



# Mersenne et la conjecture de Collatz

Jacques Prado

## ► To cite this version:

| Jacques Prado. Mersenne et la conjecture de Collatz. 2021. hal-03195174v6

**HAL Id: hal-03195174**

**<https://hal.science/hal-03195174v6>**

Preprint submitted on 4 Dec 2021 (v6), last revised 29 Jul 2023 (v10)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mersenne et la conjecture de Collatz

*J. Prado*

4 décembre 2021

## Abstract

By giving a different interpretation of the Collatz conjecture, also called the Syracuse conjecture or the  $3n + 1$  conjecture, it is possible to approach the problem differently. This new formulation allows us to replace the notion of convergence to 1 by a convergence to the divisors  $Q_{2^m}$  of the Mersenne numbers defined by  $M_{2^m} = 2^{2^m} - 1 = 3 \cdot Q_{2^m}$ . The purpose of this submission is to present the conjecture in a form which does not seem to have been explored until today. This approach allows the construction of convergent trajectories by inversion of the Collatz relation and thus leads to a partition of the odd numbers which implies the truth of the conjecture.

## Résumé

En donnant une interprétation différente de la conjecture de Collatz, aussi dite conjecture de Syracuse ou encore conjecture  $3n + 1$ , il est possible d'aborder différemment le problème. Cette nouvelle formulation permet de remplacer la notion de convergence vers 1 par une convergence vers les diviseurs  $Q_{2^m}$  des nombres de Mersenne définis par  $M_{2^m} = 2^{2^m} - 1 = 3 \cdot Q_{2^m}$ . Cette soumission a pour but de présenter la conjecture sous une forme qui ne semble pas avoir été explorée jusqu'à aujourd'hui. Cette approche permet de construire les trajectoires convergentes par inversion de la relation de Collatz et conduit ainsi à une partition des nombres impairs ce qui implique la véracité de la conjecture.

## 1 Introduction

Nous rappelons que la conjecture de Collatz est liée à la suite d'entiers positifs définis par les relations suivantes :

$$f(n) = \begin{cases} 3n + 1 & \text{si } n \text{ impair,} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases} \quad (1)$$

La conjecture de Collatz dit que pour tout  $n$  la suite se termine toujours en 1. Les valeurs paires de  $n$  n'étant pas représentatives des propriétés de convergences, il est possible de reformuler (1) en ne faisant apparaître que les valeurs impaires de  $n$  ce qui s'écrit :

$$2^\gamma n_k = 3n_{k-1} + 1 \quad (2)$$

Où les  $n_k$  sont tous des entiers positifs impairs. On en déduit simplement que si  $n_k = 1$ , alors :

$$n_{k-1} = \frac{2^\gamma - 1}{3} \quad (3)$$

L'équation (3) n'a de solution que si  $(2^\gamma - 1)$  est divisible par 3. En écrivant  $3 = (2^2 - 1)$  on est ramené à la solution simple :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m}-1}{2^2-1} \quad (4)$$

où  $(2^{2m} - 1) = M_{2m}$  est un nombre de Mersenne défini par  $M_p = (2^p - 1)$  qui est divisible par 3 quand  $p$  est pair.

Cela permet de remplacer la convergence vers 1 par une convergence vers les diviseurs de Mersenne notés  $Q_{2m}$  définis par :

$$2^{2m} - 1 = 3 \cdot Q_{2m} \quad (5)$$

Lorsque  $n_k \neq 1$  alors (3) devient :

$$n_{k-1} = \frac{2^\gamma n_k - 1}{3} \quad (6)$$

De manière évidente (6) n'a pas de solution si  $n_k$  est un multiple de 3. Dans ces conditions,  $n_k$  étant impair ne peut prendre que les formes suivantes :

$$\begin{cases} n_k = 3q_k + 1 & \text{où } q_k \text{ est pair} \\ n_k = 3q_k + 2 & \text{où } q_k \text{ est impair} \end{cases} \quad (7)$$

De même,  $\gamma$  peut être pair ( $\neq 0$ ) ou impair :  $\begin{cases} \gamma = 2m \\ \gamma = 2m - 1 \end{cases}$

On est donc ramené à l'étude de :

$$\begin{aligned} 2^\lambda \cdot (3q_k + 1) &= 3 \cdot n_{k-1} + 1 \\ 2^\lambda \cdot (3q_k + 2) &= 3 \cdot n_{k-1} + 1 \end{aligned} \quad (8)$$

On remarque que la convergence au sens de Collatz, ne peut être obtenue qu'à l'aide de la relation  $2^\lambda \cdot (3q_k + 1) = 3 \cdot n_{k-1} + 1$ , dans laquelle  $\lambda = 2m$  et  $q_k = 0$ , nous avons alors  $n_{k-1} = Q_{2m}$ . Tant que  $n_{k-1}$  est différent de  $Q_{2m}$ , les relations données par (eq. 8) sont valables pour  $q_k$  pair si  $n_k = 3q_k + 1$  et  $q_k$  impair si  $n_k = 3q_k + 2$ .

## 2 Nouvelle écriture des nombres impairs

À partir de ce qui précède il est possible de définir une écriture équivalente aux nombres impairs égaux à 0, 1, ou 2 modulo 3 à partir de la relation définie par Collatz. Si dans la relation  $2^\lambda \cdot (3q_k + 1)$  on remplace  $\lambda$  par  $2m$  et en développant on obtient :

$$2^\lambda (3q_k + 1) = 2^{2m} \cdot 3 \cdot q_k + 2^{2m} \quad (9)$$

À l'aide des nombres de Mersenne,  $2^{2m} = 3Q_{2m} + 1$ , cela donne l'égalité :

$$2^{2m} \cdot 3 \cdot q_k + [2^{2m}] = 3 \cdot 2^{2m} \cdot q_k + [3 \cdot Q_{2m} + 1] \quad (10)$$

Soit :

$$2^{2m}(3 \cdot q_k + 1) = 3(2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \quad (11)$$

Cette relation montre que si  $n_k = 3q_k + 1$  alors tout prédécesseur s'écrit  $n_{k-1} = 2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m}$ , avec  $q_k$  pair.

On peut montrer de même que si  $n_k = 3q_k + 2$  alors  $n_{k-1} = 2^{2m-1} \cdot q_k + Q_{2m}$ , avec  $q_k$  impair.

$$2^{2m-1}(3 \cdot q_k + 2) = 3(2^{2m-1} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \quad (12)$$

En conclusion si dans la suite des valeurs  $n_k$  toutes impaires :

- $n_k = 3q_k + 1$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (11) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est pair et  $\gamma = 2m$ .
- $n_k = 3q_k + 2$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (12) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est impair et  $\gamma = 2m - 1$ .

|                      |                   |                                                                       |
|----------------------|-------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $n_k = 3n_{k-1} + 1$ | $\Leftrightarrow$ | $n_{k-1} \in \{3q_{k-1}, 3q_{k-1} + 1, 3q_{k-1} + 2\}$                |
| $2^{2m-1}(3q_k + 2)$ | $=$               | $3n_{k-1} + 1 = 3(2^{2m-1}q_k + Q_{2m}) + 1$ si $n_{k-1} \neq Q_{2m}$ |
| $2^{2m}(3q_k + 1)$   | $=$               | $3n_{k-1} + 1 = 3(2^{2m}q_k + Q_{2m}) + 1$ si $n_{k-1} \neq Q_{2m}$   |
| $2^{2m}(1)$          | $=$               | $3Q_{2m} + 1$ si $n_{k-1} = Q_{2m}$                                   |

TAB. 1: Équivalence d'écriture

Il n'y a pas d'autres possibilités, on en trouvera la démonstration en annexe (Annexe A) et les résultats sont résumés dans le tableau (Tab. 1) où  $Q_{2m} = (2^{2m} - 1)/3$ .

### 3 Trajectoires de Collatz convergentes

Ce qui précède permet de définir une équivalence entre deux écritures des nombres impairs et d'effectuer la liaison par l'intermédiaire de l'expression  $3n + 1$ .

Cette correspondance des écritures est valable pour tout nombre impair. Elle définit une inversion de la relation des suites de Collatz et permet donc de construire par le calcul l'ensemble des trajectoires convergentes en partant de l'un des points de convergence possible représentés par les  $Q_{2m}$ .

Nous donnons quelques exemples de construction des termes impairs prédécesseurs des valeurs  $Q_{2m}$  vrais pour  $m = [1, 2, \dots, \infty[$  :

|          |   |    |    |     |      |      |     |
|----------|---|----|----|-----|------|------|-----|
| $m$      | 1 | 2  | 3  | 4   | 5    | 6    | ... |
| $M_{2m}$ | 3 | 15 | 63 | 255 | 1023 | 4095 | ... |
| $Q_{2m}$ | 1 | 5  | 21 | 85  | 341  | 1365 | ... |

TAB. 2: Points de départ des trajectoires inverses

Les valeurs de  $Q_{2m}$  en italique correspondent à des trajectoires à un seul terme puisqu'elles sont multiples de 3. La première valeur  $Q_2 = 1$  correspond au cycle 4 : 2 : 1 puisque l'on a :

$$2^2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 1 \quad (13)$$

Prenons les prédécesseurs de  $Q_4 = 5$ , comme 5 est de la forme  $3q + 2 = 3 \cdot 1 + 2$ , alors les prédécesseurs immédiats ont la forme donnée par la relation (cf Tab.1) avec  $q_k = 1$  :

$$n_{k-1} = 2^{2m-1} \cdot 1 + Q_{2m} \quad (14)$$

Soit :

| $m$            | 1                   | 2                      | 3                       | ... |
|----------------|---------------------|------------------------|-------------------------|-----|
| <i>préd(5)</i> | $2 \cdot 1 + 1 = 3$ | $2^3 \cdot 1 + 5 = 13$ | $2^5 \cdot 1 + 21 = 53$ | ... |

TAB. 3: Prédécesseurs du nombre  $Q_4 = 5$

Il y a une infinité de prédécesseurs et pour chaque prédécesseur qui n'est pas multiple de 3 on peut recommencer la procédure. Ainsi avec la valeur 13 de la forme  $3q + 1 = 3 \cdot 4 + 1$ , on déduit ses prédécesseurs qui prennent les formes données par la relation (cf Tab. 1) avec  $q_k = 4$  :

Soit :

| $m$             | 1                      | 2                      | 3                         | ... |
|-----------------|------------------------|------------------------|---------------------------|-----|
| <i>préd(13)</i> | $2^2 \cdot 4 + 1 = 17$ | $2^4 \cdot 4 + 5 = 69$ | $2^8 \cdot 4 + 21 = 1045$ | ... |

TAB. 4: Prédécesseurs du nombre 13

On construit progressivement toutes les valeurs qui vont former des trajectoires finissant en 5 c'est à dire convergeront vers 1.

Dans l'exemple qui précède, pour construire la trajectoire qui commence en 3, comme 5 succède à 3 et que  $5 = Q_4$ , on obtient :  $3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ . Ce qui est conforme à la suite de Collatz.

De même en partant du nombre 17, prédécesseur de 13, on obtient :  $17 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ . Comme 17 n'est pas multiple de 3, on aurait pu remonter jusqu'à 9, ce qui aurait donné la trajectoire :  $9 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ .

Si il est difficile de prédire le comportement en partant d'un nombre impair quelconque, la procédure proposée de construction des trajectoires permet de conclure que ce nombre choisi au hasard et qui, s'il est différent de  $Q_{2m}$ , s'écrit conformément à la procédure résumée dans le tableau (Tab. 1) est le prédécesseur d'un nombre qui s'écrit lui même selon le même procédé et finalement appartient nécessairement à une trajectoire qui finira en un nombre  $Q_{2m}$  donc en 1.

La figure (Fig. 1) illustre la construction, les nombres en gras n'ont pas de prédécesseurs.

## 4 Structures associées aux trajectoires

### 4.1 Relation entre deux prédécesseurs d'un même nombre

Commençons par le cas où dans la relation  $2^\gamma n_k = 3n_{k-1} + 1$ , on a  $n_k = 3q_k + 1$ . Dans ces conditions, on a (cf 11) :

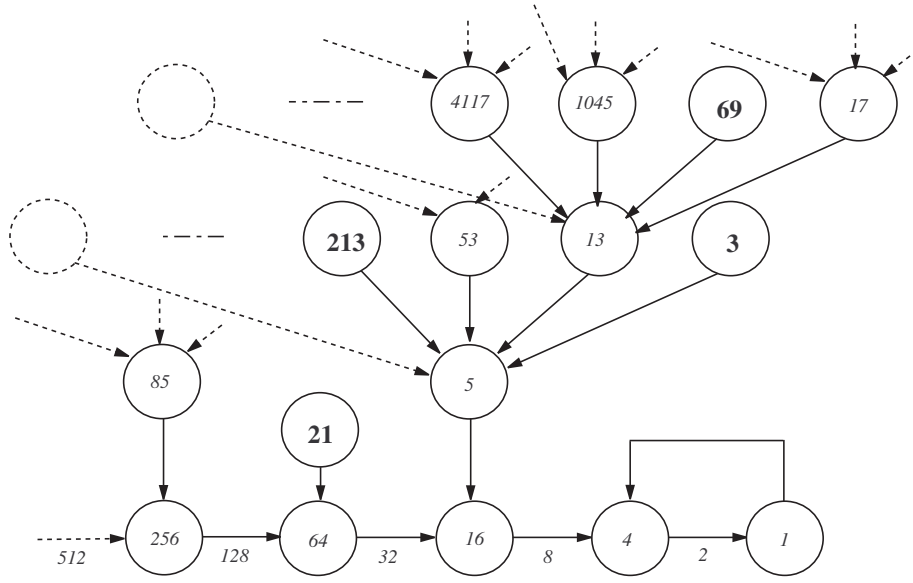


FIG. 1: Trajectoires

$$2^{2m}(3 \cdot q_k + 1) = 3(2^{2m} \cdot q_k + Q_{2m}) + 1 \quad (15)$$

Le prédécesseur dépendant de  $m$ , utilisons le changement de notation :

$$2^{2m}n_k = 3n_{k-1,m} + 1 \quad (16)$$

Les  $n_{k-1,m}$  changent de valeur quand  $m$  change de valeur, mais ils ont tous le même successeur  $n_k$ . Remplaçons  $m$  par  $m + 1$  pour définir la relation entre deux prédécesseurs :

$$2^{2m+2}n_k = 3(2^{2m+2} \cdot q_k + Q_{2m+2}) + 1 \quad (17)$$

Or :

$$Q_{2m} = \frac{2^{2m} - 1}{3} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^{2k} \quad (18)$$

on en déduit simplement que  $Q_{2m+2} = 2^2 Q_{2m} + 1$ , et donc :

$$2^{2m+2}q_k + Q_{2m+2} = 2^2 (2^{2m}q_k + Q_{2m}) + 1 \quad (19)$$

Soit :

$$n_{k-1,m+1} = 2^2 n_{k-1,m} + 1 \quad (20)$$

On obtient le même résultat lorsqu'on raisonne avec  $n_k$  de la forme  $3q_k + 2$ , la liste des prédécesseurs d'un nombre impair suit la même règle de construction que la liste des diviseurs  $Q_{2m}$  des nombres de Mersenne. De plus, il est facile de voir que la différence entre ces prédécesseurs satisfait à la suite de Collatz :

$$n_{k-1,m+1} - n_{k-1,m} = 3n_{k-1,m} + 1 \quad (21)$$

## 4.2 Alternance des prédécesseurs

Supposons qu'un prédécesseur soit un multiple de 3, soit  $n_{k-1,m} = 3 \cdot N$ , à l'aide de la relation (20) :

$$n_{k-1,m+1} = 2^2 3 \cdot N + 1 \quad (22)$$

$$n_{k-1,m+2} = 2^4 3 \cdot N + 5 \quad (23)$$

$$n_{k-1,m+3} = 2^6 3 \cdot N + 21 = 3(2^6 N + 7) \quad (24)$$

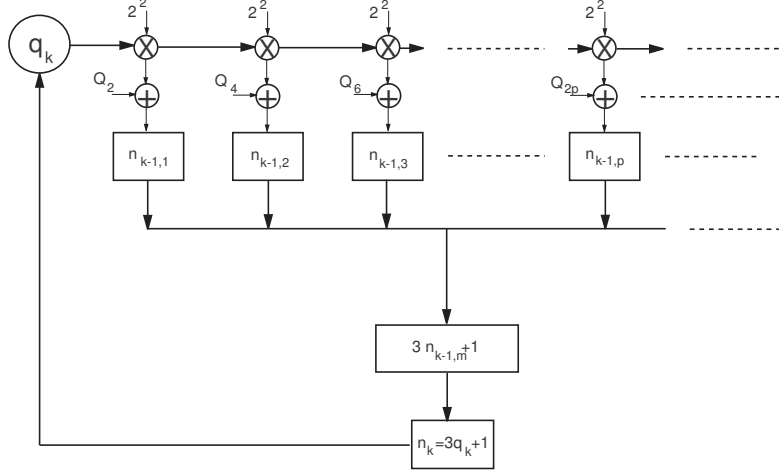
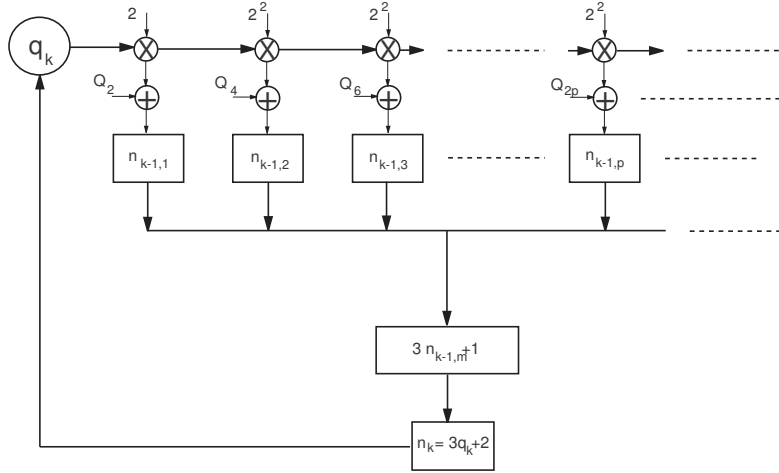
On en déduit que si l'un des prédécesseurs est multiple de 3 alors tous les 3 prédécesseurs on aura un multiple de 3.

On pourrait montrer de la même manière que les prédécesseurs de la forme  $3q + 1$  et ceux de la forme  $3q + 2$  se répètent tous les trois termes. On en déduit ainsi que la liste des prédécesseurs d'un nombre impair congru à 1 ou 2 modulo 3 est constituée d'une suite de nombres impairs congrus à 0, 1 ou 2 modulo 3. Par construction, ces listes ne contiennent jamais de nombre commun et sont le reflet de la liste des nombres  $Q_{2m}$  appelés ici diviseurs de Mersenne. On peut en conclure que  $Q_6 = 21$  représente la première trajectoire à un seul élément différent de 1 et que tous les  $Q_{6m}$  possèdent la même propriété, ce qui est facilement vérifiable.

## 4.3 Interprétation graphique des trajectoires

Des relations précédentes on peut déduire une structure associée à chaque nombre impair congru à 1 ou 2 modulo 3. La figure (Fig. 2) représente la structure montrant comment les prédécesseurs sont déduits d'un nombre impair  $n_k = 3q_k + 1$  et la figure (Fig. 3) celle associée aux nombres impairs  $n_k = 3q_k + 2$ .

Ces structures peuvent être appliquées à tous les  $n_{k-1,m}$  qui ne sont pas multiples de 3, on obtient ainsi un maillage particulier de l'ensemble des nombres impairs. On peut remonter vers l'infini à chaque étape puisque, (cf 24), car on ne peut pas avoir une liste de prédécesseurs qui soient tous multiples de 3. Par contre dans le sens de la suite de Collatz on ne peut pas aller plus loin que la structure donnée par la figure (Fig. 4).

FIG. 2: Structure associée à  $3q_k + 1$ FIG. 3: Structure associée à  $3q_k + 2$

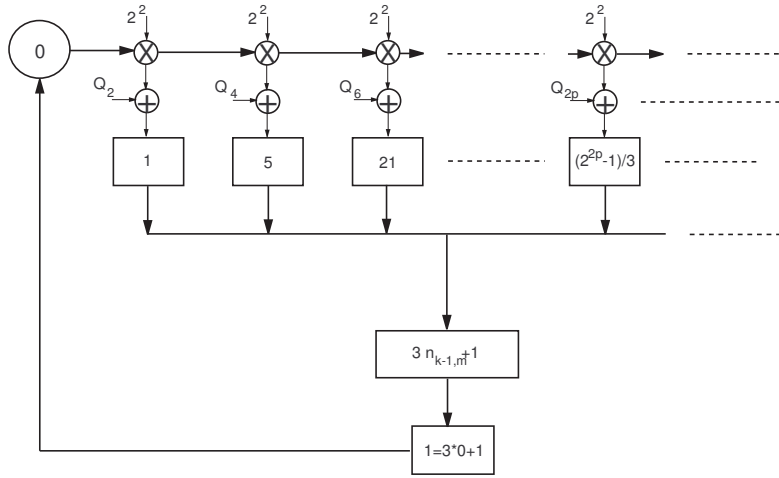


FIG. 4: Structure terminale

## 5 Trajectoires montantes

Compte-tenu de ce qui précède une trajectoire montante ne peut être obtenue que par une suite définie par l'équation (eq 12) dans laquelle  $m = 1$ , de façon à obtenir un successeur de valeur supérieure. Pour qu'une trajectoire soit divergente, il faut que la suite des valeurs obtenues soit toujours de ce type :

$$2n_k = 3n_{k-1} + 1 \quad (25)$$

Si l'on définit comme point de départ  $k = 1$ , la suite obtenue s'écrit :

$$\begin{aligned} 2n_1 &= 3n_0 + 1 \\ 2n_2 &= 3n_1 + 1 \\ &\vdots \\ 2n_k &= 3n_{k-1} + 1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (26)$$

Dans cette suite toutes les valeurs à partir de  $n_1$  sont de la forme  $n_k = 3q_k + 2$ , et la règle de construction des prédécesseurs permet d'écrire également :

$$\begin{aligned} n_0 &= 2q_1 + 1 \\ n_1 &= 2q_2 + 1 = 3q_1 + 2 \\ &\vdots \\ n_{k-1} &= 2q_k + 1 = 3q_{k-1} + 2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (27)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
2q_2 &= 3q_1 + 1 \\
2q_3 &= 3q_2 + 1 \\
&\vdots \\
2q_k &= 3q_{k-1} + 1 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{28}$$

On obtient des relations équivalentes sur les  $q_k$  qui définissent donc une suite montante, dans laquelle chaque  $q_k$  est de la forme  $q_k = 3r_k + 2$  et on peut itérer ainsi jusqu'à une valeur minimum. Si l'on note  $q_k, r_k, s_k, \dots$  les suites ainsi obtenues, alors on a :

$$x_k = \frac{n_k - 2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{l-1})}{3^l} \tag{29}$$

Comme  $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{l-1} = (3^l - 1)/2$ , il vient :

$$x_k = \frac{n_k + 1 - 3^l}{3^l} \tag{30}$$

$x_k$  n'est un nombre entier que si  $n_k + 1$  est un multiple de  $3^l$ , on en déduit :

$$n_k + 1 = 3^l y_k \tag{31}$$

De (eq 30) et (eq 31), on obtient la relation  $y_k = x_k + 1$ .

D'autre part  $n_k = 3q_k + 2$ , donc :

$$n_k + 1 = 3^l y_k = 3q_k + 3 \tag{32}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
q_k + 1 &= 3^{l-1} y_k \\
r_k + 1 &= 3^{l-2} y_k \\
&\vdots \\
x_k + 1 &= y_k
\end{aligned} \tag{33}$$

En remplaçant  $n_k$  par son équivalent dans (eq 25) on obtient :

$$2(3^l y_k - 1) = 3(3^l y_{k-1} - 1) + 1 \tag{34}$$

Soit :

$$y_k = \frac{3}{2} y_{k-1} \tag{35}$$

On obtiendra une solution de suite montante tant que  $y_k$  sera un nombre entier pair. Cela est possible si on commence en  $y_0$  par un nombre pair avec une puissance de 2 suffisante. En choisissant  $y_0 = 2^l p$ , avec  $p$  un nombre impair quelconque, on obtiendra une suite montante de longueur  $l$ .

$$\begin{aligned}
 y_0 = 2^l p &\Rightarrow n_0 = 2^l p - 1 \\
 y_1 = 3 \cdot 2^{l-1} p &\Rightarrow n_1 = 3 \cdot 2^{l-1} p - 1 \\
 &\vdots \\
 y_k = 3^k \cdot 2^{l-k} p &\Rightarrow n_k = 3^k \cdot 2^{l-k} p - 1 \\
 &\vdots \\
 y_{l-1} = 3^{l-1} \cdot 2p &\Rightarrow n_{l-1} = 3^{l-1} \cdot 2p - 1
 \end{aligned} \tag{36}$$

Le terme suivant  $y_l = 3^l p$  étant impair, le terme  $n_l$  n'est pas obtenu à l'aide des relations définies par (eq 36) mais par la relation  $3n_{l-1} + 1$ , ainsi le terme  $n_{l-1}$  est un maximum de la partie montante de la trajectoire.

Pour que la suite soit plus longue il faudrait augmenter la puissance de 2 dans  $y_0$ , mais il est clair que par construction, la suite  $3^k 2^{l-k} p$  deviendra nécessairement impaire après  $l$  itérations et dans ces conditions le caractère montant de la suite s'arrêtera.

Pour l'exemple, on donne les valeurs numériques de suites obtenues à l'aide de la méthode exposée, ce qui permet de vérifier que l'on obtiendrait les mêmes suites en adoptant la notation de Collatz.

Exemples avec  $p = 1$  ( $l = 2 \text{ à } 6$ ) :

$2^2 - 1 \Rightarrow 3, 5, 1$   
 $2^3 - 1 \Rightarrow 7, 11, 17, 13 \dots 1$   
 $2^4 - 1 \Rightarrow 15, 23, 35, 53, 5 \dots 1$   
 $2^5 - 1 \Rightarrow 31, 47, 71, 107, 161, 121 \dots 1$   
 $2^6 - 1 \Rightarrow 63, 95, 143, 215, 323, 485, 91 \dots 1$   
 etc ...

Mêmes exemples avec  $p = 7$  ( $l = 2 \text{ à } 6$ ) :

$2^2 \cdot 7 - 1 \Rightarrow 27, 41, 31 \dots 1$   
 $2^3 \cdot 7 - 1 \Rightarrow 55, 83, 125, 47 \dots 1$   
 $2^4 \cdot 7 - 1 \Rightarrow 111, 167, 251, 377, 283 \dots 1$   
 $2^5 \cdot 7 - 1 \Rightarrow 223, 335, 503, 755, 1133, 425 \dots 1$   
 $2^6 \cdot 7 - 1 \Rightarrow 447, 671, 1007, 1511, 2267, 3401, 2551 \dots 1$   
 etc ...

En résumé, une suite montante commence par une valeur de la forme  $n_0 = 2^l p - 1$  ou passe par une valeur impaire de la forme  $n_k = 3^k 2^{l-k} p - 1$ . Une telle suite atteindra son maximum à la valeur  $n_{l-1} = 3^{l-1} 2p - 1$ . Ces maximums peuvent prendre des valeurs tendant vers l'infini en choisissant  $l$  et/ou  $p$  tendant vers l'infini. mais ces valeurs resteront un maximum à la suite de quoi les valeurs redescendront. Il est donc possible d'avoir des suites tendant vers l'infini mais non divergentes.

Les termes étant de la forme  $n_k = 3^k 2^{l-k} p - 1 = 3q_k + 2$ , l'ensemble des prédécesseurs de chaque terme de la suite est de la forme  $2^{2m-1} q_k + Q_{2m}$  et seul le terme obtenu avec  $m = 1$  est inférieur en valeur au terme courant. Il existe donc une infinité de suites, avec des valeurs supérieures, qui convergent vers chaque terme de la suite montante y compris le terme de plus grande valeur, il n'existe donc pas de suite divergente.

On peut remarquer que la longueur de toute suite montante est la même quelque soit la valeur de  $p$ , il est donc possible d'en ramener l'étude en ne s'intéressant qu'aux suites commençant par un nombre de Mersenne  $2^l - 1$ .

## 6 Partition des nombres impairs

### 6.1 Partition à l'aide de la notion de prédécesseur

Les graphiques précédents et les propriétés des prédécesseurs (cf Tab. 1) des nombres congrus à 1 ou 2 modulo 3 permettent d'obtenir deux tableaux faisant apparaître de manière ordonnée et indexés par les entiers naturels une partition des nombres impairs regroupés selon leur propriété de prédécesseur d'un nombre impair donné de la forme  $3q + 1$  ( $q$  est pair), c'est le tableau supérieur de la figure (Fig. 5) ou  $3q + 2$  ( $q$  est impair), c'est le tableau inférieur de cette même figure. Les points de départ du tableau des prédécesseurs sont les nombres  $Q_{2m}$  qui apparaissent dans la deuxième colonne du tableau supérieur  $q = 0$ .

| q                    | 0             | 2    | 4     | 6     | 8     | 10    | 12    | 14    | 16    | 18    | 20    | ... |
|----------------------|---------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $3q+1$               | 1             | 7    | 13    | 19    | 25    | 31    | 37    | 43    | 49    | 55    | 61    | ... |
| $(2^2)q + Q_2$       | $Q_2=1$       | 9    | 17    | 25    | 33    | 41    | 49    | 57    | 65    | 73    | 81    | ... |
| $(2^4)q + Q_4$       | $Q_4=5$       | 37   | 69    | 101   | 133   | 165   | 197   | 229   | 261   | 293   | 325   | ... |
| $(2^6)q + Q_6$       | $Q_6=21$      | 149  | 277   | 405   | 533   | 661   | 789   | 917   | 1045  | 1173  | 1301  | ... |
| $(2^8)q + Q_8$       | $Q_8=85$      | 597  | 1109  | 1621  | 2133  | 2645  | 3157  | 3669  | 4181  | 4693  | 5205  | ... |
| $(2^{10})q + Q_{10}$ | $Q_{10}=341$  | 2389 | 4437  | 6485  | 8533  | 10581 | 12629 | 14677 | 16725 | 18773 | 20821 | ... |
| $(2^{12})q + Q_{12}$ | $Q_{12}=1365$ | 9557 | 17749 | 25941 | 34133 | 42325 | 50517 | 58709 | 66901 | 75093 | 83285 | ... |
| ...                  | ...           | ...  | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ... |

| q                    | 1    | 3    | 5     | 7     | 9     | 11    | 13    | 15    | 17    | 19    | 21    | ... |
|----------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $3q+2$               | 5    | 11   | 17    | 23    | 29    | 35    | 41    | 47    | 53    | 59    | 65    | ... |
| $(2^1)q + Q_2$       | 3    | 7    | 11    | 15    | 19    | 23    | 27    | 31    | 35    | 39    | 43    | ... |
| $(2^3)q + Q_4$       | 13   | 29   | 45    | 61    | 77    | 93    | 109   | 125   | 141   | 157   | 173   | ... |
| $(2^5)q + Q_6$       | 53   | 117  | 181   | 245   | 309   | 373   | 437   | 501   | 565   | 629   | 693   | ... |
| $(2^7)q + Q_8$       | 213  | 469  | 725   | 981   | 1237  | 1493  | 1749  | 2005  | 2261  | 2517  | 2773  | ... |
| $(2^9)q + Q_{10}$    | 853  | 1877 | 2901  | 3925  | 4949  | 5973  | 6997  | 8021  | 9045  | 10069 | 11093 | ... |
| $(2^{11})q + Q_{12}$ | 3413 | 7509 | 11605 | 15701 | 19797 | 23893 | 27989 | 32085 | 36181 | 40277 | 44373 | ... |
| ...                  | ...  | ...  | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ...   | ... |

Fig. 5: Tableau de partition des nombres impairs

Chaque colonne est constituée à l'aide des prédécesseurs des nombres qui figurent sur la deuxième ligne de chaque colonne, dans les cases jaunes pour les nombres congrus à 1 modulo 3, dans les cases vertes pour les nombres congrus à 2 modulo 3. comme il a été vu précédemment, tout nombre impair congru à 1 ou 2 possède ses propres prédécesseurs et donc les nombres congrus à 1 ou 2 de la deuxième ligne des tableaux de la figure (Fig. 5) représentent les successeurs associés à chacun des nombres figurants dans la colonne correspondante.

Les nombres impairs congrus à 1 ou 2 modulo 3 étant tous présents dans la deuxième ligne des tableaux, les colonnes de prédécesseurs représentent une partition de l'ensemble des nombres impairs puisque chaque nombre impair ne possédant qu'un seul successeur au sens de l'algorithme de Collatz il n'y a pas de répétition de nombres dans des colonnes différentes.

En tant que successeur, un nombre appartient aussi à la famille des prédécesseurs du prochain successeur, dans cette fonction il ne peut apparaître qu'une seule fois dans une autre colonne, sinon il serait prédécesseur de plusieurs valeurs ce qui est contraire à l'unicité de la représentation de chaque nombre impair sous la forme  $2^\lambda q + Q_{2m}$ .

Seul le nombre 1 fait exception à cette règle puisqu'il apparaît à la fois comme successeur et comme prédécesseur de lui-même ce qui est la représentation du cycle 1 : 1 qui est donc le seul cycle possible.

À l'aide de ces tableaux, il est possible en partant de n'importe quel case, de parcourir les trajectoires de Collatz dans le sens direct (eq 2) ou dans le sens inverse en utilisant la notion de successeur et de prédécesseur. Il est clair que dans le sens direct il n'y qu'une trajectoire possible, mais que dans le sens inverse chaque nombre (hormis les multiples de 3) possède une infinité de prédécesseurs. Ainsi par chaque nombre (hormis les multiples de 3) il passe une infinité de trajectoires. Comme tout nombre impair, à l'exception de 1, est prédécesseur d'un autre nombre impair, il est possible de construire toutes les trajectoires possibles à partir du nombre 1 en remontant vers la source à l'aide de la procédure d'inversion de trajectoire.

Cette possibilité de construction de toutes les trajectoires montre qu'il n'y a pas de trajectoire divergente puisque la construction a pour point de départ 1. Ce point de départ devient le point d'arrivée lorsqu'on parcourt la même trajectoire dans le sens direct.

Le tableau de partition étant de dimensions infinies, la mise en pratique n'est possible que pour des valeurs relativement faibles pour des questions de représentation, mais le calcul permet de le vérifier pour des quantités infiniment grandes.

La figure (Fig 6) donne deux exemples simples de construction de trajectoire à l'aide de la partition précédente. Par simplification, les deux tableaux de la figure (Fig. 5) ont été regroupés en alternant les nombres congrus à 1 et 2 modulo 3, en respectant l'indexation par les entiers  $q \in \mathbb{N}$ .

Le tableau supérieur de la figure (Fig .6) représente la trajectoire  $\{1, 5, 13, 17, 11, 7, 9\}$ , le tableau du bas représente la trajectoire  $\{1, 5, 13, 17, 11, 29, 19, 25, 133, \dots\}$  la différence tient dans le choix différent du prédécesseur de 11. Le parcours étant le même entre 1 et 11, il n'a pas été représenté dans le deuxième exemple.

## 6.2 Partition à l'aide de la notion de trajectoire

Compte-tenu de ce qui précède, il est possible de créer une autre partition des nombres impairs en considérant les trajectoires qui convergent vers les valeurs  $Q_{2m}$  de la première colonne du tableau de partition, en traitant de manière particulière  $Q_2 = 1$  et les valeurs  $Q_{6m}$  dont on a vu qu'elles sont multiples de 3 et n'ont donc pas de prédécesseurs.

Ainsi en s'intéressant à  $Q_4 = 5$ , on peut regrouper dans un même ensemble que l'on notera  $E(Q_4)$ , les éléments de la colonne  $q = 1$  qui sont les prédécesseurs directs de 5, chacun étant lui-même un nombre ayant des prédécesseurs, on peut ajouter ceux-ci et itérer jusqu'à l'infini. L'ensemble  $E(Q_4)$  ainsi obtenu contient tous les valeurs impaires appartenant aux trajectoires qui se terminent en  $Q_4$  donc en 1.

Parmi tous ces éléments ne figurent pas les éléments des prédécesseurs des autres valeurs  $Q_{2m}$ , ce qui serait contradictoire avec le fait que les trajectoires se terminent en  $Q_4$ . On peut donc recommencer le processus de regroupement pour chaque valeur  $Q_{2m}$ . On obtient ainsi une partition des nombres impairs selon leur appartenance à une trajectoire qui se termine en un

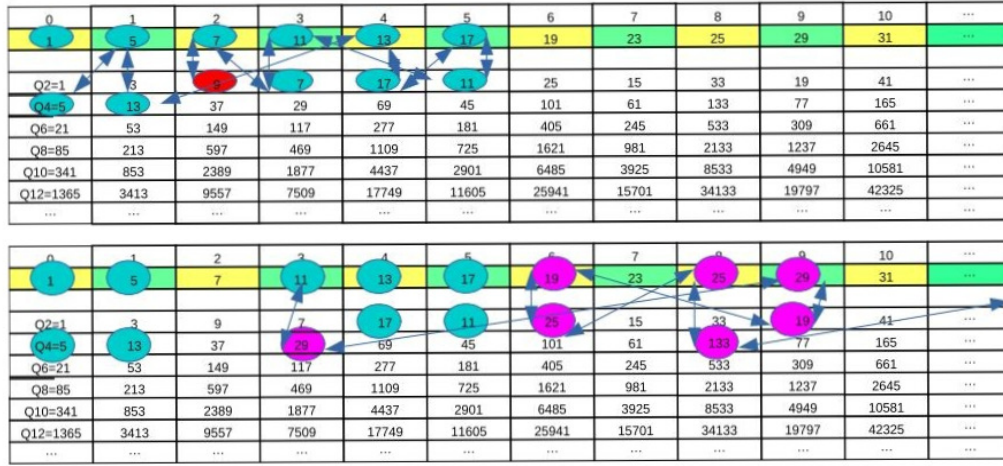


Fig. 6: Exemples de trajectoires

$Q_{2m}$  donné et par suite en 1.

On a alors, en notant  $E(Q_2) = \{1\}$ , une partition de l'ensemble des nombres impairs qui peut s'exprimer par:

$$2\mathbb{N} + 1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} E(Q_{2m}) \quad (37)$$

avec:

$$E(Q_{2m}) \cap E(Q_{2l}) = \{\emptyset\} \text{ pour } m \neq l \quad (38)$$

Cette partition exclut toute possibilité de trajectoire divergente.

## 7 Conclusion

De ce qui précède on peut en conclure que la conjecture de Collatz est exacte. La méthode proposée pour le montrer repose sur le fait d'avoir pu exprimer formellement la procédure d'inversion de la suite de Collatz. De nombreuses questions peuvent encore se poser, mais la difficulté d'exprimer la convergence vers 1, qui est liée au désordre apparent généré par l'expression de la suite donnée par les relations (1) trouve une explication dans le fait que l'on puisse écrire un

nombre impair ( $3q, 3q+1$  ou  $3q+2$ ) de manière unique sous la forme  $2^\lambda q + Q_{2m}$  où  $\lambda$  dépend de la parité de  $q$ .

On trouvera dans les références suivantes, Lagarias [2003], Lagarias [2012], Pochon and Favre [2021] et Tao [2011], un état suffisamment exhaustif des travaux concernant les études sur la suite de Collatz (Syracuse).

## A Écriture des nombres impairs

Il est possible de définir une écriture équivalente aux nombres impairs égaux à 0, 1, ou 2 modulo 3 à partir de la relation définie par Collatz.

### A.1 $n_0 = 3q_0$ , où $q_0$ est impair

Dans ce cas la première itération de la suite de Collatz est donnée par :

$$2^\gamma n_1 = 3^2 q_0 + 1 \quad (39)$$

#### A.1.1 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$ , $\gamma = 2m - 1$ et $q_1$ pair

Alors :

$$2^{2m-1} (3q_1 + 1) = 3^2 q_0 + 1 \quad (40)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m-1} q_1 + \frac{2^{2m-1} - 1}{3} \quad (41)$$

L'équation (41) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m-1} - 1$  n'est pas divisible par 3.

#### A.1.2 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$ , $\gamma = 2m$ et $q_1$ pair

Alors :

$$2^{2m} (3q_1 + 1) = 3^2 q_0 + 1 \quad (42)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m} q_1 + \frac{2^{2m} - 1}{3} \quad (43)$$

L'équation (43) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$  est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m} q_1 + Q_{2m} \quad \text{où } q_1 \text{ est pair} \quad (44)$$

**A.1.3 Cas  $n_1 = 3q_1 + 2$  ,  $\gamma = 2m - 1$  et  $q_1$  impair**

Alors :

$$2^{2m-1} (3q_1 + 2) = 3^2 q_0 + 1 \quad (45)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m-1} q_1 + \frac{2^{2m} - 1}{3} \quad (46)$$

L'équation (46) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$  est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m} q_1 + Q_{2m} \quad \text{où } q_1 \text{ est impair} \quad (47)$$

**A.1.4 Cas  $n_1 = 3q_1 + 2$  ,  $\gamma = 2m$  et  $q_1$  impair**

Alors :

$$2^{2m} (3q_1 + 2) = 3^2 q_0 + 1 \quad (48)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m} q_1 + \frac{2^{2m+1} - 1}{3} \quad (49)$$

L'équation (49) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m+1} - 1$  n'est pas divisible par 3.

**A.2  $n_k = 3q_k + 1$  ,  $\gamma = 2m$  et  $q_k$  pair**

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m} (3q_k + 1) = 3n_{k-1} + 1 \quad (50)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m} 3q_k + 2^{2m} - 1}{3} \quad (51)$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne :  $M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$ , alors (51) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = 2^{2m} q_k + Q_{2m} \quad (52)$$

**A.3**  $n_k = 3q_k + 1$  ,  $\gamma = 2m - 1$  et  $q_k$  pair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m-1} (3q_k + 1) = 3n_{k-1} + 1 \quad (53)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m-1} 3q_k + 2^{2m-1} - 1}{3} \quad (54)$$

Dans la mesure où  $M_{2m-1} = 2^{2m-1} - 1$ , n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

**A.4**  $n_k = 3q_k + 2$  ,  $\gamma = 2m$  et  $q_k$  impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m} (3q_k + 2) = 3n_{k-1} + 1 \quad (55)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m} 3q_k + 2^{2m+1} - 1}{3} \quad (56)$$

Dans la mesure où  $M_{2m+1} = 2^{2m+1} - 1$ , n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

**A.5**  $n_k = 3q_k + 2$  ,  $\gamma = 2m - 1$   $q_k$  impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m-1} (3q_k + 2) = 3n_{k-1} + 1 \quad (57)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m-1} 3q_k + 2^{2m} - 1}{3} \quad (58)$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne  $M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$ , alors (58) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = 2^{2m-1} q_k + Q_{2m} \quad (59)$$

En conclusion pour toute valeur  $n_k$  impaire :

- $n_0 = 3q_0$  : alors  $n_0$  est le début d'une trajectoire dont le terme suivant est de la forme  $3q_1 + 1$  ou de la forme  $3q_1 + 2$  selon les équations (44) ou (47).
- $n_k = 3q_k + 1$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (52) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est pair et  $\gamma = 2m$ .
- $n_k = 3q_k + 2$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (59) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est impair et  $\gamma = 2m - 1$ .

## Références

- Jeffrey. C. Lagarias. The  $3x+1$  problem : An annotated bibliography (1963-1999). 2003. eprint : [arxiv :math.NT/0309224](https://arxiv.org/abs/math.NT/0309224) Sept. 13, 2003, v11.
- Jeffrey. C. Lagarias. The  $3x+1$  problem : An annotated bibliography, ii (2000-2009). 2012. eprint : [arxiv :math.NT/0608208v6](https://arxiv.org/abs/math.NT/0608208v6) Feb. 12, 2012.
- Luc. O. Pochon and A. Favre. La suite de Syracuse, un monde de conjectures. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01593181>, 2021.
- T. Tao. The collatz conjecture, littlewood-offord theory, and powers of 2 and 3. 2011. <https://terrytao.wordpress.com/2011/08/25/>.