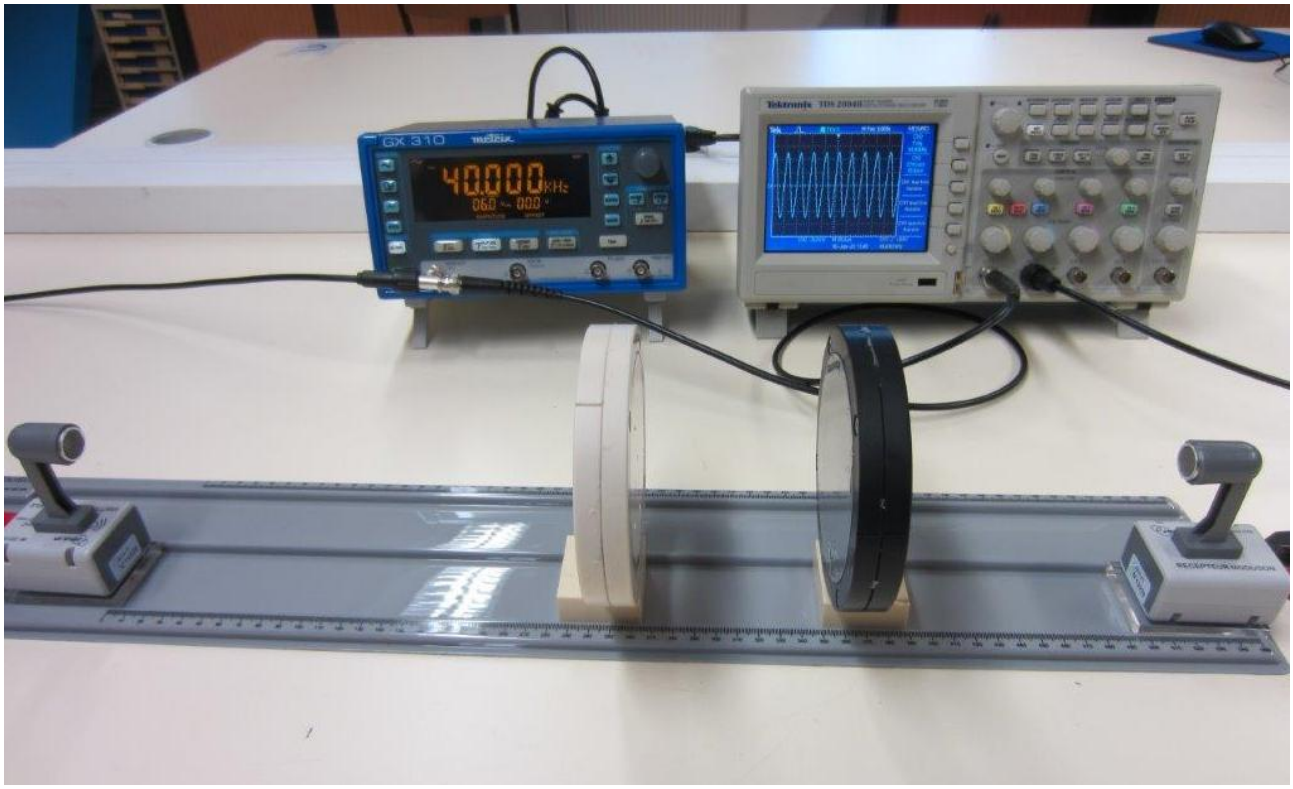

Figure 1B - Photographie du montage. L'émetteur ultrasonore est à gauche, le récepteur à droite ; la membrane 1 fixe est celle à monture noire ; la membrane 2 mobile a une monture blanche ; tous ces éléments sont sur un rail rectiligne gradué au millimètre. Au second plan, on observe à gauche le GBF (réglé sur 40,000 kHz) dont la tension de sortie sinusoïdale excite l'émetteur, et à droite on voit sur l'écran d'un oscilloscope le signal détecté par le récepteur (l'oscilloscope est synchronisé sur la tension de sortie du GBF, non montrée).

2. MESURE D'UNE LONGUEUR D'ONDE ULTRASONORE

Le signal détecté par le récepteur étant observé à l'oscilloscope (cf. figure 1B), la membrane 2 mobile est déplacée finement du bout des doigts, en l'écartant progressivement du contact avec la membrane 1 fixe. Les positions successives (position2) de la membrane 2 qui correspondent à une résonance (aiguë) de la détection sont repérées le long du rail, en nombres entiers ou demi-entiers de millimètres. La position de la membrane 1 fixe étant connue, on trace sur la figure 2 la grandeur position1 – position2 en fonction du numéro de la résonance observée. La figure 2 montre quarante-sept points expérimentaux ; leur ajustement par une droite de pente égale à $\lambda/2$ permet une mesure de la longueur d'onde λ à la fréquence f = 40,000 kHz (cf. annexe 1) :

$$\lambda = (8{,}6315 \pm 0{,}0043) \text{ mm} .$$

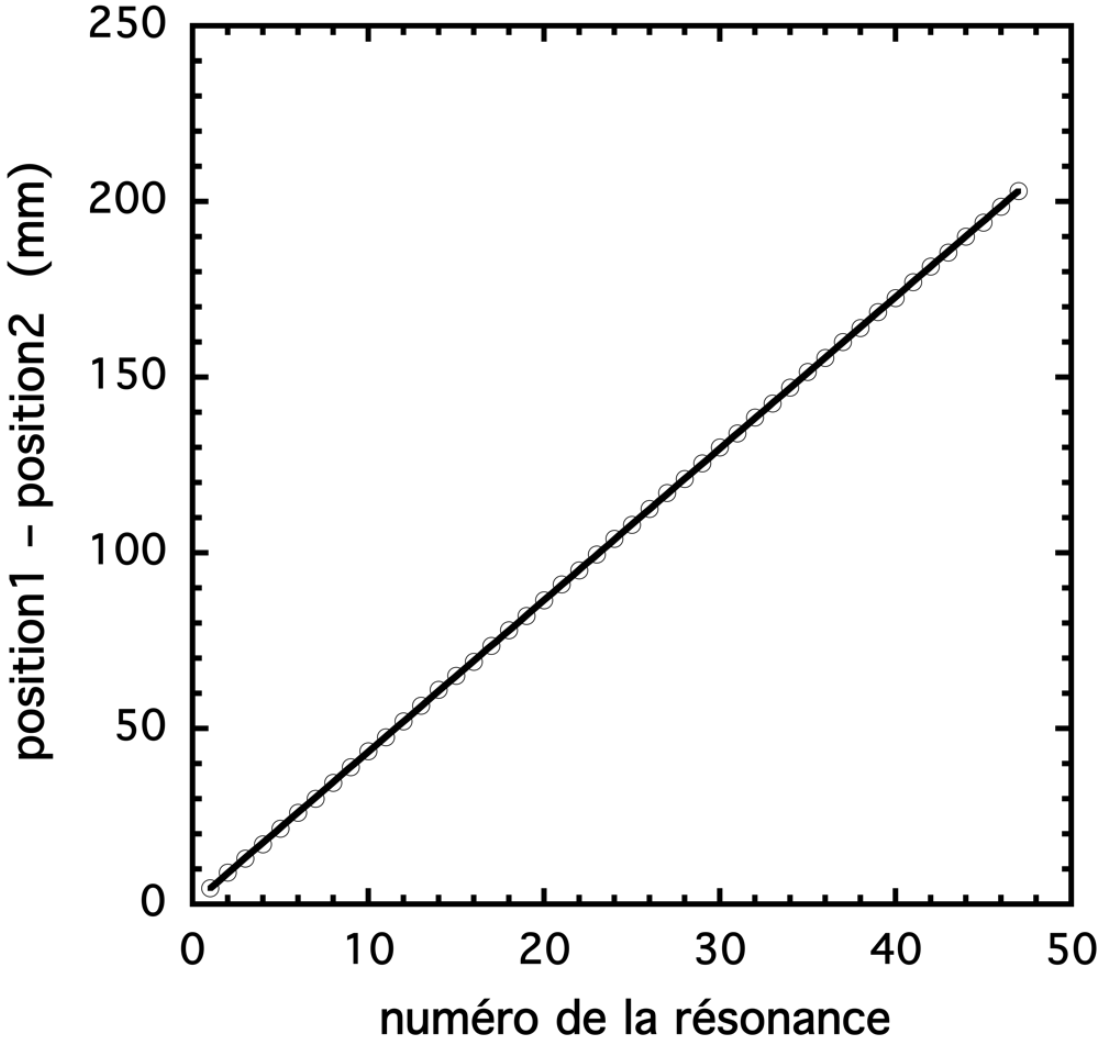

Figure 2 - Résultats expérimentaux. Les 47 disques creux représentent la grandeur position1 – position2, en fonction du numéro de la résonance observée (au fur et à mesure de l'écartement des membranes) ; les valeurs expérimentales sont reportées, en ordonnées, en nombres entiers ou demi-entiers de millimètres. La droite en trait plein est un ajustement affine des points expérimentaux ; sa pente $\lambda/2$ conduit à une mesure de la longueur d'onde ultrasonore : λ = (8,6315 ± 0,0043) mm (± 0,0043 mm = incertitude-type).

On peut finalement déduire une mesure de la célérité du son $c = f\lambda$ dans l'air :

$$c = (345{,}26 \pm 0{,}17) \text{ m/s} .$$

L'incertitude sur c est dominée par celle sur λ, car suivant la notice du GBF l'incertitude sur f est inférieure à 1 Hz. Dans l'air sec, la valeur de la célérité c du son est donnée en fonction de la température absolue T par $c/(\mathrm{m/s}) = 20{,}047\ \{T/\mathrm{K}\}^{1/2}$. La température valait $(22{,}8 \pm 0{,}5/\sqrt{3})$ °C dans la salle d'expérience, d'où la valeur calculée $c = (344{,}87 \pm 0{,}17)$ m/s ; le décalage résiduel avec la mesure est attribué à l'humidité de l'air [27].

Il est à noter que la mesure de λ (ainsi que celle de c qui en découle) est d'une précision remarquable pour une expérience d'enseignement : son incertitude vaut 0,05 % en valeur relative. Cela est dû à la grande finesse des résonances produites par l'interféromètre de Fabry-Pérot ultrasonore, et à la grande quantité des points expérimentaux collectés (cf. annexe 1). Dans l'annexe 2 est décrite une façon moins fastidieuse – mais moins précise – de mesurer une longueur d'onde ultrasonore en utilisant la même expérience. L'annexe 3 présente le calcul de l'amplitude acoustique transmise au travers de l'interféromètre de Fabry-Pérot ultrasonore.

CONCLUSION

L'expérience présentée s'inscrit dans la lignée des démarches expérimentales cherchant à explorer les analogies entre les comportements des ondes lumineuses et ceux des ondes sonores. Une expérience d'interférences entre deux ondes ultrasonores permet, avec un profit pédagogique certain, d'analyser l'équivalent acoustique de l'expérience optique des trous d'Young [28]. Par ailleurs, avec des ondes acoustiques audibles, il a été montré la possibilité originale de mimer certains aspects de la physique d'une cavité amplificatrice laser [29]. La propagation par modes de la lumière dans les fibres optiques a des similarités avec celle des ultrasons guidés par des tubes cylindriques, dans l'air [30]. Et la microscopie optique possède un équivalent ultrasonore [31]. Le présent article enrichit la liste des expériences faisant un parallèle entre l'optique et l'acoustique, en présentant un interféromètre de type Fabry-Pérot qui fonctionne avec des ondes ultrasonores ; ce montage permet la mesure fine d'une longueur d'onde, et débouche finalement sur une mesure précise de la célérité du son dans l'air.

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient vivement Wladimir Toutain et Jean-Yves Staedel pour les multiples idées et essais de multiples membranes de diverses natures, ainsi qu'Alexandre Di Palma pour la réalisation des premières montures de membranes. Jean-Charles Derobert-Mazure est remercié pour une fructueuse discussion sur la modélisation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Curie et P. Curie « Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres à faces inclinées » *Bulletin de la Société minéralogique de France*, tome troisième, n° 4, p. 90-93, avril 1880.

[2] P. Molinié et S. Boudia « Une application méconnue et pourtant célèbre de l'électrostatique : les travaux de Marie Curie, de la découverte du radium à la métrologie de la radioactivité » *4e Conférence de la Société Française d'Électrostatique*, Poitiers 2004.

[3] A. Muñoz-Páez « Marie Curie et la radioactivité » *Le Monde hors-série ''Génies de la science''*, p. 35-36, 2014.

[4] B. Lelong « Paul Langevin et la détection sous-marine, 1914-1929. Un physicien acteur de l'innovation industrielle et militaire » *Épistémologiques* vol. 1, n° 3-4, p. 205-232, 2001.

[5] E. Klein ''Some Background History of Ultrasonics'' *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 20, n° 5, p. 601-604, september 1948.

[6] W. P. Mason ''Piezoelectricity, its history and applications'' *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 70, n° 6, p. 1561-1566, december 1981.

[7] D. Berlincourt ''Piezoelectric ceramics: Characteristics and applications'' *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 70, n° 6, p. 1586-1595, december 1981.

[8] R. W. B. Stephens ''Piezoelectricity and the growth of ultrasonics'' *J. Phys. (Paris)* Colloque C6, Suppl. n° 11-12, tome 33, p. 4-9, novembre-décembre 1972.

[9] L. Eyraud et M. Brissaud « Les matériaux piézoélectriques nouveaux et leurs applications récentes dans le Génie bio-médical » *Bull. Un. Phys.* n° 607, p. 1411-1439, juillet-septembre 1978.

[10] R. Rouffaud « Modélisation et caractérisation de nouveaux matériaux piézoélectriques (sans plomb et composites de connectivité 1-3) pour la transduction ultrasonore » *Thèse de l'université de Tours*, décembre 2014.

[11] R. Gener « Les ultra-sons en classe de 1re » *Bull. Un. Phys.* n° 649, p. 351-352, décembre 1982.

[12] R. Allard « Étude expérimentale des ondes sonores – Réalisation d'un ensemble émetteur-récepteur d'ultra-sons » *Bull. Un. Phys.* n° 649, p. 353-374, décembre 1982.

[13] R. Gener « Les ultra-sons en classe de 1re » *Bull. Un. Phys.* n° 715, p. 802-804, juin 1989.

[14] R. Gasparini « Travaux pratiques sur les ondes ultrasonores » *Bull. Un. Phys.* n° 722, p. 405-411, mars 1990.

[15] M. Dourlent et M. Ptak « Application de l'effet Doppler à la mesure de la vitesse d'un mobile » *Bull. Un. Phys.* n° 576, p. 1157-1161, juil.-août-sept. 1975.

[16] R. Mélin « Principe du vélocimètre sanguin à effet Doppler – *Réflexion des ultrasons et effet Doppler* » *Bull. Un. Phys.* vol. 88, n° 761, p. 325-332, février 1994.

[17] P. Jammaron « Effet Doppler » *Bull. Un. Phys.* vol. 89, n° 776, p. 1319-1322, juil.-août-sept. 1995.

[18] A. Deiber et O. Kempf « Mesures de très faibles vitesses instantanées par échographie Doppler » *Bull. Un. Phys.* vol. 91, n° 798, p. 1925-1942, novembre 1997.

[19] Y. Baima, A. Jorandon, S. Morlen et M. Vincent « Changement de fréquence, effet Doppler » *Bull. Un. Phys.* vol. 92, n° 804, p. 869-884, mai 1998.

[20] J. Barthes et P. Langlois « Une imprimante recyclée pour les ultrasons » *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.* vol. 106, n° 943, p. 441-450, avril 2012.

[21] S. Lampert « L'effet Doppler dans les nouveaux programmes de terminale S » *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.* vol. 107, n° 954, p. 615-633, mai 2013.

[22] C. Fabry et A. Pérot « Sur les franges des lames minces argentées et leur application à la mesure de petites épaisseurs d'air » *Ann. de Chim. et de Phys.* 7e série, tome XII, p. 459-501, décembre 1897.

[23] P. Rouard « Les filtres interférentiels » *Bull. Un. Phys.* n° 397, p. 249-262, mars 1951.

[24] M. Giacomo « Spectrométrie interférentielle » *Bull. Un. Phys.* n° 470, p. 540-545, mai-juin 1963.

[25] B. Leprêtre et R. Adad « Étude de quelques thèmes d'optique physique » *Bull. Un. Phys.* vol. 89, n° 775(2), p. 25-44, juin 1995.

[26] J. F. Mulligan ''Who were Fabry and Pérot?'' *Am. J. Phys.* 66(9), p. 797-802, september 1998.

[27] A. J. Zuckerwar *Handbook of the Speed of Sound in Real Gases* - Volume 3 : Speed of Sound in Air (Academic Press 2002), p. 62.

[28] A. Ballory, A. Deiber et O. Kempf « Interférences ultrasonores : apports d'une acquisition informatisée » *Bull. Un. Phys.* vol. 93, n° 818, p. 1629-1646, novembre 1999.

[29] A. Deiber et O. Kempf « Cavité acoustique, LASER et... système bouclé » *Bull. Un. Phys.* vol. 91, n° 794, p. 907-927, mai 1997.

[30] R. Moreau « Propagation guidée des ondes acoustiques dans l'air » *Bull. Un. Phys.* vol. 86, n° 742, p. 385-398, mars 1992.

[31] J. Attal et M. Rouzeyre « Microcopie acoustique à balayage » *Bull. Un. Phys.* n° 667, p. 29-42, octobre 1984.

[32] F.-X. Bally et J.-M. Berroir « Incertitudes expérimentales » *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.* vol. 104, n° 928, p. 995-1019, novembre 2010.

ANNEXE 1

Mesure de la longueur d'onde avec l'interféromètre de Fabry-Pérot

Pour mesurer la longueur d'onde λ avec l'interféromètre de Fabry-Pérot ultrasonore (cf. paragraphe 2), les $N = 47$ points expérimentaux montrés sur la figure 2 (disques creux) sont ajustés avec la droite

$$y_j = (\lambda/2)\, j + a ,$$

où y_j est l'ajustement de la grandeur position1 – position2 = y_j^{exp} pour la résonance n° j et a est une

ordonnée à l'origine. Il est expliqué dans l'annexe 3 que les points expérimentaux sont attendus sur une droite de pente $\lambda/2$. La minimisation de $\Sigma_j\,(y_j^{exp} - y_j)^2$ fournit la valeur de la longueur d'onde ultrasonore : λ = 8,6315 mm (ainsi que l'ordonnée à l'origine : a = 0,167 mm).

L'incertitude $\delta\lambda$ sur la mesure de la longueur d'onde est fournie par les expressions suivantes [32] :

$$\delta\lambda/2 \;=\; \sigma\{N/D\}^{1/2}\,, \qquad \text{où} \qquad D \;=\; N\,\Sigma_j\, j^2 \;-\; (\Sigma_j\, j)^2 \;=\; N^2(N^2-1)/12 \;\approx\; N^4/12\,,$$

et où σ est l'incertitude-type sur les pointés de position2. Il vient ainsi l'égalité

$$\delta\lambda \;=\; 4\sqrt{3}\,\sigma N^{-3/2}\,.$$

On considère d'abord que σ est donné par l'écart-type σ_{stat} de la distribution des N valeurs $y_j^{exp} - y_j$ autour de zéro ; σ_{stat} étant fourni par $\chi^2 = \min\{\Sigma_j\,(y_j^{exp} - y_j)^2\} = [N-2](\sigma_{stat})^2$, on trouve σ_{stat} = 0,20 mm puis

$$\delta\lambda \;=\; 0{,}0043 \text{ mm}\,.$$

Dans l'expérience, les pointés de position2 pour les résonances observées sont relevés en nombres entiers ou demi-entiers de millimètres. La figure 3 montre l'histogramme des 'erreurs' $y_j^{exp} - y_j$ (ligne continue). On constate que la distribution de ces 'erreurs' peut être raisonnablement approximée par un profil en triangle (ligne en tirets), qui s'annule en ± 0,5 mm ; on trouve alors que l'incertitude-type effective de l'expérience vaut σ_{exp} = (0,5 mm)/√6 = 0,20 mm. Cette distribution des 'erreurs' résulte non seulement des qualités propres du montage expérimental, mais aussi de celles de l'expérimentateur au moment où il a travaillé.

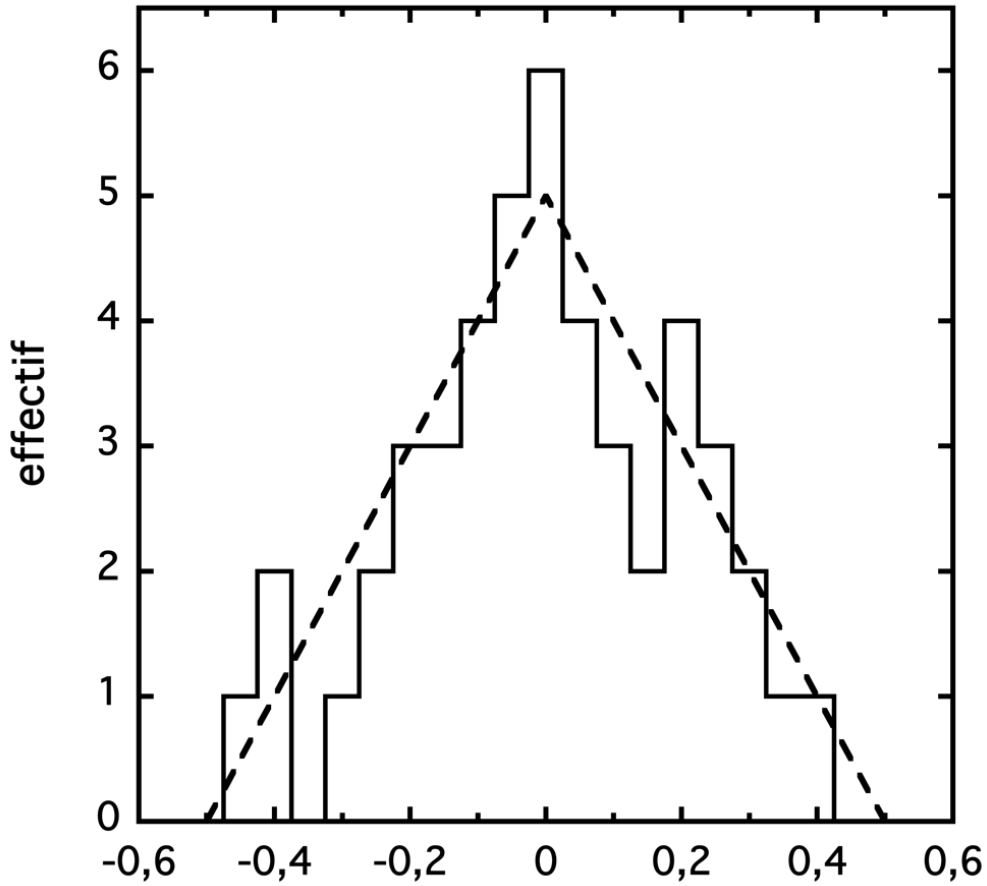

Figure 3 - Histogramme des 'erreurs' $y_j^{exp} - y_j$ (en mm), établi avec un pas de 0,05 mm (ligne continue). La distribution des 'erreurs' est modélisée par un profil en triangle (ligne en tirets). On en déduit l'incertitude-type effective de l'expérience : σ_{exp} = (0,5 mm)/√6 = 0,20 mm.

Les relevés de position2 ayant été faits au demi-millimètre, la procédure usuellement suivie considère que l''erreur' maximale ne peut excéder la demi-graduation, soit ici 0,25 mm. Cela s'avère faux dans 20 % des cas ici, cf. figure 3. De plus, cette procédure aurait conduit à une sous-estimation grossière de l'écart-type (ou, ce qui revient au même, de l'incertitude-type) : 0,25/√3 = 0,14 mm est notablement plus faible que σ_{exp} = 0,20 mm. On a retenu $\sigma = \sigma_{stat} = \sigma_{exp}$ = 0,20 mm pour estimer l'incertitude-type $\delta\lambda$.

ANNEXE 2

Une mesure rapide de la longueur d'onde

Au lieu de pointer une à une toutes les résonances observées lorsque la membrane 2 est progressivement écartée de la membrane 1 (cf. paragraphe 2), il est plus rapide de pointer la position2(1) pour la première résonance et d'estimer la longueur d'onde λ en utilisant la relation

$$(n - 1)\ \lambda/2 \ = \ \text{position2}(n) \ - \ \text{position2}(1)\ ,$$

où position2(n) est la position du support de la membrane 2 associée à la résonance numéro n pointée en second lieu. La figure 4 représente la longueur d'onde ainsi mesurée avec deux pointés seulement, en fonction du numéro n du second pointé (avec $n \geq 2$). Il apparaît sur la figure 4 que cette mesure de λ est d'autant plus précise que n est grand.

En effet, dans cette méthode, l'incertitude $\Delta\lambda$ sur la mesure de λ est donnée par

$$(n - 1)\ \Delta\lambda/2 \ = \ \sqrt{2}\ \Delta\text{pos2}\ ,$$

où Δpos2 est l'incertitude sur le pointé de la position du support de la membrane 2 lors d'une résonance : $\Delta\lambda$ décroît avec n suivant une loi en $1/(n - 1)$. Pour tenir compte de la faible qualité mécanique du montage expérimental, et des difficultés de pointage des résonances et de lecture sur le réglet millimétrique, on adopte l'incertitude élargie Δpos2 = 2(0,5 mm)/√12 ≈ 0,3 mm ; de cette manière, on obtient une incertitude sur la mesure de λ valant, par exemple,

$$\Delta\lambda \ = \ 0{,}036 \text{ mm} \quad \text{pour} \quad n \ = \ 24\ ,$$

et

$$\Delta\lambda \ = \ 0{,}018 \text{ mm} \quad \text{pour} \quad n \ = \ 47\ .$$

Les deux barres d'incertitude correspondantes sont reportées sur la figure 4.

Cette méthode de mesure rapide de la longueur d'onde possède moins de précision que celle qui exploite 47 pointés de résonance, l'incertitude étant alors $\delta\lambda$ = 0,0043 mm (cf. paragraphe 2 et annexe 1).

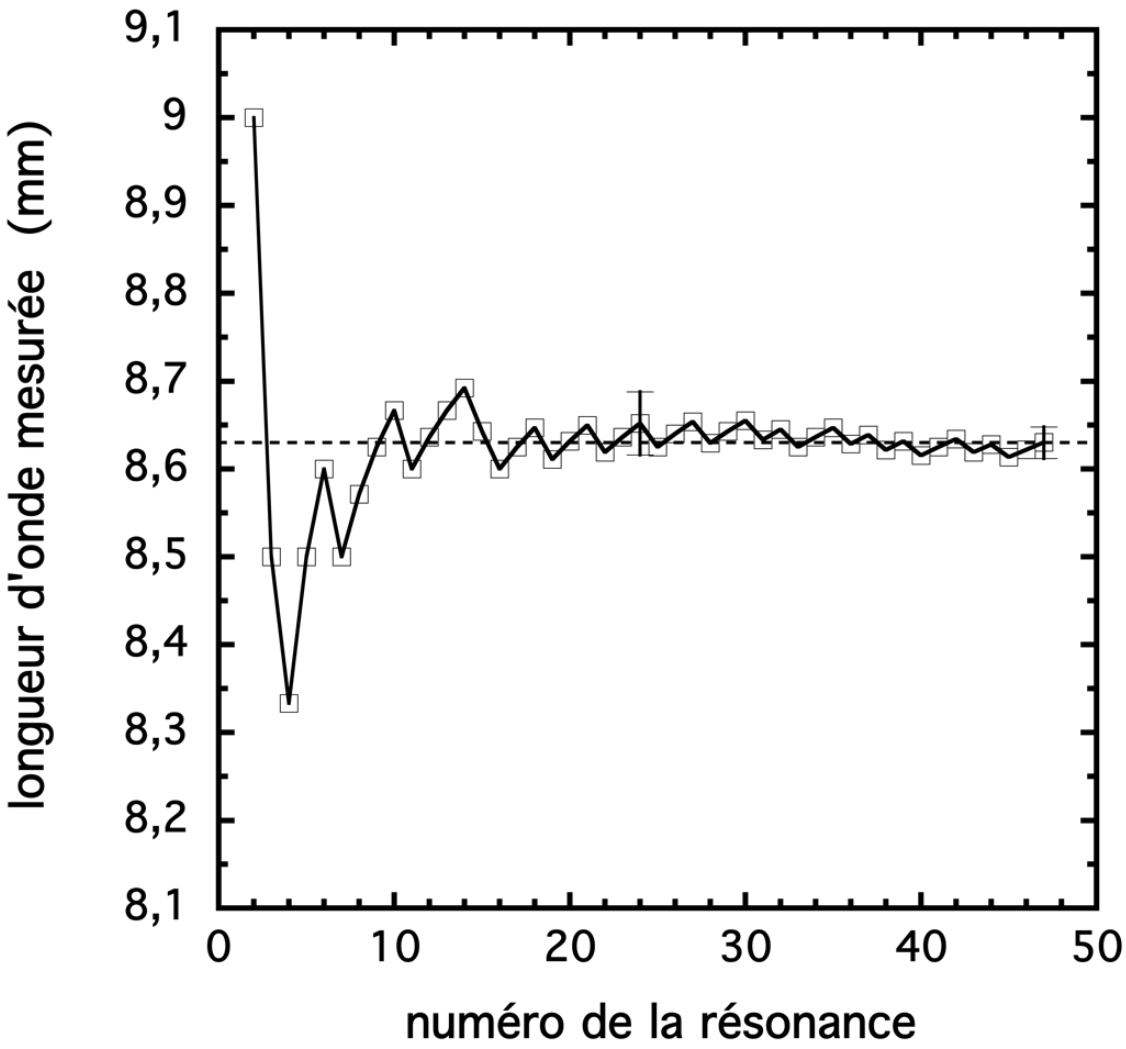

Figure 4 - Mesure rapide de la longueur d'onde. Les carrés creux représentent la longueur d'onde λ estimée avec l'expression $(n-1)\lambda/2$ = position2(n) – position2(1), en fonction du numéro n de la résonance pointée en second lieu ($n \geq 2$). La ligne continue brisée relie ces estimations de λ pour n croissant. La ligne horizontale en tirets représente la valeur λ = 8,63 mm déterminée dans le paragraphe 2.

ANNEXE 3

Un modèle d'interféromètre de Fabry-Pérot ultrasonore

A. MISE EN ÉQUATIONS

Deux membranes en plastique étant situées en $x = 0$ et en $x = L$, une onde ultrasonore incidente est envoyée vers la première membrane en incidence normale, dans le sens des x croissants. On considère ici une modélisation par une onde plane de la partie du champ acoustique émise par la source et captée par le récepteur. La vitesse particulaire du champ acoustique est ainsi écrite sous la forme suivante (avec la pulsation $\omega = 2\pi f$ et le nombre d'onde $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$) :

$$v(x,t) = Re\{ A_1 \, e^{i(\omega t - kx)} + A_2 \, e^{i(\omega t + kx)} \} \quad \text{dans la zone où } x < 0 \text{ ;}$$

$$v(x,t) = Re\{ B_1 \, e^{i(\omega t - kx)} + B_2 \, e^{i(\omega t + kx)} \} \quad \text{dans la zone où } 0 < x < L \text{ ;}$$

$$v(x,t) = Re\{ A_3 \, e^{i(\omega t - kx)} \} \quad \text{dans la zone où } x > L \text{ ;}$$

A_1 est l'amplitude de l'onde incidente sur l'interféromètre de Fabry-Pérot, A_2 celle de l'onde réfléchie, et A_3 celle de l'onde transmise ; B_1 et B_2 sont les amplitudes des deux ondes contrapropageantes entre les membranes.

Les membranes ayant une épaisseur très petite devant la longueur d'onde, on peut écrire les continuités des vitesses particulaires sur les plans (infiniment fins) $x = 0$ et $x = L$ sous les formes suivantes :

$$A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \; ; \qquad (1)$$

$$B_1 \, e^{-ikL} + B_2 \, e^{+ikL} = A_3 \, e^{-ikL} \, . \qquad (2)$$

Par ailleurs, les membranes sont modélisées par des plans en plastique de masse m, rappelés vers leur position d'équilibre $x = 0$ ou $x = L$ par une force élastique de raideur κ. La membrane située en $x = 0$ ayant une vitesse $v_1(t) = Re\{V_1 \exp(i\omega t)\}$, son équation du mouvement s'écrit

$$i\omega m V_1 = -\kappa(V_1/i\omega) + S(p_- - p_+) \, ,$$

où S est l'aire de la surface de la membrane, p_- est l'amplitude complexe de la surpression en $x = 0^-$, et p_+ celle en $x = 0^+$. En notant $Z_c = \rho c$ l'impédance caractéristique de l'air (ρ est la masse volumique de l'air), on peut écrire les expressions $p_- = Z_c(A_1 - A_2)$ et $p_+ = Z_c(B_1 - B_2)$. Finalement, en utilisant $V_1 = A_1 + A_2$, on obtient

$$[\eta(\omega) - 1] \, A_1 + [\eta(\omega) + 1] \, A_2 = -B_1 + B_2 \, , \qquad (3)$$

en posant $\eta(\omega) = Z(\omega)/Z_c$, où $Z(\omega) = i(m\omega - \kappa/\omega)/S$ est l'impédance mécanique d'une membrane, par unité de surface. En s'intéressant de la même façon à l'équation du mouvement de la membrane située en $x = L$, dont l'amplitude de la vitesse est $V_2 = A_3 \exp(-ikL)$, on aboutit à la quatrième équation suivante :

$$B_1 \, e^{-ikL} - B_2 \, e^{+ikL} = [\eta(\omega) + 1] \, A_3 \, e^{-ikL} \, . \qquad (4)$$

B. AMPLITUDE DE L'ONDE TRANSMISE

La résolution des équations (1) à (4) permet d'exprimer les quatre amplitudes B_1, B_2, A_2 et A_3 en fonction de l'amplitude incidente A_1. Ici, on s'intéresse seulement à l'expression de l'amplitude transmise A_3. L'élimination de B_1 et B_2 est réalisée en utilisant d'abord les équations (1) et (3), pour trouver

$$B_1 = (1 - \eta/2) \, A_1 - (\eta/2) \, A_2 \qquad \text{et} \qquad B_2 = (\eta/2) \, A_1 + (1 + \eta/2) \, A_2 \, ,$$

et en injectant ensuite ces expressions de B_1 et B_2 dans les équations (2) et (4). On aboutit de cette manière à un système de deux équations à deux inconnues A_3 et A_2 :

$$A_3 \, e^{-ikL} - (e^{+ikL} + i\eta \sin kL) \, A_2 = (e^{-ikL} + i\eta \sin kL) \, A_1 \, ;$$

$$(\eta + 1) \, A_3 \, e^{-ikL} + (e^{+ikL} + \eta \cos kL) \, A_2 = (e^{-ikL} - \eta \cos kL) \, A_1 \, .$$

L'élimination de A_2 entre ces deux équations aboutit enfin à l'expression suivante de l'amplitude A_3 :

$$A_3 = A_1 \, / \, [1 + \eta + i(\eta^2/2) \, e^{-ikL} \sin kL] \, .$$

C. MODULE DU COEFFICIENT DE TRANSMISSION

Le module du coefficient de transmission (en amplitude) vaut alors, tous calculs faits :

$$|A_3/A_1| = [1 + \beta^2 \, (1 + \beta^2/4) \, \sin^2(kL - \varphi)]^{-1/2} \, , \qquad (5)$$

où $\beta = (m\omega - \kappa/\omega)/S\rho c$ (*i.e.* $\eta = i\beta$) ; l'angle φ est défini par $\tan\varphi = 2/\beta$ et $0 < \varphi < \pi$. À une pulsation ω fixée, $|A_3/A_1|$ est maximal, en étant égal à l'unité, pour les espacements L entre les membranes vérifiant la relation $\sin^2(kL - \varphi) = 0$, c'est-à-dire :

$$L = L_p = (p + \varphi/\pi)\,\lambda/2, \quad \text{où } p \text{ est un entier positif ou nul.}$$

La variation d'espacement entre deux résonances successives est donc $\Delta L = L_{p+1} - L_p = \lambda/2$. La largeur d'une résonance, à $1/\sqrt{2}$ de son maximum, est notée δL ; pour $|\beta|$ pas trop petit ($|\beta| > 3$), cette largeur peut être estimée par la relation $\beta^2(1+\beta^2/4)(k\delta L/2)^2 = 1$, d'où l'expression de δL :

$$\delta L = \lambda / [\pi|\beta|(1 + \beta^2/4)^{1/2}] .$$

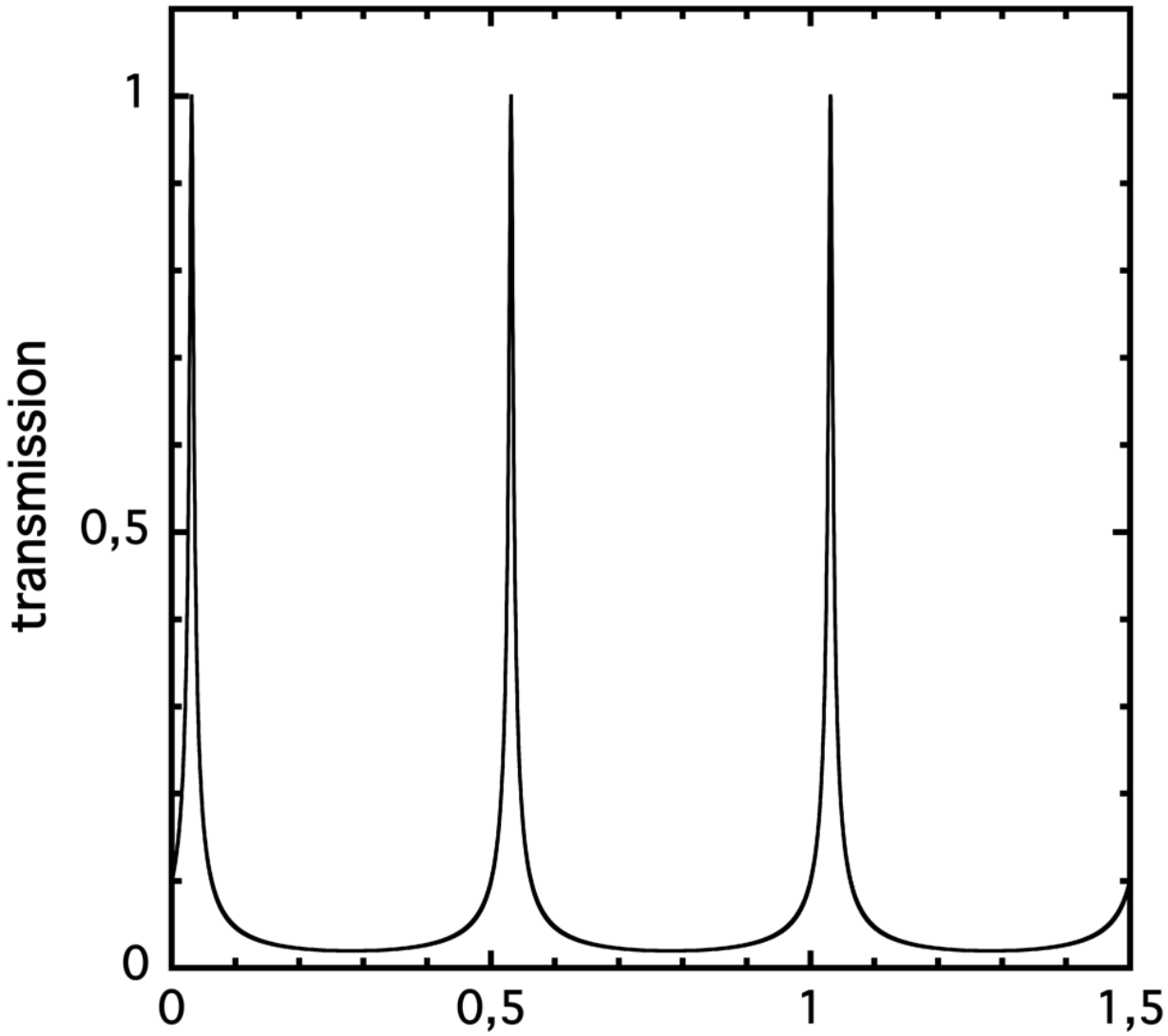

Figure 5 - Transmission en amplitude $|A_3/A_1|$ [cf. équation (5)] de l'interféromètre de Fabry-Pérot ultrasonore, en fonction du paramètre L/λ ; la figure est tracée avec $\beta = 10$.

La figure 5 représente $|A_3/A_1|$, module du coefficient de transmission de l'interféromètre de Fabry-Pérot [cf. équation (5)], en fonction de L/λ, pour $\beta = 10$; les résonances de $|A_3/A_1|$ sont distantes de $\Delta L/\lambda = 1/2$. La largeur des résonances vaut $\delta L/\lambda \approx 2/\pi\beta^2$; pour $\beta \approx 10$, il vient $\delta L \approx \lambda/160$. La valeur $|\beta| \approx 10$ est de l'ordre de celle rencontrée dans l'expérience (cf. paragraphe D ci-dessous) ; on a alors $\delta L \approx 0{,}05$ mm.

L'expression (5) de $|A_3/A_1|$ est en correspondance exacte avec la fonction d'Airy d'un interféromètre de Fabry-Pérot optique [25]. En effet, l'étude d'une seule membrane [en faisant $B_2 = 0$ dans les équations (1) et (3)] montre que son coefficient de réflexion en intensité est $R_1 = \beta^2/(\beta^2 + 4)$, et l'équation (5) donne alors la forme suivante pour la transmission en intensité de l'interféromètre de Fabry-Pérot ultrasonore :

$$|A_3/A_1|^2 \;=\; \left[1 \;+\; \{4R_1/(1 - R_1)^2\}\, \sin^2(kL - \varphi)\right]^{-1} .$$

La finesse $F = \Delta L/\delta L$ de l'interféromètre de Fabry-Pérot ultrasonore possède alors l'expression

$$F \;=\; \pi R_1^{1/2} / (1 - R_1) \;=\; (\pi/2)\, |\beta|\, (1 + \beta^2/4)^{1/2} .$$

D. MESURE DE LA FINESSE DE L'INTERFÉROMÈTRE DE FABRY-PÉROT ULTRASONORE

Dans l'expérience, l'émetteur et le récepteur étant à environ 50 cm l'un de l'autre, sans membrane entre eux, l'amplitude des oscillations détectées par le récepteur vaut 123 mV. Une membrane étant interposée entre l'émetteur et le récepteur, l'amplitude du signal détecté tombe à 17 mV, quelle que soit la position de cette membrane à une distance comprise entre 15 et 35 cm du récepteur. On en déduit que la transmission en amplitude d'une membrane vaut

$$|t_1| \;\approx\; 0{,}14 .$$

Cette mesure de $|t_1|$ donne accès à la valeur de $|\beta|$: $|t_1|^2 = 1 - R_1 = 4/(\beta^2 + 4)$, d'où $|t_1| \approx 2/|\beta|$ puis

$$|\beta| \;\approx\; 14 .$$

La finesse de l'interféromètre de Fabry-Pérot ultrasonore étudié vaut donc $F \approx \pi\beta^2/4 \approx 150$. La largeur des résonances est alors de

$$\delta L \;=\; \Delta L/F \;=\; \lambda/2F \;\approx\; 0{,}03 \text{ mm} .$$

Cette valeur de δL illustre la difficulté rencontrée pour positionner la membrane 2 sur une résonance...

Il est probable que le paramètre β soit contrôlé par l'inertie de la membrane en plastique. La masse de $S \approx 1$ m^2 de film plastique étant mesurée à $m \approx 17$ g, on calcule en effet, dans cette hypothèse :

$$\beta \;=\; m\omega/S\rho c \;\approx\; 12 ,$$

en utilisant $\rho \approx 1$ kg/m^3 et c ≈ 350 m/s. L'expérience d'une mesure de longueur d'onde (cf. paragraphe 2) serait plus aisée à réaliser avec une largeur de résonance de $\delta L = 0{,}1$ mm ; celle-ci est obtenue pour $\beta \approx 7$, c'est-à-dire pour une membrane dont la masse surfacique m/S serait réduite de moitié environ.