



**HAL**  
open science

## Mersenne et la conjecture de Collatz

Jacques Prado

► **To cite this version:**

| Jacques Prado. Mersenne et la conjecture de Collatz. 2022. hal-03195174v9

**HAL Id: hal-03195174**

**<https://hal.science/hal-03195174v9>**

Preprint submitted on 19 Dec 2022 (v9), last revised 29 Jul 2023 (v10)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mersenne et la conjecture de Collatz

*J. Prado*

19 décembre 2022

## Résumé

In this presentation we will only be interested in the relations between the odd numbers defined by the Collatz relation. In a first part (sections 2 to 5) we give a method of inversion of Collatz trajectories, which allows to define a complete partition of the set of odd numbers using the notion of predecessor-successor. It is thus possible to construct all the converging trajectories starting from the end point 1 going up towards all the possible origins. In a second part (sections 6 and 7), in order to show that the Collatz algorithm induces neither divergent trajectory, nor any other cycle than that corresponding to the number 1, we develop a different form of the algorithm which generates the same trajectories but whose the simpler interpretation makes it possible to conclude that the conjecture is true.

## Résumé

Dans cette présentation nous ne nous intéresserons qu'aux relations entre les nombres impairs définis par la relation de Collatz. Dans une première partie (sections 2 à 5) nous donnons une méthode d'inversion des trajectoires de Collatz, ce qui permet de définir une partition complète de l'ensemble des nombres impairs à l'aide de la notion de prédécesseur-successeur. Il est ainsi possible de construire toutes les trajectoires convergentes en partant du point final 1 en remontant vers toutes les origines possibles. Dans une deuxième partie (sections 6 et 7), afin de montrer que l'algorithme de Collatz n'induit ni trajectoire divergente, ni d'autre cycle que celui correspondant au nombre 1, nous développons une forme différente de l'algorithme qui engendre les mêmes trajectoires mais dont l'interprétation plus simple permet de conclure à la véracité de la conjecture.

## 1 Introduction

Nous rappelons que la conjecture de Collatz est liée à la suite d'entiers positifs définis par les relations suivantes :

$$f(n) = \begin{cases} 3n + 1 & \text{si } n \text{ impair,} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases} \quad (1)$$

La conjecture de Collatz dit que pour tout  $n$  la suite se termine toujours en 1. Les valeurs paires de  $n$  n'étant pas représentatives des propriétés de convergences, il est possible de reformuler l'expression (1) en ne faisant apparaître que les valeurs impaires de  $n$  ce qui s'écrit :

$$2^\gamma n_k = 3n_{k-1} + 1 \quad (2)$$

Où les  $n_k$  sont tous des entiers positifs impairs. On en déduit simplement que si  $n_k = 1$ , alors :

$$n_{k-1} = \frac{2^\gamma - 1}{3} \quad (3)$$

L'équation (3) n'a de solution que si  $(2^\gamma - 1)$  est divisible par 3. En écrivant  $3 = (2^2 - 1)$  on est ramené à la solution simple :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m} - 1}{2^2 - 1} \quad (4)$$

où  $(2^{2m} - 1) = M_{2m}$  est un nombre de Mersenne défini par  $M_p = (2^p - 1)$  qui est divisible par 3 quand  $p$  est pair.

Cela permet de remplacer la convergence vers 1 par une convergence vers les diviseurs de Mersenne notés  $Q_{2m}$  définis par :

$$2^{2m} - 1 = 3 \cdot Q_{2m} \quad (5)$$

Lorsque  $n_k \neq 1$  alors (3) devient :

$$n_{k-1} = \frac{2^\gamma n_k - 1}{3} \quad (6)$$

De manière évidente (6) n'a pas de solution si  $n_k$  est un multiple de 3. Dans ces conditions,  $n_k$  étant impair ne peut prendre que les formes données par :

$$\begin{cases} n_k = 3q_k + 1 & \text{où } q_k \text{ est pair} \\ n_k = 3q_k + 2 & \text{où } q_k \text{ est impair} \end{cases} \quad (7)$$

De même,  $\gamma$  peut être pair ( $\neq 0$ ) ou impair :  $\begin{cases} \gamma = 2m \\ \gamma = 2m - 1 \end{cases}$

On est donc ramené à l'étude des deux formes suivantes :

$$\begin{aligned} 2^\lambda \cdot (3q_k + 1) &= 3 \cdot n_{k-1} + 1 \\ 2^\lambda \cdot (3q_k + 2) &= 3 \cdot n_{k-1} + 1 \end{aligned} \quad (8)$$

On remarque que la convergence au sens de Collatz, ne peut être obtenue qu'à l'aide de la relation  $2^\lambda \cdot (3q_k + 1) = 3 \cdot n_{k-1} + 1$ , dans laquelle  $\lambda = 2m$  et  $q_k = 0$ , nous avons alors  $n_{k-1} = Q_{2m}$ . Tant que  $n_{k-1}$  est différent de  $Q_{2m}$ , les relations données par (eq. 8) sont valables pour  $q_k$  pair si  $n_k = 3q_k + 1$  et  $q_k$  impair si  $n_k = 3q_k + 2$ . Nous allons utiliser cette remarque dans la suite afin de reformuler les relations entre  $n_k$  et  $n_{k-1}$ .

## 2 Nouvelle écriture des nombres impairs

À partir de ce qui précède il est possible de définir une écriture équivalente aux nombres impairs égaux à 0, 1, ou 2 modulo 3 à partir de la relation définie par Collatz. Si dans la relation  $2^\lambda \cdot (3q_k + 1)$  on remplace  $\lambda$  par  $2m$  et en développant on obtient :

$$2^\lambda (3q_k + 1) = 2^{2m} \cdot 3 \cdot q_k + 2^{2m} \quad (9)$$

À l'aide des nombres de Mersenne,  $2^{2m} = 3Q_{2m} + 1$ , cela donne l'égalité :

$$2^{2m} \cdot 3 \cdot q_k + [2^{2m}] = 3 \cdot 2^{2m} \cdot q_k + [3 \cdot Q_{2m} + 1] \quad (10)$$

Soit :

$$2^{2m}(3 \cdot q_k + 1) = 3(2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \quad (11)$$

Cette relation montre que si  $n_k = 3q_k + 1$  alors tout prédécesseur au sens de la suite de Collatz s'écrit  $n_{k-1} = 2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m}$ , avec  $q_k$  pair.

On peut montrer de même que si  $n_k = 3q_k + 2$  alors  $n_{k-1} = 2^{2m-1} \cdot q_k + Q_{2m}$ , avec  $q_k$  impair.

$$2^{2m-1}(3 \cdot q_k + 2) = 3(2^{2m-1} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \quad (12)$$

En conclusion si dans la suite des valeurs  $n_k$  toutes impaires :

- $n_k = 3q_k + 1$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (11) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est pair et  $\gamma = 2m$ .
- $n_k = 3q_k + 2$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (12) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est impair et  $\gamma = 2m - 1$ .

$n_k = 3n_{k-1} + 1$	$\Leftrightarrow$	$n_{k-1} \in \{3q_{k-1}, 3q_{k-1} + 1, 3q_{k-1} + 2\}$
$2^{2m-1}(3q_k + 2)$	$=$	$3n_{k-1} + 1 = 3(2^{2m-1}q_k + Q_{2m}) + 1$ si $n_{k-1} \neq Q_{2m}$
$2^{2m}(3q_k + 1)$	$=$	$3n_{k-1} + 1 = 3(2^{2m}q_k + Q_{2m}) + 1$ si $n_{k-1} \neq Q_{2m}$
$2^{2m}(1)$	$=$	$3Q_{2m} + 1$ si $n_{k-1} = Q_{2m}$

TAB. 1: Équivalence d'écriture

On trouvera en annexe (Annexe A) une étude exhaustive montrant qu'il n'y a pas d'autres possibilités et les résultats sont résumés dans le tableau (Tab. 1) dans lequel  $Q_{2m} = (2^{2m} - 1)/3$ .

On déduit de ce résultat que si le nombre impair initial  $n_0$  peut être choisi quelconque, dès la première itération la suite des nombres impairs ne comporte aucun multiple de 3.

Il en résulte que tout nombre impair non multiple de 3 possède une infinité de prédécesseurs au sens de la suite de Collatz. En résumé :

$$\text{Si } n_k = (3 \cdot q_k + 1) \text{ alors } n_{k-1} = 2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m} \quad (13)$$

$$\text{Si } n_k = (3 \cdot q_k + 2) \text{ alors } n_{k-1} = 2^{2m-1} \cdot q_k + Q_{2m}$$

Dans les relations définies par (eq. 13)  $q_k$  est pair quand  $n_k$  est congru à 1 modulo 3 et impair quand  $n_k$  est congru à 2 modulo 3, dans les deux cas  $m = [1, 2, \dots, \infty[$ .

### 3 Partition des nombres impairs

D'après ce qui précède (eq. 13), les valeurs  $n_k$  et  $n_{k-1}$  satisfont aux suites de Collatz par le fait que :

$$\text{Si } n_k = (3 \cdot q_k + 1) \text{ alors } 2^{2^m} n_k = 3n_{k-1} + 1 \quad (14)$$

$$\text{Si } n_k = (3 \cdot q_k + 2) \text{ alors } 2^{2^{m-1}} n_k = 3n_{k-1} + 1$$

Dans (eq. 14), si les valeurs  $n_k$  sont congrues à 1 ou 2 modulo 3, les valeurs  $n_{k-1}$  sont des nombres impairs quelconques c'est à dire congrus à 0, 1 ou 2 modulo 3 avec la particularité que lors d'une congruence à 0 le nombre  $n_{k-1}$  correspond à  $k = 1$  c'est à dire l'origine d'une trajectoire puisque les multiples de 3 ne peuvent pas être obtenus comme résultats de l'opération  $3n + 1$ .

Il est ainsi possible d'établir une nouvelle écriture des nombres impairs, écriture qui fait apparaître explicitement les puissances de 2 et ce que nous avons appelé diviseur de Mersenne i.e.  $Q_{2^m} = (2^{2^m} - 1) / 3$ . On notera  $n_{k-1}(q_k, m)$  un nombre impair de la façon suivante :

$$\begin{aligned} n_{k-1}(q_k, m) &= 2^{2^m} q_k + Q_{2^m} \text{ si } q_k \text{ est pair} \\ n_{k-1}(q_k, m) &= 2^{2^{m-1}} q_k + Q_{2^m} \text{ si } q_k \text{ est impair} \end{aligned} \quad \text{pour } m = [1, 2, \dots, \infty[ \quad (15)$$

Dans ces relations, seul  $n_0$  peut être un multiple de 3.

La valeur de  $q_k$  et celle de  $m$  sont obtenues uniquement par application de la relation de Collatz :

$$f(n) = 3 \cdot n_{k-1}(q_k, m) + 1 \quad (16)$$

Sachant que  $f(n)$  ne peut prendre que des valeurs de la forme  $2^{2^m}(3 \cdot q_k + 1)$  ou  $2^{2^{m-1}}(3 \cdot q_k + 2)$  on en déduit directement l'écriture de  $n_{k-1}(q_k, m)$  sous une des deux formes données par (eq. 15).

Exemple;

Soit le nombre 453 que l'habitude permet d'écrire  $2 \cdot 226 + 1$ , son écriture sous la forme  $n_{k-1}(q_k, m)$  passe par l'utilisation de la relation de Collatz.

$$1360 = 3 \cdot 453 + 1 \quad (17)$$

$$2^4 \cdot 85 = 3 \cdot 453 + 1 \quad (18)$$

$$2^4 \cdot 85 = 2^4 (3 \cdot 28 + 1) \quad (19)$$

On en déduit :  $453 = 2^4 \cdot 28 + 5$  ce qui est de la forme  $2^{2^m} q_k + Q_{2^m}$  avec  $q_k = 28$  et  $m = 2$  d'où  $Q_{2^m} = 5$ . On vérifiera aisément que 453 est un multiple de 3, mais que c'est aussi par construction un prédécesseur de  $85 = Q_8$ . On a donc une trajectoire à trois termes  $453 \rightarrow 85 \rightarrow 1$ .

$q_k$  pouvant prendre toutes les valeurs entières ( $q_k \in \mathbb{N}$ ) nous obtenons une partition des nombres impairs en associant à chaque valeur de  $q_k$  une suite infinie de nombres impairs  $n_{k-1}(q_k, m)$  obtenue à l'aide des relations de (eq. 15)

### 3.1 Partition à l'aide de la notion de prédécesseur

Les propriétés des prédécesseurs (cf Tab. 1) des nombres congrus à 1 ou 2 modulo 3 permettent d'obtenir une partition complète des nombres impairs. Nous en donnons une représentation à l'aide de deux tableaux faisant apparaître de manière ordonnée et indexés par les entiers naturels les nombres impairs regroupés selon leur propriété de prédécesseur d'un nombre impair donné de la forme  $3q+1$  ( $q$  est pair), c'est le tableau supérieur de la figure (Fig. 1) ou  $3q+2$  ( $q$  est impair), c'est le tableau inférieur de cette même figure. Les points de départ du tableau des prédécesseurs sont les nombres  $Q_{2m}$  qui apparaissent dans la deuxième colonne du tableau supérieur  $q = 0$  comme prédécesseurs du chiffre 1.

q	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...
$3q+1$	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	...
$(2^2)q + Q_2$	$Q_2=1$	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81	...
$(2^4)q + Q_4$	$Q_4=5$	37	69	101	133	165	197	229	261	293	325	...
$(2^6)q + Q_6$	$Q_6=21$	149	277	405	533	661	789	917	1045	1173	1301	...
$(2^8)q + Q_8$	$Q_8=85$	597	1109	1621	2133	2645	3157	3669	4181	4693	5205	...
$(2^{10})q + Q_{10}$	$Q_{10}=341$	2389	4437	6485	8533	10581	12629	14677	16725	18773	20821	...
$(2^{12})q + Q_{12}$	$Q_{12}=1365$	9557	17749	25941	34133	42325	50517	58709	66901	75093	83285	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

q	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
$3q+2$	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	...
$(2^1)q + Q_2$	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	...
$(2^3)q + Q_4$	13	29	45	61	77	93	109	125	141	157	173	...
$(2^5)q + Q_6$	53	117	181	245	309	373	437	501	565	629	693	...
$(2^7)q + Q_8$	213	469	725	981	1237	1493	1749	2005	2261	2517	2773	...
$(2^9)q + Q_{10}$	853	1877	2901	3925	4949	5973	6997	8021	9045	10069	11093	...
$(2^{11})q + Q_{12}$	3413	7509	11605	15701	19797	23893	27989	32085	36181	40277	44373	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

FIG. 1: Tableau de partition des nombres impairs

Chaque colonne est constituée à l'aide des prédécesseurs des nombres qui figurent sur la deuxième ligne de chaque colonne, dans les cases jaunes pour les nombres congrus à 1 modulo 3, dans les cases vertes pour les nombres congrus à 2 modulo 3. comme il a été vu précédemment, tout nombre impair congru à 1 ou 2 possède ses propres prédécesseurs et donc les nombres congrus à 1 ou 2 de la deuxième ligne des tableaux de la figure (Fig. 1) représentent les successeurs associés à chacun des nombres figurants dans la colonne correspondante et aucun nombres impairs ne

possèdent de prédécesseurs en commun.

Ainsi en notant  $I = 2\mathbb{N} + 1$  l'ensemble des nombres impairs,  $R_1(q_k) = \text{préd}(3 \cdot q_k + 1) = \bigcup_{m=1}^{\infty} (2^{2m}q_k + Q_{2m})$  le sous-ensemble des prédécesseurs d'un nombre impair congru à 1 modulo 3 et  $R_2(q_k) = \text{préd}(3 \cdot q_k + 2) = \bigcup_{m=1}^{\infty} (2^{2m-1}q_k + Q_{2m})$  le sous-ensemble des prédécesseurs d'un nombre impair congru à 2 modulo 3, on obtient la partition suivante :

$$I = \oplus_{q_k \text{ pair}} R_1(q_k) \cup \oplus_{q_k \text{ impair}} R_2(q_k) \quad (20)$$

où  $\oplus$  représente la somme directe.

En tant que successeur, un nombre appartient aussi à la famille des prédécesseurs du prochain successeur, dans cette fonction il ne peut apparaître qu'une seule fois dans une autre colonne, sinon il serait prédécesseur de plusieurs valeurs ce qui est contraire à l'unicité de la représentation de chaque nombre impair sous la forme  $2^\lambda q + Q_{2m}$ .

Seul le nombre 1 fait exception à cette règle puisqu'il apparaît à la fois comme successeur et comme prédécesseur de lui-même ce qui est la représentation du cycle 1 : 1.

## 4 Propriétés des prédécesseurs

### 4.1 Relation entre deux prédécesseurs d'un même nombre

Commençons par le cas où dans la relation  $2^\gamma n_k = 3n_{k-1} + 1$ , on a  $n_k = 3q_k + 1$ . Dans ces conditions, on a (cf 11) :

$$2^{2m}(3 \cdot q_k + 1) = 3(2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \quad (21)$$

Ce qui, avec les notations précédentes, donne :

$$2^{2m}n_k = 3n_{k-1}(q_k, m) + 1 \quad (22)$$

Les  $n_{k-1}(q_k, m)$  changent de valeur quand  $m$  change de valeur, mais ils ont tous le même successeur  $n_k$ . Remplaçons  $m$  par  $m + 1$  pour définir la relation entre deux prédécesseurs :

$$2^{2m+2}n_k = 3n_{k-1}(q_k, m + 1) + 1 = 3(2^{2m+2} \cdot q_k + Q_{2m+2}) + 1 \quad (23)$$

Or :

$$Q_{2m} = \frac{2^{2m} - 1}{3} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^{2k} \quad (24)$$

on en déduit simplement que  $Q_{2m+2} = 2^2 Q_{2m} + 1$ , et donc :

$$2^{2m+2}q_k + Q_{2m+2} = 2^2 (2^{2m}q_k + Q_{2m}) + 1 \quad (25)$$

Soit :

$$n_{k-1}(q_k, m+1) = 2^2 n_{k-1}(q_k, m) + 1 \quad (26)$$

On obtient le même résultat lorsqu'on raisonne avec  $n_k$  de la forme  $3q_k + 2$ , la liste des prédécesseurs d'un nombre impair suit la même règle de construction que la liste des diviseurs  $Q_{2^m}$  des nombres de Mersenne  $2^{2^m} - 1$ . De plus, il est facile de voir que la différence entre deux prédécesseurs successifs du même nombre satisfait à la suite de Collatz :

$$n_{k-1}(q_k, m+1) - n_{k-1}(q_k, m) = 3n_{k-1}(q_k, m) + 1 \quad (27)$$

## 4.2 Régularité du tableau des prédécesseurs

L'équation (eq. 27) est définie quelque soit  $q_k \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ . Pour les valeurs de  $q_k$  pair (en considérant 0 comme chiffre pair, on obtient :

$$2^{2^m} (3q_k + 1) = n_{k-1}(q_k, m+1) - n_{k-1}(q_k, m) \quad (28)$$

Soit :

$$\frac{n_{k-1}(q_k, m+1) - n_{k-1}(q_k, m)}{3q_k + 1} = 2^{2^m} \quad (29)$$

Ainsi si dans le tableau de partition on remplace les prédécesseurs par la différence de 2 prédécesseurs consécutifs divisée par leur successeur on obtient une puissance de 2 paire et toutes les colonnes du tableau sont équivalentes.

De même si  $q_k$  est un nombre impair, on obtient :

$$\frac{n_{k-1}(q_k, m+1) - n_{k-1}(q_k, m)}{3q_k + 2} = 2^{2^m - 1} \quad (30)$$

Cette fois les colonnes sont remplies avec les puissances de 2 impaires.

Le résultats est donné figure (Fig. 2).

q	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...
3q+1	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	...
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	...
	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	...
	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	...
	256	256	256	256	256	256	256	256	256	256	256	...
	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	...
	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

q	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
3q+2	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	...
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	...
	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	...
	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	...
	128	128	128	128	128	128	128	128	128	128	128	...
	512	512	512	512	512	512	512	512	512	512	512	...
	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

FIG. 2: Régularité du tableau de partition

Une autre régularité peut être mise en évidence, c'est l'équirépartition des nombres impairs dans chaque sous ensemble de prédécesseurs.

### 4.3 Équirépartition des prédécesseurs

#### 4.3.1 Supposons qu'un prédécesseur soit un multiple de 3

Soit  $n_{k-1}(q_k, m) = 3 \cdot q_{k-1}$ , à l'aide de la relation (26) :

$$n_{k-1}(q_k, m+1) = 2^2 3 \cdot q_{k-1} + 1 \quad (31)$$

$$n_{k-1}(q_k, m+2) = 2^4 3 \cdot q_{k-1} + 5 \quad (32)$$

$$n_{k-1}(q_k, m+3) = 2^6 3 \cdot q_{k-1} + 21 = 3(2^6 q_{k-1} + 7) \quad (33)$$

On en déduit que si l'un des prédécesseurs est multiple de 3 alors tous les 3 prédécesseurs on aura un multiple de 3.

#### 4.3.2 Supposons qu'un prédécesseur soit de la forme $3 \cdot q_{k-1} + 1$

Soit  $n_{k-1}(q_k, m) = 2^{2m}q_k + Q_{2m} = 3 \cdot q_{k-1} + 1$ , il vient :

$$2^{2m+2} + Q_{2m+2} = 2^{2m+2}q_k + 4Q_{2m} + 1 \quad (34)$$

$$2^{2m+4} + Q_{2m+4} = 2^{2m+4}q_k + 16Q_{2m} + 5 \quad (35)$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 2^{2m+6}q_k + 64Q_{2m} + 21 \quad (36)$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 2^6 (2^{2m}q_k + Q_{2m}) + 21 \quad (37)$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 2^6 (3 \cdot q_{k-1} + 1) + 21 \quad (38)$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 2^6 3 \cdot q_{k-1} + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 \quad (39)$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 2^6 3 \cdot q_{k-1} + 2^2 (2^4 + 2^2 + 1) + 1 \quad (40)$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 2^6 3 \cdot q_{k-1} + 2^2 (3 \cdot 7) + 1 \quad (41)$$

$$2^{2m+6} + Q_{2m+6} = 3 (2^6 \cdot q_{k-1} + 2^2 \cdot 7) + 1 \quad (42)$$

Le terme obtenu est bien congru à 1 modulo 3, on en déduit que tous les 3 prédécesseurs on aura un terme congru à 1 modulo 3.

#### 4.3.3 Supposons qu'un prédécesseur soit de la forme $3 \cdot q_{k-1} + 2$

Soit  $n_{k-1}(q_k, m) = 2^{2m-1}q_k + Q_{2m} = 3 \cdot q_{k-1} + 2$ , il vient :

$$2^{2m+1} + Q_{2m+2} = 2^{2m+1}q_k + 4Q_{2m} + 1 \quad (43)$$

$$2^{2m+3} + Q_{2m+4} = 2^{2m+3}q_k + 16Q_{2m} + 5 \quad (44)$$

$$2^{2m+5} + Q_{2m+6} = 2^{2m+5}q_k + 64Q_{2m} + 21 \quad (45)$$

$$2^{2m+5} + Q_{2m+6} = 2^6 (2^{2m-1}q_k + Q_{2m}) + 21 \quad (46)$$

$$2^{2m+5} + Q_{2m+6} = 2^6 (3 \cdot q_{k-1} + 2) + 21 \quad (47)$$

$$2^{2m+5} + Q_{2m+6} = 2^6 3 \cdot q_{k-1} + 2^7 + 2^4 + 2^2 + 1 \quad (48)$$

En remarquant que  $2^7 + 2^4 + 2^2 + 1 = 2^4 (2^3 + 1) + 2^2 + 1$ , que  $2^3 + 1 = 3^2$  et que  $2^2 + 1 = (2^2 - 1) + 2 = 3 + 2$ , il vient :

$$2^{2m+5} + Q_{2m+6} = 3 (2^6 \cdot q_{k-1} + 2^4 \cdot 3 + 3 + 1) + 2 \quad (49)$$

$$2^{2m+5} + Q_{2m+6} = 3 (2^6 \cdot q_{k-1} + 52) + 2 \quad (50)$$

Le terme obtenu est bien congru à 2 modulo 3, on en déduit que tous les 3 prédécesseurs on aura un terme congru à 2 modulo 3.

Les prédécesseurs se présentent pour chaque nombre sous forme d'une alternance de triplet congrus à 0, 1 et 2 modulo 3. La représentation de ce résultat est donnée figure (Fig. 3).

q	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...
3q+1	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	...
	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	...
	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	...
	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	...
	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	...
	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	...
	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

q	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
3q+2	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	...
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	...
	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	...
	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	...
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	...
	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	...
	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

FIG. 3: Tableau des congruences modulo 3

Il est alors possible de construire de manière systématique les trajectoires qui mènent à 1 en suivant le chemin inverse de l'algorithme de Collatz.

## 5 Trajectoires de Collatz

### 5.1 Trajectoires par inversion de la suite de Collatz

En partant de  $q = 0$ , ce qui correspond au premier nombre  $3q + 1 = 1$ , on obtient la première liste de prédécesseurs qui sera constituée des diviseurs de Mersenne :

$$n_{k-1}(0, m) = 2^{2^m} \cdot 0 + Q_{2^m} = Q_{2^m} \quad (51)$$

La suite obtenue est une suite infinie qui commence par les termes 1, 5, 21, 85, 341, 1365, ... . Il est alors possible de construire les trajectoires en fonction de leur longueur (encore appelée temps de vol). En effet nous avons établi que les multiples de 3 n'ont pas de prédécesseurs et que dans les prédécesseurs de tout autre nombre impair il y a un multiple de 3 toutes les 3 valeurs. Ici

$21 = Q_6$  est un multiple de 3, il s'ensuit que tous les  $Q_{6m}$  sont multiples de 3 et qu'en partant de ces valeurs on obtient toutes les trajectoires qui aboutissent en 1 en une seule itération puisqu'on vérifie à chaque fois que  $3 \cdot Q_{6m} + 1 = 2^{6m}$ . Si l'on prend le voisin inférieur de  $Q_6$ , nous obtenons  $Q_4 = 5$  qui est congru à 2 modulo 3 il s'ensuit que tous les  $Q_{6m-2}$  sont congrus à 2 modulo 3. De même on peut aisément vérifier que tous les  $Q_{6m+2}$  sont congrus à 1 modulo 3.

Il est ainsi possible de remonter d'une étape à partir des valeurs congrues à 1 ou 2 modulo 3 et pour chacune d'entre elles on obtient une liste infinie de prédécesseurs de même constitution que la liste des prédécesseurs directs de 1 c'est à dire une infinité de multiples de 3 qui vont définir les trajectoires qui aboutissent à 1 en 2 itérations et une infinité de valeurs congrues à 1 ou 2 modulo 3 qui vont permettre de remonter d'une étape pour obtenir des trajectoires de longueur 3. Le processus peut être itéré à l'infini puisque la structure est la même à chaque étape, comme la liste des prédécesseurs ne se répète jamais on obtient ainsi toutes les trajectoires possibles sans qu'il ne puisse y avoir de boucles autre que celle du cas particulier de 1.

On en donne une illustration figure (Fig. 4) où les chiffres 0,1 et 2 correspondent à l'ensemble des prédécesseurs respectivement congrus à 0, 1 ou 2 modulo 3.

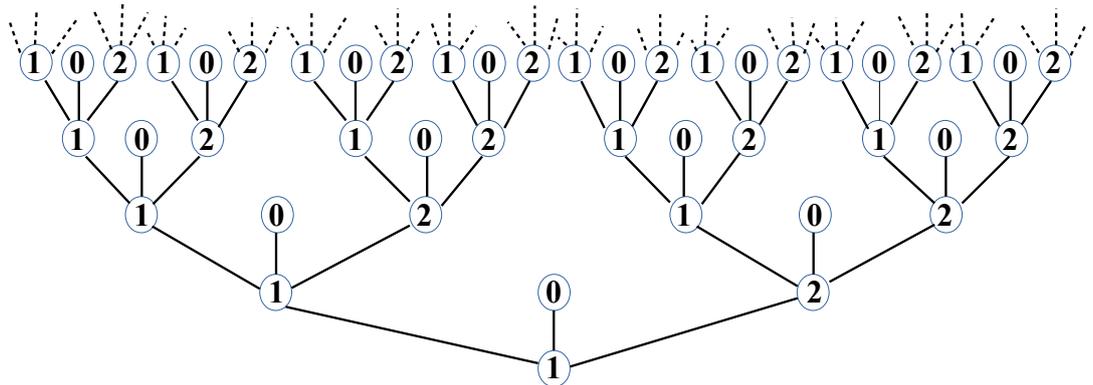


FIG. 4: Arbre des congruences

Il est alors possible de regrouper les congruences par étage. Ainsi en notant  $P_1(0)$ ,  $P_1(1)$  et  $P_1(2)$  les prédécesseurs de premier niveau du chiffre 1,  $P_2(0)$ ,  $P_2(1)$  et  $P_2(2)$  les ensembles de prédécesseurs des chiffres du premier niveau (i.e. les  $P_1(i)$ ) on obtient un diagramme concentré sous forme d'une tour où chaque niveau comprend le point de départ (i.e. les éléments de l'ensemble  $P_l(0)$ ) des trajectoires de longueur  $l$ , les éléments des ensembles  $P_l(1)$  et  $P_l(2)$  permettant de passer à l'étage  $l+1$ . On obtient ainsi une représentation du principe de l'algorithme de Collatz pour lequel toute trajectoire complète de longueur  $l$  débute par un élément d'un ensemble  $P_l(0)$  et suit un chemin vers le chiffre 1 qui prend de manière qui semble chaotique les valeurs des éléments des ensembles  $P_{l-i}(1)$  ou  $P_{l-i}(2)$ . Il existe une infinité de trajectoires de longueur entière  $l \in \mathbb{N}^*$ .

Une représentation graphique en est donnée figure (Fig. 5) où  $T_l$  représente le niveau de départ d'une trajectoire de longueur  $l$ .

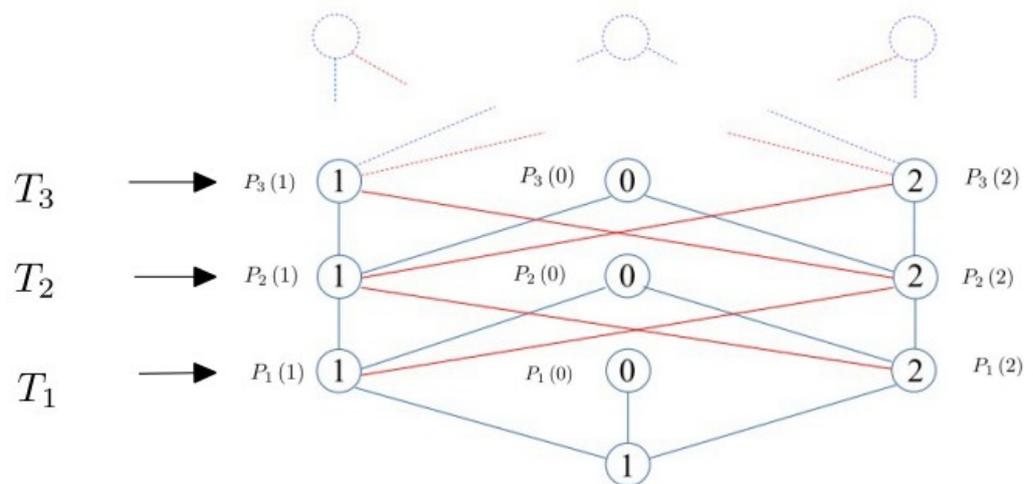


FIG. 5: Tour des congruences

Le processus est parfaitement déterministe toutes les trajectoires sont construites à l'aide d'une suite d'itérations à partir de 1. On obtient ainsi l'ensemble des trajectoires convergentes, il reste à montrer qu'il n'existe pas d'autres possibilités.

Compte-tenu des relations prédécesseurs-successeurs il est possible de tenter une interprétation simple de l'apparence de trajectoire croissante, deux interprétations en sont données en Annexe B. À partir de ces deux interprétations nous proposons une autre interprétation de la suite de Collatz.

## 6 Autre écriture de la suite de Collatz

### 6.1 Nouvel algorithme

En remarquant qu'une écriture générique possible d'un nombre impair est  $2^l p - 1$  où  $p$  est un nombre impair quelconque, l'application de la relation définie par Collatz implique :

$$3(2^l p - 1) + 1 = 3 \cdot 2^l p - 2 = 2(2^{l-1} \cdot 3p - 1) \quad (52)$$

Il en résulte que  $2^l p - 1$  étant un nombre d'une trajectoire de Collatz, son successeur sera  $2^{l-1} \cdot 3p - 1$ , le suivant  $2^{l-2} \cdot 3^2 p - 1$  jusqu'à  $2 \cdot 3^{l-1} p - 1$ . En effet si on applique la relation à ce dernier terme on obtient  $2(3^l p - 1)$  terme dans lequel  $3^l p - 1$  est un nombre pair qu'il faut diviser suffisamment par 2 pour trouver le terme impair suivant de la trajectoire.

$n_0$	$9 = 2 \cdot 5 - 1$	
	$(3/2) \cdot 2 \cdot 5 = 15$	
$n_1$	$(15 - 1)/2 = 7 = 2^3 - 1$	
	$(3/2) \cdot 2^3 = 12 = 2^2 \cdot 3$	
$n_2$	$12 - 1 = 11$	
	$(3/2) \cdot 2^2 \cdot 3 = 18 = 2 \cdot 3^2$	
$n_3$	$18 - 1 = 17$	
	$(3/2) \cdot 2 \cdot 3^2 = 27$	
$n_4$	$(27 - 1)/2 = 13 = 2 \cdot 7 - 1$	
	$(3/2) \cdot 2 \cdot 7 = 21$	
$n_5$	$(21 - 1)/2^2 = 5 = 2 \cdot 3 - 1$	
	$(3/2) \cdot 2 \cdot 3 = 9$	
$n_6$	$(9 - 1)/2^3 = 1$	

TAB. 2: Calcul de trajectoire avec le nouvel algorithme

Le résultat donne une trajectoire identique à celle obtenue par l'algorithme de Collatz (9, 7, 11, 17, 13, 5, 1) ce que l'on peut vérifier pour n'importe quel exemple comme sur la figure (Fig. 6) qui montre la concordance des trajectoires pour la valeur initiale 27.

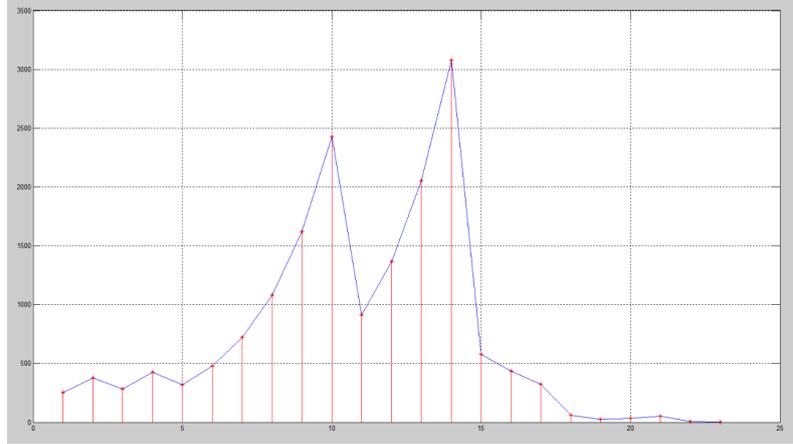


FIG. 6: Trajectoires : Collatz (bleu), Nouveau (rouge)

On en déduit une interprétation plus simple de la suite de Collatz. Il suffit de considérer la partie paire  $2^l p$  du nombre impair  $2^l p - 1$ , tant que  $l > 1$  il suffit de multiplier cette partie paire par  $3/2$  et de soustraire 1 pour obtenir le nombre impair suivant de la trajectoire. Lorsque  $l = 1$ , la multiplication par  $3/2$  et la soustraction de 1 donne le résultat  $3^l p - 1$ , ce qui est exactement la moitié de ce que l'on obtient avec la relation de Collatz (cf eq. 52).

Comme il a été montré précédemment que la relation de Collatz amenait à la convergence lorsque  $3n+1 = 2^{2m}$ , dans cette nouvelle interprétation, il y aura convergence si  $3^l p - 1 = 2^{2m-1}$ . Ce dernier résultat est en accord avec le théorème stipulant que toute expression  $(a^n + 1)$  est divisible par  $(a + 1)$  si  $n$  est impair. De manière plus générale, seuls les termes impairs s'écrivant  $2p - 1$  et qui sont aussi les termes finaux des trajectoires croissantes permettent d'atteindre un terme pair de la forme  $3p - 1$  qui peut prendre la valeur  $2^{2m-1}$ .

En notant  $P_{2m-1}$  les nombres impairs tels que  $2^{2m-1} = 3P_{2m-1} - 1$ , on en déduit simplement que :

$$2P_{2m-1} - 1 = Q_{2m} \quad (53)$$

La relation donnée par l'équation (eq. 53) est en accord avec ce qui précède dans la mesure où, si on applique la relation de Collatz, on obtient :

$$3(2P_{2m-1} - 1) + 1 = 3Q_{2m} + 1 = 2^{2m} \quad (54)$$

## 6.2 Etude de la divergence

Pour qu'une suite de Collatz soit divergente cela ne peut se produire qu'avec une suite croissante. Ceci correspond à une valeur initiale de la forme  $2^l p - 1$  qui donne une suite croissante de longueur  $l$ . La nouvelle formulation de l'algorithme montre que cela revient à partir du nombre pair  $2^l p$  et de le multiplier par  $3/2$  tant que le résultat reste pair la suite associée  $2^{l-k} 3^k p - 1$  étant la suite de nombres impairs définie par Collatz. Le processus est donc possible  $l$  fois et se termine en  $3^l p$  qui selon Collatz est équivalent au nombre pair  $3^l p - 1$  qu'il faut diviser par 2 autant que nécessaire pour déterminer le nombre impair suivant de la suite. Cette procédure est toujours vraie quelque soit la valeur de  $l$ , de plus comme il a été montré par la procédure d'inversion tout nombre impair non multiple de 3 possède une infinité de prédécesseurs, cela signifie que chaque terme d'une suite croissante possède une infinité de prédécesseurs qui lui sont supérieurs en valeur et donc supérieurs au dernier terme de la suite croissante. Ceci est en contradiction avec la notion de divergence.

On en déduit que les parties croissantes des trajectoires de Collatz sont de longueur  $l$ , où  $l$  représente l'exposant de 2 de la partie paire du nombre  $2^l p - 1$ , et que les parties décroissantes correspondent à des suites de nombres de la forme  $2p - 1$ . L'algorithme de Collatz peut donc être interprété comme une recherche des termes impairs de la forme  $2P_{2^m-1} - 1$ , en utilisant alternativement des trajectoires croissantes et des trajectoires décroissantes. Dans la mesure où il n'existe pas de trajectoire divergente cette recherche sera exhaustive si elle ne se termine pas sur un cycle autre que le cycle  $1 \longleftrightarrow 1$  (encore appelé  $4 - 2 - 1$ ).

## 7 Non existence de cycles

Si on suppose l'existence d'un cycle de longueur  $L$ , cela se traduit par une suite de  $L$  équations sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 2^{\gamma_1} n_1 &= 3n_0 + 1 \\ 2^{\gamma_2} n_2 &= 3n_1 + 1 \\ &\vdots \\ 2^{\gamma_k} n_k &= 3n_{k-1} + 1 \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} 2^{\gamma_{L-1}} n_{L-1} &= 3n_{L-2} + 1 \\ 2^{\gamma_L} n_L &= 2^{\gamma_0} n_0 = 3n_{L-1} + 1 \end{aligned}$$

Puisque nous avons affaire à un cycle les indices sont définis modulo  $L$ , on peut exprimer chaque nombre  $n_k$  sous forme générique puisque la substitution peut s'effectuer en partant de n'importe quel nombre du cycle. On obtient :

$$n_k = \frac{3^{L-1} + 3^{L-2} 2^{\gamma_{k+1}} + 3^{L-3} 2^{\sum_{i=1}^2 \gamma_{k+i}} + \dots + 3 \cdot 2^{\sum_{i=1}^{L-2} \gamma_{k+i}} + 2^{\sum_{i=1}^{L-1} \gamma_{k+i}}}{2^{\sum_{i=0}^{L-1} \gamma_i} - 3^L}$$

Pour qu'un cycle puisse exister il faut vérifier que les  $n_k$  ainsi définis puissent satisfaire à une suite décroissante  $n_k = 2p - 1$  suivi de  $2^{\gamma_{k+1}} n_{k+1} = 2(3p - 1)$ , où  $\gamma_{k+1} > 1$ , et à une suite croissante  $n_k = 2^l p - 1$  suivi de  $n_{k+1} = 2^{l-1} 3p - 1$ .

### 7.1 Cas d'une suite décroissante

Notons  $N_k$  le numérateur de  $n_k$  et  $D = 2^{\sum_{i=0}^{L-1} \gamma_i} - 3^L$  le dénominateur qui est le même pour toutes les valeurs de la suite du cycle supposé. Nous en déduisons :

$$n_k = \frac{N_k}{D} = 2p - 1 \implies p = \frac{N_k + D}{2 \cdot D} \quad (56)$$

$$2^{\gamma_{k+1}} n_{k+1} = 2(3p - 1) \implies p = \frac{2^{\gamma_{k+1}} N_{k+1} + 2}{2 \cdot 3 \cdot D} \quad (57)$$

Par égalité des deux expressions précédentes cela revient à vérifier que l'équation  $2^{\gamma_{k+1}} N_{k+1} - 3N_k = D$  possède des solutions. Nous avons d'une part :

$$2^{\gamma_{k+1}} N_{k+1} = 3^{L-1} 2^{\gamma_{k+1}} + 3^{L-2} 2^{\sum_{i=1}^2 \gamma_{k+i}} + \dots + 3 \cdot 2^{\sum_{i=1}^{L-1} \gamma_{k+i}} + 2^{\sum_{i=1}^L \gamma_{k+i}}$$

et d'autre part :

$$3N_k = 3^L + 3^{L-1} 2^{\gamma_{k+1}} + 3^{L-2} 2^{\sum_{i=1}^2 \gamma_{k+i}} + \dots + 3 \cdot 2^{\sum_{i=1}^{L-1} \gamma_{k+i}}$$

La soustraction de ces deux expressions permet de vérifier que l'égalité  $2^{\gamma_{k+1}} N_{k+1} - 3N_k = D$  est toujours vérifiée puisqu'il ne reste que les termes extrêmes  $2^{\sum_{i=1}^L \gamma_{k+i}} - 3^L$  et que  $2^{\sum_{i=1}^L \gamma_{k+i}} = 2^{\sum_{i=0}^{L-1} \gamma_i}$  dans la mesure où les indices sont calculés modulo  $L$ . Comme cette relation peut être vérifiée indépendamment de l'indice  $k$  et de la longueur  $L$  on peut en conclure que la suite des  $n_k$  est toujours décroissante et que les  $\gamma_k$  sont tous égaux, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de l'existence d'un cycle.

## 7.2 Cas d'une suite croissante

En reprenant la même terminologie, nous avons :

$$n_k = \frac{N_k}{D} = 2^l p - 1 \implies p = \frac{N_k + D}{2^l \cdot D} \quad (58)$$

$$n_{k+1} = \frac{N_{k+1}}{D} = 2^{l-1} 3p - 1 \implies p = \frac{N_{k+1} + D}{2^{l-1} 3 \cdot D} \quad (59)$$

Par égalité des deux expressions précédentes cela revient à vérifier que l'équation  $2N_{k+1} - 3N_k = D$  possède des solutions, ce qui est immédiat puisque cette expression est la même que pour une suite décroissante mais avec  $\gamma_{k+1} = 1$ . Comme cette relation peut être vérifiée indépendamment de l'indice  $k$  et de la longueur  $L$  on peut en conclure que la suite des  $n_k$  est toujours croissante et que les  $\gamma_k$  sont tous égaux à 1, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de l'existence d'un cycle.

Les résultats précédents montrent que l'hypothèse d'un cycle autre que le cycle  $1 \leftrightarrow 1$  est erronée. Si l'on additionne tous les termes de la suite d'équations définie par (eq. 55), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{L-1} (2^{\gamma_k} - 3)n_k = L \quad (60)$$

D'après ce qui précède, tous les  $\gamma_k$  sont égaux ce qui exclut  $\gamma_k = 1$ . Pour  $\gamma_k > 1$ , la somme de  $L$  termes positifs n'est égale à  $L$  que si chaque terme est égal à 1. On obtient donc la seule solution :

$$2^2 \mathbf{1} = 3 \cdot \mathbf{1} + 1 \quad (61)$$

## 8 Conclusion

On peut en conclure que la conjecture de Collatz est exacte. La méthode proposée pour le montrer repose sur le fait d'avoir pu exprimer l'algorithme sous une forme qui permet de caractériser le sens de variation des trajectoires. Il est ainsi possible de démontrer la non existence de cycles et d'interpréter la convergence vers 1 de toute trajectoire. De plus, nous avons proposé une méthode d'inversion de trajectoire à l'aide d'une nouvelle représentation des nombres impairs basée sur l'utilisation d'une partie des nombres de Mersenne notés  $2^{2^m} - 1$  et qui ont la particularité d'être tous des multiples de 3, propriété rarement utilisée contrairement au caractère de primalité de l'autre partie des nombres de Mersenne notés  $2^{2^{m+1}} - 1$ . La partition du sous ensemble des nombres impairs qui en découle permet de calculer de manière exhaustive toutes les trajectoires possibles en remontant à partir de 1 et justifie la représentation de la tour des congruences représentée à la figure (Fig. 5).

On trouvera dans les références suivantes, Lagarias [2003], Lagarias [2012], Pochon and Favre [2021] et Tao [2011], un état suffisamment exhaustif des travaux concernant les études sur la suite de Collatz (Syracuse).

## A Écriture des nombres impairs

Il est possible de définir une écriture équivalente aux nombres impairs égaux à 0, 1, ou 2 modulo 3 à partir de la relation définie par Collatz.

### A.1 $n_0 = 3q_0$ , où $q_0$ est impair

Dans ce cas la première itération de la suite de Collatz est donnée par :

$$2^\gamma n_1 = 3^2 q_0 + 1 \quad (62)$$

#### A.1.1 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$ , $\gamma = 2m - 1$ et $q_1$ pair

Alors :

$$2^{2m-1} (3q_1 + 1) = 3^2 q_0 + 1 \quad (63)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m-1} q_1 + \frac{2^{2m-1} - 1}{3} \quad (64)$$

L'équation (64) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m-1} - 1$  n'est pas divisible par 3.

#### A.1.2 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$ , $\gamma = 2m$ et $q_1$ pair

Alors :

$$2^{2m} (3q_1 + 1) = 3^2 q_0 + 1 \quad (65)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m}q_1 + \frac{2^{2m} - 1}{3} \quad (66)$$

L'équation (66) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$  est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m}q_1 + Q_{2m} \quad \text{où } q_1 \text{ est pair} \quad (67)$$

### A.1.3 Cas $n_1 = 3q_1 + 2$ , $\gamma = 2m - 1$ et $q_1$ impair

Alors :

$$2^{2m-1}(3q_1 + 2) = 3^2q_0 + 1 \quad (68)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m-1}q_1 + \frac{2^{2m} - 1}{3} \quad (69)$$

L'équation (69) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$  est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m}q_1 + Q_{2m} \quad \text{où } q_1 \text{ est impair} \quad (70)$$

### A.1.4 Cas $n_1 = 3q_1 + 2$ , $\gamma = 2m$ et $q_1$ impair

Alors :

$$2^{2m}(3q_1 + 2) = 3^2q_0 + 1 \quad (71)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m}q_1 + \frac{2^{2m+1} - 1}{3} \quad (72)$$

L'équation (72) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m+1} - 1$  n'est pas divisible par 3.

## A.2 $n_k = 3q_k + 1$ , $\gamma = 2m$ et $q_k$ pair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m}(3q_k + 1) = 3n_{k-1} + 1 \quad (73)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m}3q_k + 2^{2m} - 1}{3} \quad (74)$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne :  $M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$ , alors (74) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = 2^{2m}q_k + Q_{2m} \quad (75)$$

### A.3 $n_k = 3q_k + 1$ , $\gamma = 2m - 1$ et $q_k$ pair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m-1}(3q_k + 1) = 3n_{k-1} + 1 \quad (76)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m-1}3q_k + 2^{2m-1} - 1}{3} \quad (77)$$

Dans la mesure où  $M_{2m-1} = 2^{2m-1} - 1$ , n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

### A.4 $n_k = 3q_k + 2$ , $\gamma = 2m$ et $q_k$ impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m}(3q_k + 2) = 3n_{k-1} + 1 \quad (78)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m}3q_k + 2^{2m+1} - 1}{3} \quad (79)$$

Dans la mesure où  $M_{2m+1} = 2^{2m+1} - 1$ , n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

### A.5 $n_k = 3q_k + 2$ , $\gamma = 2m - 1$ $q_k$ impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m-1}(3q_k + 2) = 3n_{k-1} + 1 \quad (80)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m-1}3q_k + 2^{2m} - 1}{3} \quad (81)$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne  $M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$ , alors (81) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = 2^{2m-1}q_k + Q_{2m} \quad (82)$$

En conclusion pour toute valeur  $n_k$  impaire :

- $n_0 = 3q_0$  : alors  $n_0$  est le début d'une trajectoire dont le terme suivant est de la forme  $3q_1 + 1$  ou de la forme  $3q_1 + 2$  selon les équations (67) ou (70).
- $n_k = 3q_k + 1$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (75) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est pair et  $\gamma = 2m$ .
- $n_k = 3q_k + 2$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (82) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est impair et  $\gamma = 2m - 1$ .

## B Trajectoires croissantes

### B.1 Première méthode

Une suite croissante est obtenue par une succession de  $n_k$  défini par :

$$2n_k = 3n_{k-1} + 1 \quad (83)$$

C'est le seul cas où  $n_k > n_{k-1}$ . Réécrivons (eq. 83) sous la forme :

$$n_k = (3n_{k-1} + 1)/2 \quad (84)$$

Ajoutons 1 à chaque membre de l'égalité, il vient :

$$(n_k + 1) = \frac{3}{2}(n_{k-1} + 1) \quad (85)$$

Il résulte de l'équation (eq. 85) qu'une suite est croissante si il existe une suite  $y_k$  de nombres pairs définie par  $y_k = \frac{3}{2}y_{k-1}$ , avec  $y_k = n_k + 1$ . Il ne peut y avoir divergence que si la suite  $y_k$  diverge ce qui n'est envisageable que si  $y_0$  est elle même une valeur infinie, car toute valeur finie de  $y_0$  ne peut donner qu'une suite de longueur finie, donc non divergente.

Ceci suppose l'existence d'un nombre particulier, ce qui est contradictoire au fait que tout nombre impair appartient à l'infinité de prédécesseurs d'un même nombre quelque soit la valeur de celui-ci. De plus dans la liste des prédécesseurs le nombre qui vérifie la relation (eq. 83) est le plus petit prédécesseur en valeur. Il y a donc une infinité de trajectoires provenant de valeurs supérieures à chaque nombre de la suite croissante, cette suite croissante possède donc une valeur maximale même si celle-ci semble d'ordre infini.

### B.2 Deuxième méthode

Une trajectoire croissante correspond à une suite définie par l'équation (eq. 12) dans laquelle  $m = 1$ , de façon à obtenir un successeur de valeur supérieure. Pour qu'une trajectoire soit divergente, il faut que la suite des valeurs obtenues soit toujours de ce type :

$$2n_k = 3n_{k-1} + 1 \quad (86)$$

Si l'on définit comme point de départ  $k = 1$ , la suite obtenue s'écrit :

$$\begin{aligned} 2n_1 &= 3n_0 + 1 \\ 2n_2 &= 3n_1 + 1 \\ &\vdots \\ 2n_k &= 3n_{k-1} + 1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (87)$$

Dans cette suite, sauf éventuellement  $n_0$ , toutes les valeurs sont de la forme  $n_k = 3q_k + 2$ , et la règle de construction des prédécesseurs permet d'écrire également :

$$\begin{aligned} n_0 &= 2q_1 + 1 \\ n_1 &= 2q_2 + 1 = 3q_1 + 2 \\ &\vdots \\ n_{k-1} &= 2q_k + 1 = 3q_{k-1} + 2 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{88}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 2q_2 &= 3q_1 + 1 \\ 2q_3 &= 3q_2 + 1 \\ &\vdots \\ 2q_k &= 3q_{k-1} + 1 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{89}$$

On obtient des relations équivalentes sur les  $q_k$  qui définissent donc une suite croissante, dans laquelle chaque  $q_k$  est de la forme  $q_k = 3r_k + 2$  et on peut itérer ainsi jusqu'à une valeur minimum dans la mesure où  $r_k$  satisfait aux mêmes relations que les  $q_k$

Définissons la suite  $q_{k,l}$  par  $q_{k,l} = 3q_{k,l-1} + 2$ , par itération on obtient :

$$q_{k,l} = \frac{n_k - 2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{l-1})}{3^l} \tag{90}$$

Comme  $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{l-1} = (3^l - 1)/2$ , il vient :

$$q_{k,l} = \frac{n_k + 1 - 3^l}{3^l} \tag{91}$$

$q_{k,l}$  n'est un nombre entier que si  $n_k + 1$  est un multiple de  $3^l$ , on en déduit :

$$n_k + 1 = 3^l y_k \tag{92}$$

En remplaçant  $n_k$  par son équivalent dans (eq. 86) on obtient :

$$2(3^l y_k - 1) = 3(3^l y_{k-1} - 1) + 1 \tag{93}$$

Soit :

$$y_k = \frac{3}{2} y_{k-1} \tag{94}$$

L'équation (eq. 94) est équivalente à l'équation (eq. 85) et conduit donc au même résultat. On obtiendra une solution de suite croissante tant que  $y_k$  sera un nombre entier pair.

Cela est possible si on commence en  $y_0$  par un nombre pair avec une puissance de 2 suffisante. En choisissant  $y_0 = 2^l p$ , avec  $p$  un nombre impair quelconque, on obtiendra une suite croissante de longueur  $l$ .

$$\begin{aligned}
 y_0 = 2^l p &\Rightarrow n_0 = 2^l p - 1 \\
 y_1 = 3 \cdot 2^{l-1} p &\Rightarrow n_1 = 3 \cdot 2^{l-1} p - 1 \\
 &\vdots \\
 y_{l-1} = 3^{l-1} \cdot 2p &\Rightarrow n_{l-1} = 3^{l-1} \cdot 2p - 1
 \end{aligned} \tag{95}$$

Le terme suivant  $y_l = 3^l p$  étant impair, le terme  $n_l$  n'est pas obtenu à l'aide des relations définies par (eq. 95) mais par la relation  $3n_{l-1} + 1$ , ainsi le terme  $n_{l-1}$  est un maximum de la partie croissante de la trajectoire.

Pour que la suite soit plus longue il faudrait augmenter la puissance de 2 dans  $y_0$ , mais il est clair que par construction, la suite  $3^k 2^{l-k} p$  deviendra nécessairement impaire après  $l$  itérations et dans ces conditions le caractère croissant de la suite s'arrêtera.

Pour l'exemple, on donne les valeurs numériques de suites obtenues à l'aide de la méthode exposée, ce qui permet de vérifier que l'on obtiendrait les mêmes suites en adoptant la notation de Collatz.

Exemple avec  $p = 1$ ,  $l = 6$  :

$y_0 = 2^6$	$n_0 = 2^6 - 1 = 63$
$y_1 = 3 \cdot 2^5$	$n_1 = 3 \cdot 2^5 - 1 = 95 = \frac{3 \cdot 63 + 1}{2}$
$y_2 = 3^2 \cdot 2^4$	$n_2 = 3^2 \cdot 2^4 - 1 = 143 = \frac{3 \cdot 95 + 1}{2}$
$y_3 = 3^3 \cdot 2^3$	$n_3 = 3^3 \cdot 2^3 - 1 = 215 = \frac{3 \cdot 143 + 1}{2}$
$y_4 = 3^4 \cdot 2^2$	$n_4 = 3^4 \cdot 2^2 - 1 = 323 = \frac{3 \cdot 215 + 1}{2}$
$y_5 = 3^5 \cdot 2^1$	$n_5 = 3^5 \cdot 2 - 1 = 485 = \frac{3 \cdot 323 + 1}{2}$
$y_6 = 3^6$ , impair	fin de la suite croissante : $n_6 = \frac{3 \cdot 485 + 1}{2^4} = 91$

Exemple avec  $p = 7$ ,  $l = 6$  :

$y_0 = 2^6 \cdot 7$	$n_0 = 2^6 \cdot 7 - 1 = 447$
$y_1 = 3 \cdot 2^5 \cdot 7$	$n_1 = 3 \cdot 2^5 \cdot 7 - 1 = 671 = \frac{3 \cdot 447 + 1}{2}$
$y_2 = 3^2 \cdot 2^4 \cdot 7$	$n_2 = 3^2 \cdot 2^4 \cdot 7 - 1 = 1007 = \frac{3 \cdot 671 + 1}{2}$
$y_3 = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 7$	$n_3 = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 7 - 1 = 1511 = \frac{3 \cdot 1007 + 1}{2}$
$y_4 = 3^4 \cdot 2^2 \cdot 7$	$n_4 = 3^4 \cdot 2^2 \cdot 7 - 1 = 2267 = \frac{3 \cdot 1511 + 1}{2}$
$y_5 = 3^5 \cdot 2^1 \cdot 7$	$n_5 = 3^5 \cdot 2 \cdot 7 - 1 = 3401 = \frac{3 \cdot 2267 + 1}{2}$
$y_6 = 3^6 \cdot 7$ , impair	fin de la suite croissante : $n_6 = \frac{3 \cdot 3401 + 1}{2^4} = 2551$

## Références

- Jeffrey. C. Lagarias. The  $3x+1$  problem : An annotated bibliography (1963-1999). 2003. eprint : arxiv :math.NT/0309224 Sept. 13, 2003, v11.
- Jeffrey. C. Lagarias. The  $3x+1$  problem : An annotated bibliography, ii (2000-2009). 2012. eprint : arxiv :math.NT/0608208v6 Feb. 12, 2012.
- Luc. O. Pochon and A. Favre. La suite de Syracuse, un monde de conjectures. "<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01593181>", 2021.
- T. Tao. The collatz conjecture, littlewood-offord theory, and powers of 2 and 3. 2011. "<https://terrytao.wordpress.com/2011/08/25/>".