



**HAL**  
open science

## Mersenne et la conjecture de Collatz

Jacques Prado

► **To cite this version:**

| Jacques Prado. Mersenne et la conjecture de Collatz. 2023. hal-03195174v10

**HAL Id: hal-03195174**

**<https://hal.science/hal-03195174v10>**

Preprint submitted on 29 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mersenne et la conjecture de Collatz

*J. Prado*

29 juillet 2023

## Résumé

Dans cette présentation nous ne nous intéresserons qu'aux relations entre les nombres impairs définis par la relation de Collatz. Nous donnons une méthode d'inversion des trajectoires de Collatz, ce qui permet de définir une partition complète de l'ensemble des nombres impairs à l'aide de la notion de prédécesseur-successeur. Il est ainsi possible de construire toutes les trajectoires convergentes en partant du point final 1 en remontant vers toutes les origines possibles. Dans une deuxième partie, afin de montrer que l'algorithme de Collatz n'induit ni trajectoire divergente, ni d'autre cycle que celui correspondant au nombre 1, nous construisons une autre partition des nombres impairs à l'aide des congruences modulo 3 de ces nombres et leur répartition dans les différents sous ensembles de la partition précédemment établie.

## 1 Introduction

Nous rappelons que la conjecture de Collatz est liée à la suite d'entiers positifs définis par les relations suivantes :

$$f(n) = \begin{cases} 3n + 1 & \text{si } n \text{ impair,} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases} \quad (1)$$

La conjecture de Collatz dit que pour tout  $n$  la suite se termine toujours en 1. A priori les valeurs paires de  $n$  n'étant pas représentatives des propriétés de convergences, il est possible de reformuler l'expression (1) en ne faisant apparaître que les valeurs impaires de  $n$  ce qui s'écrit :

$$2^\gamma n_k = 3n_{k-1} + 1 \quad (2)$$

Où les  $n_k$  sont tous des entiers positifs impairs. On en déduit simplement que si  $n_k = 1$ , alors :

$$n_{k-1} = \frac{2^\gamma - 1}{3} \quad (3)$$

L'équation (3) n'a de solution que si  $(2^\gamma - 1)$  est divisible par 3. En écrivant  $3 = (2^2 - 1)$  on est ramené à la solution simple :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m} - 1}{2^2 - 1} \quad (4)$$

où  $(2^{2m} - 1) = M_{2m}$  est un nombre de Mersenne défini par  $M_p = (2^p - 1)$  qui est divisible par 3 quand  $p$  est pair.

Cela permet de remplacer la convergence vers 1 par une convergence vers les diviseurs de Mersenne notés  $Q_m$  définis par :

$$2^{2^m} - 1 = 3 \cdot Q_m \quad (5)$$

Lorsque  $n_k \neq 1$  alors (3) devient :

$$n_{k-1} = \frac{2^\gamma n_k - 1}{3} \quad (6)$$

De manière évidente (6) n'a pas de solution si  $n_k$  est un multiple de 3. Dans ces conditions,  $n_k$  étant impair ne peut prendre que les formes données par :

$$\begin{cases} n_k = 3q_k + 1 & \text{où } q_k \text{ est pair} \\ n_k = 3q_k + 2 & \text{où } q_k \text{ est impair} \end{cases} \quad (7)$$

De même,  $\gamma$  peut être pair ( $\neq 0$ ) ou impair :  $\begin{cases} \gamma = 2m \\ \gamma = 2m - 1 \end{cases}$

On est donc ramené à l'étude des deux formes suivantes :

$$\begin{aligned} 2^\lambda \cdot (3q_k + 1) &= 3 \cdot n_{k-1} + 1 \\ 2^\lambda \cdot (3q_k + 2) &= 3 \cdot n_{k-1} + 1 \end{aligned} \quad (8)$$

On remarque que la convergence au sens de Collatz, ne peut être obtenue qu'à l'aide de la relation  $2^\lambda \cdot (3q_k + 1) = 3 \cdot n_{k-1} + 1$ , dans laquelle  $\lambda = 2m$  et  $q_k = 0$ , nous avons alors  $n_{k-1} = Q_m$ . Tant que  $n_{k-1}$  est différent de  $Q_m$ , les relations données par (eq. 8) sont valables pour  $q_k$  pair si  $n_k = 3q_k + 1$  et  $q_k$  impair si  $n_k = 3q_k + 2$ . Nous allons utiliser cette remarque dans la suite afin de reformuler les relations entre  $n_k$  et  $n_{k-1}$ .

## 2 Nouvelle écriture des nombres impairs

À partir de ce qui précède il est possible de définir une écriture équivalente aux nombres impairs égaux à 0, 1, ou 2 modulo 3 à partir de la relation définie par Collatz. Si dans la relation  $2^\lambda \cdot (3q_k + 1)$  on remplace  $\lambda$  par  $2m$  et en développant on obtient :

$$2^\lambda (3q_k + 1) = 2^{2m} \cdot 3 \cdot q_k + 2^{2m} \quad (9)$$

À l'aide des nombres de Mersenne,  $2^{2m} = 3Q_m + 1$ , cela donne l'égalité :

$$2^{2m} \cdot 3 \cdot q_k + [2^{2m}] = 3 \cdot 2^{2m} \cdot q_k + [3 \cdot Q_m + 1] \quad (10)$$

Soit :

$$2^{2m}(3 \cdot q_k + 1) = 3(2^{2m} \cdot q_k + Q_m) + 1 \quad (11)$$

Cette relation montre que si  $n_k = 3q_k + 1$  alors tout prédécesseur au sens de la suite de Collatz s'écrit  $n_{k-1} = 2^{2^m} \cdot q_k + Q_m$ , avec  $q_k$  pair.

On peut montrer de même que si  $n_k = 3q_k + 2$  alors  $n_{k-1} = 2^{2^m-1} \cdot q_k + Q_m$ , avec  $q_k$  impair.

$$2^{2^m-1}(3 \cdot q_k + 2) = 3(2^{2^m-1} \cdot q_k + Q_m) + 1 \quad (12)$$

En conclusion si dans la suite des valeurs  $n_k$  toutes impaires :

- $n_k = 3q_k + 1$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (11) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est pair et  $\gamma = 2^m$ .
- $n_k = 3q_k + 2$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (12) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est impair et  $\gamma = 2^m - 1$ .

$n_k = 3n_{k-1} + 1$	$\Leftrightarrow$	$n_{k-1} \in \{3q_{k-1}, 3q_{k-1} + 1, 3q_{k-1} + 2\}$
$2^{2^m-1}(3q_k + 2)$	$=$	$3n_{k-1} + 1 = 3(2^{2^m-1}q_k + Q_m) + 1$ si $n_{k-1} \neq Q_m$
$2^{2^m}(3q_k + 1)$	$=$	$3n_{k-1} + 1 = 3(2^{2^m}q_k + Q_m) + 1$ si $n_{k-1} \neq Q_m$
$2^{2^m}(1)$	$=$	$3Q_m + 1$ si $n_{k-1} = Q_m$

TAB. 1: Équivalence d'écriture

On trouvera en annexe (Annexe A) une étude exhaustive montrant qu'il n'y a pas d'autres possibilités et les résultats sont résumés dans le tableau (Tab. 1) dans lequel  $Q_m = (2^{2^m} - 1)/3$ .

On déduit de ce résultat que si le nombre impair initial  $n_0$  peut être choisi quelconque, dès la première itération la suite des nombres impairs ne comporte aucun multiple de 3.

Il en résulte que tout nombre impair non multiple de 3 possède une infinité de prédécesseurs au sens de la suite de Collatz. En résumé :

$$\text{Si } n_k = (3 \cdot q_k + 1) \text{ alors } n_{k-1} = 2^{2^m} \cdot q_k + Q_m \quad (13)$$

$$\text{Si } n_k = (3 \cdot q_k + 2) \text{ alors } n_{k-1} = 2^{2^m-1} \cdot q_k + Q_m$$

Dans les relations définies par (eq. 13)  $q_k$  est pair quand  $n_k$  est congru à 1 modulo 3 et impair quand  $n_k$  est congru à 2 modulo 3, dans les deux cas  $m = [1, 2, \dots, \infty[$ .

### 3 Partition des nombres impairs

D'après ce qui précède (eq. 13), les valeurs  $n_k$  et  $n_{k-1}$  satisfont aux suites de Collatz par le fait que :

$$\text{Si } n_k = (3 \cdot q_k + 1) \text{ alors } 2^{2^m} n_k = 3n_{k-1} + 1 \quad (14)$$

$$\text{Si } n_k = (3 \cdot q_k + 2) \text{ alors } 2^{2^m-1} n_k = 3n_{k-1} + 1$$

Dans (eq. 14), si les valeurs  $n_k$  sont congrues à 1 ou 2 modulo 3, les valeurs  $n_{k-1}$  sont des nombres impairs quelconques c'est à dire congrus à 0, 1 ou 2 modulo 3 avec la particularité que lors d'une congruence à 0 le nombre  $n_{k-1}$  correspond à  $k = 1$  c'est à dire l'origine d'une trajectoire puisque les multiples de 3 ne peuvent pas être obtenus comme résultats de l'opération  $3n + 1$ .

Il s'en dégage une nouvelle écriture des nombres impairs, écriture qui fait apparaître explicitement les puissances de 2 et ce que nous avons appelé diviseur de Mersenne i.e.  $Q_m = (2^{2^m} - 1) / 3$ . On notera  $n_{k-1}(q_k, m)$  un nombre impair de la façon suivante :

$$\begin{aligned} n_{k-1}(q_k, m) &= 2^{2^m} q_k + Q_m \text{ si } q_k \text{ est pair} \\ n_{k-1}(q_k, m) &= 2^{2^m-1} q_k + Q_m \text{ si } q_k \text{ est impair} \end{aligned} \quad \text{pour } m = [1, 2, \dots, \infty[ \quad (15)$$

Dans ces relations, seul  $n_0$  peut être un multiple de 3.

La valeur de  $q_k$  et celle de  $m$  sont obtenues uniquement par application de la relation de Collatz :

$$f(n) = 3 \cdot n_{k-1}(q_k, m) + 1 \quad (16)$$

Sachant que  $f(n)$  ne peut prendre que des valeurs de la forme  $2^{2^m}(3 \cdot q_k + 1)$  ou  $2^{2^m-1}(3 \cdot q_k + 2)$  on en déduit directement l'écriture de  $n_{k-1}(q_k, m)$  sous une des deux formes données par (eq. 15).

Exemple;

Soit le nombre 453 que l'habitude permet d'écrire  $4 \cdot 113 + 1$ , son écriture sous la forme  $n_{k-1}(q_k, m)$  passe par l'utilisation de la relation de Collatz.

$$1360 = 3 \cdot 453 + 1 \quad (17)$$

$$2^4 \cdot 85 = 3 \cdot 453 + 1 \quad (18)$$

$$2^4 \cdot 85 = 2^4 (3 \cdot 28 + 1) \quad (19)$$

On en déduit :  $453 = 2^4 \cdot 28 + 5$  ce qui est de la forme  $2^{2^m} q_k + Q_m$  avec  $q_k = 28$  et  $m = 2$  d'où  $Q_2 = 5$ . On vérifiera aisément que 453 est un multiple de 3, mais que c'est aussi par construction un prédécesseur de  $85 = Q_4$ . On a donc une trajectoire à trois termes  $453 \rightarrow 85 \rightarrow 1$ .

$q_k$  pouvant prendre toutes les valeurs entières ( $q_k \in \mathbb{N}$ ) nous obtenons une partition des nombres impairs en associant à chaque valeur de  $q_k$  une suite infinie de nombres impairs  $n_{k-1}(q_k, m)$  obtenue à l'aide des relations de (eq. 15)

### 3.1 Partition à l'aide de la notion de prédécesseur

Les propriétés des prédécesseurs (cf Tab. 1) des nombres congrus à 1 ou 2 modulo 3 permettent d'obtenir une partition complète des nombres impairs. Nous en donnons une représentation à l'aide de deux tableaux faisant apparaître, de manière ordonnée et indexés par les entiers naturels, les nombres impairs regroupés selon leur propriété de prédécesseur d'un nombre impair donné de la forme  $3q + 1$  ( $q$  est pair), c'est le tableau supérieur de la figure (Fig. 1) ou  $3q + 2$  ( $q$  est impair), c'est le tableau inférieur de cette même figure. Les points de départ du tableau des prédécesseurs sont les nombres  $Q_m$  qui apparaissent dans la deuxième colonne du tableau supérieur  $q = 0$  comme prédécesseurs du chiffre 1.

q	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...
3q+1	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	...
(2 <sup>2</sup> )q + Q1	Q1=1	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81	...
(2 <sup>4</sup> )q + Q2	Q2=5	37	69	101	133	165	197	229	261	293	325	...
(2 <sup>6</sup> )q + Q3	Q3=21	149	277	405	533	661	789	917	1045	1173	1301	...
(2 <sup>8</sup> )q + Q4	Q4=85	597	1109	1621	2133	2645	3157	3669	4181	4693	5205	...
(2 <sup>10</sup> )q + Q5	Q5=341	2389	4437	6485	8533	10581	12629	14677	16725	18773	20821	...
(2 <sup>12</sup> )q + Q6	Q6=1365	9557	17749	25941	34133	42325	50517	58709	66901	75093	83285	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

q	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
3q+2	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	...
(2 <sup>1</sup> )q + Q1	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	...
(2 <sup>3</sup> )q + Q2	13	29	45	61	77	93	109	125	141	157	173	...
(2 <sup>5</sup> )q + Q3	53	117	181	245	309	373	437	501	565	629	693	...
(2 <sup>7</sup> )q + Q4	213	469	725	981	1237	1493	1749	2005	2261	2517	2773	...
(2 <sup>9</sup> )q + Q5	853	1877	2901	3925	4949	5973	6997	8021	9045	10069	11093	...
(2 <sup>11</sup> )q + Q6	3413	7509	11605	15701	19797	23893	27989	32085	36181	40277	44373	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

FIG. 1: Tableau de partition des nombres impairs

Chaque colonne est constituée des prédécesseurs des nombres qui figurent sur leur deuxième ligne, dans les cases jaunes pour les nombres congrus à 1 modulo 3, dans les cases vertes pour les nombres congrus à 2 modulo 3. comme il a été vu précédemment, tout nombre impair congru à 1 ou 2 possède ses propres prédécesseurs et donc les nombres congrus à 1 ou 2 de la deuxième ligne des tableaux de la figure (Fig. 1) représentent les successeurs associés à chacun des nombres figurants dans la colonne correspondante et aucun nombres impairs ne possèdent de prédécesseurs en commun.

Ainsi en notant  $R_1(q_k) = \text{préd}(3.q_k + 1) = \bigcup_{m=1}^{\infty} (2^{2m}q_k + Q_m)$  le sous-ensemble des prédécesseurs d'un nombre impair congru à 1 modulo 3 et  $R_2(q_k) = \text{préd}(3.q_k + 2) = \bigcup_{m=1}^{\infty} (2^{2m-1}q_k + Q_m)$  le sous-ensemble des prédécesseurs d'un nombre impair congru à 2 modulo 3, on obtient la partition suivante de l'ensemble des nombres impairs noté  $\mathcal{O}$  :

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup_{q_k \text{ pair}} R_1(q_k) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{q_k \text{ impair}} R_2(q_k) \right\} \quad (20)$$

En tant que successeur, un nombre appartient aussi à la famille des prédécesseurs du prochain successeur, dans cette fonction il ne peut apparaître qu'une seule fois dans une autre colonne, sinon il serait prédécesseur de plusieurs valeurs ce qui est contraire à l'unicité de la représentation de chaque nombre impair sous la forme  $2^\lambda q + Q_m$ .

Seul le nombre 1 fait exception à cette règle puisqu'il apparaît à la fois comme successeur et comme prédécesseur de lui-même ce qui est la représentation du cycle 1 : 1.

## 4 Propriétés des prédécesseurs

### 4.1 Relation entre deux prédécesseurs d'un même nombre

Commençons par le cas où dans la relation  $2^\gamma n_k = 3n_{k-1} + 1$ , on a  $n_k = 3q_k + 1$ . Dans ces conditions, on a (cf 11) :

$$2^{2m}(3 \cdot q_k + 1) = 3(2^{2m} \cdot q_k + Q_m) + 1 \quad (21)$$

Ce qui, avec les notations précédentes, donne :

$$2^{2m}n_k = 3n_{k-1}(q_k, m) + 1 \quad (22)$$

Les  $n_{k-1}(q_k, m)$  changent de valeur quand  $m$  change de valeur, mais ils ont tous le même successeur  $n_k$ . Remplaçons  $m$  par  $m + 1$  pour définir la relation entre deux prédécesseurs :

$$2^{2m+2}n_k = 3n_{k-1}(q_k, m + 1) + 1 = 3(2^{2m+2} \cdot q_k + Q_{m+1}) + 1 \quad (23)$$

Or :

$$Q_m = \frac{2^{2m} - 1}{3} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^{2k} \quad (24)$$

on en déduit simplement que  $Q_{m+1} = 2^2 Q_m + 1$ , et donc :

$$2^{2m+2}q_k + Q_{m+1} = 2^2 (2^{2m}q_k + Q_m) + 1 \quad (25)$$

Soit :

$$n_{k-1}(q_k, m + 1) = 2^2 n_{k-1}(q_k, m) + 1 \quad (26)$$

On obtient le même résultat lorsqu'on raisonne avec  $n_k$  de la forme  $3q_k + 2$ , la liste des prédécesseurs d'un nombre impair suit la même règle de construction que la liste des diviseurs  $Q_m$  des nombres de Mersenne  $2^{2m} - 1$ . De plus, il est facile de voir que la différence entre deux prédécesseurs successifs du même nombre satisfait à la suite de Collatz :

$$n_{k-1}(q_k, m + 1) - n_{k-1}(q_k, m) = 3n_{k-1}(q_k, m) + 1 \quad (27)$$

## 4.2 Régularité du tableau des prédécesseurs

L'équation (eq. 27) est définie quelque soit  $q_k \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ . Pour les valeurs de  $q_k$  pair (en considérant 0 comme chiffre pair, on obtient :

$$2^{2m} (3q_k + 1) = n_{k-1}(q_k, m + 1) - n_{k-1}(q_k, m) \quad (28)$$

Soit :

$$\frac{n_{k-1}(q_k, m+1) - n_{k-1}(q_k, m)}{3q_k + 1} = 2^{2m} \quad (29)$$

Ainsi si dans le tableau de partition on remplace les prédécesseurs par la différence de 2 prédécesseurs consécutifs divisée par leur successeur on obtient une puissance de 2 paire et toutes les colonnes du tableau sont équivalentes.

De même si  $q_k$  est un nombre impair, on obtient :

$$\frac{n_{k-1}(q_k, m+1) - n_{k-1}(q_k, m)}{3q_k + 2} = 2^{2m-1} \quad (30)$$

Cette fois les colonnes sont remplies avec les puissances de 2 impaires. Le résultat est donné figure (Fig. 2).

q	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...
3q+1	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	...
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	...
	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	...
	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	...
	256	256	256	256	256	256	256	256	256	256	256	...
	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	1024	...
	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	4096	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

q	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
3q+2	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	...
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	...
	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	...
	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	...
	128	128	128	128	128	128	128	128	128	128	128	...
	512	512	512	512	512	512	512	512	512	512	512	...
	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	2048	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

FIG. 2: Régularité du tableau de partition

Une autre régularité peut être mise en évidence, c'est l'équirépartition des nombres impairs dans chaque sous ensemble de prédécesseurs.

### 4.3 Équirépartition des prédécesseurs

#### 4.3.1 Propriétés des $Q_m$

De façon évidente,  $Q_1 = 1$  est congru à 1 modulo 3, de même  $Q_2 = 5$  est congru à 2 modulo 3 et  $Q_3 = 21$  est congru à 0 modulo 3. Par définition les  $Q_m$  sont liés par la relation :

$$Q_{m+1} = 2^2 Q_m + 1 \quad (31)$$

Les  $Q_m$  étant les prédécesseurs de 1, on vérifie ainsi que la relation (eq. 26) en est une généralisation. Pour tout nombre impair non multiple de 3, on notera  $p_0$  le plus petit prédécesseur, les autres seront donnés par :

$$p_k = 2^{2^k} p_0 + Q_k \quad k = [1, 2, \dots \infty[ \quad (32)$$

En effet  $p_1 = 2^2 p_0 + 1$ ,  $p_2 = 2^2 p_1 + 1 = 2^2 (2^2 p_0 + 1) + 1$ . Or  $Q_1 = 1$ , et donc en développant :

$$p_2 = 2^4 p_0 + 2^2 Q_1 + 1 \quad (33)$$

avec  $Q_2 = 2^2 Q_1 + 1$ , on obtient  $p_2 = 2^4 p_0 + Q_2$ . Par itération on en déduit la relation (eq. 32).

À partir de cette remarque, si on montre que les  $Q_m$  sont répartis de manière régulière en triplets dont chaque élément est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3, il en sera de même pour toute suite de prédécesseurs  $p_k$ . Pour cela il suffit de montrer que  $Q_m$  et  $Q_{m+3}$  sont congrus au même nombre modulo 3. La relation (eq. 31) permet d'écrire simplement :

$$Q_{m+3} = 2^6 Q_m + Q_3 \quad (34)$$

#### 4.3.2 Supposons que $Q_m$ soit congru à 0 modulo 3

Soit  $Q_m = 3q$  alors :

$$Q_{m+3} = 2^6 \cdot q + Q_3 \quad (35)$$

$Q_3 = 21$  est congru à 0 modulo 3, donc :

$$Q_{m+3} = 3(2^6 q + 7) \quad (36)$$

On en déduit que si l'un des prédécesseurs est multiple de 3 alors tous les 3 prédécesseurs on aura un multiple de 3.

#### 4.3.3 Supposons que $Q_m$ soit congru à 1 modulo 3

Soit  $Q_m = 3q+1$ , il vient :

$$Q_{m+3} = 2^6 \cdot (3 \cdot q + 1) + Q_3 \quad (37)$$

Comme  $Q_3 = \sum_{k=0}^2 2^{2^k}$  (cf eq. 24), il vient :

$$Q_{m+3} = 2^6 \cdot 3 \cdot q + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 \quad (38)$$

$$Q_{m+3} = 2^6 \cdot 3 \cdot q + 2^2 (2^4 + 2^2 + 1) + 1 \quad (39)$$

Soit :

$$Q_{m+3} = 3(2^6 \cdot q + 2^2 \cdot 7) + 1 \quad (40)$$

Le terme obtenu est bien congru à 1 modulo 3, on en déduit que tous les 3 prédécesseurs on aura un terme congru à 1 modulo 3.

#### 4.3.4 Supposons que $Q_m$ soit congru à 2 modulo 3

Soit  $Q_m = 3q+2$ , il vient :

$$Q_{m+3} = 2^{6 \cdot} (3 \cdot q + 2) + Q_3 \quad (41)$$

$$Q_{m+3} = 2^{6 \cdot} \cdot 3 \cdot q + 2^7 + 2^4 + 2^2 + 1 \quad (42)$$

En remarquant que  $2^7 + 2^4 + 2^2 + 1 = 2^4 (2^3 + 1) + 2^2 + 1$ , que  $2^3 + 1 = 3^2$  et que  $2^2 + 1 = (2^2 - 1) + 2 = 3 + 2$ , il vient :

$$Q_{m+3} = 3 (2^{6 \cdot} q + 2^4 \cdot 3 + 1) + 2 \quad (43)$$

Le terme obtenu est bien congru à 2 modulo 3, on en déduit que tous les 3 prédécesseurs on aura un terme congru à 2 modulo 3.

La généralisation à n'importe quelle suite de prédécesseur donnée par la relation (eq. 32) est immédiate, ainsi les prédécesseurs se présentent pour chaque nombre sous forme d'une alternance de triplet congrus à 0, 1 et 2 modulo 3. La représentation de ce résultat est donnée figure (Fig. 3).

q	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...
3q+1	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	...
	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	...
	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	...
	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	...
	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	...
	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	...
	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

q	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
3q+2	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	...
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	...
	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	...
	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	...
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	...
	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	...
	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

FIG. 3: Tableau des congruences modulo 3

On obtient une construction systématique des trajectoires qui mènent à 1 en suivant le chemin inverse de l'algorithme de Collatz.

#### 4.4 Remarque

À partir de la relation (eq. 32) que l'on rappelle ci-dessous :

$$p_k = 2^{2^k} p_0 + Q_k \quad k = [1, 2, \dots \infty[ \quad (44)$$

Il suffit de remplacer  $Q_k$  par sa définition  $Q_k = \frac{2^{2^k} - 1}{3}$  pour obtenir une autre relation intéressante entre les prédécesseurs d'un même nombre impair :

$$3p_k + 1 = 2^{2^k} (3p_0 + 1) \quad k = [1, 2, \dots \infty[ \quad (45)$$

La suite des prédécesseurs est obtenue par un processus qui rappelle fortement l'algorithme de Collatz.

## 5 Trajectoires de Collatz

### 5.1 Trajectoires par inversion de la suite de Collatz

En partant de  $q = 0$ , ce qui correspond au premier nombre  $3q + 1 = 1$ , on obtient la première liste de prédécesseurs qui sera constituée des diviseurs de Mersenne :

$$n_{k-1}(0, m) = 2^{2^m} \cdot 0 + Q_m = Q_m \quad (46)$$

La suite obtenue est une suite infinie qui commence par les termes 1, 5, 21, 85, 341, 1365,  $\dots$ . C'est une manière de construire les trajectoires en fonction de leur longueur (encore appelée temps de vol). En effet nous avons établi que les multiples de 3 n'ont pas de prédécesseurs et que dans les prédécesseurs de tout autre nombre impair il y a un multiple de 3 toutes les 3 valeurs. Ici  $21 = Q_3$  est un multiple de 3, il s'ensuit que tous les  $Q_{3m}$  sont multiples de 3 et qu'en partant de ces valeurs on obtient toutes les trajectoires qui aboutissent en 1 en une seule itération puisqu'on vérifie à chaque fois que  $3 \cdot Q_{3m} + 1 = 2^{6m}$ . Si l'on prend le voisin inférieur de  $Q_3$ , nous obtenons  $Q_2 = 5$  qui est congru à 2 modulo 3 il s'ensuit que tous les  $Q_{3m-1}$  sont congrus à 2 modulo 3. De même on peut aisément vérifier que tous les  $Q_{3m-2}$  sont congrus à 1 modulo 3.

Ainsi en remontant d'une étape à partir des valeurs congrues à 1 ou 2 modulo 3 et pour chacune d'entre elles on obtient une liste infinie de prédécesseurs de même constitution que la liste des prédécesseurs directs de 1 c'est à dire une infinité de multiples de 3 qui vont définir les trajectoires qui aboutissent à 1 en 2 itérations et une infinité de valeurs congrues à 1 ou 2 modulo 3 qui vont permettre de remonter d'une étape pour obtenir des trajectoires de longueur 3.

Le processus peut être itéré à l'infini puisque la structure est la même à chaque étape, comme la liste des prédécesseurs ne se répète jamais on obtient ainsi toutes les trajectoires possibles sans qu'il ne puisse y avoir de boucles autre que celle du cas particulier de 1.

On en donne une illustration figure (Fig. 4) où les chiffres 0,1 et 2 correspondent à l'ensemble des prédécesseurs respectivement congrus à 0, 1 ou 2 modulo 3.

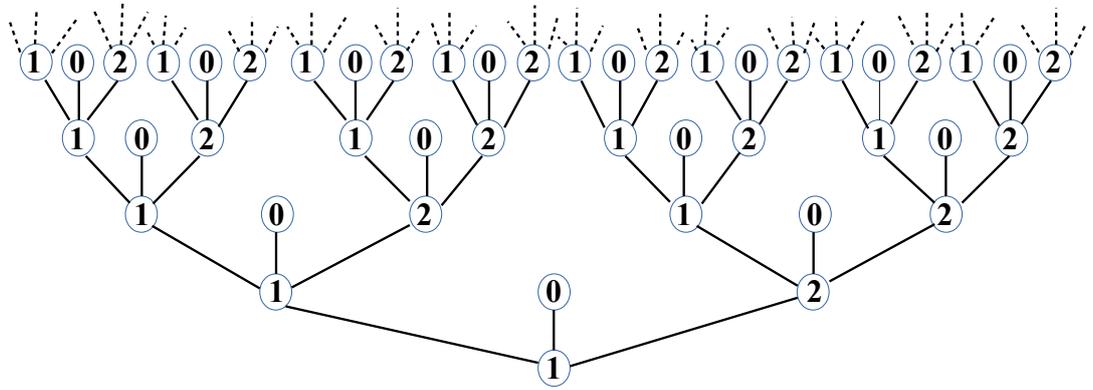


FIG. 4: Arbre des congruences

En notant  $P_1(0)$ ,  $P_1(1)$  et  $P_1(2)$  les prédécesseurs de premier niveau du chiffre 1,  $P_2(0)$ ,  $P_2(1)$  et  $P_2(2)$  les ensembles de prédécesseurs des chiffres du premier niveau (i.e. les  $P_1(i)$ ) on obtient un diagramme concentré sous forme d'une tour où chaque niveau comprend le point de départ (i.e. les éléments de l'ensemble  $P_l(0)$ ) des trajectoires de longueur  $l$ , les éléments des ensembles  $P_l(1)$  et  $P_l(2)$  permettant de passer à l'étage  $l + 1$ . Cette représentation illustre le principe de l'algorithme de Collatz pour lequel toute trajectoire complète de longueur  $l$  débute par un élément d'un ensemble  $P_l(0)$  et suit un chemin vers le chiffre 1 en suivant, de manière qui semble chaotique, les valeurs des éléments des ensembles  $P_{l-i}(1)$  ou  $P_{l-i}(2)$ . Il existe une infinité de trajectoires de longueur entière  $l \in \mathbb{N}^*$ .

Une représentation graphique en est donnée figure (Fig. 5) où  $T_l$  représente le niveau de départ d'une trajectoire de longueur  $l$ .

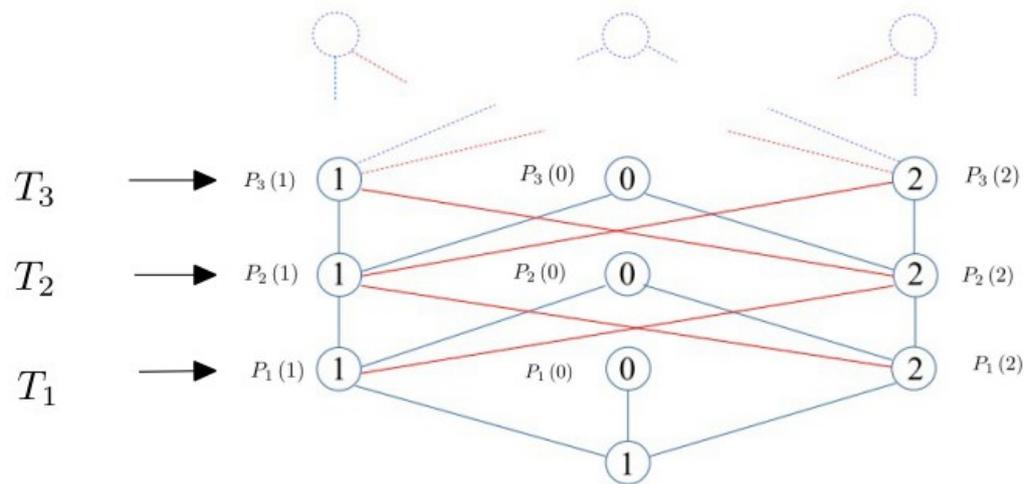


FIG. 5: Tour des congruences

Les deux représentations proposées, l'arbre des congruences et la tour des congruences, constituent deux autres formes de partitions des nombres impairs construites à partir de la partition donnée par la notion de prédécesseur-successeur, ces représentations graphiques indiquent donc qu'il n'y a pas de trajectoires divergentes, ni de cycles autres que le cycle final  $1 - 1$ . Le processus est parfaitement déterministe toutes les trajectoires peuvent être construites à l'aide d'une suite d'itérations à partir de 1.

Il peut être intéressant de tenter de donner une interprétation du comportement de l'algorithme de Collatz, compte-tenu de la difficulté de le justifier dans le sens direct. Une façon élémentaire d'aborder le problème aboutit à une autre écriture de l'algorithme de Collatz ne prenant en compte que les suites de nombres pairs immédiatement supérieurs aux nombres d'une suite de Collatz (i.e. définis par  $n + 1$ ).

## 6 Nouvel algorithme

Pour établir ce nouvel algorithme, il faut d'abord introduire une représentation des nombres naturels qui permette de relier les nombres pairs et impairs. À cette fin notons  $\mathcal{O}$  l'ensemble

des nombres impairs et  $\mathbf{E}$  l'ensemble des nombres pairs. L'ensemble des nombres pairs peut s'exprimer en fonction de l'ordre de multiplicité par 2, ce qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} = \bigcup_{l=1}^{\infty} 2^l \mathbf{O} \quad (47)$$

À cette notation de l'ensemble des nombres pairs correspond de façon immédiate la notation de l'ensemble des nombres impairs sous la forme :

$$\mathbf{O} = \{\mathbf{E} - 1\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \{2^l \mathbf{O} - 1\} \quad (48)$$

Considérons un nombre impair appartenant à l'un des sous ensemble constitutifs de la partition des nombres impairs définie par (eq 48), soit  $2^l p - 1$  où  $p$  est un nombre impair quelconque, l'application de la relation définie par Collatz implique :

$$3(2^l p - 1) + 1 = 3 \cdot 2^l p - 2 = 2(2^{l-1} \cdot 3p - 1) \quad (49)$$

Il en résulte que le successeur de  $2^l p - 1$  est un nombre de la forme  $2^{l-1} \cdot 3p - 1$  et que si l'on itère la procédure la suite de nombres impairs obtenus se terminera en  $2 \cdot 3^{l-1} p - 1$ . En effet si on applique la relation à ce dernier terme on obtient  $2(3^l p - 1)$  terme dans lequel  $3^l p - 1$  est un nombre pair, il faudra diviser suffisamment par 2 pour trouver le terme impair suivant de la trajectoire.

En résumé, quelque soit le nombre impair considéré il ne se produit que deux cas de figure. Soit le nombre appartient à un des sous ensembles  $\{2^l \mathbf{O} - 1\}$ , avec  $l > 1$ , et dans ce cas la suite des nombres obtenus convergera systématiquement vers le sous ensemble  $\{2\mathbf{O} - 1\}$ , soit le nombre initial appartient au sous ensemble  $\{2\mathbf{O} - 1\}$ , et dans ce cas le nombre suivant sera nécessairement dans l'un des sous ensembles précédemment définis. On en déduit le comportement systématique des nombres d'une suite de Collatz qui consiste à balayer de manière chaotique le sous ensemble des nombres impairs de la forme  $2q - 1$  dont les successeurs sont de la forme  $2 \cdot (3q - 1)$ . Ces nombres étant pairs, les divisions par 2 qui s'ensuivent se termineront en 1 si ce sont de pures puissances de 2. Or il a été remarqué que si  $3n + 1$  est une puissance de 2, alors cette puissance de 2 est paire et caractérise les nombres de Mersenne tels que  $2^{2^m} - 1 = 3 \cdot Q_m$ .

En appliquant cette remarque à la suite de Collatz on obtient :

$$3(2q - 1) + 1 = 2(3q - 1) = 2^{2^m} \quad (50)$$

On en déduit que dans ces conditions :  $3q - 1 = 2^{2^m - 1}$ , ce qui est un résultat classique des progressions géométriques de raison -2.

En notant  $P_m$  les nombres impairs tels que  $2^{2^m - 1} = 3P_m - 1$ , on en déduit simplement que :

$$2P_m - 1 = Q_m \quad (51)$$

Ainsi les nombres  $Q_m$  qui permettent d'atteindre une puissance de 2, appartiennent tous au sous ensemble  $\{2\mathbf{O} - 1\}$ , comme le comportement d'une suite de Collatz est de balayer de

manière systématique ce sous ensemble il est cohérent de supposer que la conjecture de Collatz est exacte.

Cette interprétation de l'algorithme amène directement à une autre écriture. Il suffit de considérer la partie paire  $2^l p$  du nombre impair  $2^l p - 1$ , tant que  $l > 1$  il suffit de multiplier cette partie paire par  $3/2$  et de soustraire 1 pour obtenir le nombre impair suivant de la trajectoire. Lorsque  $l = 1$ , la multiplication par  $3/2$  et la soustraction de 1 donne le résultat  $3^l p - 1$ , ce qui est exactement la moitié de ce que l'on obtient avec la relation de Collatz (cf eq. 49). Un exemple de cette méthode de calcul est illustré par (2).

$n_0$	$9 = 2 \cdot 5 - 1$	
	$(3/2) \cdot 2 \cdot 5 = 15$	
$n_1$	$(15 - 1)/2 = 7 = 2^3 - 1$	
	$(3/2) \cdot 2^3 = 12 = 2^2 \cdot 3$	
$n_2$	$12 - 1 = 11$	
	$(3/2) \cdot 2^2 \cdot 3 = 18 = 2 \cdot 3^2$	
$n_3$	$18 - 1 = 17$	
	$(3/2) \cdot 2 \cdot 3^2 = 27$	
$n_4$	$(27 - 1)/2 = 13 = 2 \cdot 7 - 1$	
	$(3/2) \cdot 2 \cdot 7 = 21$	
$n_5$	$(21 - 1)/2^2 = 5 = 2 \cdot 3 - 1$	
	$(3/2) \cdot 2 \cdot 3 = 9$	
$n_6$	$(9 - 1)/2^3 = 1$	

TAB. 2: Calcul de trajectoire avec le nouvel algorithme

Le résultat donne une trajectoire identique à celle obtenue par l'algorithme de Collatz (9, 7, 11, 17, 13, 5, 1) ce que l'on peut vérifier pour n'importe quel exemple comme sur la figure (Fig. 6) qui montre la concordance des trajectoires pour la valeur initiale 27.

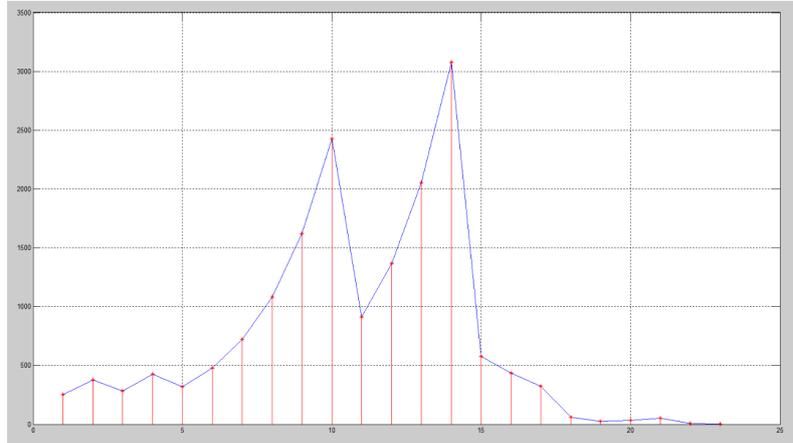


FIG. 6: Trajectoires : Collatz (bleu), Nouveau (rouge)

La figure (Fig. 7) résume l'ensemble des résultats présentés ici. La première colonne donne la suite de Collatz de valeur initiale 27, la deuxième colonne est la même suite en représentation de congruence modulo 3, la troisième colonne utilise la notion de prédécesseurs et la notation à l'aide des nombres de Mersenne, enfin la quatrième colonne utilise la représentation  $\{2^l \mathbf{O} - 1\}$ .

N	Congruence	Mersenne	Impair
27	$3*9+0$	$(2^1)*13+1$	$(2^2)*7-1$
41	$3*13+2$	$(2^2)*10+1$	$(2^1)*3*7-1$
31	$3*10+1$	$(2^1)*15+1$	$(2^5)*1-1$
47	$3*15+2$	$(2^1)*23+1$	$(2^4)*3-1$
71	$3*23+2$	$(2^1)*35+1$	$(2^3)*(3^2)-1$
107	$3*35+2$	$(2^1)*53+1$	$(2^2)*(3^3)-1$
161	$3*53+2$	$(2^2)*40+1$	$(2^1)*(3^4)-1$
121	$3*40+1$	$(2^2)*30+1$	$(2^1)*61-1$
91	$3*30+1$	$(2^1)*45+1$	$(2^2)*23-1$
137	$3*45+2$	$(2^2)*34+1$	$(2^1)*3*23-1$
103	$3*34+1$	$(2^1)*51+1$	$(2^3)*13-1$
155	$3*51+2$	$(2^1)*77+1$	$(2^2)*3*13-1$
233	$3*77+2$	$(2^2)*58+1$	$(2^1)*117-1$
175	$3*58+1$	$(2^1)*87+1$	$(2^4)*11-1$
263	$3*87+2$	$(2^1)*131+1$	$(2^3)*3*11-1$
395	$3*131+2$	$(2^1)*197+1$	$(2^2)*(3^2)*11-1$
593	$3*197+2$	$(2^2)*148+1$	$(2^1)*(3^3)*11-1$
445	$3*148+1$	$(2^3)*55+5$	$(2^1)*223-1$
167	$3*55+2$	$(2^1)*83+1$	$(2^3)*3*7-1$
251	$3*83+2$	$(2^1)*125+1$	$(2^2)*(3^2)*7-1$
377	$3*125+2$	$(2^2)*94+1$	$(2^1)*(3^3)*7-1$
283	$3*94+1$	$(2^1)*141+1$	$(2^2)*71-1$
425	$3*141+2$	$(2^2)*106+1$	$(2^1)*3*71-1$
319	$3*106+1$	$(2^1)*159+1$	$(2^6)*5-1$
479	$3*159+2$	$(2^1)*239+1$	$(2^5)*3*5-1$
719	$3*239+2$	$(2^1)*359+1$	$(2^4)*(3^2)*5-1$
1079	$3*359+2$	$(2^1)*539+1$	$(2^3)*(3^3)*5-1$
1619	$3*539+2$	$(2^1)*809+1$	$(2^2)*(3^4)*5-1$
2429	$3*809+2$	$(2^3)*303+5$	$(2^1)*(3^5)*5-1$
911	$3*303+2$	$(2^1)*455+1$	$(2^4)*3*19-1$
1367	$3*455+2$	$(2^1)*683+1$	$(2^3)*(3^2)*19-1$
2051	$3*683+2$	$(2^1)*1025+1$	$(2^2)*(3^3)*19-1$
3077	$3*1025+2$	$(2^4)*192+5$	$(2^1)*(3^4)*19-1$
577	$3*192+1$	$(2^2)*144+1$	$(2^1)*289-1$
433	$3*144+1$	$(2^2)*108+1$	$(2^1)*217-1$
325	$3*108+1$	$(2^4)*20+5$	$(2^1)*163-1$
61	$3*20+1$	$(2^3)*7+5$	$(2^1)*31-1$
23	$3*7+2$	$(2^1)*11+1$	$(2^3)*3-1$
35	$3*11+2$	$(2^1)*17+1$	$(2^2)*(3^2)-1$
53	$3*17+2$	$(2^5)*1+21$	$(2^1)*(3^3)-1$
5	$3*1+2$	$(2^4)*0+5$	$(2^1)*3-1$
1	$3*0+1$	$(2^2)*0+1$	$(2^1)*1-1$

FIG. 7: Différentes représentations de la même trajectoire.

## 7 Conclusion

Sauf erreur, les propriétés proposées sont nouvelles et pourront peut être permettre de montrer l'exactitude de la conjecture de Collatz. Nous avons pu exprimer l'algorithme sous une forme qui permet de caractériser le sens de variation des trajectoires en fonction de la congruence des nombres impairs modulo 3. De plus, nous avons proposé une méthode d'inversion de trajectoire à l'aide d'une nouvelle représentation des nombres impairs basée sur l'utilisation d'une partie des nombres de Mersenne notés  $2^{2m} - 1$  et qui ont la particularité d'être tous des multiples de 3, propriété rarement utilisée contrairement au caractère de primalité de l'autre partie des nombres de Mersenne notés  $2^{2m+1} - 1$ . La partition du sous ensemble des nombres impairs qui en découle

permet de calculer de manière exhaustive toutes les trajectoires possibles en remontant à partir de 1 et justifie la représentation de la tour des congruences représentée à la figure (Fig. 5).

## A Écriture des nombres impairs

Il est possible de définir une écriture équivalente aux nombres impairs égaux à 0, 1, ou 2 modulo 3 à partir de la relation définie par Collatz.

### A.1 $n_0 = 3q_0$ , où $q_0$ est impair

Dans ce cas la première itération de la suite de Collatz est donnée par :

$$2^\gamma n_1 = 3^2 q_0 + 1 \quad (52)$$

#### A.1.1 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$ , $\gamma = 2m - 1$ et $q_1$ pair

Alors :

$$2^{2m-1} (3q_1 + 1) = 3^2 q_0 + 1 \quad (53)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m-1} q_1 + \frac{2^{2m-1} - 1}{3} \quad (54)$$

L'équation (54) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m-1} - 1$  n'est pas divisible par 3.

#### A.1.2 Cas $n_1 = 3q_1 + 1$ , $\gamma = 2m$ et $q_1$ pair

Alors :

$$2^{2m} (3q_1 + 1) = 3^2 q_0 + 1 \quad (55)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m} q_1 + \frac{2^{2m} - 1}{3} \quad (56)$$

L'équation (56) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m} - 1 = 3Q_m$  est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m} q_1 + Q_m \quad \text{où } q_1 \text{ est pair} \quad (57)$$

**A.1.3 Cas  $n_1 = 3q_1 + 2$ ,  $\gamma = 2m - 1$  et  $q_1$  impair**

Alors :

$$2^{2m-1} (3q_1 + 2) = 3^2 q_0 + 1 \quad (58)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m-1} q_1 + \frac{2^{2m} - 1}{3} \quad (59)$$

L'équation (59) a une solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m} - 1 = 3Q_m$  est divisible par 3. On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m} q_1 + Q_m \quad \text{où } q_1 \text{ est impair} \quad (60)$$

**A.1.4 Cas  $n_1 = 3q_1 + 2$ ,  $\gamma = 2m$  et  $q_1$  impair**

Alors :

$$2^{2m} (3q_1 + 2) = 3^2 q_0 + 1 \quad (61)$$

On en déduit :

$$3q_0 = 2^{2m} q_1 + \frac{2^{2m+1} - 1}{3} \quad (62)$$

L'équation (62) n'a pas de solution entière puisque le nombre de Mersenne  $2^{2m+1} - 1$  n'est pas divisible par 3.

**A.2  $n_k = 3q_k + 1$ ,  $\gamma = 2m$  et  $q_k$  pair**

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m} (3q_k + 1) = 3n_{k-1} + 1 \quad (63)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m} 3q_k + 2^{2m} - 1}{3} \quad (64)$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne :  $M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3Q_m$ , alors (64) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = 2^{2m} q_k + Q_m \quad (65)$$

**A.3**  $n_k = 3q_k + 1$  ,  $\gamma = 2m - 1$  et  $q_k$  pair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m-1} (3q_k + 1) = 3n_{k-1} + 1 \quad (66)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m-1} 3q_k + 2^{2m-1} - 1}{3} \quad (67)$$

Dans la mesure où  $M_{2m-1} = 2^{2m-1} - 1$ , n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

**A.4**  $n_k = 3q_k + 2$  ,  $\gamma = 2m$  et  $q_k$  impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m} (3q_k + 2) = 3n_{k-1} + 1 \quad (68)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m} 3q_k + 2^{2m+1} - 1}{3} \quad (69)$$

Dans la mesure où  $M_{2m+1} = 2^{2m+1} - 1$ , n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de solution.

**A.5**  $n_k = 3q_k + 2$  ,  $\gamma = 2m - 1$   $q_k$  impair

Dans ces conditions à l'aide de (2) et (7) nous avons :

$$2^{2m-1} (3q_k + 2) = 3n_{k-1} + 1 \quad (70)$$

Soit :

$$n_{k-1} = \frac{2^{2m-1} 3q_k + 2^{2m} - 1}{3} \quad (71)$$

En utilisant la propriété des nombres de Mersenne  $M_{2m} = 2^{2m} - 1 = 3Q_{2m}$ , alors (71) peut s'écrire :

$$n_{k-1} = 2^{2m-1} q_k + Q_m \quad (72)$$

En conclusion pour toute valeur  $n_k$  impaire :

- $n_0 = 3q_0$  : alors  $n_0$  est le début d'une trajectoire dont le terme suivant est de la forme  $3q_1 + 1$  ou de la forme  $3q_1 + 2$  selon les équations (57) ou (60).
- $n_k = 3q_k + 1$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (65) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est pair et  $\gamma = 2m$ .
- $n_k = 3q_k + 2$  : alors  $n_{k-1}$  est donné par (72) et  $n_k$  étant impair,  $q_k$  est impair et  $\gamma = 2m - 1$ .